۸۰۰

راهنما و حل مسایل

روشهای ریاضی در فیزیک

(جورج آرفکن)

تألیف

شهریار رخزادپور

رخزادپور، شهریار، ۱۳۵۵ -
راهنما و حل مسایل روشهای ریاضی در فیزیک (جورج آرفکن)/ تالیف شهریار رخزادپور.— همدان: دانشجو، ۱۳۷۹.
۲۳۶ ص.: نمودار.
ISBN 964-6502-98-9
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
۱.ریاضیات. ۲.فیزیک ریاضی. ۳.ریاضیات -- مسائل، تمرینها و غیره. ٤.فیزیک ریاضی -- مسائل، تمرینها و غیره. الف.آرفکن، جورج براون، ۱۹۲۲ - . Arfken, George Brown . روشهای ریاضی در فیزیک. ب.عنوان. ج.عنوان: روشهای ریاضی در فیزیک.

QA۳۷/۲/آ۳۸ر۹۲٤ ۵۱۵/۱
۱۳۷۹

کتابخانه‌ملی‌ایران ۷۹-۹۸۷۶م

نام کتاب : راهنما و حل مسائل روشهای ریاضی در فیزیک
مؤلف : شهریار رخزاد پور
ناشر : انتشارات دانشجو
نوبت چاپ : سوم / زمستان ۱۳۸۰
تایپ و حروفچینی : واحد کامپیوتر انتشارات دانشجو
فیلم و زینگ : لیتوگرافی روشن
چاپ و صحافی : فردوسی
تیراژ : ۱۰۰۰۰ جلد
تعداد صفحه : ۲۳۶ صفحه / وزیری
شابک : ۹-۹۸-۶۵۰۲-۹۶۴

به نام خدا

مقدمه

کتاب حاضر حل مسائل جلد اول کتاب روشهای ریاضی در فیزیک تألیف جورج آرفکن می‌باشد. حل مسائل با توجه به ویرایش جدید (ویرایش سوم) این کتاب که مربوط به سال ۱۹۸۵ می‌باشد تنظیم گردیده است (ترجمه این ویرایش توسط نشر دانشگاهی به چاپ رسیده است). در حل مسائل از جزوات مربوط به کلاسهای حل تمرین بعضی از اساتید دانشگاه بوعلی‌سینا و البته دانشگاههای دیگر استفاده شده است.

طبق سرفصلهای وزارت علوم - تحقیقات و فناوری، ۴ فصل اول کتاب مربوط به درس ریاضی فیزیک ۱ و فصول ۶ و ۷ مربوط به درس ریاضی فیزیک ۲ و البته بخشی از درس ریاضیات مهندسی (از دروس رشته‌های فنی) می‌باشد معمولاً مطالب فصل ۵ بدلیل اینکه در درس ریاضی عمومی بدان اشاره می‌شود عنوان نمی‌گردد ولی با این حال به حل مسائلی از این فصل اقدام گردیده است.

در پایان از کلیه اساتید و دوستان بخصوص جناب آقای ملک محمدی مدیریت انتشارات دانشجو که در چاپ این کتاب تلاش نمودند تشکر می‌نمایم.

شهریاررخزادپور

فروردین ماه یکهزار و سیصد و هفتاد و نه شمسی

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

فصل اول ـ تحلیل برداری

فصل دوم ـ دستگاههای مختصات

عنوان صفحه

فصل سوم ـ تحلیل تانسوری

فصل چهارم ـ دترمینانها، ماتریسها و نظریهٔ گروه

فصل پنجم ـ سریهای نامتناهی

عنوان صفحه

فصل ششم - تابعهای متغیر مختلط I

فصل هفتم - توابع متغیر مختلط II

بخش ۱ـ۱ـ تعریفها ـ رهیافت بنیادی　　مسائل صفحه ۱۱

۱ـ۱ـ۱ـ چگونه می‌توان با داشتن $\vec{A}+\vec{B}$ و $\vec{A}-\vec{B}$ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را یافت؟

حل هر دو بردار A+B و A-B را بصورت مؤلفه‌ای داریم.

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}+(A_z+B_z)\hat{k}$$

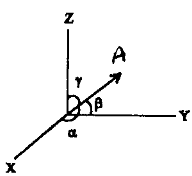
$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}-(A_z-B_z)\hat{k}$$

یکبار با هم جمع تا $\vec{A}$ حاصل شود و یکبار از هم کم می‌کنیم تا $\vec{B}$ بدست آید داریم.

$$\vec{A}=\frac{۱}{۲}[(\vec{A}+\vec{B})+(\vec{A}-\vec{B})]$$

$$\vec{B}=\frac{۱}{۲}[(\vec{A}+\vec{B})-(\vec{A}-\vec{B})]$$

۱ـ۱ـ۲ـ بردار A به بزرگی ۱۰ با محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد A_x، A_y، A_z را بیابید.



حل می‌دانیم رابطه کسینوسها هادی بصورت زیر است.

$$\mathrm{Cos}^۲\alpha+\mathrm{Cos}^۲\beta+\mathrm{Cos}^۲\gamma=۱$$

چون زوایا مساویند پس $\mathrm{Cos}\alpha=\mathrm{Cos}\beta=\mathrm{Cos}\gamma$ و داریم

$$۳\mathrm{Cos}^۲\alpha=۱ \Rightarrow \mathrm{Cos}\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \alpha=\mathrm{Cos}^{-۱}\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\beta=\gamma$$

$$A_x=A_y=A_z=A\ \mathrm{Cos}\alpha$$

۱ـ۱ـ۳ـ مولفه‌های برداریکه‌ای واقع در صفحه xy را محاسبه کنید که با جهتهای مثبت محورهای x و y زاویه مساوی می‌سازد.

حل اگر $\hat{e}$ برداریکه در صفحه xy باشد پس دو مولفه e_x و e_y دارد.

$$|e|=۱\ ,\ e_y=e\mathrm{Cos}\beta\ \ ,\ \ e_x=e\mathrm{Cos}\alpha$$

چون زاویه‌ها مساویند پس $\mathrm{Cos}\alpha=\mathrm{Cos}\beta$

$$\mathrm{Cos}^۲\alpha+\mathrm{Cos}^۲\beta=۱$$

$$\Rightarrow ۲\mathrm{Cos}^۲\alpha=۱ \Rightarrow \mathrm{Cos}\,\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

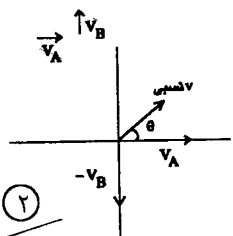
$$e_x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=e_y$$

۱-۱-۴- سرعت قایق بادبانی A نسبت به قایق بادبانی B، $V_{\text{نسبی}}$، از معادلهٔ $V_{\text{نسبی}}=V_A-V_B$ بدست می‌آید که در آن V_A سرعت A و V_B سرعت B است اگر بطرف شرق $V_A=۳۰\,Km/hr$ و بطرف شمال $V_B=۴۰\,Km/hr$ سرعت A نسبت به B را تعیین کنید.

حل مسئله بدین نحو است که

$$V_{\text{نسبی}}=V_A+(-V_B)$$

از راه مولفه‌ای حل می‌کنیم. فرض شود که $V_{\text{نسبی}}$ در جهتی قرار دارد که با جهت مثبت محور xها (محور شرق - غرب) زاویه θ بسازد.



$$X:\ V_A+V\ Cos\theta=۰ \quad (۱)$$

$$Y:V\ Sin\theta-(-V_B)=۰ \quad (۲)$$

$$\text{از } \frac{(۲)}{(۱)} \Rightarrow \tan\theta=\frac{-V_B}{V_A} \Rightarrow \theta=-۵۳/۱۳$$

یعنی $V_{\text{نسبی}}$ باید در جهت جنوب شرقی و با زاویه $۵۳/۱۳^\circ$ نسبت به محور xها قرار گیرد.

$$V_{\text{نسبی}}=\frac{V_A}{Cos\theta}=۵۰\ Km/hr$$

۱-۱-۵- یک قایق بادبانی به مدت یک ساعت با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت (نسبت به آب) حرکت می‌کند به صورتی که عقربهٔ قطب نما تحت زاویهٔ ۴۰° نسبت به شمال شرقی ثابت می‌ماند جریان آب نیز این قایق را به جلو می‌راند. قایق پس از یک ساعت در فاصلهٔ ۶/۱۲ کیلومتری نقطه شروع حرکتش قرار می‌گیرد خطی که نقطه شروع را به مکان کنونی آن وصل می‌کند در راستای ۶۰° شمال شرقی قرار دارد. مولفه‌های x (شرقی) و y (شمالی) سرعت آب را بدست آورید.

حل به طور مشابه حل می‌گردد.

۱-۱-۶- هر معادله برداری را می‌توان به صورت $\vec{A}=\vec{B}$ خلاصه کرد به کمک این رابطه نشان دهید که یک معادلهٔ برداری هم ارز با سه معادلهٔ اسکالر است. اگر قانون دوم نیوتن به صورت یک معادلهٔ برداری صادق باشد نتیجه می‌گیریم که a_x فقط به F_x بستگی دارد و از F_y و F_z مستقل است.

حل اگر دو بردار با هم برابر باشند باید تک تک مولفه‌های متناظر آنها نیز با هم برابر باشند

یعنی اگر $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ و $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ و $\vec{A}=\vec{B}$ داریم.

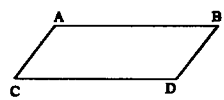
$A_x=B_x$ و $A_y=B_y$ و $A_z=B_z$

در مورد رابطه $\vec{F}=m\vec{a}$ که $\vec{F}$ و $\vec{a}$ بردارند و m یک اسکالر تک تک مولفه‌های برداری متناظر باهم برابرند و m نیز در همگی مشترک است.

$F_x=ma_x$ و $F_y=ma_y$ و $F_z=ma_z$

و البته a_x مستقل از F_y و F_z است و برای بقیه مولفه‌های a نیز به همین نحو.

۱ـ۱ـ۷ـ رئوس A، B و C یک مثلث به ترتیب با نقاط (۱,۰,۲−)، (۰,۱,۰) و (۱,−۱,۰) مشخص می‌شوند نقطه D را چنان بیابید که شکل ABDC یک متوازی‌الاضلاع مسطح باشد.



حل شرط در متوازی‌الاضلاع بصورت (۱) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ و نیز (۲) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$

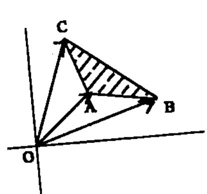
از (۱) $\Rightarrow (x_C-x_A\ ,\ y_C-y_A\ ,\ z_C-z_A)=(x_D-x_B\ ,\ y_D-y_B\ ,z_D-z_B)$

$\Rightarrow (۲,-۱,-۲) = (x_D-۰\ ,\ y_D-۱\ ,\ z_D-۰)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D=۲ \\ y_D-۱=-۱ \\ z_D=-۲ \end{cases} \Rightarrow y_D=۰ \Rightarrow D(۲,۰,-۲)$$

۱ـ۱ـ۸ـ مثلثی به کمک رئوس سه بردار A، B و C که از مبدأ رسم شده‌اند توصیف می‌شود برحسب A، B و C نشان دهید که جمع برداری اضلاع مثلث (AB+BC+CD) صفر است.

حل اگر قاعده جمع مثلث را بکار ببریم



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

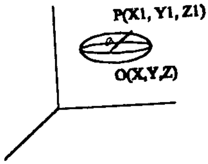
$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}$

۳ رابطه فوق را با هم جمع می‌کنیم داریم $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=۰$

۱ـ۱ـ۹ـ مرکز کره‌ای به شعاع a در نقطه $r_۱$ واقع است الف - معادله جبری این کره را بنویسید.

ب - معادله برداری این کره را بنویسید.



حل الف - $O(x,y,z)$ و $P(x_{۱},y_{۱},z_{۱})$

$$OP=a=\sqrt{(x-x_{۱})^{۲}+(y-y_{۱})^{۲}+(z-z_{۱})^{۲}}$$

$$\Rightarrow \quad (x-x_{۱})^{۲}+(y-y_{۱})^{۲}+(z-z_{۱})^{۲}=a^{۲}$$

ب -

$$x^{۲}+x_{۱}^{۲}-۲xx_{۱}+y^{۲}+y_{۱}^{۲}-۲yy_{۱}+z_{۱}^{۲}+z^{۲}-۲zz_{۱}=a^{۲}$$

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+x_{۱}^{۲}+y_{۱}^{۲}+z_{۱}^{۲}-۲xx_{۱}-۲yy_{۱}-۲zz_{۱}=a^{۲}$$

$$r^{۲} \quad + \quad r_{۱}^{۲} \quad - \quad ۲rr_{۱}=a^{۲}$$

$$(r-r_{۱})^{۲}=a^{۲} \;\Rightarrow\; \vec{r}-\vec{r}_{۱}=\vec{a} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{r}=\vec{r}_{۱}+\vec{a}}$$

۱-۱-۱۰- یک بازتابگر سه کنج از سه سطح بازتابگر عمود بر هم تشکیل شده است نشان دهید پرتو نوری که به این بازتابگر سه کنج فرود می‌آید (و به هر سه سطح بر می‌خورد) در راستای خطی موازی با خط فرود به عقب باز می‌تابد.

[راهنمایی: ابتدا اثر یک بازتابش را روی مولفه‌های برداری که جهت پرتو نور را توصیف می‌کند در نظر بگیرید.]

حل

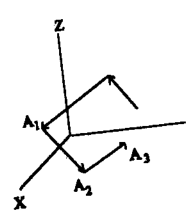
$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$

برخورد بر روی صفحه yz: $\vec{A}_{۱}=-A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

برخورد بر روی صفحه xz: $\vec{A}_{۲}=-A_x\hat{i}-A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$

برخورد بر روی صفحه xy: $\vec{A}_{۳}=-A_x\hat{i}-A_y\hat{j}-A_z\hat{k}$

$$=-(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})=-\vec{A}$$



۱-۱-۱۱- قانون هابل. هابل پی برد که کهکشانی دور با سرعتی متناسب با فاصلهٔ آنها از مکان مادر زمین دور می‌شوند برای کهکشان iام داریم $V_i=H_{\circ}r_i$ که مکان خودمان را در زمین مبدأ مختصات گرفته‌ایم. نشان دهید که این دور شدن کهکشانها از مادر حکم این نیست که مادر مرکز

عالم هستیم. در حالت خاص، کهکشان واقع در r_1 را به عنوان مبدأ جدید در نظر بگیرید و نشان دهید که قانون هابل کماکان برقرار است.

حل $\vec{r}$: فاصله از ما و $\vec{V}$: سرعت دور شدن کهکشان $\vec{V}=H_0\vec{r}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}_1=H_0.\vec{r}_1\\ \vec{V}_i=H_0.\vec{r}_i\end{array}\right\}\Rightarrow\ V_{i1}=V_i-V_1=H_0.r_i-H_0.r_1=H_0(r_i-r_1)$$

سرعت نسبی کهکشان i نسبت به (۱)

$$\boxed{\vec{V}_{i1}=H_0.\vec{r}_{i1}}$$

مسائل صفحه ۱۹

بخش ۱ـ۲ـ تعریفهای جامع

۱ـ۲ـ۱ـ الف - نشان دهید بزرگی یک بردار A، $A=(A_x^2+A_y^2)^{\frac{1}{2}}$ از سمتگیری دستگاه مختصات چرخیده مستقل است یعنی

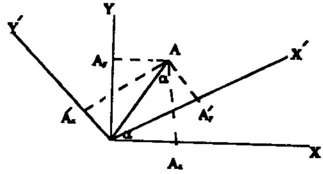
$$(A_x^2+A_y^2)^{\frac{1}{2}}=(A_x'^2+A_y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

از ϕ، زاویه چرخش، مستقل است. این استقلال از زاویه با بیان اینکه A تحت چرخشها ناوردا است مشخص می‌شود.

ب - A در نقطه مفروض (x,y) با محور x مثبت زاویه α و با محور x' مثبت زاویه α' می‌سازد. زاویه بین x و x' برابر ϕ است نشان دهید $A=A'$ هرگاه برحسب مولفه‌های پریم‌دار مشخص شود همان جهتی در فضا می‌نمایاند که وقتی برحسب مولفه‌های بدون پریم مشخص می‌شود یعنی

$$\alpha'=\alpha-\phi$$

حل



(الف)

$$A_x'^2+A_y'^2=(A_x\cos\phi+A_y\sin\phi)^2+(-A_x\sin\phi+A_y\cos\phi)^2$$

$$=A_x^2\cos^2\phi+A_y^2\sin^2\phi+2A_xA_y\sin\phi\cos\phi$$

$$+A_x^2\sin^2\phi+A_y^2\cos^2\phi-2A_xA_y\sin\phi\cos\phi=A_x^2+A_y^2$$

(ب)

در دستگاه xy : $\tan\alpha=\dfrac{A_y}{A_x}$ و در دستگاه $x'y'$: $\tan\alpha'=\dfrac{A'_y}{A'_x}$ (۱)

$$(1) = \frac{-A_x \sin\phi + A_y \cos\phi}{A_x \cos\phi + A_y \sin\phi} = \frac{A_x\left(-\sin\phi + \frac{A_y}{A_x}\cos\phi\right)}{A_x\left(\cos\phi + \frac{A_y}{A_x}\sin\phi\right)}$$

صورت و مخرج را بر $\cos\phi$ تقسیم می‌کنیم.

$$= \frac{-\sin\phi + \tan\alpha \cos\phi}{\cos\phi + \tan\alpha \sin\phi}$$

$$= \frac{-\tan\phi + \tan\alpha}{1 + \tan\alpha \tan\phi} = \tan(\alpha - \phi) \quad \Rightarrow$$

$$\tan\alpha' = \tan(\alpha - \phi) \quad \Rightarrow \boxed{\alpha' = \alpha - \phi}$$

۱-۲-۲- شرط تعامد $\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}$ را اثبات کنید بعنوان مثال خاصی از این رابطه کسینوسهای هادی بخش ۱-۱ در رابطه زیر صدق می‌کنند $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ این همان نتیجه‌ای است که از معادله ۱-۷ الف نیز بدست می‌آید.

حل

$$\sum_i \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_k} = \delta_{jk}$$

بخش ۱-۳- ضرب اسکالر یا نقطه‌ای — مسائل صفحه ۲۵

۱-۳-۱- کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{A} = 3i + 4j + k$ و $\vec{B} = i - j + k$ چقدر است؟

حل

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B| \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} \quad \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{3 - 4 + 1}{\sqrt{26}\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

۱-۳-۲- دو بردار e_i، e_j با بزرگی واحد یا بر هم عمود و یا با هم موازیند نشان دهید که $e_i.e_j$ معادلهٔ ۱-۱۸ یعنی رابطه تعامد برحسب کسینوسهای تعامد را تفسیر می‌کند.

