(ب) $dS_i = h_i dq_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dS_1 = h_1 dq_1 = dr \\ dS_2 = h_2 dq_2 = r d\theta \\ dS_3 = h_3 dq_3 = r \sin\theta d\phi \end{cases}$

۲-۱-۳- دستگاه مختصات u، V و Z که به دفعات در الکتروستاتیک و در دینامیک شاره‌ها به کار می‌رود به قرار زیر تعریف می‌شود

$xy=u$

$x^2-y^2=v$

$z=z$

این دستگاه u، v متعامد است. (الف) ماهیت هر یک از سه خانواده از سطوح مختصاتی را به اختصار توصیف کنید. (ب) با ترسیم فصل مشترک سطوح u ثابت و سطوح v ثابت با صفحهٔ xy این دستگاه را در صفحهٔ xy ترسیم کنید. (ج) جهت بردارهای یکهٔ u_0 و v_0 را در هر چهار ربع مشخص کنید. (د) سرانجام آیا این دستگاه u، v و z راستگرد $(\hat{u}_0 \times \hat{v}_0 = +\hat{k})$ است یا چپگرد $(\hat{u}_0 \times \hat{v}_0 = -\hat{k})$؟

حل $z=z$ $x^2-y^2=v$ $xy=u$

صفحه $\frac{x^2}{v}-\frac{y^2}{v}=1$ $y=\frac{u}{x}$

هذلولی   سهمی

$\hat{u}_0 \times \hat{v}_0 = -\hat{k}$

دستگاه چپگرد است.

۲-۱-۴- یک دستگاه متعامد دو بعدی به کمک مختصات q_1 و q_2 توصیف می‌شود نشان دهید که ژاکوبی عبارت است از:

$$J\left(\frac{x,y}{q_1,q_2}\right) = h_1 h_2$$

که با معادلهٔ ۲-۱۰ سازگار است.

[راهنمایی: بهتر است که از مجذور دو طرف این معادله بهره گیریم.]

حل چون متعامد است.

$$h^2_{i=j} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} = 0$$

$$h^2_{12} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} = 0$$

بخش ۲ـ۱ـ مختصات خمیده خط — مسائل صفحه ۱۲۰

۲ـ۱ـ۱ـ نشان دهید که اگر فقط دستگاههای مختصات متعامد را در نظر بگیریم به ازای $i\neq j$ خواهیم داشت: $g_{ij}=0$ (معادله ۲-۷)

[راهنمایی: مثلثی به اضلاع dS_1، dS_2 و dS_3 ترسیم کنید. چه رابطهٔ $g_{ij}=0$ برقرار باشد یا نباشد باید معادلهٔ ۲-۹ برقرار باشد سپس ds^2 حاصل از معادلهٔ ۲-۵ را با محاسبه‌ای که با استفاده از قانون کسینوسها انجام می‌دهید مقایسه کنید. نشان دهید:

$$\left[\cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right.$$

حل

$$g_{ij}=\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j}$$

مثال
$$\begin{cases} i=1 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow \quad g_{12}=\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\text{IF: } i=j \quad \text{THEN} \quad g_i^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$$

۲ـ۱ـ۲ـ در دستگاه مختصات قطبی کروی داریم: $q_1=r$ و $q_2=\theta$ و $q_3=\phi$ معادلات تبدیل متناظر با معادلهٔ ۲-۲ عبارتند از $z=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta\sin\phi$ و $x=r\sin\theta\cos\phi$

(الف) عاملهای مقیاس h_r و h_θ و h_ϕ مختصات قطبی کروی را محاسبه کنید. (ب) عاملهای مقیاسی راکه در بند الف محاسبه کرده‌اید با رابطهٔ $dS_i=h_i dq_i$ مقایسه کنید.

حل (الف)
$$h_r^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$$
$$=\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad h_r^2=\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\cos^2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \Rightarrow \boxed{h_r=1}$$

$$h_\theta^2=\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=r^2\cos^2\theta\cos^2\phi+r^2\cos^2\theta\sin^2\phi+r^2\sin^2\theta \quad \Rightarrow$$

$$h_\theta^2=r^2\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \Rightarrow \boxed{h_\theta=r}$$

$$h_\phi^2=\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2=r^2\sin^2\theta\sin^2\phi+r^2\sin^2\theta\cos^2\phi \quad \Rightarrow$$

$$h_\phi=r^2\sin^2\theta(\sin^2\phi+\cos^2\phi)=r^2\sin^2\theta \quad \Rightarrow \boxed{h_\phi=r\sin\theta}$$

(ب) $dS_i = h_i dq_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dS_1 = h_1 dq_1 = dr \\ dS_2 = h_2 dq_2 = r d\theta \\ dS_3 = h_3 dq_3 = r \sin\theta d\phi \end{cases}$

۲ـ۱ـ۳ـ دستگاه مختصات u، V و Z که به دفعات در الکتروستاتیک و در دینامیک شاره‌ها به کار می‌رود به قرار زیر تعریف می‌شود

$$xy = u$$
$$x^2 - y^2 = v$$
$$z = z$$

این دستگاه u، v متعامد است. (الف) ماهیت هر یک از سه خانواده از سطوح مختصاتی را به اختصار توصیف کنید. (ب) با ترسیم فصل مشترک سطوح u ثابت و سطوح v ثابت با صفحهٔ xy این دستگاه را در صفحهٔ xy ترسیم کنید. (ج) جهت بردارهای یکهٔ u_0 و v_0 را در هر چهار ربع مشخص کنید. (د) سرانجام آیا این دستگاه u، v و z راستگرد $(\hat{u}_0 \times \hat{v}_0 = +\hat{k})$ است یا چپگرد $(\hat{u}_0 \times \hat{v}_0 = -\hat{k})$؟

حل $z = z$ صفحه

$x^2 - y^2 = v$

$$\frac{x^2}{v} - \frac{y^2}{v} = 1$$

هذلولی

$xy = u$

$$y = \frac{u}{x}$$

سهمی

$$\hat{u}_0 \times \hat{v}_0 = -\hat{k}$$

دستگاه چپگرد است.

۲ـ۱ـ۴ـ یک دستگاه متعامد دو بعدی به کمک مختصات q_1 و q_2 توصیف می‌شود نشان دهید که ژاکوبی عبارت است از:

$$J\left(\frac{x,y}{q_1,q_2}\right) = h_1 h_2$$

که با معادلهٔ ۲-۱۰ سازگار است.

[راهنمایی: بهتر است که از مجذور دو طرف این معادله بهره گیریم.]

حل چون متعامد است.

$$h^2_{i=j} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} = 0$$

$$h^2_{12} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}=-\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} \quad , \quad \begin{cases} h_1^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 \\ h_2^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 \end{cases}$$

$$h_1^2h_2^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2=$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\left(-\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)+\left(-\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2=2\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)=J^2 \quad \Rightarrow$$

$$h_1^2h_2^2=J^2 \quad \Rightarrow \quad h_1h_2=J$$

بخش ۲ـ۲ـ عملگرهای برداری دیفرانسیلی   مسائل صفحه ۱۲۷

۲ـ۲ـ۱ـ استدلالی ارائه کنید که نشان دهد حاصلضربهای اسکالر و برداری (که شامل ∇ نیستند) در مختصات خمیده خط متعامد نیز درست مانند مختصات دکارتی انجام می‌شود و عاملهای مقیاس در آنها ظاهر نمی‌شوند.

حل

$$\vec{A}.\vec{B}=\left(A_iB_i\sum a_ia_j\right)=A_iB_j\,\delta_{ij}=\begin{cases} 0 & i\neq j \\ A_iB_j & i=j \end{cases}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(\sum A_ia_i\times\sum B_ja_j\right)=\sum A_iB_j\,(a_i\times a_j)$$

۲ـ۲ـ۲ـ برداریکهٔ $\hat{e}_1$ را در جهت افزایش q_1 بگیرید و نشان دهید که

(الف)
$$\vec{\nabla}.\hat{e}_1=\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial(h_2h_3)}{\partial q_1}$$

(ب)
$$\vec{\nabla}\times\hat{e}_1=\frac{1}{h_1}\left[\hat{e}_1\frac{\partial h_1}{h_3\partial q_3}-\hat{e}_3\frac{\partial h_1}{h_2\,\partial q_2}\right]$$

توجه کنید که هر چند $\hat{e}_1$ برداریکه است، دیورژانس و تاو آن الزاماً صفر نیست.

حل

$$\text{(الف)}\ \vec{\nabla}.\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(e_1h_2h_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(e_2h_3h_1)}{\partial q_2}+\frac{\partial(e_3 h_1h_2)}{\partial q_3}\right]\left.\vphantom{\frac{a}{b}}\right\}_{e_1=1} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}.\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3)}{\partial q_1}\right]$$

$$\text{(ب)}\ \vec{\nabla}\times\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} e_1h_1 & e_2h_2 & e_3h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1e_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[e_2h_2\left(\frac{\partial(h_1e_1)}{\partial q_3}\right)+e_3h_3\left(\frac{-\partial(h_1e_1)}{\partial q_2}\right)\right]$$

$$e_1=1$$

$$\vec{\nabla}\times\hat{e}_1 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[e_2h_2\frac{\partial h_1}{\partial q_3}-e_3h_3\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right] = \frac{1}{h_1}\left[e_2\frac{\partial h_1}{h_3\partial q_3}-e_3\frac{\partial h_1}{h_2\partial q_2}\right]$$

۲ـ۲ـ۳ـ نشان دهید که بردارهای یکهٔ متعامد را می‌توان به کمک رابطهٔ زیر تعریف کرد.

$$\text{(الف)}\qquad \hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

به خصوص نشان دهید که $\hat{e}_i.\hat{e}_i = 1$ به عبارتی برای h_i می‌انجامد که با معادلهٔ ۲-۶ سازگار است. معادلهٔ (الف) را می‌توان نقطه شروع استخراج رابطه زیر گرفت.

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j} = \hat{e}_j\frac{\partial h_j}{h_i\,\partial q_i}\quad ,\quad i\neq j$$

و

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_i} = -\sum_{j\neq i}\hat{e}_j\frac{\partial h_i}{h_j\,\partial q_j}$$

حل

$$\hat{e}_i.\nabla\vec{r} = \hat{e}_i$$

$$\hat{e}_i.\nabla\vec{r} = \hat{e}_i.\left[\hat{e}_1\frac{\partial r}{h_1\partial q_1}+\hat{e}_2\frac{\partial r}{h_2\partial q_2}+\hat{e}_3\frac{\partial r}{h_3\partial q_3}\right]$$

$$= \hat{e}_1.\hat{e}_1\frac{\partial r}{h_1\partial q_1}+\hat{e}_1.\hat{e}_2\frac{\partial r}{h_2\partial q_2}+\hat{e}_1.\hat{e}_3\frac{\partial r}{h_3\partial q_3}$$

$$\Rightarrow\quad \hat{e}_1.\nabla\vec{r} = \frac{\partial r}{h_1\partial q_1}\quad\Rightarrow\quad \hat{e}_i.\nabla\vec{r} = \frac{\partial r}{h_i\,\partial q_i}\quad ,\quad \hat{e}_i.\hat{e}_i = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial r}{h_i \partial q_i} \cdot \frac{\partial r}{h_i \partial q_i} = ۱ \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{h_i^{۲}}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = ۱ \quad \Rightarrow$$

$$h_i = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)^{\frac{۱}{۲}} \quad , \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$h_i^{۲} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_i}$$

۲ـ۲ـ۴ـ با استفادهٔ مستقیم از معادلهٔ ۱-۹۰

$$\vec{\nabla}\psi = \lim_{\int d\tau \to ۰} \frac{\int \psi d\vec{\sigma}}{\int d\tau}$$