حل معادله ۱-۱۸

$$\sum_i a_{ij} a_{jk} = \delta_{jk}$$

و حالت موازی: $\vec{e}_i.\vec{e}_j = |e_i||e_j| \cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

و حالت عمود: $\vec{e}_i.\vec{e}_j = |e_i||e_j| \cos 90 = 0$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

۱-۳-۳- با فرض اینکه (الف) حاصلضرب نقطه‌ای یک بردارکه در خودش واحد است و (ب)

رابطه در تمام دستگاههای مختصات (چرخیده) صادق است نشان دهید $i'.i'=1$ (که در آن دستگاه پریم‌دار، نسبت به دستگاه بدون پریم 45° حول محور Z چرخیده است) حاکی از آن است که $i.j=0$

حل

$$\begin{cases} x'=x\,\text{Cos}\phi+y\,\text{Sin}\phi \\ y'=-x\,\text{Sin}\phi+y\,\text{Cos}\phi \qquad \phi=45 \\ z'=z \end{cases}$$

$$i'.i'=1 \Rightarrow (i\,\text{Cos}\,45+j\,\text{Sin}45).(i\,\text{Cos}45+j\,\text{Sin}45)=\text{Cos}^2 45+\text{Sin}^2 45$$

$$\Rightarrow \text{Cos}^2 45+2i.j\,\text{Cos}45\,\text{Sin}45+\text{Sin}^2 45=\text{Cos}^2 45+\text{Sin}^2 45$$

$$\Rightarrow 2i.j\,\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \boxed{i.j=0}$$

۱-۳-۴- بردار $\vec{r}$ که از مبدأ شروع می‌شود به نقطه (x,y,z) در فضا ختم می‌شود و آن نقطه را مشخص می‌کند سطحی را بیابید که انتهای r را جاروب می‌کند. اگر:

(الف) $(\vec{r}-\vec{a}).\vec{a}=0$ (ب) $(\vec{r}-\vec{a}).\vec{r}=0$

بزرگی و جهت بردار $\vec{a}$ ثابت است.

حل

$$\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z \quad , \quad \vec{a}=\hat{i}a_x+\hat{j}a_y+\hat{k}a_z$$

(الف)

$$(\vec{r}-\vec{a}).\vec{a}=0 \Rightarrow \vec{r}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{a}=0 \Rightarrow$$

$$(xa_x+ya_y+za_z)-(a_x^2+a_y^2+a_z^2)=0$$

$$\Rightarrow a_x x+a_y y+a_z Z=D$$ معادله یک صفحه بدست می‌آید.

(ب)

$$(\vec{r}-\vec{a}).\vec{r}=0 \Rightarrow \vec{r}.\vec{r}-\vec{a}.\vec{r}=0 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+Z^2-(a_x x+a_y y+a_z Z)=0 \Rightarrow$$

$$\left(x-\frac{a_x}{2}\right)^2-\frac{a_x^2}{4}+\left(y-\frac{a_y}{2}\right)^2-\frac{a_y^2}{4}+\left(Z-\frac{a_z}{2}\right)^2-\frac{a_z^2}{4}=0$$

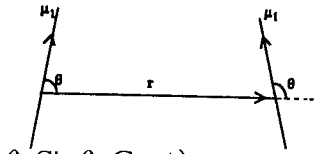
$$\left(x-\frac{a_x}{4}\right)^2+\left(y-\frac{a_y}{2}\right)^2+\left(Z-\frac{a_z}{2}\right)^1=\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{4}=\frac{a^2}{4}$$

معادله یک کره به شعاع $\frac{a}{2}$ و به مرکز $\left(\frac{a_x}{2},\frac{a_y}{2},\frac{a_z}{2}\right)$

۱-۳-۵- انرژی بر هم کنش بین محور دو قطبی با گشتاورهای μ_1 و μ_2 را می توان بصورت

برداری

$$V=-\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}+\frac{3(\mu_1.r)(\mu_2.r)}{r^5}$$



و بصورت اسکالری:

$$V=\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}(2\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi)$$

نوشت در اینجا θ_1 و θ_2 زاویه‌هایی‌اند که μ_1 و μ_2 با r می‌سازند و ϕ زاویهٔ سمتی μ_2 نسبت به صفحه μ_1-r است نشان دهید که این دو صورت معادل‌اند.

[راهنمای: از معادلهٔ ۱۲-۱۹۸ (جلد دوم) بهره گیرید.]

حل رابطه ۱۲-۱۹۸ $\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)$

$$V=-\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}+\frac{3(\mu_1.r)(\mu_2.r)}{r^5}=\frac{-\mu_1\mu_2\cos\gamma}{r^3}+\frac{3(\mu_1 r\cos\theta_1)(\mu_2 r\cos\theta_2)}{r^5}$$

$$V=\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}(-\cos\gamma+3\cos\theta_1\cos\theta_2)$$

با استفاده از رابطه ۱۲-۱۹۸ و $\phi_1-\phi_2=\phi$

$$V=\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}(-\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi+3\cos\theta_1\cos\theta_2)$$

$$V=\frac{\mu_1\mu_2}{r^3}(2\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi)$$

۱-۳-۶- لوله‌ای بصورت قطری از کنار دیوار جنوبی ساختمانی پائین می‌آید و با افق زاویهٔ 45° می‌سازد هنگامیکه به کنج دیوار می‌رسد خم می‌شود و باز بصورت قطری از کنار یک دیوار رو به غرب به پائین می‌آید کماکان زاویهٔ 45° با افق می‌سازد زاویه بین قسمتی از لوله که کنار دیوار جنوبی است با قسمتی از آنکه کنار دیوار غربی واقع شده چقدر است؟

حل

بخش ۱-۴-ضرب برداری — مسائل صفحه ۳۲

۱-۴-۱- دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بصورت زیر مفروضند.

$\vec{A}=2i+4j+6k$ و $\vec{B}=3i-3j-5k$ حاصلضربهای اسکالر و برداری $\vec{A}.\vec{B}$ و $\vec{A}\times\vec{B}$ را محاسبه کنید.

حل $\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=6-12-30=-36$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۳ & -۳ & -۵ \end{vmatrix}\ \hat{i}(-۲۰+۱۸)+\hat{j}(۱۸+۱۰)+\hat{k}(-۶-۱۲)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-۲\hat{i}+۲۸\hat{j}-۱۸\hat{k}$$

۱-۲-۲- با بسط دادن $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ در $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ برحسب مولفه‌های دکارتی، هم ارزی معادلهٔ ۱-۳۲ و تعریف مولفه‌ای در معادلهٔ ۱-۳۳ را نشان دهید.

حل

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{C}.\vec{C}=(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B}) \Rightarrow$$

$$C^۲=(A_yB_z-A_zB_y)^۲+(A_zB_x-A_xB_z)^۲+(A_xB_y-A_yB_x)^۲$$

$$C^۲=(A_x^۲+A_y^۲+A_z^۲)(B_x^۲+B_y^۲+B_z^۲)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^۲$$

$$C^۲=A^۲B^۲-(\vec{A}.\vec{B})^۲=A^۲B^۲-(A^۲B^۲\cos^۲\theta) \Rightarrow \boxed{C=|A|B|\sin\theta}$$

۱-۲-۳- با استفاده از بردار $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ نشان دهید که عبارت $\vec{C}\times\vec{C}$ به رابطه پاد تعویض پذیری زیر منجر می‌شود.

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

حل

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B} \Rightarrow \vec{C}\times\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\Rightarrow |C|C|\sin ۰=(\vec{A}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}+\vec{B}\times\vec{B})$$

$$\Rightarrow ۰=(|A|A|)\sin ۰+\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}+|B|B|\sin ۰)$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}=۰ \Rightarrow \boxed{\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}}$$

۱-۲-۴- نشان دهید (الف) $(\vec{A}-\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=A^۲-B^۲$

(ب) $(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=۲\vec{A}\times\vec{B}$

درستی قوانین توزیع پذیری مورد نیاز یعنی $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$ و $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ را می‌توانید (اگر بخواهید) از طریق بسط دادن برحسب مولفه‌های دکارتی به آسانی تحقیق کنید.

حل

الف

$$(\vec{A}-\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})=(\vec{A}-B).\vec{A}+(\vec{A}-\vec{B}).\vec{B}$$

$$=(\vec{A}.\vec{A}-\vec{B}.\vec{A})+(\vec{A}.\vec{B}-\vec{B}.\vec{B})=A^۲-\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{B}-B^۲=A^۲-B^۲$$

(ب)

$$(\vec{A}-\vec{B})\times(\vec{A}+\vec{B})=(\vec{A}-\vec{B})\times\vec{A}+(\vec{A}-\vec{B})\times\vec{B}$$

$$=\vec{A}\times\vec{A}-\vec{B}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}-\vec{B}\times\vec{B}$$
$$=\circ-\vec{B}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}-\circ=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{B}=۲\vec{A}\times\vec{B}$$

۱-۴-۵- سه بردار زیر مفروض است.

$$\vec{P}=۳\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k} \quad و \quad \vec{Q}=-۶\hat{i}-۴\hat{j}+۲\hat{k} \quad و \quad \vec{R}=\hat{i}-۲\hat{j}-\hat{k}$$

از بین این سه بردار، دو بردار بر هم عمود و دو بردار موازی یا پاد موازی را بیابید.

حل

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}.\vec{R}=۳-۴+۱=\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{P}\perp\vec{R} \\ \vec{Q}.\vec{R}=-۶+۸-۲=\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{Q}\perp\vec{R}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{P}\parallel\vec{Q}$$

۱-۴-۶- دو بردار $\vec{P}=\hat{i}P_x+\hat{j}P_y$ و $\vec{Q}=\hat{i}Q_x+\hat{j}Q_y$ دو بردار غیرموازی (و غیر پاد موازی) در صفحه xyاند نشان دهید $\vec{P}\times\vec{Q}$ در جهت z است.

حل

$$\vec{P}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & \circ \\ Q_x & Q_y & \circ \end{vmatrix}=\hat{i}(\circ-\circ)+\hat{j}(\circ-\circ)+\hat{k}(P_xQ_y-P_yQ_x)$$

فقط در جهت z مولفه داریم

$$\vec{P}\times\vec{Q}=\hat{k}(P_xQ_y-P_yQ_x)$$

۱-۴-۷- ثابت کنید $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=(AB)^۲-(\vec{A}.\vec{B})^۲$

حل در حل مسئله ۱-۴-۲- اثبات شده است.

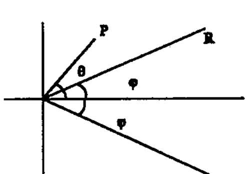
۱-۴-۸- با بهره‌گیری از بردارهای

$$\vec{P}=i\,Cos\theta+j\,Sin\theta \quad و \quad \vec{Q}=i\,Cos\phi-j\,Sin\phi \quad و \quad \vec{R}=i\,Cos\phi+j\,Sin\phi$$

اتحادهای مثلثاتی آشنای زیر را اثبات کنید.

$$Sin(\theta+\phi)=Sin\theta\,Cos\phi+Cos\theta\,Sin\phi \;,\; Cos(\theta+\phi)=Cos\theta\,Cos\phi-Sin\theta\,Sin\phi$$

حل



$$|\vec{P}|=|\vec{Q}|=|\vec{R}|=۱$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}.\vec{Q}=|P||Q|\,Cos(\theta+\phi)=Cos(\theta+\phi) \\ \vec{P}.\vec{Q}=Cos\theta\,Cos\phi-Sin\theta\,Sin\phi\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$Cos(\theta+\phi)=Cos\theta\,Cos\phi-Sin\theta\,Sin\phi$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right| = |P|\ |Q|\ \mathrm{Sin}(\theta+\phi) = \mathrm{Sin}(\theta+\phi) \\ \left|\vec{P}\times\vec{Q}\right| = +\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Sin}(\theta+\phi)=\mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\phi\ +\ \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Sin}\phi$$

۱ـ۴ـ۹ـ (الف) بردار $\vec{A}$ را چنان بیابید که بر دو بردار زیر عمود باشند.

$$\vec{U}=۲i+j-k \qquad , \qquad \vec{V}=i-j+k$$

(ب) $\vec{A}$ چگونه برداری باشد تا افزون بر برخورداری از شرایط بالا، بزرگی واحد نیز داشته باشد.

حل اگر برداری بر دو بردار عمود باشد بصورت ضرب خارجی دو بردار بدست می‌آید. (الف)

$$\vec{A}=\vec{U}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۳j-۳k$$

(ب)

$$\hat{A}=\frac{\vec{A}}{|A|}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}j-\frac{۱}{\sqrt{۲}}k$$

۱ـ۴ـ۱۰ـ اگر چار بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ جملگی در یک صفحه واقع باشند نشان دهید.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=۰$$

[راهنمایی: جهت بردارهای حاصلضرب برداری را در نظر بگیرید.]

حل بردار R برداری عمود بر صفحه a و b است. $\qquad \vec{R}=\vec{a}\times\vec{b}$

بردار Q برداری عمود بر صفحه c و d است. $\qquad \vec{Q}=\vec{c}\times\vec{d}$

از طرفی چون چهار بردار فوق در یک صفحه‌اند دو بردار عمود بر یک صفحه یعنی $\vec{R}$ و $\vec{Q}$ موازیند و از طرفی ضرب خارجی دو بردار موازی صفراست یعنی

$$\vec{R}\times\vec{Q}=۰ \ \Rightarrow\ (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=۰$$

۱ـ۴ـ۱۱ـ مختصات سه رأس یک مثلث عبارت‌اند از: (۲,۱,۵)، (۵,۲,۸) و (۴,۸,۲) مساحت این مثلث را با استفاده از روشهای برداری محاسبه کنید.

حل $\quad C(۴,۸,۲) \quad$ و $\quad B(۵,۲,۸) \quad$ و $\quad A(۲,۱,۵)$

$$\overrightarrow{AB}=۳i+j+۳k \qquad , \qquad \overrightarrow{BC}=-i+۶j-۶k$$

$$S=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۶ & -۶ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(-۲۴i+۱۵j+۱۹k)$$

$$|S| = \sqrt{\frac{۱}{۴}(۱۱۶۲)}\simeq ۱۷$$

۱-۴-۱۲- رأسهای متوازی الاضلاع ABCD به ترتیب عبارتند از (۱,۰,۰)، (۲,-۱,۰)، (۰,-۱,۱) و (۱,۰,۱-) بردار مساحت مثلث ABD و مثلث BCD را محاسبه کنید. آیا این دو بردار با هم برابرند.

حل

$\overrightarrow{AB}$ (۱,-۱,۰)

$\overrightarrow{BC}$ (-۲,۰,۱)

$\overrightarrow{CD}$ (-۱,۱,۰) $\qquad$ $\overrightarrow{AD}$ (-۲,۰,+۱)

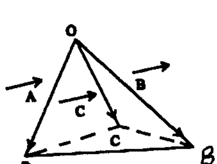
$$\vec{S}_{ABD}=\frac{۱}{۲}(AB\times AD)=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(-i-j-۲k)$$

$$S_{BCD}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CD})=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(-i-j-۲k)$$

$$\vec{S}_{ABD}=\vec{S}_{BCD}$$

۱-۴-۱۳- مبدأ و سه بردار A، B و C (که نقطه آغاز جملگی آنها مبدأ مختصات است) یک چهار وجهی را تعریف می‌کنند با مثبت گرفتن جهت برونسو مساحت برداری کل چهار وجه این چهار وجهی را محاسبه کنید.

حل $S_{OAC}=\frac{۱}{۲}(OA\times OC)=\frac{۱}{۲}(\vec{A}\times\vec{C})$



$$S_{OBC}=\frac{۱}{۲}(OC\times OB)=\frac{۱}{۲}(C\times B)$$

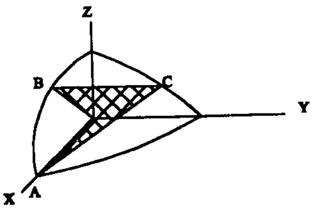
$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}(OB\times OA)=\frac{۱}{۲}(B\times A)$$

$$S_{BCA}=\frac{۱}{۲}\left[(B\times C)+(A\times B)+(C\times A)\right]$$

۱-۴-۱۴- اضلاع و زوایای مثلث کروی ABC را که به کمک ۳ بردار زیر تعریف می‌شود بیابید

$\vec{C}=(۰,\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{\sqrt{۲}})$ و $\vec{B}=(\frac{۱}{\sqrt{۲}},۰,\frac{۱}{\sqrt{۲}})$ و $\vec{A}=(۱,۰,۰)$

هر یک از این بردارها از مبدأ شروع می‌شود.



شکل ۱-۱۳ مثلث کروی

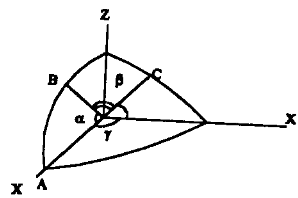
حل

$$|A| = 1, |B| = 1, |C| = 1$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B| \operatorname{Cos}\alpha \Rightarrow$$

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 45^\circ$$



$$\vec{B}.\vec{C} = |B||C| \operatorname{Cos}\beta \Rightarrow \operatorname{Cos}\beta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ$$

$$\vec{A}.\vec{C} = |A||C| \operatorname{Cos}\gamma \Rightarrow \operatorname{Cos}\gamma = \frac{0}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 90^\circ$$

$$\vec{N}_1 = \vec{A} \times \vec{B} \quad , \quad \vec{N}_2 = \vec{A} \times \vec{C} \quad , \quad \vec{N}_3 = \vec{B} \times \vec{C}$$

۱ـ۴ـ۱۵ـ قانون سینوسها را استخراج کنید.

$$\frac{\operatorname{Sin}\alpha}{|A|} = \frac{\operatorname{Sin}\beta}{|B|} = \frac{\operatorname{Sin}\gamma}{|C|}$$

حل

راه اول

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{C}) = \frac{1}{2}(\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{C} = \vec{C} \times \vec{A} \Rightarrow AB \operatorname{Sin}\gamma = BC \operatorname{Sin}\alpha = CA \operatorname{Sin}\beta$$

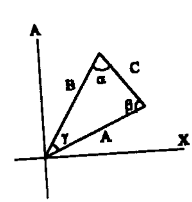
$$\Rightarrow \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{|A|} = \frac{\operatorname{Sin}\beta}{|B|} = \frac{\operatorname{Sin}\gamma}{|C|}.$$

راه دوم

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C} \qquad (1)$$

رابطه (۱) را یکبار در $\vec{B}$ و یکبار در $\vec{C}$ از راست ضرب خارجی می‌کنیم.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{B} + \vec{C} \times \vec{B} \Rightarrow AB \operatorname{Sin}\gamma = CB \operatorname{Sin}\alpha$$



$$\Rightarrow \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{|A|} = \frac{\operatorname{Sin}\gamma}{|C|} \qquad (3)$$

$$\vec{A} \times \vec{C} = \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{C} \Rightarrow AC \operatorname{Sin}\beta = BC \operatorname{Sin}\alpha + 0$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{Sin}\beta}{|B|} = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{|A|} \qquad (2)$$

$$(۲)=(۳) \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{|A|}=\frac{\sin\beta}{|B|}=\frac{\sin\gamma}{|C|}$$

۱-۴-۱۶- القای مغناطیسی B به کمک معادله نیروی لورنتس تعریف می‌شود $\vec{F}=q(\vec{V}\times\vec{B})$ با انجام سه آزمایش پی می‌بریم که:

$\frac{F}{q}=۲k-۴j$ آنگاه اگر $V=i$

$\frac{F}{q}=۴i-k$ آنگاه اگر $V=j$

$\frac{F}{q}=j-۲i$ آنگاه اگر $V=k$

با استفاده از نتایج این سه آزمایش مجزا، القای مغناطیسی B را محاسبه کنید.

حل

$$۲k-۴j=i\times(iB_x+jB_y+kB_z)=\hat{k}B_y-\hat{j}B_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_y=+۲ \\ B_z=+۴ \end{cases}$$

$$۴i-k=j\times(iB_x+jB_y+kB_z)=-kB_x+iB_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_z=۴ \\ B_x=۱ \end{cases}$$

$$j-۲i=k\times(iB_x+jB_y+kB_z)=jB_x-iB_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_z=۲ \\ B_x=۱ \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{B}=i+۲j+۴k}$$

بخش ۱-۵- ضرب سه‌گانه اسکالر - ضرب سه‌گانه برداری مسائل صفحه ۴۱

۱-۵-۱- یکی از راسهای یک متوازی السطوح شیشه‌ای در مبدأ واقع است سه رأس مجاور آن در $A(۳,۰,۰)$، $B(۰,۰,۲)$ و $C(۰,۳,۱)$ هستند. تمام طولها برحسب سانتی‌متر است با بکار بردن ضرب سه گانه اسکالر محاسبه کنید که چند سانتی متر مکعب شیشه در این متوازی‌السطوح بکار رفته است.

حل

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{vmatrix}=۳(-۶)=-۱۸$$

$$V=۱۸Cm^۳$$

۱ـ۵ـ۲ـ با بسط مستقیم برحسب مؤلفه‌های دکارتی، درستی بسط زیر را برای ضرب سه گانه برداری تحقیق کنید.

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

حل

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}=i(B_yC_z-B_zC_y)+j(B_zC_x-B_xC_z)+k(B_xC_y-B_yC_x)$$

$$A\times(B\times C)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_yC_z-B_zC_y & B_zC_x-B_xC_z & B_xC_y-B_yC_x \end{vmatrix}$$

$$=i\left[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)\right]+j\left[A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)\right]$$

$$+k\left[A_x(B_zC_x-B_xC_z)-A_y(B_yC_z-B_zC_y)\right]$$

درکروشه اول جمله $B_xA_xC_x$ را درکروشه دوم $B_yA_yC_y$ درکروشه سوم $B_zA_zC_z$ اضافه و کم می‌کنیم پس داریم

$$i\left[B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_x(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\right]+$$

$$j\left[B_y(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_y(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\right]+$$

$$k\left[B_z(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_z(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\right]$$

در پرانتزهای داخل کروشه‌ها پرانتز اول و دوم به ترتیب تعریف $\vec{A}.\vec{C}$ و $\vec{A}.\vec{B}$ هستند. و بعد از جداسازی داریم:

$$=(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})(\vec{A}.\vec{B})\qquad(C_x\hat{i}+C_y\hat{j}+C_z\hat{k})(\vec{A}.\vec{C})$$

$$=\vec{B}(\vec{A}.\vec{B})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

که این فرمول به دستور بک ـ کب معروف است.

۱ـ۵ـ۳ـ نشان دهید که گام نخست در معادل ۱-۳۸ یعنی

$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=A^{2}B^{2}-(\vec{A}.\vec{B})^{2}$ با قاعده بک ـ کب ضرب سه گانه برداری سازگار است.

حل

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{H}=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{H})$$

$$= \vec{A}[\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{B})] = \vec{A}[\vec{A}(B^{2}) - \vec{B}(\vec{A}.\vec{B})] = A^{2}B^{2} - (\vec{A}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{B})$$
$$= A^{2}B^{2} - (\vec{A}.\vec{B})^{2}$$

۱ـ۵ـ۴ـ با سه بردار A، B و C به قرار زیر: $\vec{A}=i-j$ و $\vec{B}=j+k$ و $\vec{C}=i-k$

(الف) ضرب سه گانه اسکالر $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ را محاسبه کنید با توجه به $\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$ نتیجه‌ای را برای ضرب سه گانه اسکالر بدست آورده‌اید از نظر هندسی تفسیر کنید. (ب) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ را محاسبه کنید.

حل

(الف)
$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1)+1(1)+0 = 0$$

با توجه به $\vec{A}=\vec{B}+\vec{C}$ پس $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ در یک صفحه‌اند و نتیجه $\vec{A}\vec{B}\times\vec{C}$ حجم متوازی‌السطوحی حاصل از این ۳ بردار است.

(ب)
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$
$$=(j+k)(1)-(i-k)(1)=j+k-i+k=-i+j+2k$$

۱ـ۵ـ۵ـ تکانهٔ زاویه‌ای L ذره با رابطه $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=m\vec{r}\times\vec{V}$ بیان می‌شود که در آن $\vec{P}$ تکانه خطی است با در نظر گرفتن رابطهٔ بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای $\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ نشان دهید که: $\vec{L} = mr^{2}[\omega - \vec{r}_{\circ}(\vec{r}_{\circ}.\vec{\omega})]$

در اینجا $r_{\circ}$ برداریکه در جهت r است این رابطه به ازای $\vec{r}.\vec{\omega}=0$ بصورت $L=I\omega$ ساده میشود که در آن I، گشتاور لختی با کمیت mr^{2} بیان می‌شود این نتیجه در بخش ۴-۶ تعمیم داده می‌شود و بنابر تعریف عبارت است از تانسور لختی.

حل

$$\vec{L}=m\vec{r}\times\vec{V}=m\,\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=m\left[\omega r^{2}-\vec{r}(\vec{r}.\vec{\omega})\right] \qquad (1)$$
$$\vec{r}=|r|\,\hat{r}=|r|\,\vec{r}_{\circ}$$
$$L=m\left[\omega r^{2}-r^{2}\vec{r}_{\circ}(\vec{r}_{\circ}.\vec{\omega})\right]=mr^{2}\left[\omega-\vec{r}_{\circ}(\vec{r}_{\circ}.\vec{\omega})\right]$$
$$\text{IF}\quad \vec{r}.\vec{\omega}=0\quad \text{THEN}\quad (1)\ \Rightarrow\ L=mr^{2}\omega=I\omega$$

۱ـ۵ـ۶ـ انرژی جنبشی هر تک ذره با رابطه $T=\frac{1}{2}mv^{2}$ بیان می‌شود این رابطه برای حرکت چرخشی به صورت $\frac{1}{2}m(\omega\times r)^{2}$ در می‌آید نشان دهید که

$$T=\frac{1}{2}m[r^{2}\omega^{2}-(\vec{r}.\vec{\omega})^{2}]$$

این رابطه به ازای $\vec{r}.\vec{\omega}=0$ بصورت $T=\frac{1}{2}I\omega^2$ ساده می‌شود که در آن گشتاور لختی با کمیت mr^2 بیان می‌شود.

حل

$$T=\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2=\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r}).(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

اگر از رابطه مسئله ۱-۵-۳ (معادلهٔ ۱-۳۸) استفاده شود داریم:

$$T=\frac{1}{2}m[\omega^2r^2-(\vec{\omega}.\vec{r})^2]=\frac{1}{2}m[r^2\omega^2-(r.\vec{\omega})^2]$$

$$\text{IF}\quad \vec{r}.\vec{\omega}=0\quad \text{THEN}\quad T=\frac{1}{2}mr^2\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

۱ـ۵ـ۷ـ نشان دهید که $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$

حل هر یک از ۳ جمله را با توجه به قاعده بک - کب بسط می‌دهیم.

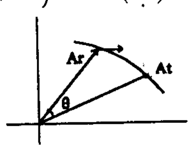
$$\left[\vec{b}(\vec{a}.\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})\right]+\left[\vec{c}(\vec{b}.\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}.\vec{c})\right]+\left[\vec{a}(\vec{c}.\vec{b})-\vec{b}(\vec{c}.\vec{a})\right]$$

$$\vec{b}(\vec{a}.\vec{c})-\vec{b}(\vec{c}.\vec{a})+\vec{c}(\vec{b}.\vec{a})-\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})+\vec{a}(\vec{c}.\vec{b})-\vec{a}(\vec{b}.\vec{c})=0$$

۱ـ۵ـ۸ـ بردار $\vec{A}$ به دو بردار، یکی شعاعی A_r و دیگری مماسی A_t تجزیه شده است اگر برداریکه در جهت شعاعی را با r_0 نمایش دهیم نشان دهید که

(الف) $A_r=\vec{r}_0(\vec{A}.\vec{r}_0)$ (ب) $A_t=-\vec{r}_0\times(\vec{r}_0\times\vec{A})$

حل



$$(1)\quad \sin\theta=\frac{|A_t|}{|A|}$$

$$(2)\quad \cos\theta=\frac{|A_r|}{|A|}$$

(الف)

$$A_r=\vec{r}_0(\vec{A}.\vec{r}_0)$$

$$A_r=r_0|A||r_0|\cos\theta,\quad |r_0|=1$$

$$A_r=r_0|A|\cos\theta\quad,\quad(2)$$

$$A_r=\hat{r}_0|A_r|$$

(ب) $A_t=-\vec{r}_0\times(\vec{r}_0\times\vec{A})=-r_0\times(|A||r_0|\sin\theta)\Rightarrow$

$$A_t=|r_0||A||r_0|\sin\theta=|A|\sin\theta\quad,\quad(1)\Rightarrow A_t=|A_t|$$

۱ـ۵ـ۹ـ ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای آنکه سه بردار (غیرصفر) A، B و C هم صفحه باشند آن است که حاصلضرب سه گانهٔ اسکالر $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}=0$

حل چون $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}=0$ پس $\vec{A}$ بر $\vec{B}\times\vec{C}$ عمود است از طرفی $\vec{B}\times\vec{C}$ برداری است عمود بر صفحه B و C یعنی هم بر B و هم بر C عمود است با تلفیق این ۳ رابط داریم که A و B و C

در یک صفحه قرار دارند.

۱ـ۵ـ۱۰ـ سه بردار A، B و C بصورت زیر مفروض‌اند.

$$\vec{A}=۳i-۲j+۲k \quad , \quad \vec{B}=۶i+۴j-۲k \quad , \quad \vec{C}=-۳i-۲j-۴k$$

کمیتهای $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ و $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ، $\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ و $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})$ را محاسبه کنید.

حل.
$$\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} ۳ & -۲ & ۲ \\ ۶ & ۴ & -۲ \\ -۳ & -۲ & -۴ \end{vmatrix}=۳(-۱۶-۴)-۲(۶+۲۴)+۲(-۱۸+۱۲)$$

$$=-۶۰-۶۰-۱۲=-۱۳۲$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})=(۶i+۴j-۲k)(-۹+۴-۸)-(-۳i-۲j-۴k)(۱۸-۸-۴)$$

$$=-۷۸i-۵۲j+۲۶k+۱۸i+۱۲j+۲۴k=-۶۰i-۴۰j+۵۰k$$

$$\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\vec{C}.\vec{B})-\vec{B}(\vec{C}.\vec{A})=(۳i-۲j+۲k)(-۱۸-۸+۸)-(۶i+۴j-۲k)(-۹+۴-۸)$$

$$=-۵۴i+۳۶j-۳۶k+۷۸i+۵۲j-۲۶k=۲۴i+۸۸j-۶۲k$$

$$\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}(\vec{B}.\vec{A})-\vec{A}(\vec{B}.\vec{C})=(-۳i-۲j-۴k)(۱۸-۸-۴)-(۳i-۲j+۲k)(-۱۸-۸+۸)$$

$$=-۱۸i-۱۲j-۲۴k+۵۴i-۳۶j+۳۶k=۳۶i-۴۸j+۱۲k$$

۱ـ۵ـ۱۱ـ بردار D ترکیب خطی سه بردار غیرصفر هم صفحه (و نامتعامد) است:

$$\vec{D}=a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}$$

نشان دهید که ضریبها برابر خارج قسمت ضربهای سه گانه اسکالر بصورت زیرند:

$$a=\frac{\vec{D}.\vec{B}\times\vec{C}}{\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}}$$

حل

$$\vec{D}.(\vec{B}\times\vec{C})=(a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}).(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\vec{D}.(\vec{B}\times\vec{C})=a\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})+b\vec{B}.(\vec{B}\times\vec{C})+c\vec{C}.(\vec{B}\times\vec{C})$$

$$\vec{D}.(\vec{B}\times\vec{C})=a\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) \Rightarrow a=\frac{\vec{D}.\vec{B}\times\vec{C}}{\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})}$$

و به همین نحو برای b و c داریم

$$b=\frac{\vec{D}.(\vec{A}\times\vec{C})}{\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})}$$

$$c=\frac{\vec{D}.(\vec{A}\times\vec{B})}{\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})}$$

۱ـ۵ـ۱۲ـ نشان دهید که:

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$$

حل

$$(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\times\vec{C}).\vec{H}=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{H})=\vec{A}.\left[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})\right]$$

$$=\vec{A}.\left[\vec{C}(\vec{B}.\vec{D})-\vec{D}(\vec{B}.\vec{C})\right]=(\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D})-(\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$$

۱ـ۵ـ۱۳ـ نشان دهید که:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{D})\vec{C}-(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C})\vec{D}$$

حل

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{E}\times(\vec{C}\times\vec{D})=\vec{C}(\vec{E}.\vec{D})-\vec{D}(\vec{E}.\vec{C})$$

$$=\vec{C}[(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{D}]-\vec{D}[(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}]=\vec{C}[\vec{A}.\vec{B}\times\vec{D}]-\vec{D}[\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}]$$

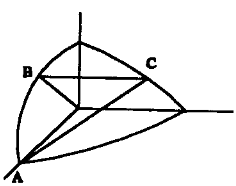
۱ـ۵ـ۱۴ـ در مثلثی کرویٔ مانند مثلث مسئله ۱-۴-۱۴ نشان دهید:

$$\frac{\sin A}{\sin\overline{BC}}=\frac{\sin B}{\sin\overline{CA}}=\frac{\sin C}{\sin\overline{AB}}$$

که در آن $\sin A$ سینوس زاویه رأس A و $\overline{BC}$ ضلع روبه‌رو به آن (برحسب رادیان) است.

[راهنمایی: از مسئله ۱-۵-۱۳ بهره گیرید.]

حل



$$A(1,0,0)\quad,\quad B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad,\quad C\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=|A||B|\sin\widehat{AB}=1\times1\sin\widehat{AB}=\sin\widehat{AB}\quad(6)$$

$$\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|=\sin\widehat{BC}\quad(5)\quad,\quad\left|\vec{C}\times\vec{A}\right|=\sin\widehat{CA}\quad(4)$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{A}(\vec{B}\times\vec{C})\vec{B}-\vec{A}(\vec{B}\times\vec{B})\vec{C}=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})\vec{B}=-\frac{1}{2}\vec{B}$$

$$\left|(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{B}\times\vec{C})\right|=-\frac{1}{2}\left|\vec{B}\right|\Rightarrow\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|\sin B=-\frac{1}{2}\quad(1)$$

$$\left|(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{C}\times\vec{A})\right|=-\frac{1}{2}\left|\vec{C}\right|\Rightarrow\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|\left|\vec{C}\times\vec{A}\right|\sin C=-\frac{1}{2}\quad(2)$$

$$\left|(\vec{C}\times\vec{A})\times(\vec{A}\times\vec{B})\right|=-\frac{1}{2}\left|\vec{A}\right|\Rightarrow\left|\vec{C}\times\vec{A}\right|\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\sin A=-\frac{1}{2}\quad(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(۱),(۲) \Rightarrow \dfrac{\operatorname{Sin} C}{|A\times B|}=\dfrac{\operatorname{Sin} B}{|C\times A|},(۶),(۴) \Rightarrow \dfrac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin}\overline{AB}}=\dfrac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin}\overline{CA}}\\ (۱),(۳) \Rightarrow \dfrac{\operatorname{Sin} B}{|C\times A|}=\dfrac{\operatorname{Sin} A}{|B\times C|},(۴),(۵) \Rightarrow \dfrac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin}\overline{CA}}=\dfrac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin}\overline{BC}}\end{array}\right\}$$

$$\frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin}\overline{BC}}=\frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin}\overline{CA}}=\frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin}\overline{AB}}$$

۱ـ۵ـ۱۵ـ با فرض اینکه

$$\vec{a}\,'=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\quad,\quad \vec{b}\,'=\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\quad,\quad \vec{c}\,'=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\quad,\quad \vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}\neq ۰$$

نشان دهید (الف) $x'.y=\delta_{xy}\ (x,y=a,b,c)$

(ب) $\vec{a}\,'.\vec{b}\,'\times\vec{c}\,'=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۱}$ (ج) $\vec{a}=\dfrac{\vec{b}\,'\times\vec{c}\,'}{\vec{a}\,'.\vec{b}\,'\times\vec{c}\,'}$

حل

(الف)

$$x=a\ ,\ y=b \qquad x'.y=\vec{a}\,'.\vec{b}=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}.\vec{b}=۰$$

$$x=a\ ,\ y=a \qquad x'.y=a'.a=۱$$

$$x'.y=\delta_{xy}=\begin{cases}۱ & x=y\\ ۰ & x\neq y\end{cases}$$

(ب)

$$\vec{a}\,'.\vec{b}\,'\times\vec{c}\,'=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}.\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\times\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}$$

$$=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۳}[(\vec{b}\times\vec{c}).(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})]$$

$$=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۳}(\vec{b}\times\vec{c})[(\vec{c}.\vec{a}\times\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a}\times\vec{a})\vec{b}\ ]$$

$$=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۲}[(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}]=(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۱}[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^{-۱}$$