رابطه زیر را استخراج کنید.

$$\vec{\nabla}\psi = e_۱ \frac{\partial \psi}{h_۱ \partial q_۱} + e_۲ \frac{\partial \psi}{h_۲ \partial q_۲} + e_۳ \frac{\partial \psi}{h_۳ \partial q_۳}$$

[راهنمایی: در محاسبهٔ انتگرال سطحی به جمله‌هایی شبیه به $(h_۱h_۲h_۳)^{-۱}\left(\frac{\partial}{\partial q_۱}\right)(e_۱h_۲h_۳)$ برمی‌خوریم. استفاده از نتایجی که در مسئله ۲-۲-۳ برشمرده شده‌اند، مفید خواهد بود. وقتی که سهم هر سه زوج از صفحات را به هم اضافه کنیم. جمله‌های زاید حذف می‌شوند.]

حل

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{e}_۱ \frac{\partial \psi}{h_۱ \partial q_۱} + \hat{e}_۲ \frac{\partial \psi}{h_۲ \partial q_۲} + \hat{e}_۳ \frac{\partial \psi}{h_۳ \partial q_۳}$$

$$\int \psi d\sigma \simeq \left[\hat{e}_۱\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial q_۱}\frac{dq_۱}{۲}\right)h_۲h_۳dq_۲dq_۳ - \hat{e}_۱\left(\psi - \frac{\partial \psi}{\partial q_۱}\frac{dq_۱}{۲}\right)h_۲h_۳dq_۲dq_۳)\right]$$

$$+ \left[\hat{e}_۲\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial q_۲}\frac{dq_۲}{۲}\right)h_۱h_۳dq_۱dq_۳ - \hat{e}_۲\left(\psi - \frac{\partial \psi}{\partial q_۲}\frac{dq_۲}{۲}\right)h_۱h_۳dq_۱dq_۳\right]$$

$$+ \left[\hat{e}_۳\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial q_۳}\frac{dq_۳}{۲}\right)h_۱h_۲dq_۱dq_۲ - \hat{e}_۳\left(\psi - \frac{\partial \psi}{\partial q_۳}\frac{dq_۳}{۲}\right)h_۱h_۲dq_۱dq_۲\right]$$

$$= \left[\hat{e}_۱\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_۱}dq_۱\right)h_۲h_۳dq_۲dq_۳ + \hat{e}_۲\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_۲}dq_۲\right)h_۱h_۳dq_۱dq_۳ + \hat{e}_۳\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_۳}dq_۳\right)h_۱h_۲dq_۱dq_۲\right]$$

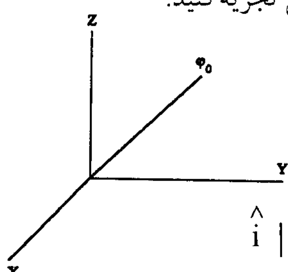
$$\cong \hat{e}_۱\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_۱}\right)h_۲h_۳dq_۱dq_۲dq_۳ + \hat{e}_۲\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_۲}\right)h_۱h_۳dq_۱dq_۲dq_۳ + \hat{e}_۳\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_۳}\right)h_۱h_۲dq_۱dq_۲dq_۳$$

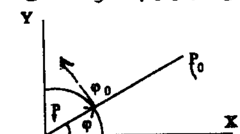
$$\frac{\int \psi d\vec{\sigma}}{h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3} \simeq \hat{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}$$

$$\Rightarrow \lim_{\int d\tau \to 0} \frac{\int \psi d\vec{\sigma}}{\int d\tau} = \vec{\nabla}\phi$$

بخش ۲ـ۴ـ مختصات استوانه‌ای دوار (ρ, ϕ, z) مسائل صفحه ۱۳۴

۲ـ۴ـ۱ـ بردارهای یکهٔ استوانه‌ای دوار را به مؤلفه‌های دکارتی تجزیه کنید.





$|\phi_0| = 1$

حل $|\rho_0| = 1$

$\rho = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$

$\hat{i}\ |\phi_0|\ \cos(\frac{\pi}{2}+\phi)$ $\qquad \phi_0 = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$

$\hat{j}\ |\phi_0|\ \sin(\frac{\pi}{2}+\phi)$ $\qquad \hat{K}_0 = \hat{K}$

۲ـ۴ـ۲ـ بردارهای یکهٔ دکارتی را برحسب مؤلفه‌های استوانه‌ای دوار تجزیه کنید.

حل

$$\begin{matrix}\cos\phi \\ -\sin\phi\end{matrix}\begin{cases}\rho_0 = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi \\ \phi_0 = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho_0\cos\phi = \hat{i}\cos^2\phi + \hat{j}\sin\phi\cos\phi \\ -\phi_0\sin\phi = \hat{i}\sin^2\phi - \hat{j}\sin\phi\cos\phi\end{cases}$$

جمع می‌کنیم

$$\rho_0\cos\phi - \phi_0\sin\phi = \hat{i}(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0\cos\phi - \phi_0\sin\phi = \hat{i}}$$

$$\begin{matrix}\sin\phi \\ \cos\phi\end{matrix}\begin{cases}\rho_0 = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi \\ \phi_0 = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho_0\sin\phi = \hat{i}\sin\phi\cos\phi + \hat{j}\sin^2\phi \\ \phi_0\cos\phi = -\hat{i}\sin\phi\cos\phi + \hat{j}\cos^2\phi\end{cases}$$

$$\rho_0\sin\phi + \phi_0\cos\phi = \hat{j}(\sin^2\phi + \cos^2\phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{j} = \rho_0\sin\phi + \phi_0\cos\phi} \quad \text{و} \quad \boxed{\hat{k} = k_0}$$

۲ـ۴ـ۳ـ با استفاده از نتایج مسئله ۲-۴-۱ نشان دهید که:

$$\frac{\partial \rho_\circ}{\partial \phi} = \phi_\circ \quad , \quad \frac{\partial \phi_\circ}{\partial \phi} = -\rho_\circ$$

همچنین نشان دهید که بقیهٔ مشتقهای اول بردارهای یکهٔ استوانه‌ای دوار نسبت به مختصات استوانه‌ای دوار، جملگی صفر می‌شوند.