(ج)

$$\vec{a}.\vec{a}\,'=\frac{\vec{b}\,'\times\vec{c}\,'.\vec{a}\,'}{\vec{a}\,'.\vec{b}\,'\times\vec{c}\,'}=۱$$

$$\vec{a}=\frac{\dfrac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\times\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}}{(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})^{-۱}}=\frac{(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c})}=\frac{\left[\vec{a}\,\vec{b}\vec{c}\right]\ \vec{a}}{\left[\vec{a}\vec{b}\,\vec{c}\right]}=\vec{a}$$

۱ـ۵ـ۱۶ـ اگر داشته باشیم: $(x,y=a,b,c)$, $x'.y=\delta_{xy}$ ثابت کنید که

$$a'=\frac{b\times c}{a.b\times c}$$

(این مسئله عکس ۱-۵-۱۵ است)

حل

a' بر b و c عمود است پس با $b\times c$ نیز که بر b و c عمود است موازی می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} x=a\ ,\ y=b \Rightarrow x'.y=a'.b=0 \\ x=a\ ,\ y=c \Rightarrow x'.y=a'.c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{a}\,'=\alpha\vec{b}\times\vec{c}$$

$$x=a\ ,\ y=a \Rightarrow x'.y=a'.a=1 \Rightarrow \alpha a.b\times c=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}} \quad \text{و} \quad \boxed{\vec{a}\,'=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}}$$

اگر برای b' و c' نیز عمل شود داریم:

$$\vec{b}\,'=\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}\ ,\quad \vec{c}\,'=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}$$

۱ـ۵ـ۱۷ـ نشان دهید که می‌توان هر بردار V را توسط رابطهٔ زیر برحسب بردارهای وارون a' و b' و c' نمایش داد.

$$\vec{V}=(\vec{V}.\vec{a})\,\vec{a}\,'+(\vec{V}.\vec{b})\,\vec{b}\,'+(\vec{V}.\vec{c})\,\vec{c}\,'$$

حل

$$V=n_a.\vec{a}+n_b.\vec{b}+n_c.\vec{c}$$

$$(V.a).a'=(n_a.a.a'+n_b.b.a'+n_c.c.a')=n_a.\vec{a}$$

$$(V.b).b'= \qquad =n_b.\vec{b}$$

$$(V.c).c'= \qquad =n_c.\vec{c}$$

پس $(V.a)\,a'+(V.b)\,b'+(V.c)c'=V \Rightarrow$

$$\vec{V}=n_a.\vec{a}+n_b.\vec{b}+n_c.\vec{c}$$

۱ـ۵ـ۱۸ـ بار الکتریکی q_1 که با سرعت V_1 حرکت می‌کند یک میدان مغناطیسی B ایجاد می‌کند که با رابطهٔ زیر بیان می‌شود (برحسب واحدهای mks)

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}q_1\frac{V\times r_0}{r^2}$$

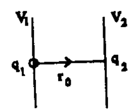
که در آن r_0 از q_1 به سوی نقطه‌ای است که در آن B اندازه‌گیری می‌شود (قانون بیو - ساوار)

(الف) نشان دهید نیرویی مغناطیسی که بر بار دوم q_2 با سرعت V_2 وارد می‌آید از ضرب سه گانه اسکالر مقابل بدست می‌آید. $\vec{F}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{V}_2\times(\vec{V}_1\times r_0)$

(ب) نیروی مغناطیسی متناظر F_1 را بنویسید که q_2 بر q_1 وارد می‌کند برداریکهٔ شعاعی را که از آن بهره می‌گیرید تعریف کنید. F_1 و F_2 را با یکدیگر مقایسه کنید.

(ج) در حالتی که q_1 و q_2 روی مسیرهای موازی مجاور یکدیگر حرکت کنند F_1 و F_2 را محاسبه کنید.

حل



(الف)

$$r'_0=-r_0$$

$$\vec{F}=q_2\vec{V}_2\times\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{V}_2\times(\vec{V}_1\times\vec{r}_0)$$

(ب) $$F_1=q_1V_1\times B=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{V}_1\times(\vec{V}_2\times\vec{r}_0)$$

این دو مقدار بدست آمده برای F_1 و F_2 با هم رابطه‌ای ندارند به خصوص قانون سوم نیوتن $F_1=-F_2$ برقرار نیست.

(ج)

$$F_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{V}_2\times(\vec{V}_1\times\vec{r}_0)$$

$$\vec{V}_1=\vec{V}_2=\vec{V}$$

$$\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{r}_0)=-V^2\hat{r}_0$$

$$\vec{F}_1=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1q_2}{r^2}V^2\hat{r}_0=-\vec{F}_2$$

بخش ۱ـ۶ گرادیان ∇ مسائل صفحه ۵۱

۱ـ۶ـ۱ـ به ازای $S(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$ (الف) ∇S را در نقطه (۳ و ۲ و ۱) محاسبه کنید. (ب) بزرگی گرادیان S یعنی $|\nabla S|$ را در نقطهٔ (۳ و ۲ و ۱) محاسبه کنید. (ج) کسینوسهای هادی ∇S را در نقطهٔ (۳ و ۲ و ۱) بدست آورید.

حل (الف)

$$\vec{\nabla}S=\hat{i}\frac{\partial S}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial S}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial S}{\partial z}$$

$$=\hat{i}\left(-\frac{3}{2}\right)(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}+\hat{j}\left(-\frac{3}{2}\right)(2y)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}+\hat{k}\left(-\frac{3}{2}\right)(2z)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\vec{\nabla}S=\frac{-۳x}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۵}{۲}}}\hat{i}+\frac{-۳y}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۵}{۲}}}\hat{j}+\frac{-۳z}{(x^۲+y^۲+z^۲)^{\frac{۵}{۲}}}\hat{k}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{\nabla}S\Big|_{۱,۲,۳}=\frac{-۳}{\sqrt{(۱۴)^۵}}\hat{i}+\frac{-۶}{\sqrt{(۱۴)^۵}}\hat{j}+\frac{-۹}{\sqrt{(۱۴)^۵}}\hat{k}$$

(ب)
$$\left|\vec{\nabla}S\right|_{۱,۲,۳}=\sqrt{\frac{۹}{(۱۴)^۵}+\frac{۳۶}{(۱۴)^۵}+\frac{۸۱}{(۱۴)^۵}}=\frac{۳}{۱۹۶}$$

(ج)
$$x=r\,\text{Cos}\alpha\quad\Rightarrow\quad \text{Cos}\,\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|}=\frac{\frac{-۳}{\sqrt{(۱۴)^۵}}}{\frac{۳}{۱۹۶}}=-۰/۲۶$$

$$y=r\,\text{Cos}\beta\quad\Rightarrow\quad \text{Cos}\,\beta=\frac{\frac{-۶}{\sqrt{(۱۴)^۵}}}{\frac{۳}{۱۹۶}}=-۰/۵۲$$

$$z=r\,\text{Cos}\gamma\quad\Rightarrow\quad \text{Cos}\,\gamma=\frac{\frac{-۹}{\sqrt{(۱۴)^۵}}}{\frac{۳}{۱۹۶}}=-۰/۷۸$$

۱ـ۶ـ۲ـ (الف) بردار یکه عمود بر سطح $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ را در نقطهٔ (۱ و ۱ و ۱) بیابید.

(ب) معادله صفحه مماس بر این سطح در نقطهٔ (۱ و ۱ و ۱) را بنویسید.

حل (الف)
$$\nabla\phi\Big|_{۱,۱,۱}=\hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}=\hat{i}(۲x)+\hat{j}(۲y)+\hat{k}(۲z)$$

$$=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\Big|_{۱,۱,۱}=\frac{i+j+k}{\sqrt{۳}}=$$ بردار یکه عمود بر سطح

(ب)
$$\frac{۱}{\sqrt{۳}}(x-۱)+\frac{۱}{\sqrt{۳}}(y-۱)+\frac{۱}{\sqrt{۳}}(z-۱)=۰\quad\Rightarrow$$

$$(x-۱)+(y-۱)+(z-۱)=۳$$

۱ـ۶ـ۳ـ بردار $\vec{r}_{۱۲}=\hat{i}(x_۱-x_۲)+\hat{j}(y_۱-y_۲)+\hat{k}(z_۱-z_۲)$ مفروض است نشان دهید کمیت $\vec{\nabla}_۱\vec{r}_{۱۲}$ (گرادیان بزرگی $r_{۱۲}$ نسبت به $x_۱$ و $y_۱$ و $z_۱$) برداریکه‌ای است در جهت $r_{۱۲}$.

حل

$$\vec{\nabla}_1 \vec{r}_{12}=\frac{1}{2}\left[2i(x_1-x_2)+2j(y_1-y_2)+2k(z_1-z_2)\right](r_{12})^{\frac{-1}{2}}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)\hat{i}+(y_1-y_2)\hat{j}+(z_1-z_2)\hat{k}}{|r_{12}|}=\frac{\vec{r}_{12}}{|r_{12}|}=\hat{r}_{12}$$

۱-۶-۴- تابع برداری F هم به مختصات فضایی (x,y,z) و هم به زمان t بستگی دارد نشان دهید:

$$d\vec{F}=(d\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{F}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}dt$$

حل

$$d\vec{F}=\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}dz+\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}dt$$

$$d\vec{F}=dx\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}+dy\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}+dz\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}dt$$

$$d\vec{F}=d\vec{r}.\vec{\nabla}\vec{F}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}dt$$

۱-۶-۵- نشان دهید: $\vec{\nabla}(uv)=u\vec{\nabla}v+v\vec{\nabla}u$ که در آن u و v توابع اسکالر مشتق پذیری از x، y و z هستند.

حل

$$\vec{\nabla}(uv)=\hat{i}\frac{d}{dx}(uv)+\hat{j}\frac{d(uv)}{dy}+\hat{k}\frac{d}{dz}(uv)$$

$$=\hat{i}u\frac{dv}{dx}+\hat{i}\frac{du}{dx}v+\hat{j}u\frac{dv}{dy}+\hat{j}\frac{du}{dy}v+\hat{k}u\frac{dv}{dz}+\hat{k}\frac{du}{dz}v$$

$$=u(\hat{i}\frac{dv}{dx}+\hat{j}\frac{dv}{dy}+\hat{k}\frac{dv}{dz})+v(\hat{i}\frac{du}{dx}+\hat{j}\frac{du}{dy}+\hat{k}\frac{du}{dz})=u\vec{\nabla}v+v\vec{\nabla}u$$

۱-۶-۶- (الف) نشان دهید که شرط لازم و کافی برای آنکه مابین u(x,y,z) و v(x,y,z) از طریق عبارتی مانند $f(u,v)=0$ رابطه برقرار شود آن است که $(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)=0$ (ب) به ازای $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ نشان دهید که شرط $(\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v)=0$ به ژاکوبی دو بعدی زیر منجر می‌شود:

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0$$

فرض کنید u و v مشتق پذیرند.

حل (الف)

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=0$$

از رابطه $\nabla\phi.dr=d\phi$ استفاده می‌شود.

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}(\nabla u.dr)+\frac{\partial f}{\partial v}(\nabla v.dr)=0$$

$$(\frac{\partial f}{\partial u}\vec{\nabla}u+\frac{\partial f}{\partial v}\vec{\nabla}v).dr=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}\vec{\nabla}u+\frac{\partial f}{\partial v}\vec{\nabla}v=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v)=0 \Rightarrow \vec{\nabla}u=k\vec{\nabla}v$$

(ب)
$$\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}=\hat{k}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x})=0$$

$$=\hat{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad J(\frac{u,v}{x,y})=0$$

بخش ۱ـ۷ـ دیورژانس $\vec{\nabla}.$ مسائل صفحه ۵۶

۱ـ۷ـ۱ـ معادلهٔ حرکت ذره‌ای در مدار دایره‌ای، عبارت است از:

$$\vec{r}=\hat{i}\,r\,Cos\,\omega t+\hat{j}\,r\,Sin\omega t$$

(الف) $\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ را محاسبه کنید. (ب) نشان دهید: $\ddot{\vec{r}}+\omega^2\vec{r}=0$. شعاع، r، و سرعت زاویه‌ای، ω ثابت‌اند. [یادآوری: $\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ و $\ddot{\vec{r}}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$]

حل(الف)

$$\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-\hat{i}\,\omega r\,Sin\omega t+\hat{j}\,\omega r\,Cos\omega t$$

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ rCos\omega t & rSin\omega t & 0 \\ -r\omega Sin\omega t & r\omega Cos\omega t & 0 \end{vmatrix}=\hat{k}(r^2\omega\,Cos^2\omega t+r^2\omega Sin^2\omega t)$$

$$=\hat{k}\,r^2\omega$$

(ب)
$$\ddot{\vec{r}}=\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\hat{i}\,r\omega^2\,Cos\omega t-\hat{j}\,r\omega^2\,Sin\,\omega t$$

$$= -\omega^{۲}(\hat{i}\, r\, Cos\omega t + \hat{j}\, r\, Sin\omega t) = -\omega^{۲} r \quad \Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{r}} + \omega^{۲}\vec{r} = ۰}$$

۱ـ۷ـ۲ـ بردار $\vec{A}$ در قانون تبدیل برداری، معادله ۱-۱۵ صدق می‌کند با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که مشتق زمانی آن یعنی $\frac{d\vec{A}}{dt}$ نیز در معادله ۱-۱۵ صدق می‌کند و در نتیجه بردار است.

حل معادله ۱-۱۵

$$V'_i = \sum_{j=۱}^{N} a_{ij} V_j \qquad i = ۱, ۲, ..., N$$

$$\begin{cases} A'_x = a_{۱۱}A_x + a_{۱۲}A_y + a_{۱۳}A_z \\ A'_y = a_{۲۱}A_x + a_{۲۲}A_y + a_{۲۳}A_z \\ A'_z = a_{۳۱}A_x + a_{۳۲}A_y + a_{۳۳}A_z \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A'_x) = a_{۱۱}\frac{\partial}{\partial t}A_x + a_{۱۲}\frac{\partial}{\partial t}A_y + a_{۱۳}\frac{\partial}{\partial t}A_z = \sum_j a_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A'_y) = a_{۲۱}\frac{\partial}{\partial t}A_x + a_{۲۲}\frac{\partial}{\partial t}A_y + a_{۲۳}\frac{\partial}{\partial t}A_z = \sum_j a_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A'_z) = a_{۳۱}\frac{\partial}{\partial t}A_x + a_{۳۲}\frac{\partial}{\partial t}A_y + a_{۳۳}\frac{\partial}{\partial t}A_z = \sum_j a_{ij}\frac{\partial A_j}{\partial t}$$

۱ـ۷ـ۳ـ با مشتق گرفتن از مولفه‌ها نشان دهید که درست مانند مشتق‌گیری از حاصلضرب دو تابع جبری داریم:

(الف)

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

(ب)

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

حل (الف)

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\vec{B}) = \frac{d}{dt}(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$$

$$= B_x\frac{dA_x}{dt} + A_x\frac{dB_x}{dt} + B_y\frac{dA_y}{dt} + A_y\frac{dB_y}{dt} + B_z\frac{dA_z}{dt} + A_z\frac{dB_z}{dt}$$

$$= (B_x\frac{dA_x}{dt} + B_y\frac{dA_y}{dt} + B_z\frac{dA_z}{dt}) + (A_x\frac{dB_x}{dt} + A_y\frac{dB_y}{dt} + A_z\frac{dB_z}{dt})$$

$$= \vec{B}.\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

(ب)
$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\hat{i}\,[B_z\frac{dA_y}{dt}+A_y\frac{dB_z}{dt}-B_y\frac{dA_z}{dt}-A_z\frac{dB_y}{dt}]$$
$$+\hat{j}[A_z\frac{dB_x}{dt}+B_x\frac{dA_z}{dt}-B_z\frac{dA_x}{dt}-A_x\frac{dB_z}{dt}]+\hat{k}[A_x\frac{dB_y}{dt}+B_y\frac{dA_x}{dt}-A_y\frac{dB_x}{dt}-B_x\frac{dA_y}{dt}]$$

با مرتب کردن برحسب مولفه‌های ضرب خارجی داریم:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

۱ـ۷ـ۴ـ در فصل ۲ خواهیم دید که بردارهای یکه در دستگاههای مختصات غیردکارتی معمولاً توابعی از متغیرهای مختصاتی‌اند. $e_i=e_i(q_1,q_2,q_3)$ ولی $|e_i|=1$ نشان دهید که یا $\frac{\partial e_i}{\partial q_j}=0$ و یا $\frac{\partial e_i}{\partial q_j}$ بر e_i عمود است.

حل

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_i=1 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial q_j}(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_i)=0 \;\Rightarrow\; 2\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}\cdot\hat{e}_i=0$$

از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم که یا باید زاویه بین $\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}$ و $\hat{e}_i$ ۹۰° باشد یا $\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}=0$.

۱ـ۷ـ۵ـ ثابت کنید که

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{b}$$

[راهنمایی: این عبارت را به صورت یک ضرب سه گانه اسکالر بگیرید.]

حل

$$(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})[(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-b_za_x)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}]$$

$$=\frac{\partial a_yb_z}{\partial x}-\frac{\partial a_zb_y}{\partial x}+\frac{\partial a_zb_x}{\partial y}-\frac{\partial b_za_x}{\partial y}+\frac{\partial a_xb_y}{\partial z}-\frac{\partial a_yb_x}{\partial z}$$

بعد از مشتق‌گیری ۱۲ جمله پیدا می‌شود که با مرتب کردن آنها داریم:

$$=b_x(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z})+b_y(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x})+b_z(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y})$$
$$-a_x(-\frac{\partial b_y}{\partial z}+\frac{\partial b_z}{\partial y})-a_y(-\frac{\partial b_z}{\partial x}+\frac{\partial b_x}{\partial z})-a_z(-\frac{\partial b_x}{\partial y}+\frac{\partial b_y}{\partial x})$$
$$=\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{b}$$

۱ـ۷ـ۶ـ میدان الکترومغناطیسی بار نقطه‌ای q عبارت است از

$$\vec{E}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\cdot\frac{\hat{r}_\circ}{r^۲}$$

دیورژانس E را محاسبه کنید. مقدار این دیورژانس در مبدأ چقدر است؟

حل

$$\hat{r}_\circ=\frac{\vec{r}}{|r|} \quad\Rightarrow\quad \vec{E}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{\vec{r}}{r^۳}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}f(r))=۳f(r)+r\frac{df}{dr}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(r^{-۳}\vec{r})=۳r^{-۳}+(-۳)r^{-۴}=۳r^{-۳}-۳r^{-۳}=\circ$$

پس $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\circ$

بخش ۱ـ۸ تاو $\vec{\nabla}\times$ مسائل صفحه ٦٢

۱ـ۸ـ۱ـ با دوران مختصات نشان دهید که تاو یک بردار، مانند یک بردار تبدیل می‌شود.