حل

$$\rho_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi \quad , \quad \phi_\circ = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi$$

$$\frac{\partial \rho_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi = \phi_\circ$$

$$\frac{\partial \phi_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi - \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi = -\rho_\circ$$

۲ـ۴ـ۷ـ جسم صلبی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول یک محور ثابت می‌چرخد. ω را در امتداد محور Z بگیرید r را برحسب مختصات استوانه‌ای دوار مشخص کنید و مختصات استوانه‌ای دوار را بکار برید. (الف) $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ را محاسبه کنید. (ب) $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ را محاسبه کنید.

حل

(الف) $\vec{\omega} = \omega \hat{k} \quad , \quad \vec{r} = \hat{\rho}_\circ \rho + \hat{k} z$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_\circ & \rho\phi_\circ & k \\ \circ & \circ & \omega \\ \rho & \circ & z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\rho\phi_\circ \omega \rho\right] = \rho\omega\phi_\circ$$

(ب)

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \rho_\circ & \rho\phi_\circ & k \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \circ & \rho^2\omega & \circ \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\hat{k}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho^2\omega\right] = \frac{2\rho\omega}{\rho} = 2\omega$$

۲ـ۴ـ۸ـ ذره متحرکی را در فضا در نظر بگیرید. مؤلفه‌های استوانه‌ای دوار سرعت و شتاب این ذره را محاسبه کنید.

[راهنمایی: $\vec{r}(t) = \hat{\rho}_\circ(t)\rho(t) + \hat{k}z(t) = \left[\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi(t) + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi(t)\right]\rho(t) + \hat{k}z(t)$

یادآوری: $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$ و $\ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{dt^2}$ و مانند آنها.

حل

$$\left.\begin{aligned} r(t) &= \rho\hat{\rho}_\circ + \hat{k}z \;\Rightarrow\; v = \frac{dr}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho}_\circ + \rho\dot{\hat{\rho}}_\circ + \hat{k}\dot{z} \\ \rho_\circ &= \hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi \;\Rightarrow\; \dot{\rho}_\circ = -\hat{i}\dot{\phi}\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\dot{\phi}\mathrm{Cos}\phi = \dot{\phi}\phi_\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$v = \dot{\rho}\rho_\circ + \rho\dot{\phi}\phi_\circ + k\dot{z}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{dv}{dt}=\ddot{\rho}\rho_{\circ}+\dot{\rho}\dot{\rho}_{\circ}+\dot{\rho}\dot{\phi}\phi_{\circ}+\rho\ddot{\phi}\phi_{\circ}+\rho\dot{\phi}\dot{\phi}_{\circ}+k\ddot{z} \\ \phi_{\circ}=-\hat{i}\operatorname{Sin}\phi+\hat{j}\operatorname{Cos}\phi \;\Rightarrow\; \dot{\phi}_{\circ}=-\hat{i}\dot{\phi}\operatorname{Cos}\phi-\hat{j}\dot{\phi}\operatorname{Sin}\phi=-\dot{\phi}\rho_{\circ} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$a=\ddot{\rho}\rho_{\circ}+\dot{\rho}\dot{\phi}\phi_{\circ}+\dot{\rho}\dot{\phi}\phi_{\circ}+\rho\ddot{\phi}\phi_{\circ}-\rho\dot{\phi}^{2}\rho_{\circ}+k\ddot{z} \;\Rightarrow$$

$$\vec{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^{2})\hat{\rho}_{\circ}+(\rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi}_{\circ}+\ddot{z}\hat{k}$$

۲ـ۴ـ۹ـ در مختصات استوانه‌ای، معادلهٔ لاپلاس را به ازای $\psi=\psi(\rho)$ حل کنید.

حل

$$\nabla^{2}\psi=0 \;\Rightarrow\; \nabla^{2}\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\phi^{2}}+\frac{\partial^{2}\psi}{\partial z^{2}}=0$$

چون $\psi=\psi(\rho)$ است جملات دوم و سوم صفرند.

$$\nabla^{2}\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=k \;\Rightarrow\; \frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\frac{k}{\rho} \;\Rightarrow\; \frac{d\psi}{d\rho}=\frac{k}{\rho} \;\Rightarrow$$

$$\int d\psi=k\int_{\rho_{\circ}}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} \;\Rightarrow\; \psi=k\operatorname{Ln}\rho\,\Big|_{\rho_{\circ}}^{\rho} \;\Rightarrow\; \psi=k\operatorname{Ln}\frac{\rho}{\rho_{\circ}}$$

۲ـ۴ـ۱۰ـ تابع برداری به خصوصی در مختصات استوانه‌ای دوار قائم به قرار زیر تعریف می‌شود.

$$V(\rho,\phi)=\rho_{\circ}V_{\rho}(\rho,\phi)+\phi_{\circ}V_{\phi}(\rho,\phi)$$

نشان دهید $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ فقط مولفه Z دارد. توجه کنید که این نتیجه برای هر برداری که مقید به سطح $q_3=\text{const}$ باشد در صورت استقلال حاصلضربهای h_1V_1 و h_2V_2 از q_3، برقرار است.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho}_{\circ} & \rho\hat{\phi}_{\circ} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ V_{\rho} & \rho V_{\phi} & 0\end{vmatrix}=\hat{k}\left(\frac{\partial V\phi}{\partial\phi}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V\rho}{\partial\phi}+\frac{V\phi}{\rho}\right)$$

۲ـ۴ـ۱۱ـ معادلهٔ ناویه - استوکس برای جریان یک شارهٔ چسبنده تراکم‌ناپذیر به رابطه زیر می‌انجامد.