[راهنمایی: هر وقت لازم باشد می‌توانید از اتحادهای معادله ۱-۴۱ برای کسینوسهای هادی استفاده کنید.]

حل

$$\nabla'\times V'\Big|_{x'}=\frac{\partial V'_z}{\partial y'}-\frac{\partial V'_y}{\partial z'}$$

$$\begin{cases}V'_x=V_x\,\text{Cos}\theta+V_y\,\text{Sin}\theta\\ V'_y=-V_x\,\text{Sin}\theta+V_y\,\text{Cos}\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}x'=x\,\text{Cos}\theta+y\,\text{Sin}\theta\\ y'=-x\,\text{Sin}\theta+y\,\text{Cos}\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\,\text{Cos}\theta-y'\,\text{Sin}\theta\\ y=x'\,\text{Sin}\theta+y'\,\text{Cos}\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial y'}=(-\text{Sin}\theta)\\ \dfrac{\partial y}{\partial y'}=\text{Cos}\theta\end{cases}\qquad \text{قاعده زنجیری}\quad \frac{\partial V'_z}{\partial y'}=\frac{\partial V'_z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y'}\right)+\frac{\partial V'_z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial y'}\right)$$

$$\frac{\partial V'_z}{\partial y'}=\frac{\partial V'_z}{\partial x}(-\text{Sin}\theta)+\frac{\partial V'_z}{\partial y}(\text{Cos}\theta)=-\frac{\partial V_z}{\partial x}\text{Sin}\theta+\frac{\partial V_z}{\partial y}\text{Cos}\theta\quad(۱)$$

$$\partial V'_y=\partial(-V_x\,\text{Sin}\theta+V_y\,\text{Cos}\theta)\qquad \partial V_z=\partial V'_z\quad,\quad \partial z=\partial z'$$

$$\frac{\partial V'_y}{\partial z'}=\frac{\partial(-V_x\,\text{Sin}\theta+V_y\,\text{Cos}\theta)}{\partial z}\quad(۲)$$

$$\nabla' \times V' \Big|_x = (1) - (2) = -\frac{\partial V_z}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial V_z}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial z}(-V_x \sin\theta + V_y \cos\theta)$$

$$\nabla' \times V' \Big|_x = -\frac{\partial V_z}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial V_z}{\partial y}\cos\theta - (-\frac{\partial V_x}{\partial z}\sin\theta) - \frac{\partial V_y}{\partial z}\cos\theta$$

$$= (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x})\sin\theta + \cos\theta(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}) = (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z})\cos\theta$$

$$+ (\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x})\sin\theta \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V}' \Big|_x = (\vec{\nabla}\times\vec{V})_x \cos\theta + (\vec{\nabla}\times\vec{V})_y \sin\theta$$

۱ـ۸ـ۲ـ نشان دهید که اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غیر چرخشی باشند $\vec{u} \times \vec{v}$ سیملوله‌ای است.

حل چون غیرچرخشی‌اند.

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

$$\vec{\nabla} . (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} . (\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{u}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$$

پس $\vec{u} \times \vec{v}$ سیملوله‌ای است.

۱ـ۸ـ۳ـ نشان دهید که اگر $\vec{A}$ غیرچرخشی باشد $\vec{A} \times \vec{r}$ سیملوله‌ای است.

حل چون $\vec{A}$ غیرچرخشی است.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} . (\vec{A} \times \vec{r}) = \vec{r}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \times \vec{r}) = 0 - 0 = 0$$

۱ـ۸ـ۴ـ جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. نشان دهید که سرعت خطی V سیملوله‌ای است.

حل $\omega =$ ثابت و

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

پس $\vec{V}$ سیملوله‌ای است.

۱ـ۸ـ۵ـ تابع برداری $\vec{f}(x,y,z)$ غیرچرخشی نیست ولی حاصلضرب f در تابع اسکالر $g(x,y,z)$ غیرچرخشی است نشان دهید:

$$\vec{f} . \vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$$

حل

$$\vec{\nabla} \times (\vec{f}.g) = g\vec{\nabla} \times \vec{f} - \vec{\nabla}g \times \vec{f} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{f}=\frac{\vec{\nabla}g\times\vec{f}}{g}\quad\Rightarrow\quad\vec{f}.\nabla\times\vec{f}=\vec{f}.\frac{f.\vec{\nabla}g\times\vec{f}}{g}=\circ$$

۱-۸-۶- اگـر (الف) $\vec{V}=i V_x(x,y)+j V_y(x,y)$ و (ب) $\vec{\nabla}\times\vec{V}\neq\circ$ ثـابت کـنید که $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ بر $\vec{V}$ عمود است.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & \circ \end{vmatrix}=\hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$\vec{V}.(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\circ\quad\Rightarrow\quad\vec{V}\perp\vec{\nabla}\times\vec{V}$$

۱-۸-۷- تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کلاسیک از رابطهٔ $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$ به دست می‌آید که در آن $\vec{P}$ تکانهٔ خطی است. در مکانیک کوانتومی به جای P عـملگر $-i\vec{\nabla}$ را قـرار مـی‌دهیم (بـخش ۱۵-۶) نشان دهید که مولفه‌های دکارتی عملگر تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی (برحسب واحد $\hbar$) عبارت‌اند از:

$$L_x=-i\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\quad,\quad L_y=-i\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad,\quad L_z=-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

حل

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=\vec{r}\times(-i\vec{\nabla})=i(\vec{r}\times\vec{\nabla})=i\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad L=i\left[\hat{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)+\hat{j}\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\quad L_x=i\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\quad,\quad L_y=i\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad,\quad L_z=i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

۱-۸-۸- با بهره‌گیری از عملگرهای تکانهٔ زاویه‌ای که قـبلاً داده شـدند. نشـان دهـید کـه ایـن عملگرها در رابطه‌های جابجایی بصورت زیر صادقند.

$$[L_x,L_y]\equiv L_xL_y-L_yL_x=iL_x$$

و در نتیجه داریم $\vec{L}\times\vec{L}=i\vec{L}$

بعداً در مسئله ۴-۲-۱۵ و مسئله بعد از آن، و در بخش ۱۲-۷ این روابط جابجایی را بعنوان

روابط معرف عملگرها تکانهٔ زاویه‌ای بکار خواهیم برد.

حل

$$L_x L_y - L_y L_x = -(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}) + (z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})$$

$$= -[y\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial^2}{\partial z \partial z} - xy\frac{\partial^2}{\partial z \partial z} - z^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + xz\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - yz\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + z^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + xy\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$-x\frac{\partial}{\partial y} - xz\frac{\partial^2}{\partial z \partial y}] = -(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}) = -i^2(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) = iL_z$$

$$\vec{L}\times\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ L_x & L_y & L_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = \hat{i}(L_y L_z - L_z L_y) + \hat{j}(L_z L_x - L_x L_z) + \hat{k}(L_x L_y - L_y L_z) = i\vec{L}$$

۱ـ۸ـ۹ـ با بهره‌گیری از نماد کروشهٔ جابجایی $[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x$ بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\vec{L}$ در رابطهٔ $[L_x, L_y] = iL_z$ و غیره یا $\vec{L}\times\vec{L} = i\vec{L}$ صدق می‌کند و بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با یکدیگر و با $\vec{L}$ جابجا می‌شوند یعنی $[a,b]=[a,L]=[b,L]=0$ نشان دهید:

$$[\vec{a}\cdot\vec{L}, \vec{b}\cdot\vec{L}] = i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{L}$$

حل

$$[\vec{a}\cdot\vec{L}, \vec{b}\cdot\vec{L}] = (\vec{a}\cdot\vec{L})(\vec{b}\cdot\vec{L}) - (\vec{b}\cdot\vec{L})(\vec{a}\cdot\vec{L}) \qquad (1)$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C}) \qquad (2)$$

طرف راست روابط (۱) و (۲) یکی هستند (مشابه) بطور یکسان می‌توان طرف دیگر رابطه (۱) را مانند طرف چپ رابطه (۲) درست کرد.

$$(\vec{a}\cdot\vec{L})(\vec{b}\cdot\vec{L}) - (\vec{b}\cdot\vec{L})(\vec{a}\cdot\vec{L}) = (\vec{a}\times\vec{b})(\vec{L}\times\vec{L}) = (\vec{a}\times\vec{b})i\vec{L} = i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{L}$$

۱ـ۸ـ۱۰ـ با محاسبه تک تک جمله‌های اتحاد برداری زیر برای بردارهای $\vec{A} = iA_x(x,y,z)$ و $\vec{B} = iB_x(x,y,z)$ درستی این اتحاد را تحقیق کنید:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

حل

∇_B : فقط از B مشتق می‌گیرد

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}_B(\vec{A}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}) \qquad (1)$$

∇_A : فقط از A مشتق می‌گیرد

$$\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}_A(\vec{B}\cdot\vec{A}) - \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}) \qquad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}_B(\vec{A}.\vec{B})+\vec{\nabla}_A(\vec{A}.\vec{B})-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})=(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

۱ـ۸ـ۱۱ـ اتحاد برداری زیر را ثابت کنید.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})$$

حل

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{\nabla}.\vec{B})\vec{A}-(\vec{\nabla}.\vec{A})\vec{B} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})+(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})$$

۱ـ۸ـ۱۲ـ اتحاد برداری مربوط به مثال ۱-۸-۲ را بصورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

این اتحاد را ثابت کنید.

حل

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}=\vec{\nabla}_B(\vec{B}.\vec{A})-\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B}) \Rightarrow \vec{\nabla}_B(\vec{B}.\vec{A})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B}) \\ (\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}=\vec{\nabla}_A(\vec{B}.\vec{A})-\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A}) \Rightarrow \vec{\nabla}_A(\vec{B}.\vec{A})=(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}(\vec{B}.\vec{A})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{B}.\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}+(\vec{B}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

۱ـ۸ـ۱۳ـ اتحاد زیر را ثابت کنید

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\frac{1}{2}\vec{\nabla}(A^2)-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

حل در مسئله قبل اگر $\vec{B}=\vec{A}$ را جایگزین کنیم داریم:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{A})=(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{A})+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}A^2=2(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}+2\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{A}) \Rightarrow$$

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\frac{1}{2}\vec{\nabla}(A^2)-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

۱ـ۸ـ۱۴ـ اگر A و B بردارهای ثابتی باشند نشان دهید $\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{r})=\vec{A}\times\vec{B}$

حل

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}\times\vec{r})=\nabla(\underbrace{\vec{A}\times\vec{B}}_{E}.\vec{r})=\nabla(E_x x+E_y y+E_z z)$$

$$=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})(E_x x+E_y y+E_z z)$$

E_x و E_y و E_z ثابت‌اند.

$$=E_x\frac{\partial x}{\partial x}\hat{i}+E_y\frac{\partial y}{\partial y}\hat{j}+E_z\frac{\partial z}{\partial z}\hat{k}=E_x\hat{i}+E_y\hat{j}+E_z\hat{k}=\vec{E}=\vec{A}\times\vec{B}$$

۱ـ۸ـ۱۵ـ گشتاور مغناطیسی حاصل از نوعی توزیع جریانهای الکتریکی، ثابت و برابر m است نیرویی که در القای مغناطیسی خارجی B بر m وارد می‌آید عبارت از:

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m})$$

نشان دهید:

$$\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{m}.\vec{B})$$

[یادآوری: اگر میدانها را مستقل از زمان بگیریم از معادله ماکسول نتیجه می‌گیریم که $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$ و نیز $\vec{\nabla}.\vec{B}=0$]

حل از اتحاد مسئله ۱-۸-۱۱ استفاده می‌کنیم:

$$F=\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{m})=(\vec{m}.\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{m}-\vec{m}(\vec{\nabla}.\vec{B})+\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{m})$$

جمله سوم بنابه فرض و جمله چهارم چون m ثابت است صفر می‌شوند.

$$\vec{F}=(\vec{m}.\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{m}$$

جمله دوم هم به دلیل مشابه فوق صفر است.

پس داریم:

$$\vec{F}=(\vec{m}.\vec{\nabla})\vec{B}$$

چون m ثابت است می‌تواند وارد ∇ شود.

$$\vec{F}=\nabla(\vec{m}.\vec{B})$$

۱ـ۸ـ۱۶ـ یک دو قطبی الکتریکی با گشتاور $\vec{P}$ در مبدأ واقع است این دو قطبی در $\vec{r}$ یک پتانسیل الکتریکی به قرار $\psi(\vec{r})=\frac{\vec{P}.r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ ایجاد می‌کند. میدان الکتریکی $\vec{E}=-\vec{\nabla}\psi$ را در r محاسبه کنید.

حل

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\psi=-\vec{\nabla}\left[\frac{\vec{P}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right]=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left[\vec{P}.\vec{r}\,r^{-3}\right]\Rightarrow$$

$$\vec{E}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\vec{\nabla}r^{-3}(\vec{P}.\vec{r})+r^{-3}\vec{\nabla}(\vec{P}.\vec{r})\right]$$

$$\vec{E}=\frac{-۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\hat{r}_۰\frac{-۳}{r^۴}(P.\vec{r})+r^{-۳}((r.\nabla)P+(P.\nabla)r+P\times(\nabla\times r)+r\times(\nabla\times P)\right]$$

$$\vec{E}=\frac{-۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\hat{r}_۰(\frac{-۳}{r^۴})(P.r)+r^{-۳}P\right]=\frac{-۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{-۳r.(P.r)}{r^۵}+\frac{P}{r^۳}\right]$$

$$\vec{E}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[\frac{۳\vec{r}\,(\vec{P}.\vec{r})}{r^۵}-\frac{\vec{P}}{r^۳}\right]$$

۱ـ۸ـ۱۷ـ پتانسیل برداری $\vec{A}$ یک دو قطبی مغناطیسی با گشتاور دو قطبی m، از رابطهٔ $\vec{A}(r)=\frac{\mu_۰}{۴\pi}(\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^۳})$ به دست می‌آید. نشان دهید که القای مغناطیسی $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ عبارت است از:

$$\vec{B}=\frac{\mu_۰}{۴\pi}\frac{۳\vec{r}_۰(\vec{r}_۰.\vec{m})-\vec{m}}{r^۳}$$

[یادآوری: فرآیند حدی که دو قطبیهای نقطه‌ای را می‌دهد برای دو قطبی الکتریکی در بخش ۱۲-۱ و برای دو قطبی مغناطیسی در بخش ۱۲-۵ مورد بحث قرار می‌گیرد]

حل

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{\mu_۰}{۴\pi}\left[\frac{۱}{r^۳}\vec{\nabla}\times(\vec{m}\times\vec{r})+\vec{\nabla}(\frac{۱}{r^۳})\times(\vec{m}\times\vec{r})\right]$$

از اتحاد مسئله ۱-۸-۱۱ استفاده می‌شود.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{m}\times\vec{r})=(\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{m}-(\vec{m}.\vec{\nabla})\vec{r}+\vec{m}(\vec{\nabla}.\vec{r})-\vec{r}(\vec{\nabla}.\vec{m})$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_۰}{۴\pi}\left[\frac{-۳}{r^۵}[\vec{m}(\vec{r}.\vec{r})-\vec{r}(\vec{m}.\vec{r})]+\frac{۲\vec{m}}{r^۳}\right]\Rightarrow$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_۰}{۴\pi}\left[\frac{-m}{r^۳}+\frac{۳(\vec{m}.\vec{r})\vec{r}}{r^۵}\right]$$

۱ـ۸ـ۱۸ـ سرعت شارش دو بعدی یک مایع از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\vec{V}=\hat{i}\,u(x,y)-\hat{j}\,v(x,y)$$

اگر این مایع تراکم‌ناپذیر و شارش غیرچرخشی داشته باشد نشان دهید.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

این رابطه‌ها عبارت‌اند از شرایط کوشی - ریمان در بخش ۶-۲

حل چون غیر چرخشی است.

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=۰$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & -v & 0 \end{vmatrix}=\hat{k}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$\vec{\nabla}.\vec{V}=0$ چون تراکم‌ناپذیر است $\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}}$$

بخش ۱ـ۹ـ کاربردهای $\vec{\nabla}$ متوالی   مسائل صفحه ٦٨

۱ـ۹ـ۱ـ درستی معادلهٔ ۱-۸۰ را از طریق بسط مستقیم در مختصات دکارتی اثبات کنید.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{V}-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}$$

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\nabla\times V)_x & (\nabla\times V)_y & (\nabla\times V)_z \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 V_y}{\partial x\partial y}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 V_z}{\partial y\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 V_x}{\partial z\partial y}\right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{V}=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}=\nabla^2 V=\hat{i}\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)$$

$$+\hat{j}\left(\frac{\partial^2 Vy}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Vy}{\partial z^2}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{V}-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})$$

۱ـ۹ـ۲ـ نشان دهید که اتحاد $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\vec{\nabla}\vec{\nabla}.\vec{V}-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}$

را می‌توان بکمک قاعده بک -کب برای ضرب سه گانه برداری اثبات کرد. هر تغییری که در

ترتیب عوامل در جمله‌های بک و کب انجام داده‌اید توجیه کنید.

حل

$$\overset{a}{\vec{\nabla}}\times(\overset{b}{\vec{\nabla}}\times\overset{c}{\vec{V}})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V})-\vec{V}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{V})-(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{V}$$

۱-۹-۳- ثابت کنید:

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\phi)=0$$

حل

$$\vec{\nabla}\times(\phi\vec{\nabla}\phi)=\nabla\phi\times\nabla\phi+\phi\nabla\times\nabla\phi=0$$

۱-۹-۴- می‌دانیم که تاو $\vec{F}$ با تاو $\vec{G}$ برابر است. نشان دهید که اختلاف بین $\vec{F}$ و $\vec{G}$ یا یک مقدار ثابت و یا گرادیان یک تابع اسکالر است.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{G}$$

$\vec{F}-\vec{G}\ \Rightarrow$ کرل می‌گیریم $\quad \vec{\nabla}\times(\vec{F}-\vec{G})=\vec{\nabla}\times\vec{F}-\vec{\nabla}\times\vec{G}$

۱-۹-۵- معادلهٔ ناویه استوکس در دینامیک شاره‌ها حاوی جملهٔ غیرخطی $(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}$ است نشان دهید که تاو این جمله را می‌توان بصورت $-\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]$ نوشت.