$$-\vec{\nabla}\times(\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}))=\frac{\eta}{\rho_{\circ}}\nabla^{2}(\vec{\nabla}\times\vec{V})$$

که در آن η چسبندگی (ویسکوزیته) و $\rho_{\circ}$ چگالی شاره است سرعت V را برای شار محوری در یک لولهٔ استوانه‌ای به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\vec{V}=kv(\rho)$$

از مثال ۲-۴-۱ برای این سرعت داریم:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}))=0$$

نشان دهید که معادلهٔ $\nabla^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})=0$ به معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌انجامد.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d^2V}{d\rho^2}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{dV}{d\rho}=0$$

ونیز نشان دهید که $V=V_0+a_2\rho^2$ در این معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho}_0 & \rho\hat{\phi}_0 & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & V(\rho)\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\left[\hat{\rho}_0\frac{\partial}{\partial\phi}V(\rho)-\rho\phi_0\frac{\partial}{\partial\rho}V(\rho)\right]$$

جملهٔ اول بدلیل استقلال V از ϕ صفر است و داریم

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=-\hat{\phi}_0\frac{\partial V(\rho)}{\partial\rho}$$

$$\nabla^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{V})}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})}{\partial z^2}$$

جملات دوم و سوم بدلیل استقلال V از ϕ و z صفرند.

$$\nabla^2(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d^2V}{d\rho^2}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{dV}{d\rho}=0$$

مقدار $V=V_0+a_2\rho^2$ را در معادله قرار می‌دهیم داریم

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d^2(V_0+a_2\rho^2)}{d\rho^2}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{d(V_0+a_2\rho^2)}{d\rho}=0$$

۴ـ۲ـ۱۲ـ سیم رسانایی در راستای محور Z حاوی جریان I است پتانسیل برداری مغناطیسی

حاصل از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\vec{A}=\hat{k}\frac{\mu I}{2\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

نشان دهید که القای مغناطیسی $\vec{B}$ عبارت است از

$$\vec{B}=\hat{\phi}_0\frac{\mu I}{2\pi\rho}$$

حل

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho}_0 & \rho\hat{\phi}_0 & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \frac{\mu I}{2\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{\rho}\right)\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{B}=-\frac{1}{\rho}(\rho\hat{\phi}_0)\frac{\mu I}{2\pi}\frac{-\frac{1}{\rho^2}}{\frac{1}{\rho}}=\hat{\phi}_0\frac{\mu I}{2\pi\rho}$$

۲ـ۴ـ۱۳ـ نیرویی با رابطهٔ زیر توصیف می‌شود.

$$\vec{F} = -\hat{i}\frac{y}{x^2+y^2} + \hat{j}\frac{x}{x^2+y^2}$$

(الف) $\vec{F}$ را در مختصات استوانه‌ای دوار مشخص کنید بندهای (ب) و (ج) را بطور کامل در مختصات استوانه‌ای دوار حل کنید. (ب) تاو $\vec{F}$ را محاسبه کنید. (ج) کاری راکه نیروی $\vec{F}$ در یک بار دور زدن دایرهٔ واحد بطور چپگرد انجام می‌دهد محاسبه کنید. (د) تفاوت بین نتایج بندهای (ب) و (ج) را چگونه توجیه می‌کنید.

حل

$$F = -(\rho_0 \text{Cos}\phi - \phi_0 \text{Sin}\phi)\frac{\rho\text{Sin}\phi}{\rho^2} + (\rho_0 \text{Sin}\phi + \phi_0 \text{Cos}\phi)\frac{\rho\text{Cos}\phi}{\rho^2}$$

$$F = -(\rho_0 \text{Cos}\phi\, \text{Sin}\phi - \phi_0\, \text{Sin}^2\phi)\frac{1}{\rho} + (\rho_0 \text{Sin}\phi\, \text{Cos}\phi + \phi_0 \text{Cos}^2\phi)\frac{1}{\rho} \Rightarrow$$

$$F = \frac{1}{\rho}\left[-\rho_0 \text{Cos}\phi\, \text{Sin}\phi + \rho_0 \text{Sin}\phi\, \text{Cos}\phi\right] + \frac{1}{\rho}\left[\phi_0\, \text{Sin}^2\phi + \phi_0 \text{Cos}^2\phi\right] = \frac{\phi_0}{\rho}$$

$$(\text{ب})\ \vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho}_0 & \rho\hat{\phi}_0 & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho(\frac{1}{\rho}) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\hat{\rho}_0(-\frac{\partial 1}{\partial z}) - \rho\hat{\phi}_0(0) + \hat{k}(\frac{\partial 1}{\partial \rho})\right] = 0$$

$$(\text{ج})\ W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int \frac{\phi_0}{\rho}(\rho_0 d\rho + \rho\phi_0 d\phi + k dz) \Rightarrow$$

$$W = \int \phi_0\rho_0(\frac{d\rho}{\rho}) + \int \frac{\rho}{\rho}(\phi_0.\phi_0)d\phi + \int \phi_0 k(\frac{dz}{\rho}) \Rightarrow$$

$$W = \int_0^{2\pi} d\phi = \phi \Big|_0^{2\pi} \Rightarrow W = 2\pi$$

۲ـ۴ـ۱۴ـ برای یک موج عرضی الکترومغناطیسی (TEM) در یک موجبر هم محور میدان الکتریکی بصورت $\vec{E} = E(\rho,\phi)\, e^{i(kz-\omega t)}$ و میدان القای مغناطیسی به صورت $\vec{B} = B(\rho,\phi)\, e^{i(kz-\omega t)}$ بیان می‌شود. موج عرضی است از این رو $\vec{E}$ و $\vec{B}$ هیچیک مؤلفهٔ Z ندارند این دو میدان در معادلهٔ برداری لاپلاسی صدق می‌کنند.