حل

$$\vec{\nabla}\times\left[(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V}\right]=\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}V^2-\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]$$

$$=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}V^2-\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]=-\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]$$

۱-۹-۶- در معادلهٔ ناویه - استوکس در دینامیک شاره‌ها، برای شارش پایای یک شارهٔ چسبنده تراکم‌ناپذیر به جمله‌ای بصورت

$$\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]$$

می‌رسیم که در آن $\vec{V}$ چسبندگی شاره است، نشان دهید که این جمله در حالت خاص: $\vec{V}=\hat{i}\,V(y,z)$ صفر می‌شود.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V(y,z) & 0 & 0 \end{vmatrix}=\hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}V(y,z)\right)-\hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial y}V(y,z)\right)$$

$$\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\hat{k}\,V(y,z)\frac{\partial}{\partial z}V(y,z)+\hat{j}\,V(y,z)\frac{\partial}{\partial y}V(y,z)$$

$$\vec{\nabla}\times\left[\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & V(y,z)\dfrac{\partial}{\partial y}V(y,z) & V(y,z)\dfrac{\partial}{\partial z}V(y,z) \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}V(y,z)\frac{\partial}{\partial z}V(y,z)-\frac{\partial}{\partial z}V(y,z)\frac{\partial}{\partial y}V(y,z)\right]=0$$

۱ـ۹ـ۷ـ ثابت کنید که اگر u و v توابع اسکالر مشتق‌پذیر باشند. $(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)$ سیملوله است.

حل

راه اول

$$\vec{\nabla}.\left[(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)\right]=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}=0$$

راه دوم

از اتحاد $\vec{\nabla}.(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}.\vec{\nabla}\times\vec{a}-\vec{a}.\vec{\nabla}\times\vec{b}$ استفاده می‌کنیم.

$$\vec{\nabla}.\left[(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)\right]=\vec{\nabla}v.(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}u)-\vec{\nabla}u.(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}v)=0$$

۱ـ۹ـ۸ـ ϕ یک تابع اسکالر است که در معادلهٔ لاپلاس $\nabla^2\phi=0$ صدق می‌کند. نشان دهید که $\nabla\phi$ هم سیملوله‌ای و هم غیرچرخشی است.

حل $\nabla^2\phi=0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi=0 \Rightarrow$ $\nabla\phi$ سیملوله است.

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi=0$ همواره برقرار است. $\Rightarrow$ $\nabla\phi$ غیرچرخشی است.

۱ـ۹ـ۹ـ برای تابع اسکالر ψ نشان دهید که

$$(\vec{r}\times\vec{\nabla}).(\vec{r}\times\vec{\nabla})\psi=r^2\nabla^2\psi-r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-2r\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

(این اتحاد را در مختصات قطبی کروی، بخش ۲-۵ راحت‌تر می‌توان اثبات کرد)

حل

$$(\vec{r}\times\vec{\nabla}).(\vec{r}\times\vec{\nabla})\psi = r^2\nabla^2\psi - r^2\left[\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right]$$

$$= r^2\nabla^2\psi - 2r\frac{\partial\psi}{\partial r} - r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

$$\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \nabla^2\psi$$

$$(r\times\nabla).(r\times\nabla)\psi = r^2\nabla^2\psi - r^2\nabla^2\psi = 0$$

۱-۹-۱۰- شرط تعادل برای یک جرم منزوی (غیر چرخان) نظیر یک ستاره عبارت است از

$$\vec{\nabla}P + \rho\,\vec{\nabla}\phi = 0$$

که در آن P فشار کل، ρ چگالی ϕ پتانسیل گرانشی است. نشان دهید که در هر نقطه بردار عمود بر سطح با فشار ثابت، با بردار عمود بر سطح پتانسیل گرانشی ثابت موازی است.

حل

$$\vec{\nabla}P = -\rho\,\vec{\nabla}\phi \quad , \quad \vec{f} = -\vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}P = P\,\vec{f} \quad , \quad f = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

گرادیان، بردار عمود بر سطح و به طرف خارج است اما نیرو عمود به طرف داخل است درنتیجه این بردارها با هم هم راستا (موازی) اما در خلاف جهت یکدیگرند.

۱-۹-۱۱- در نظریهٔ پاؤلی دربارهٔ الکترون، به عبارت زیر بر می‌خوریم

$$(\vec{P}-e\vec{A})\times(\vec{P}-e\vec{A})\psi$$

که در آن ψ یک تابع اسکالر است. $\vec{A}$ پتانسیل برداری مغناطیسی است که مابین آن و القای مغناطیسی رابطهٔ $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ برقرار است. با این فرض که $\vec{P}=-i\vec{\nabla}$ نشان دهید که این رابطه به صورت $ie\vec{B}\psi$ ساده می‌شود.

حل

$$(\vec{P}-e\vec{A})\times(\vec{P}-e\vec{A})\psi = (-i\vec{\nabla}-e\vec{A})\times(-i\vec{\nabla}\psi-e\vec{A}\psi)$$

$$= -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi + ie\vec{\nabla}\times(\vec{A}\psi) + ie\vec{A}\times(\vec{\nabla}\psi) + e^2\vec{A}\times\vec{A}\psi$$

جملات اول و چهارم صفر می‌شوند.

$$= ie\left[(\vec{\nabla}\psi)\times\vec{A} + \psi(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right] + ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi$$

$$= -ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi + ie\psi\vec{B} + ie\vec{A}\times\vec{\nabla}\psi = ie\psi\vec{B}$$

۱-۹-۱۲- نشان دهید که هر یک از جوابهای معادلهٔ $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} - k^2\vec{A} = 0$ خودبه‌خود در

معادلهٔ برداری هلمهولتز $\nabla^2 \vec{A}+k^2\vec{A}=0$ و شرط سیملوله‌ای زیر صدق می‌کند. $\vec{\nabla}.\vec{A}=0$

[راهنمایی: ∇ را روی معادله اول اعمال کنید.]

حل

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}-k^2\vec{\nabla}.\vec{A}=0\\ \\ \vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{C}\quad,\quad\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\vec{C}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\vec{\nabla}.\vec{A}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}-k^2\vec{A}=0\xrightarrow{\text{بک کب}}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})-\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{A}-k^2\vec{A}=0$$

$$\Rightarrow\quad\nabla^2\vec{A}+k^2\vec{A}=0$$

۱ـ۹ـ۱۳ـ نظریهٔ رسانش گرمایی به معادلهٔ زیر منجر می‌شود.

$$\nabla^2\psi=K|\nabla\phi|^2$$

که در آن ϕ پتانسیلی است که در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند: $\nabla^2\phi=0$ نشان دهید که $\psi=\frac{1}{2}K\phi^2$ یکی از جوابهای این معادله است.

حل

$$\nabla\psi=\nabla(\frac{1}{2}K\phi^2)=\frac{1}{2}K(\nabla\phi^2)=K\nabla\phi$$

$$\nabla.\nabla\psi=\nabla^2\psi=\nabla.(K\nabla\phi)=K\nabla.\nabla\phi=K\nabla^2\phi$$

$$\Rightarrow\quad\nabla^2\psi=0$$

پس ψ یکی از جوابها است.

بخش ۱ـ۱۰ـ انتگرال‌گیری برداری — مسائل صفحه ۷۷

۱ـ۱۰ـ۱ـ میدان نیرویی را که بر یک نوسانگر خطی دو بعدی وارد می‌شود می‌توان بصورت زیر توصیف کرد.

$$\vec{F}=-\hat{i}kx-\hat{j}ky$$

کاری را که در رفتن از نقطه (۱,۱) به نقطه (۴,۴) در مقابل این نیرو در هر یک از مسیرهای خط راست زیر انجام می‌شود محاسبه کنید. (الف) $(1,1)\to(4,1)\to(4,4)$

(ب) $(1,1)\to(1,4)\to(4,4)$ (ج) $(1,1)\to(4,4)$ در امتداد خط $x=y$

برای این کار باید انتگرال $-\int_{(1,1)}^{(4,4)}\vec{F}.d\vec{r}$ را در طول هر مسیر محاسبه کنید.

حل

$$W=-\int F.dr=-\int F_x\,dy-\int F_y\,dy$$

(الف) $$W=-\int_{(۱,۱)}^{(۴,۱)} F_x\,dx-\int_{(۱,۱)}^{(۴,۱)} F_y\,dy-\int_{(۴,۱)}^{(۴,۴)} F_x\,dx-\int_{(۴,۱)}^{(۴,۴)} F_y\,dy$$

$$W=-\int_{(۱,۱)}^{(۴,۱)} -kx\,dx-\int_{(۴,۱)}^{(۴,۴)} -ky\,dy=\frac{kx^۲}{۲}\Bigg|_۱^۴+\frac{ky^۲}{۲}\Bigg|_۱^۴\ \Rightarrow$$

$$W=۸K-\frac{K}{۲}+۸K-\frac{K}{۲}=۱۵K$$

(ب) $$W=-\int_{(۱,۱)}^{(۱,۴)} F_y\,dy-\int_{(۱,۴)}^{(۱,۴)} F_x\,dx=\frac{ky^۲}{۲}\Bigg|_۱^۴+\frac{kx^۲}{۲}\Bigg|_۱^۴=۱۵k$$

(ج) $$W=-\int_{(۱,۱)}^{(۴,۴)} F_x\,dx-\int_{(۱,۱)}^{(۴,۴)} F_y\,dy=\frac{kx^۲}{۲}\Bigg|_۱^۴+\frac{ky^۲}{۲}\Bigg|_۱^۴=۱۵k$$

۱-۱۰-۲ کاری راکه در مقابل میدان نیروی $F=\frac{-iy}{x^۲+y^۲}+\frac{jx}{x^۲+y^۲}$ روی دایرهٔ واحد در صفحه xy (الف) در جهت پاد ساعتگرد از ۰ تا π (ب) در جهت ساعتگرد از ۰ تا $-\pi$ انجام می‌شود محاسبه کنید توجه کنید که کار انجام شده به مسیر بستگی دارد.

حل

$$x^۲+y^۲=R^۲=۱$$

$$W=-\int \vec{F}.\vec{dr}=-\int F_x\,dx-\int F_y\,dy=-\int \frac{-y}{x^۲+y^۲}dx-\int \frac{+x}{x^۲+y^۲}dy$$

$$=\int y\,dx-\int x\,dy$$

$$\begin{cases} x=R\,\mathrm{Cos}\theta \ \Rightarrow\ dx=-\mathrm{Sin}\theta\,d\theta \\ y=R\,\mathrm{Sin}\theta \ \Rightarrow\ dy=\mathrm{Cos}\theta\,d\theta \end{cases}$$

$$W=\int \mathrm{Sin}\,\theta(-\mathrm{Sin}\theta\,d\theta)-\int \mathrm{Cos}\theta\,(\mathrm{Cos}\theta d\theta)$$

$$=-\int \mathrm{Sin}^۲\theta\,d\theta-\int \mathrm{Cos}^۲\theta\,d\theta=-\int(\mathrm{Sin}^۲\theta+\mathrm{Cos}^۲\theta)\,d\theta$$

$$۰\to\pi:\ W=-\int_۰^{\pi} d\theta=-\theta\Bigg|_۰^{\pi}=-\pi$$

$$\circ \to -\pi : W = -\int_{\circ}^{-\pi} d\theta = -\theta \Big|_{\circ}^{-\pi} = \pi$$

۱ـ۱۰ـ۳ـ کاری را که در رفتن از نقطه (۱,۱) به نقطه (۳,۳) انجام می‌دهید محاسبه کنید. نیرویی را که اعمال می‌کنید به قرار $\vec{F} = \hat{i}(x-y) + \hat{j}(x+y)$ بگیرید. مسیری را که اختیار می‌کنید به وضوح مشخص کنید توجه کنید که این میدان نیرو ناپایستار است.

حل دو مسیر انتخاب می‌کنیم.

الف) $(1,1) \to (1,3) \to (3,3)$

$$W = -\int F_x dx - \int F_y dy = -\int_{(1,1)}^{(1,3)} (x+y)dy - \int_{(1,3)}^{(3,3)} (x-y)dx$$

$$W = -\int_{(1,1)}^{(1,3)} (1+y)dy - \int_{(1,3)}^{(3,3)} (x-3)dx = -(y+\frac{y^2}{2}) \Big|_1^3 - (\frac{x^2}{2} - 3x) \Big|_1^3 \Rightarrow$$

$$W = (1+\frac{1}{2}) - (3+\frac{9}{2}) + (\frac{1}{2} - 3) - (\frac{9}{2} - 9) = 4$$

ب) $(1,1) \to (3,1) \to (3,3)$

$$W = -\int F_x dx - \int F_y dy = -\int_{(1,1)}^{(3,1)} (x-y)dx - \int_{(3,1)}^{(3,3)} (x+y)dy$$

$$= -\int_{(1,1)}^{(3,1)} (x-1)dx - \int_{(3,1)}^{(3,3)} (3+y)dy = (-\frac{x^2}{2} + x) \Big|_1^3 - (3y + \frac{y^2}{2}) \Big|_1^3$$

$$= (-\frac{9}{2} + 3) - (-\frac{1}{2} + 1) + (3 + \frac{1}{2}) - (9 + \frac{9}{2}) = 12$$

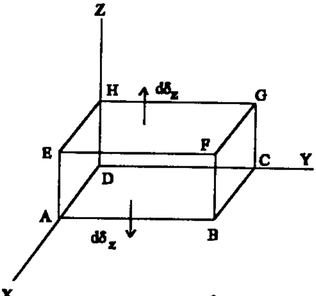
۱ـ۱۰ـ۴ـ $\oint \vec{r} \cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید.

[یادآوری: نماد $\oint$ به معنای بسته بودن حلقهٔ مسیر انتگرال‌گیری است].

حل
$$\oint \vec{r} \cdot d\vec{r} = \oint (x dx + y dy + z dz) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 \Big|_A^A = \circ$$

۱ـ۱۰ـ۵ـ عبارت: $\frac{1}{3}\int_S \vec{r} \cdot d\vec{\sigma}$ را روی مکعب واحد که با نقطهٔ (۰,۰,۰) و نقطه‌های به فاصلهٔ

واحد از این نقطه روی هر یک از محورهای x، y و z تعریف می‌شود محاسبه کنید. توجه کنید که: (الف) $\vec{r}\cdot d\vec{\sigma}$ برای سه تا از سطوح برابر صفر است و (ب) سهم هر یک از سه سطح دیگر در انتگرال برابر است.



حل

$$\frac{۱}{۳}\int_S \vec{r}\cdot d\vec{\sigma}=\frac{۱}{۳}\int(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)\cdot d\vec{\sigma}$$

$$=\frac{۱}{۳}\int_{ABCD}\underset{z=۰}{(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)(-kd\sigma_z)}=۰ \qquad (I)$$

$$\frac{۱}{۳}\int_{EFGH}\vec{r}\cdot d\vec{\sigma}=\frac{۱}{۳}\int(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)\,(kdx\,dy)=\int_{Z=۱} zdx\,dy=۱ \qquad (II)$$

برای سطوح ADEH و CDGH رابطه (I) و برای سطوح ABFE و BCGF رابطه (II) برقرار است.

$$\frac{۱}{۳}\int_S \vec{r}\cdot d\vec{\sigma}=\frac{۱}{۳}\left[\int_{EFGH}\vec{r}\cdot d\vec{\sigma}+\int_{BCGF}\vec{r}\cdot d\vec{\sigma}+\int_{ABFE}\vec{r}\cdot d\vec{\sigma}\right]=\frac{۱}{۳}\times۳=۱$$

۱ـ۱۰ـ۶ از طریق بسط انتگرال سطحی نشان دهید که

$$\lim_{\int d\tau\to ۰}\frac{\int_S d\vec{\sigma}\times\vec{V}}{\int d\tau}=\vec{\nabla}\times\vec{V}$$

[راهنمایی: حجم دیفرانسیلی dxdydz را اختیار کنید.]

حل

$$\int d\vec{\sigma}\times\vec{V}=\hat{i}\int(d\sigma_y V_z-d\sigma_z V_y)+\hat{j}\int(d\sigma_z V_x-d\sigma_x V_z)+\hat{k}\int(d\sigma_x V_y-d\sigma_y V_x)$$

$$=\hat{i}\int\Big[dx\,dz(V_z+\frac{\partial V_z}{\partial z}\frac{dz}{۲})-dx\,dz(V_z-\frac{\partial V_z}{\partial z}\frac{dz}{۲})-dx\,dy(V_y+\frac{\partial V_y}{\partial y}\frac{dy}{۲})$$

$$+dx\,dy(V_y-\frac{\partial V_y}{\partial y}\frac{dy}{۲})\Big]+j\int\Big[dx\,dy\,(V_x+\frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{۲})-dx\,dy\,(V_x-\frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{۲})$$

$$-dy\,dz(V_z+\frac{\partial V_z}{\partial z}\frac{dz}{۲})+dy\,dz(V_z-\frac{\partial V_z}{\partial z}\frac{dz}{۲})\Big]+\hat{k}\int\Big[dx\,dz(V_y+\frac{\partial V_y}{\partial y}\frac{dy}{۲})$$

$$-dy\,dz(V_y-\frac{\partial V_y}{\partial y}\frac{dy}{۲})-dx\,dz(V_x+\frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{۲})\Big]+dx\,dz(V_x-\frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{dx}{۲})\Big]$$

$$=\hat{i}\int(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z})dx\,dy\,dz+\hat{j}\int(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x})dx\,dy\,dz+\hat{k}\int(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y})dx\,dy\,dz$$

$$=\hat{i}(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z})\int d\tau+\hat{j}(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x})\int d\tau+\hat{k}(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y})\int d\tau$$

$$=(\vec{\nabla}\times\vec{V})\int d\tau \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{\int d\vec{\sigma}\times\vec{V}}{\int d\tau}$$

بخش ۱ـ۱۱ـ قضیهٔ گاوس

مسائل صفحه ۸۱

۱ـ۱۱ـ۱ـ با استفاده از قضیهٔ گاوس ثابت کنید که برای سطح بستهٔ S داریم $\int_S d\vec{\sigma}=۰$

حل $\vec{V}$: بردار ثابت غیر صفر

$$\int_S \vec{V}.d\vec{\sigma}=\int_V \vec{\nabla}.\vec{V}d\tau=۰ \Rightarrow$$

$$\vec{V}\int_S d\vec{\sigma}=۰ \Rightarrow |\vec{V}|\neq ۰ \Rightarrow \boxed{\int_S d\sigma=۰}$$

۱ـ۱۱ـ۲ـ نشان دهید که $\frac{۱}{۳}\int_S \vec{r}\,.\,d\vec{\sigma}=V$ که در آن V حجمی است که توسط سطح بستهٔ S محاط شده است. [یادآوری: این تعمیم مسئله ۱ـ۱۰ـ۵ است].

حل

$$\frac{۱}{۳}\int_S \vec{r}\,.\,d\vec{\sigma}=\frac{۱}{۳}\int_V \underbrace{\vec{\nabla}.\vec{r}}_{۳}\,d\tau=\frac{۱}{۳}\int_V ۳d\tau=\int d\tau=V$$

۱ـ۱۱ـ۳ـ اگر $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ نشان دهید که برای هر سطح بستهٔ S داریم: $\int_S \vec{B}.d\vec{\sigma}=۰$

حل
$$\int_S \vec{B}.d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla}.\vec{B}\,d\tau = \int_V \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})\,d\tau = ۰$$

۱-۱۱-۴- فرض کنید که ψ یکی از جوابهای معادلهٔ لاپلاس در داخل حجم V باشد (و مشتقهایی از آن که در لاپلاسی ظاهر می‌شوند پیوسته باشند). ثابت کنید که انتگرال مشتق قائم ψ ($\frac{\partial\psi}{\partial n}$ یا $\vec{\nabla}\psi.\vec{n}$) روی هر سطح بسته در داخل V، صفر است.

حل
$$\int \vec{\nabla}\phi.\vec{n}\,d\vec{\sigma} = \oint_S \vec{\nabla}\phi\,d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi\,d\tau = \int \underbrace{\nabla^۲}_{\text{معادله لاپلاس}}\phi\,d\tau = ۰$$

۱-۱۱-۵- در تشابه با تعریفهای انتگرالی گرادیان، دیورژانس و تاو در بخش ۱-۱۰ نشان دهید

$$\nabla^۲\phi = \text{Lim}\frac{\int \vec{\nabla}\phi.d\vec{\sigma}}{\int d\tau}$$

$$\int d\tau \to ۰$$

حل
$$\oint_S \vec{\nabla}\phi.d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi\,d\tau = \int_V \nabla^۲\phi\,d\tau = \nabla^۲\phi\int_V d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^۲\phi = \frac{\int \vec{\nabla}\phi\,.d\vec{\sigma}}{\int d\tau}$$

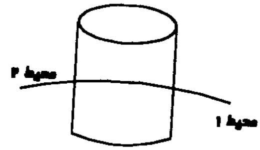
۱-۱۱-۶- بردار جابجایی الکتریکی، $\vec{D}$، در معادله ماکسول $\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho$ صدق می‌کند که در آن ρ چگالی بار (به ازای یکای حجم) است در مرز بین دو محیط چگالی بار سطحی σ (به ازای واحد مساحت) وجود دارد. نشان دهید که یک شرط مرزی برای $\vec{D}$ به قرار زیر وجود دارد:

$$(\vec{D}_۲ - \vec{D}_۱).\vec{n}=\sigma$$

که در آن n بردار یکهٔ عمود بر سطح و به سوی بیرون از محیط اول است. [راهنمایی: قرص بسیار کوچکی مانند شکل زیر در نظر بگیرید.]

حل

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho \Rightarrow \int_V \vec{\nabla}.\vec{D}d\tau=\int \rho d\tau=q \Rightarrow$$



$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{D}d\tau=\int_S \vec{D}.d\vec{\sigma}=q=\sigma.\Delta S \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int \vec{D}_2.d\vec{\sigma}}_{\text{ناحیه دوم}}+\underbrace{\int \vec{D}_1.d\vec{\sigma}}_{\text{ناحیه اول}}=\int \vec{D}_2.\hat{n}_2 d\vec{\sigma}+\int \vec{D}_1.\hat{n}_1 d\vec{\sigma}=\sigma\Delta S$$

$$\Rightarrow \vec{D}_2\hat{n}_2\Delta S+\vec{D}_1.\hat{n}_1\Delta S=\sigma\Delta S \Rightarrow \vec{D}_2.\hat{n}_2+\vec{D}_1.\hat{n}_1=\sigma \quad (2)$$

$$n_2=-n_1=n \quad (1)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \vec{D}_2.\hat{n}-\vec{D}_1.\hat{n}=\sigma \Rightarrow (\vec{D}_2-\vec{D}_1).\hat{n}=\sigma$$

۱-۱۱-۷ در معادلهٔ ۱-۶۲ الف به جای V میدان الکتریکی E و به جای f پتانسیل الکترومغناطیسی ϕ را بنشانید و نشان دهید: $\int \rho\phi d\tau=\varepsilon_0\int E^2 d\tau$

این اتحاد متناظر با یک انتگرال‌گیری جزء به جزء سه بعدی است.

[راهنمایی: $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$ و $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ می‌توانید فرض کنید که ϕ به ازای مقادیر بزرگ r دست کم مانند r^{-1} صفر می‌شود.]

حل معادله ۱-۶۲ الف

$$\vec{\nabla}.(f\vec{V})=(\vec{\nabla}f).\vec{V}+f\vec{\nabla}.\vec{V}$$

$$\vec{\nabla}.(\phi\vec{E})=(\vec{\nabla}\phi).\vec{E}+\phi\vec{\nabla}.\vec{E}$$

از رابطه فوق روی حجم انتگرال می‌گیریم:

$$\int \vec{\nabla}.(\phi\vec{E})d\tau=\int(\vec{\nabla}\phi).\vec{E}d\tau+\int \phi\vec{\nabla}.\vec{E}d\tau$$

$$\oint \phi\vec{E}d\sigma=\int -\vec{E}.\vec{E}d\tau+\int \phi\frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau=0$$

$$-\int E^2 d\tau+\frac{1}{\varepsilon_0}\int \phi\rho d\tau=0 \Rightarrow \int \rho\phi d\tau=\varepsilon_0\int E^2 d\tau$$

۱-۱۱-۸ توزیع خاصی از جریانهای الکتریکی حالت پایا در فضا جایگزیده است. سطح مرزی را آنقدر دور اختیار می‌کنیم که چگالی جریان $\vec{J}$ در همه جای سطح برابر صفر باشد. نشان دهید که $\int \vec{J}d\tau=0$

[راهنمایی: هر بار یکی از مولفه‌های $\vec{J}$ را در نظر بگیرید. با داشتن $\vec{\nabla}.\vec{J}=0$ نشان دهید: $\vec{J}_i=\nabla . x_i\vec{J}$ و قانون گاؤس را بکار ببرید.]

حل

$$\vec{\nabla}.\vec{J}=0 \quad \Rightarrow \quad J_i=\nabla . x_i\vec{J}$$

$$i=1 \ , \ 2$$

$$i=1 \ \Rightarrow \ J_x=\vec{\nabla}.x\vec{J} \quad , \quad i=2 \ \Rightarrow \ J_y=\vec{\nabla}.y\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}.x\vec{J}=\frac{\partial}{\partial x}(xJ_x)+\frac{\partial}{\partial y}(xJ_y)+\frac{\partial}{\partial z}(xJ_z)=J_x+x\frac{\partial J_x}{\partial x}+x\frac{\partial J_y}{\partial y}+x\frac{\partial J_z}{\partial z}$$

$$=J_x+x\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}\right)=J_x+x\nabla.J=J_x$$

$$\int J_x d\tau=\int_V \nabla.(x\vec{J})d\tau=\int_S x\vec{J}d\vec{\sigma}\rightarrow \left.\begin{array}{l}\int J_x d\tau=0\\ \int J_y d\tau=0\\ \int J_z d\tau=0\end{array}\right\} \Rightarrow \int J d\tau=0$$

۱-۱۱-۹- می‌توان نشان داد که برای ایجاد دستگاه جایگزیده‌ای از جریانهای الکتریکی پایا (با چگالی جریان $\vec{J}$) و میدانهای مغناطیسی باید کاری انجام داد که عبارت است از:

$$W=\frac{1}{2}\int \vec{H}.\vec{B}d\tau$$

این رابطه را به رابطه مقابل تبدیل کنید.

$$W=\frac{1}{2}\int \vec{J}.\vec{A}d\tau$$

که در آن $\vec{A}$ پتانسیل برداری مغناطیسی است:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$$

[راهنمایی: در معادلهٔ ماکسول جمله مربوط به جریان جابجایی را صفر بگیرید: $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$ اگر میدانها و جریانها جایگزیده باشند می‌توانیم سطح مرزی را چنان دور بگیریم که انتگرال میدانها و جریانها روی آن صفر شود.]

حل یکی از معادلات ماکسول

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$W=\frac{1}{2}\int \vec{H}.\vec{B}d\tau=\frac{1}{2}\int H(\nabla\times A)d\tau=-\frac{1}{2}\int(\nabla\times H).Ad\tau=\frac{1}{2}\int\vec{J}.\vec{A}d\tau$$

بخش ۱ـ۱۲ـ قضیه استوکس

مسائل صفحه ۸۵

۱ـ۱۲ـ۱ـ داریم $t=-\hat{i}y+\hat{j}x$ به کمک قضیهٔ استوکس نشان دهید که انتگرال روی یک منحنی بستهٔ پیوسته در صفحه xy عبارت است از مساحت محاط شده درون آن منحنی.

$$\frac{1}{2}\oint t.d\lambda=\frac{1}{2}\oint(x\,dy-y\,dx)=A$$

حل

$$\frac{1}{2}\oint \vec{t}.d\vec{\lambda}=\frac{1}{2}\int_s(\vec{\nabla}\times\vec{t}).d\vec{\sigma}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{t}.d\vec{\sigma}=d\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\times\vec{t}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & d\sigma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$=d\sigma(1+1)=2\sigma=2dx\,dy\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\oint\vec{t}.d\vec{\lambda}=\frac{1}{2}\int_s 2dx\,dy=A$$

۱ـ۱۲ـ۲ـ در محاسبهٔ گشتاور مغناطیسی یک حلقهٔ جریان به انتگرال خطی زیر برمی‌خوریم.

$$\oint\vec{r}\times d\vec{r}$$

(الف) این انتگرال را روی محیط یک حلقه جریان (در صفحه xy) محاسبه کنید و نشان دهید که بزرگی عددی یا اسکالر این انتگرال خطی دو برابر مساحت احاطه شده است.

(ب) محیط یک بیضی بنابر تعریف، عبارت است از $\vec{r}=\hat{i}\,a\cos\theta+\hat{j}\,b\sin\theta$ با استفاده از بند (الف) نشان دهید که مساحت بیضی برابر πab است.

حل (الف) $\oint\vec{r}\times d\vec{r}=\oint r\,dr\sin\frac{\pi}{2}\hat{k}\quad,\quad r=cte\ \Rightarrow\ r(2\pi r)\hat{k}=2A\hat{k}$

(ب) معادله بیضی : $\vec{r}=\hat{i}\,a\cos\theta+\hat{j}\,b\sin\theta$

$$\vec{r}\times d\vec{r}=\hat{k}ab\,d\theta,\ d\vec{r}=-\hat{i}\,a\sin\theta+\hat{j}\,b\cos\theta$$

$$\oint\vec{r}\times d\vec{r}=\int\vec{k}\,ab\,d\theta=\hat{k}ab\int d\theta=2\pi ab\hat{k}$$

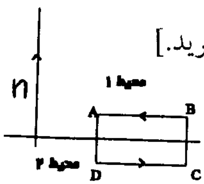
با مقایسه با بند (الف) نتیجه اینکه $2\pi ab=2A$ پس $\pi ab=A$

۱-۱۲-۴- میدان مغناطیسی $\vec{H}$ در حالت پایا در معادلهٔ ماکسول $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$ صدق می‌کند که در آن $\vec{J}$ چگالی جریان (به ازای یک متر مربع) است. در مرز بین دو محیط، یک چگالی جریان سطحی $\vec{k}$ (به ازای یک متر) وجود دارد. نشان دهید شرط مرزی روی $\vec{H}$ بصورت زیر است.

$$\hat{n}\times(\vec{H}_{۲}-\vec{H}_{۱})=\vec{k}$$

که در آن n بردار یکهٔ عمود بر سطح و به سوی بیرون محیط است.

[راهنمایی: حلقهٔ باریکی عمود بر مرز مشترک، مانند شکل در نظر بگیرید.]



حل

$$\oint\vec{H}.d\vec{\lambda}=\int\vec{\nabla}\times\vec{H}\,d\vec{\sigma}$$

$$\oint H.d\lambda=\int_{AB}\vec{H}.d\vec{\lambda}+\int_{CD}\vec{H}.d\vec{\lambda}=\int(\hat{n}\times\vec{H}_{۲}).d\vec{\lambda}-\int(\hat{n}\times\vec{H}_{۱}).d\vec{\lambda}$$

$$=\int\hat{n}\times(\vec{H}_{۲}-\vec{H}_{۱}).d\vec{\lambda}=\int\vec{\nabla}\times\vec{H}\,d\vec{\sigma}=\int\vec{J}.d\vec{\sigma}=\int\vec{k}.d\vec{\lambda}$$

$$\Rightarrow\quad\hat{n}\times(\vec{H}_{۲}-\vec{H}_{۱})=\vec{K}$$

۱-۱۲-۵- با استفاده از معادله ماکسول، $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$ که در آن $\vec{J}$ چگالی جریان است و $\vec{E}=۰$ نشان دهید:

$$\oint\vec{H}.d\vec{r}=I$$

که در آن I جریان الکتریکی خالص محصور در انتگرال خطی است. این دو معادله صورتهای دیفرانسیلی و انتگرالی قانونی آمپر در مبحث مغناطیس‌اند.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$$

$$\oint_C\vec{H}.d\vec{r}=\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{H})d\vec{\sigma}=\int_S\vec{J}\,d\vec{\sigma}=I$$

۱-۱۲-۶- جریان الکتریکی در حلقهٔ به شعاع R، القای مغناطیسی B را تولید می‌کند نشان دهید که بزرگی پتانسیل برداری $\vec{A}$ $(\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A})$ در حلقه عبارت است از $|A|=\frac{\phi}{۲\pi R}$ که در آن ϕ کل شار مغناطیسی است که از حلقه می‌گذرد.

[یادآوری: A بر حلقه مماس است.]

حل

$$\phi=\int_S\vec{B}.d\vec{S}=\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{A}).d\vec{S}=\oint_C\vec{A}.d\vec{\ell}\quad\Rightarrow$$

$$\phi=\oint_C |A|\,|d\ell|\,\cos\theta\,,\ \theta=0 \ \Rightarrow\ \phi=|A|\oint_C d\ell$$

$$\Rightarrow\ \phi=|A|\ 2\pi R\ \Rightarrow\ |A|=\frac{\phi}{2\pi R}$$

۱ـ۱۲ـ۷ـ هرگاه S سطح بسته‌ای باشد ثابت کنید:

$$\int_S \vec\nabla\times\vec V.d\vec\sigma=0$$

حل

راه اول

$$\int_S \vec\nabla\times\vec V.d\vec\sigma=\int_V \vec\nabla.(\vec\nabla\times\vec V)d\vec\tau=0$$

راه دوم

$$\oint_{\text{کل}}\vec V.d\vec\lambda=\int_S \vec\nabla\times\vec V d\vec\sigma$$

$$\int_S \vec\nabla\times\vec V.d\vec\sigma=\int_{S_1}\vec\nabla\times\vec V.d\vec\sigma+\int_{S_2}\vec\nabla\times\vec V.d\vec\sigma$$

$$=\oint\vec V.d\vec\lambda+\int\vec V.(-d\vec\lambda)=0$$

۱ـ۱۲ـ۸ـ $\oint\vec r.d\vec r$ (در مسئله ۱-۱۰-۴) را توسط قضیه استوکس محاسبه کنید.

حل

$$\oint_C \vec r.d\vec r=\int(\vec\nabla\times\vec r).d\vec\sigma=0$$

۱ـ۱۲ـ۹ـ ثابت کنید:

$$\oint u\vec\nabla v.d\vec\lambda=-\oint v\vec\nabla u\,d\vec\lambda$$

حل (۱)

$$\int\vec\nabla(uv).d\vec\lambda=\oint v,\vec\nabla u\,d\vec\lambda+\oint u\vec\nabla v\,d\vec\lambda$$

(۲)

$$\int_S\vec\nabla(uv).d\vec\lambda=\int_S\vec\nabla\times\left[\vec\nabla(uv)\right]d\vec\sigma=0$$

$$(1),(2)\ \Rightarrow\ \oint v.\vec\nabla u\,d\vec\lambda=-\int u\vec\nabla v\,d\vec\lambda$$

۱ـ۱۲ـ۱۰ـ ثابت کنید:

$$\oint u\vec\nabla v.d\vec\lambda=\int_S(\vec\nabla u)\times(\vec\nabla v).d\vec\sigma$$

حل

$$\oint_C u\vec{\nabla}v.d\vec{\lambda}=\oint_S \vec{\nabla}\times(u\vec{\nabla}v)d\vec{\sigma}$$

$$=\oint_S \vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v\,d\vec{\sigma}+\oint_S \underbrace{u\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}.v)}_{\text{صفر}}d\vec{\sigma}$$

$$=\oint_S (\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)d\vec{\sigma}$$

بخش ۱ـ۱۳ـ نظریهٔ پتانسیل مسائل صفحه ۹۸

۱ـ۱۳ـ۱ـ اگر نیروی $\vec{F}$ بصورت زیر معلوم باشد.

$$\vec{F}=(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{n}(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)$$

عبارات زیر را بیابید.

(الف) $\vec{\nabla}.\vec{F}$ (ب) $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ (ج) پتانسیل اسکالر $\phi(x,y,z)$ به گونه‌ای که $\vec{F}=-\vec{\nabla}\phi$

(د) پتانسیل اسکالر به ازای چه مقداری برای نمای n هم در مبدأ و هم در بی‌نهایت واگرا می‌شود؟

حل

(الف) $\vec{\nabla}.\vec{F}=\vec{\nabla}F(r)+r\frac{dF}{dr}=(3+2n)r^{2n}$

(ب) $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{\nabla}\times F(r)r=0$

(ج) $\phi=-\int_0^r F.dr=-\int_0^r r^{2n-1}dr \Rightarrow \phi=-\frac{1}{2n+2}r^{2n+2}$

(د) $n=-1 \Rightarrow \phi=-Ln\ r$

۱ـ۱۳ـ۲ـ کره‌ای به شعاع a بطور یکنواخت (در سرتاسر حجم خود) باردار شده است. پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(r)$ را به ازای $0\leq r\leq\infty$ به دست آورید.