$$\nabla^2 E(\rho,\phi) = 0$$

$$\nabla^2 B(\rho,\phi) = 0$$

(الف) نشان دهید که جوابهای این دو معادله عبارتند از $\vec{E}=\rho_{\circ}E_{\circ}(\frac{a}{\rho})e^{i(kz-\omega t)}$
$\vec{B}=\phi_{\circ}B_{\circ}(\frac{a}{\rho})e^{i(kz-\omega t)}$ که در آن a شعاع رسانای داخلی و $E_{\circ}$ و $B_{\circ}$ دامنه‌اند

(ب) با فرض اینکه داخل موجبر خلاء است تحقیق کنید که رابطهٔ زیر در معادلهٔ ماکسول صدق می‌کنند:

$$\frac{B_{\circ}}{E_{\circ}}=\frac{k}{\omega}=\mu_{\circ}\varepsilon_{\circ}(\frac{\omega}{k})=\frac{1}{C}$$

حل

$$\nabla^{2}E\Big|_{\rho}=\nabla^{2}E_{\rho}-\frac{1}{\rho^{2}}E_{\rho}-\frac{2}{\rho^{2}}\frac{\partial E\phi}{\partial\phi}\quad,\quad \vec{E}=\rho_{\circ}E_{\circ}(\frac{a}{\rho})e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\nabla^{2}E_{\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial E}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial^{2}E}{\partial\phi^{2}}+\frac{\partial^{2}E}{\partial z^{2}}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{-\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{2}})$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{2}}\right]=\frac{\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{3}}\quad\Rightarrow$$

$$\nabla^{2}E\Big|_{\rho}=\frac{\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{3}}-\frac{\rho_{\circ}E_{\circ}ae^{i(kz-\omega t)}}{\rho^{2}\rho}=0$$

$$\nabla^{2}B(\rho,\phi)=0\quad,\quad \nabla^{2}B\Big|_{\phi}=\nabla^{2}B_{\phi}-\frac{1}{\rho^{2}}B_{\phi}+\frac{2}{\rho^{2}}\frac{\partial B_{\rho}}{\partial\phi}$$

$$B=\phi_{\circ}B_{\circ}(\frac{a}{\rho})e^{i(kz-\omega t)}$$

مانند قسمت E عمل می‌شود.

۲ـ۴ـ۱۵ـ در محاسبهٔ اثر تنگش در دینامیک شاره‌های مغناطیسی محاسبهٔ $(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}$ لازم می‌شود نشان دهید که اگر القای مغناطیسی $\vec{B}$ به صورت $\vec{B}=\phi_{\circ}B_{\phi}(\rho)$ باشد داریم:

$$(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}=-\frac{\rho_{\circ}B_{\phi}^{2}}{\rho}$$

حل

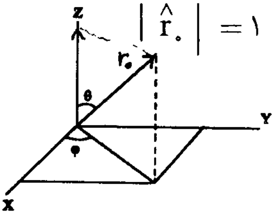
$$(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}=(\hat{\phi}_{\circ}B_{\phi}(\rho)).(\hat{\rho}_{\circ}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\hat{\phi}_{\circ}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(\hat{\phi}_{\circ}B_{\phi}(\rho))$$

$$=\frac{B_{\phi}(\rho)}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(\hat{\phi}_{\circ}B_{\phi}(\rho))=\frac{B_{\phi}^{2}(\rho)}{\rho}\frac{\partial\hat{\phi}_{\circ}}{\partial\phi},\ \frac{\partial\hat{\phi}_{\circ}}{\partial\phi}=-\hat{\rho}_{\circ}$$

$$\Rightarrow\quad(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}=-\frac{\rho_{\circ}B_{\phi}^{2}(\rho)}{\rho}$$

بخش ۲ـ۵ـ مختصات قطبی کروی (r, θ, ϕ) مسائل صفحه ۱۴۵

۲ـ۵ـ۱ـ بردارهای یکهٔ قطبی کروی را به مؤلفه‌های دکارتی تجزیه کنید.



حل $|\hat{r}_\circ| = ۱ \quad , \quad \hat{r}_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{k}\,\mathrm{Cos}\theta$

$$\hat{\theta}_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta$$

در صفحه xy قرار دارد. $\hat{\phi}_\circ = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi$

۲ـ۵ـ۲ـ (الف) با استفاده از نتایج مسئله ۲-۵-۱ مشتقهای جزئی $r_\circ$ و $\theta_\circ$ و $\phi_\circ$ را نسبت به r، θ و ϕ محاسبه کنید. (ب) با استفاده از نتایج بند (الف) و بردار $\vec{\nabla}$ (بالاترین آهنگ تغییر فضایی) به صورت زیر

$$\hat{r}_\circ \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}_\circ \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}_\circ \frac{۱}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi$ را محاسبه کنید این روش دیگری است برای استخراج لاپلاسی [یادآوری: مشتق گیریهای $\vec{\nabla}$ سمت چپ. قبل از آنکه بردارهای یکه در هم ضرب نقطه‌ای شوند روی بردارهای یکهٔ $\vec{\nabla}$ سمت راست عمل می‌کنند].