[راهنمایی: در بخش ۱-۱۴ نشان داده می‌شود که نیروی کولونی وارد بر بار آزمون در $r=r_0$ فقط به بار در فواصل کمتر از r_0 بستگی دارد و از بار واقع در فواصل بزرگتر از r_0 مستقل است. توجه کنید که این مطلب فقط برای توزیع بار با تقارن کروی صادق است.]

حل

خارج کره $r>a \Rightarrow V=-\int \vec{E}.d\vec{r}$

$$V(r) - V\,(\text{مبدأ}) = -\int_{\text{مبدأ}}^{r} \vec{E}.d\vec{r} = -\int_{\text{مبدأ}}^{r} \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\hat{r}.d\vec{r}$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}dr = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\int_{\infty}^{r} -\frac{dr}{r^۲} = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow E\,۴\pi r^۲ = \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow$$

$$E\,۴\pi r^۲ = \frac{q}{\frac{۴}{۳}\pi a^۳\varepsilon_\circ}\frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow E_{in} = \frac{qr}{۴\pi\varepsilon_\circ a^۳}$$

۱-۱۳-۳- محاسبهٔ حرکت یک ذره در یک پتانسیل معلوم مسئله‌ای معمولی در مکانیک کلاسیک است بنابر قانون گاؤس، در بخش ۱-۱۴ نیروی گرانشی وارد بریکای جرم $m_\circ$ به فاصلهٔ $r_\circ$ از مرکز کرهٔ جرم‌دار غیر چرخان با چگالی یکنواخت ($\rho_\circ$) از بایش جرم واقع در $r \leq r_\circ$ حاصل می‌شود. جرم واقع در $r > r_\circ$ نقشی در این نیرو ندارد.

(الف) نشان دهید که $\frac{\vec{F}}{m_\circ} = -(\frac{۴\pi G\rho_\circ}{۳})r$ ، $\circ \leq r \leq a$ که در آن a شعاع کره است.

(ب) پتانسیل گرانشی متناظر را در $\circ \leq r \leq a$ بیابید.

(ج) تصور کنید که یک سوراخ قائم در زمین حفر شده باشد بطوریکه سوراخ از مرکز کره زمین بگذرد و تا طرف مقابل روی کرهٔ زمین ادامه داشته باشد. با چشمپوشی از چرخش زمین و با فرض اینکه چگالی ثابت و برابر $\rho_\circ = ۵/۵ g/Cm^۳$ باشد. ماهیت حرکت ذره‌ای را که در این سوراخ رها شده باشد، تعیین کنید دورهٔ حرکت این ذره چقدر است؟

[یادآوری: $\vec{F} \propto \vec{r}$ عملاً تقریب ضعیفی است. با توجه به متغیر بودن چگالی تقریب $\vec{F} = Cte$ در نیمهٔ خارجی خط شعاعی و $\vec{F} \propto \vec{r}$ در نیمه درونی آن، تقریب به مراتب بهتری است.]

حل (الف)

$$\left.\begin{array}{l} F_e = K\frac{q_۱q_۲}{r^۲} \quad F_g = G\frac{m_۱m_۲}{r^۲} \Rightarrow G \text{ مشابه } K = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ} \\ \varepsilon_\circ \oint E.dS = q \xrightarrow[\text{گرانش}]{\text{مشابه آن برای}} G\oint E_g.dS = m \Rightarrow \oint E_g.dS = \frac{m}{G} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\oint E_g.dS = \frac{m}{K} \Rightarrow \oint E_g(dS)\,Cos\,\circ = \frac{m}{K} \Rightarrow E = \frac{m}{۴\pi r^۲K} = \frac{\rho v}{۴\pi r^۲K}$$

$$F=Em_\circ \Rightarrow \frac{F}{m_\circ}=E \quad , \quad \frac{F}{m_\circ}=\frac{\rho v}{4\pi r^2 K}=\frac{(\frac{4}{3}\pi r^3)\rho}{4\pi r^2 K}=\frac{\rho r}{3K} \qquad (1)$$

$$K_E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ} \xrightarrow{\text{مشابه}} K_g=\frac{1}{4\pi G}, \frac{F}{m_\circ}=\frac{4\rho\pi G}{3}r \Rightarrow$$

$$F=\frac{4\pi Gm_\circ\rho}{3}r \Rightarrow \phi=-\int Fdr=-\frac{4\pi G\rho m_\circ r^2}{6} \qquad (ب)$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m_\circ}{K}} \quad , \quad (1) \Rightarrow F=k'r \qquad (ج)$$

$$T=\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho r}}$$

۱-۱۳-۴- مبدأ مختصات دکارتی را در مرکز زمین بگیرید. ماه را روی محور Z به فاصله ثابت R (فاصله مرکز تا مرکز) از مبدأ بگیرید. نیرویی کشندی که ماه بر ذرات واقع بر سطح زمین (در نقطه x، y و z) وارد می‌آورد عبارت است از:

$$F_x=-GMm\frac{x}{R^3} \quad , \quad F_y=-GMm\frac{y}{R^3} \quad , \quad F_z=+GMm\frac{2z}{R^3}$$

پتانسیلی را محاسبه کنید که این نیروی کشندی را می‌دهد.

حل

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}V \Rightarrow V=-\int F.dr=-\int F_x dx-\int F_y dy-\int F_z dz$$

$$V=\frac{GMm}{R^3}\left[\int xdx+\int ydy-\int 2zdz\right]$$

$$V=\frac{GMm}{R^3}(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z^2)=\frac{GMm}{2R^3}(x^2+y^2-2z^2)$$

۱-۱۳-۵- مولفه‌های القای مغناطیسی B حاصل از سیم مستقیم و دراز حاصل جریان I عبارت‌اند از:

$$\vec{B}=\frac{\mu_\circ I}{2\pi}(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, \circ)$$

پتانسیل برداری مغناطیسی A را بیابید.

حل

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_3}{\partial y}-\dfrac{\partial a_2}{\partial z}=\dfrac{\mu_\circ I}{2\pi}\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) & (1) \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial z}-\dfrac{\partial a_3}{\partial x}=\dfrac{\mu_\circ I}{2\pi}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) & (2) \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x}-\dfrac{\partial a_1}{\partial y}=0 & (3) \end{cases}$$

$$a_2=0 \Rightarrow \frac{\partial a_1}{\partial y}=0 \Rightarrow a_1=0 \Rightarrow \frac{\partial a_3}{\partial y}=\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow$$

$$a_3=\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\int\frac{-y\,dy}{x^2+y^2}+f_3(x,y)=\frac{\mu_\circ I}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Ln}(x^2+y^2)+f_3$$

از $(2)\,,\ a_1=0 \Rightarrow 0+\dfrac{\mu_\circ I}{4\pi}\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2}\right)-\dfrac{\partial f_3}{\partial x}=\dfrac{\mu_\circ I}{2\pi}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) \Rightarrow$

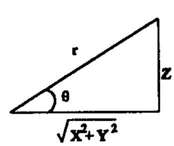
$$f_3=0 \Rightarrow a_3=-\frac{\mu_\circ I}{4\pi}(\mathrm{Ln}(x^2+y^2)) \Rightarrow A=\frac{\mu_\circ I}{4\pi}\left[-K\mathrm{Ln}(x^2+y^2)\right]$$

۱-۱۳-۶- اگر داشته باشیم $\vec{B}=\dfrac{\vec{r}_\circ}{r^2}=\left(\dfrac{x}{r^3},\dfrac{y}{r^3},\dfrac{z}{r^3}\right)$ بردار $\vec{A}$ را چنان بیابید که $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$. یکی از جوابهای ممکن به صورت زیر است.

$$\vec{A}=\frac{iyz}{r(x^2+y^2)}-\frac{jxz}{r(x^2+y^2)}$$

حل

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}=\dfrac{x}{r^3} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}=\dfrac{y}{r^3} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}=\dfrac{z}{r^3} \end{cases}$$



$$A_z=0 \Rightarrow -\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{x}{r^3} \Rightarrow A_y=-x\int\frac{dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$A_y=-x\int\frac{dz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{z^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}},\ z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\tan\theta \Rightarrow dz=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Sec}^2\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad A_y = -x\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(x^2+y^2)(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x}{(x^2+y^2)}\int\frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{-xz}{(x^2+y^2)r}$$

بهمین نحو داریم $\quad A_x = \dfrac{yz}{r(x^2+y^2)}$

۱-۱۳-۷- نشان دهید هر بردار ثابت $\vec{B}$ (در هر جهتی) در دو معادله زیر صدق می‌کند.

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r}) \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

حل

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times(\frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{r}) + (\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{r}(\vec{\nabla}.\vec{B}) - (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{r}\right] = \vec{B}$$

۱-۱۳-۸- بردار $\vec{B}$ بصورت حاصلضرب دو گرادیان تعریف می‌شود.

$\vec{B} = (\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)$ که در آن u و v توابعی اسکالرند.

(الف) نشان دهید $\vec{B}$ سیملوله‌ای است.

(ب) نشان دهید: $\vec{A} = \frac{1}{2}(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u)$

پتانسیل برداری مربوط به $\vec{B}$ است به گونه‌ای که $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

حل

(الف)

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \nabla.\left[(\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v)\right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(ب)

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}) + \hat{j}(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}) + \hat{k}(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}$$

$$\vec{B} = (\vec{\nabla}u)\times(\vec{\nabla}v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i}(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}) +$$

$$\hat{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

با مقایسه مولفه به مولفه به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\vec{A}=\frac{۱}{۲}(u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u)$$

۱ـ۱۳ـ۹ـ مابین القای مغناطیسی $\vec{B}$ و پتانسیل برداری مغناطیسی رابطهٔ $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ برقرار است از قضیه استوکس داریم:

$$\int\vec{B}.d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}d\vec{r}$$

نشان دهید که دو طرف این معادله تحت تبدیل پیمانه‌ای $\vec{A}\ \rightarrow\ \vec{A}+\nabla\phi$ ناورد است.

[یادآوری: تابع ψ را تک مقدار بگیرید. تبدیل پیمانه‌ای تام در مسئله ۳-۷-۴ بررسی می‌شود.]

حل

$$\int\vec{B}.d\vec{\sigma}=\int(\vec{\nabla}\times\vec{A}).d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}d\vec{r}\quad\Rightarrow$$

$$\int\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\phi).d\vec{\sigma}=\oint(\vec{A}+\vec{\nabla}\phi).d\vec{r}\quad\Rightarrow$$

$$\int(\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi).d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}d\vec{r}+\oint\vec{\nabla}\phi d\vec{r}\quad\Rightarrow$$

$$\int(\vec{\nabla}\times\vec{A}).d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}.d\vec{r}+\oint\vec{\nabla}\phi.d\vec{r}\quad\Rightarrow$$

$$\int(\vec{\nabla}\times\vec{A}).d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}.d\vec{r}+\phi\Big|_{C}^{C}\quad\Rightarrow\quad\int\vec{B}.d\vec{\sigma}=\oint\vec{A}d\vec{r}$$

۱ـ۱۳ـ۱۰ـ برای میدان الکتریکی $\vec{E}$ و پتانسیل برداری مغناطیسی A، نشان دهید $\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]$ غیرچرخشی است و بنابراین می‌توانیم بنویسیم.

$$\vec{E}=-\nabla\vec{\phi}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

حل

$$\vec{\nabla}\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=۰\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}+\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=۰\quad\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{A})}{\partial t}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=۰$$

چون $\vec{E}+\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ غیرچرخشی است می‌توان نوشت $\vec{E}+\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi$

و در نتیجه داریم: $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

۱-۱۳-۱۱- نیروی کل وارد بر بار q که با سرعت V حرکت می‌کند به قرار زیر است.

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})$$

با استفاده از پتانسیلهای اسکالر و برداری نشان دهید: $\vec{F}=q\left[-\vec{\nabla}\phi-\dfrac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{V})\right]$

توجه داشته باشید که در اینجا به جای مشتق زمانی پاره‌ای $\vec{A}$ در مسئله ۱-۱۳-۱۰ مشتق زمانی کامل داریم.

حل ⇐ $\vec{F}=q\left[\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B}\right]=\vec{F}=q\left[-\vec{\nabla}\phi-\dfrac{d\vec{A}}{dt}+\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right]$

$$\vec{F}=q(-\vec{\nabla}\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{V})-\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{V})\Big]$$

چون V ثابت است پس $\vec{\nabla}.\vec{V}=۰$ و داریم:

$$\vec{F}=q\left(-\vec{\nabla}\phi-\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{V})\right]$$

بخش ۱-۱۴-قانون گاؤس-معادلهٔ پواسون　　مسائل صفحه ۱۰۵

۱-۱۴-۱- قانون گاوس را برای حالتی دو بعدی بدست آورید که در آن:

$$\phi=-q\frac{Ln\rho}{۲\pi\varepsilon_۰}\quad,\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi=q\frac{\rho_۰}{۲\pi\varepsilon_۰\rho}$$

در اینجا q بار واقع در مبدأ است و یا اگر دستگاه دو بعدی برشی با ضخامت واحد از یک دستگاه (استوانه دوار) سه بعدی باشد q بار خطی با ازای یکای طول است. متغیر ρ بصورت شعاعی و برونسو از خط بار اندازه‌گیری می‌شود. $\rho_۰$ بردار یکهٔ متناظر است (بخش ۲-۴).

حل $\dfrac{q}{\varepsilon_۰}=\oint E.dS=\int\dfrac{q}{۲\pi\varepsilon_۰\rho}\hat{\rho}_۰.(\rho d\phi dz)\hat{\rho}_۰$

$$\oint E.dS=\frac{q}{۲\pi\varepsilon_۰}(۲\pi)=\frac{q}{\varepsilon_۰}\quad\Rightarrow\quad\frac{q}{\varepsilon_۰}=\frac{q}{\varepsilon_۰}$$

۱ـ۱۴ـ۲ـ (الف) نشان دهید که قانون گاؤس را می‌توان از معادلهٔ ماکسول به قرار زیر بدست آورد. $\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}$ که در آن ρ همان چگالی بار متداول است.

(ب) با فرض اینکه میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q تقارن کروی دارد نشان دهید که از قانون گاؤس می‌توان عبارت عکس مجذوی کولن را به قرار زیر بدست آورد.

$$\vec{E}=\frac{q\hat{r}_\circ}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}$$

حل (الف)

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ}\ \xrightarrow[\int_V d\tau]{\text{انتگرال روی حجم}}\ \int_V \vec{\nabla}.\vec{E}d\tau=\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_\circ}d\tau \Rightarrow$$

$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{E}d\tau=\frac{۱}{\varepsilon_\circ}\int_V \rho d\tau \xrightarrow[\int_V \vec{\nabla}.\vec{E}d\tau=\oint_S \vec{E}.d\vec{S}]{\text{با استفاده از قضیه گاوس}} \oint E.dS=\frac{q}{\varepsilon_\circ}$$

(ب)

$$\oint \vec{E}.d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \vec{E}\oint d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow ES=\frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow$$

$$E(۴\pi r^۲)=\frac{q}{\varepsilon_\circ} \Rightarrow \vec{E}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۲}\hat{r}_\circ$$

۱ـ۱۴ـ۳ـ نشان دهید که مقدار پتانسیل الکترومغناطیسی ϕ در هر نقطه P برابر است با میانگین پتانسیل روی سطح کروی به مرکز P. هیچ بار الکتریکی روی کره یا درون آن موجود نیست.

[راهنمایی: از قضیه گرین معادله ۱-۹۷ بهره گیرید و در آن قرار دهید $v=\phi$ و همچنین به معادلهٔ ۱-۱۷۳ در بخش ۱-۱۵ توجه کنید.]

حل (معادله ۱-۹۷)

$$\int_V (u\vec{\nabla}.\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}.\vec{\nabla}u)\,d\tau=\int_S (u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u).d\vec{\sigma}$$

(معادله ۱-۱۷۳)

$$\nabla^۲\left(\frac{۱}{r}\right)=-۴\pi\delta(r)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,d\tau = \int (u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u).d\vec{\sigma}\\ &v=\phi \quad , \quad u=\frac{1}{r}=r^{-1} \quad , \quad \nabla(r^{-1})=\hat{r}_\circ\left(\frac{-1}{r^2}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\int \left[\frac{1}{r}\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\tau = \int \left(\frac{1}{r}\nabla\phi - \phi\nabla\frac{1}{r}\right).d\vec{\sigma} \Rightarrow$$

$$\int -\phi\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = \int \left[\frac{1}{r}(-\vec{E}) - \phi\left(\frac{-1}{r^2}\right)\hat{r}_\circ\right].d\vec{\sigma} \Rightarrow$$

$$-\int \phi\,\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = \int -\frac{1}{r}\vec{E}.d\vec{\sigma} - \int \phi\left(-\frac{1}{r^2}\right)\hat{r}_\circ.d\vec{\sigma} \Rightarrow$$

$$4\pi\phi = 0 + \int \frac{\phi}{r^2}\hat{r}_\circ.d\vec{\sigma} \Rightarrow$$

$$4\pi\phi = \frac{1}{r^2}\int \phi d\sigma \Rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi r^2}\int \phi.d\vec{\sigma}$$

۱ـ۱۴ـ۴ـ با استفاده از معادلات ماکسول نشان دهید که پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}$، دستگاهی از جریانهای پایا در معادلهٔ برداری پواسون صدق می‌کند $\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$ مشروط بر آنکه قرارداد کنیم $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$

حل

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \vec{J} \Rightarrow \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \mu\vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{A} = \mu J \Rightarrow$$

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

بخش ۱ـ۱۵ـ قضیه هلمهولتز — مسائل صفحه ۱۱۳

۱ـ۱۵ـ۱ـ در این بخش بطور ضمنی اثبات شده است که یک تابع بصورت یکتا تعیین می‌شود. اگر بدانیم که (الف) در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. (ب) مجموعهٔ کاملی از شرایط

مرزی در آن صدق می‌کنند. این اثبات را بطور صریح بنویسید.

حل $\vec{V}$ یکتا $\qquad \begin{cases} \vec{\nabla}.\vec{V} = S \\ \vec{\nabla}\times\vec{V} = C \\ V_n: \text{ مشخص} \end{cases} \qquad$ یکتا $\phi(r)$

$V_۲ \rightarrow W = V_۱ - V_۲$

$\nabla.\nabla\phi = ۰$

مجموعه کاملی از شرایط
مرزی برقرار است

شرط اول را داد.

شرط دوم $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = ۰$ است. شرط سوم: یکتاست $\quad \Rightarrow \begin{matrix} \nabla.\nabla\phi = ۰ \\ \nabla\times\nabla\phi = ۰ \end{matrix}$