حل با توجه به $r_\circ$ و $\theta_\circ$ و $\phi_\circ$ که از حل مسئله ۲-۵-۱ بدست آمده داریم.

$$\frac{\partial \hat{r}_\circ}{\partial r} = ۰ \quad , \quad \frac{\partial \hat{r}_\circ}{\partial \theta} = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta = \hat{\theta}_\circ$$

$$\frac{\partial \hat{r}_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi = \mathrm{Sin}\theta(-\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi) = \hat{\phi}_\circ \mathrm{Sin}\theta$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_\circ}{\partial r} = ۰ \quad , \quad \frac{\partial \hat{\theta}_\circ}{\partial \theta} = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi - \hat{j}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi - \hat{k}\,\mathrm{Cos}\theta = -\hat{r}_\circ$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Cos}\phi = \mathrm{Cos}\theta(-\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi) = \hat{\phi}_\circ \mathrm{Cos}\theta$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_\circ}{\partial r} = ۰ \quad , \quad \frac{\partial \hat{\phi}_\circ}{\partial \theta} = ۰ \quad , \quad \frac{\partial \hat{\phi}_\circ}{\partial \phi} = -\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi - \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi$$

(ب)

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{r}_\circ \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\theta}_\circ \frac{۱}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\phi}_\circ \frac{۱}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)$$

$$= \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\mathrm{Sin}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

۲ـ۵ـ۵ـ بردارهای یکهٔ دکارتی زیر را به مؤلفه‌های قطبی کروی تجزیه کنید.

$$\hat{i} = \hat{r}_\circ \mathrm{Sin}\theta \mathrm{Cos}\phi + \hat{\theta}_\circ \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Cos}\phi - \hat{\phi}_\circ \mathrm{Sin}\phi$$

$$\hat{j} = \hat{r}_\circ \mathrm{Sin}\theta \mathrm{Sin}\phi + \hat{\theta}_\circ \mathrm{Cos}\theta \mathrm{Sin}\phi + \hat{\phi}_\circ \mathrm{Cos}\phi$$

$$\hat{k} = \hat{r}_\circ \mathrm{Cos}\theta - \hat{\theta}_\circ \mathrm{Sin}\theta$$

حل

$$\begin{matrix}\mathrm{Sin}\theta \\ \mathrm{Cos}\theta\end{matrix}\begin{cases}\hat{r}_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Sin}\theta \mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\theta \mathrm{Sin}\phi + \hat{k}\,\mathrm{Cos}\theta \\ \hat{\theta}_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\theta \mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\theta \mathrm{Sin}\phi - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\hat{r}_\circ \mathrm{Sin}\theta = \hat{i}\,\mathrm{Sin}^2\theta \mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}^2\theta \mathrm{Sin}\phi + \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta \mathrm{Cos}\theta \\ \hat{\theta}_\circ \mathrm{Cos}\theta = \hat{i}\,\mathrm{Cos}^2\theta \mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}^2\theta \mathrm{Sin}\phi - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta \mathrm{Cos}\theta\end{cases} +$$

$$\begin{matrix}\mathrm{Cos}\phi \\ -\mathrm{Sin}\phi\end{matrix}\begin{cases}\hat{r}_\circ \mathrm{Sin}\theta + \hat{\theta}_\circ \mathrm{Cos}\theta = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi \\ \hat{\phi}_\circ = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\hat{r}_\circ \mathrm{Cos}\phi \mathrm{Sin}\theta + \hat{\theta}_\circ \mathrm{Cos}\phi \mathrm{Cos}\theta = \hat{i}\,\mathrm{Cos}^2\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi \mathrm{Cos}\phi \\ -\hat{\phi}_\circ \mathrm{Sin}\theta = \hat{i}\,\mathrm{Sin}^2\phi - \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi \mathrm{Cos}\phi\end{cases} +$$

$$\boxed{\hat{r}_\circ \mathrm{Cos}\phi \mathrm{Sin}\theta + \hat{\theta}_\circ \mathrm{Cos}\phi \mathrm{Cos}\theta - \hat{\phi}_\circ \mathrm{Sin}\phi = \hat{i}}$$

برای بدست آوردن $\hat{j}$ به‌روش مشابه فوق $\hat{r}_\circ$ را در $\mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Sin}\phi$ و $\hat{\theta}_\circ$ را در $\mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Sin}\phi$ و $\phi_\circ$ را در $\mathrm{Cos}\phi$ ضرب با هم جمع می‌کنیم بدست می‌آید.

$$\boxed{\hat{j} = \hat{r}_\circ \mathrm{Sin}\theta \mathrm{Sin}\phi + \hat{\theta}_\circ \mathrm{Cos}\theta \mathrm{Sin}\phi + \hat{\phi}_\circ \mathrm{Cos}\phi}$$

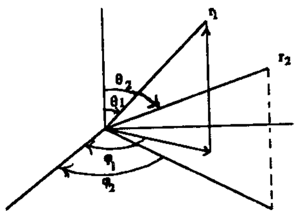
و برای $\hat{k}$ رابطه $\hat{r}_\circ$ را در $\mathrm{Cos}\theta$ و $\hat{\theta}_\circ$ را در $\mathrm{Sin}\theta$- ضرب با هم جمع می‌کنیم. بدست می‌آوریم:

$$\boxed{\hat{k} = \hat{r}_\circ \mathrm{Cos}\theta - \hat{\theta}_\circ \mathrm{Sin}\theta}$$

۲ـ۵ـ۶ـ جهت برداری با زاویه‌های θ_1 و ϕ_1 مشخص شده است زاویه‌های متناظر برای یک

بردار دیگر عبارت‌اند از θ_2 و ϕ_2 نشان دهید که کسینوس زاویهٔ بین دو بردار γ با رابطهٔ زیر داده می‌شود:
$$Cos\gamma = Cos\theta_1 \ Cos\theta_2 + Sin\theta_1 \ Sin\theta_2 \ Cos(\phi_1 - \phi_2)$$

شکل ۱۲-۱۶ را ببینید.



حل

u_1 : برداریکه در راستای r_1

u_2 : برداریکه در راستای r_2

$$\begin{cases} \hat{u}_1 = \hat{i}\, Sin\theta_1 Cos\phi_1 + \hat{j}_1 Sin\theta_1 Sin\phi_1 + \hat{k} Cos\theta_1 \\ \hat{u}_2 = \hat{i}\, Sin\theta_2 Cos\phi_2 + \hat{j}\, Sin\theta_2 Sin\phi_2 + \hat{k}\, Cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\hat{u}_1 . \hat{u}_2 = Sin\theta_1 Cos\phi_1 Sin\theta_2 Cos\phi_2 + Sin\theta_1 Sin\phi_1 Sin\theta_2 Sin\phi_2 + Cos\theta_1 Cos\theta_2$$
$$= Sin\theta_1 Sin\theta_2 \left[Cos\phi_1 Cos\phi_2 + Sin\phi_1 Sin\phi_2 \right] + Cos\theta_1 Cos\theta_2$$
$$= Sin\theta_1 Sin\theta_2 \left[Cos(\phi_1 - \phi_2) \right] + Cos\theta_1 Cos\theta_2 \qquad (1)$$

γ زاویه بین u_1 و u_2 از طرفی $\hat{u}_1 . \hat{u}_2 = |u_1| |u_2| Cos\gamma = Cos\gamma \qquad (2)$

$$\boxed{(1) = (2) \Rightarrow Cos\gamma = Cos\theta_1 Cos\theta_2 + Sin\theta_1 Sin\theta_2 Cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

۲-۵-۷- بردار $\vec{V}$ مؤلفه شعاعی ندارد اگر مولفه مماسی تاو آن صفر باشد وابستگی شعاعی مؤلفهٔ مماسی V به چه صورتی در می‌آید.

حل

$$\vec{V} = \hat{r}_0 V_r + \hat{\theta}_0 r V_\theta + \hat{\phi}_0 r Sin\theta V_\phi$$

چون مولفه شعاعی ندارد پس

$$\vec{V} = \hat{\theta}_0 r V_\theta + r Sin\theta V_\phi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r^2 Sin\theta} \begin{vmatrix} r_0 & r\theta_0 & rSin\theta\phi_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & rV_\theta & rSin\theta V_\phi \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} \Big|_{\text{مماسی}} = \frac{1}{r^2 Sin\theta} \left[-r \frac{\partial}{\partial r} r Sin\theta V_\phi \right] = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \hat{r}_0 \left[\frac{\tan\theta V_\phi}{r} \right] + \hat{\phi}_0 \left[\frac{V\theta}{r} \right]$$

۲-۵-۸- در فیزیک جدید بر خاصیت پاریته - یعنی اینکه کمیتی تحت وارونی دستگاه

مختصات ناوردا بماند یا تغییر علامت دهد - تأکید زیادی می‌شود وارونی در مختصات دکارتی عبارت است از: $x \to -x$ و $z \to -z$ ، $y \to -y$

(الف) نشان دهید که وارونی (یعنی انعکاس از طریق مبدأ) نقطهٔ (r, θ, ϕ) نسبت به محورهای z,y,x ثابت شامل تبدیلهای زیر است:

$$r \to r \quad و \quad \theta \to \pi-\theta \quad و \quad \phi \to \phi\pm\pi$$

(ب) نشان دهید که $r_\circ$ و $\phi_\circ$ پاریتهٔ فرد دارند (تغییر جهت می‌دهند) و $\theta_\circ$ پاریته زوج دارد.

حل

(الف) بر روی مولفه‌های x و y و z تبدیلات مربوط به r و θ و ϕ را می‌دهیم باید به ترتیب به -x و -y و -z برسیم.

$$x=r\cos\phi\ \sin\theta \quad و \quad y=r\sin\phi\ \sin\theta \quad و \quad z=r\ \cos\theta$$

$$x=r\cos\phi\sin\theta \Rightarrow x'=r\cos(\phi-\pi)\sin(\pi-\theta)=r\,[-\cos\phi]\,[\sin\theta]=-r\cos\phi\sin\theta=-x$$

$$y=r\sin\phi\sin\theta \Rightarrow y'=r\sin(\phi-\pi)\sin(\pi-\theta)=r\,[-\sin\phi]\,[\sin\theta]=-r\sin\phi\sin\theta=-y$$

$$z=r\cos\theta \Rightarrow z'=r\cos(\pi-\theta)=-r\cos\theta=-z$$

(ب) باید نشان دهیم که $r'_\circ=-r_\circ$ و $\phi'_\circ=-\phi_\circ$ و $\theta'_\circ=+\theta_\circ$ است.

$$\hat{r}_\circ=\hat{i}\sin\theta\cos\phi+\hat{j}\sin\theta\sin\phi+\hat{k}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\hat{r}'_\circ=\hat{i}\sin(\pi-\theta)\cos(\phi-\pi)+\hat{j}\sin(\pi-\theta)\cos(\phi-\pi)+\hat{k}\cos(\pi-\theta)$$

$$=-\hat{i}\sin\theta\cos\phi-\hat{j}\sin\theta\cos\phi-\hat{k}\cos\theta=-\hat{r}_\circ$$

$$\hat{\theta}_\circ=\hat{i}\cos\theta\cos\phi+\hat{j}\cos\theta\sin\phi-\hat{k}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\hat{\theta}'_\circ=\hat{i}\cos(\pi-\theta)\cos(\phi-\pi)+\hat{j}\cos(\pi-\theta)\sin(\phi-\pi)-\hat{k}\sin(\pi-\theta)$$

$$=\hat{i}\cos\theta\cos\phi+\hat{j}\cos\theta\sin\phi-\hat{k}\sin\theta=\hat{\theta}_\circ$$

$$\hat{\phi}_\circ=-\hat{i}\sin\phi+\hat{j}\cos\phi \Rightarrow \hat{\phi}'_\circ=-\hat{i}\sin(\phi-\pi)+\hat{j}\cos(\phi-\pi)$$

$$=\hat{i}\sin\phi-\hat{j}\cos\phi=-\hat{\phi}_\circ$$

۹-۵-۲ برای هر بردار $\vec{A}$ داریم: $\vec{A}.\vec{\nabla}r=\vec{A}$

(الف) این اتحاد را در مختصات دکارتی اثبات کنید. (ب) این اتحاد را در مختصات قطبی کروی اثبات کنید ($\vec{\nabla}$ در معادلهٔ ۲-۴۴ داده شده است). $\vec{\nabla}r$ به زبان دوتاییها یا دو برداریها (بخش

۳-۵) یک عامل خنثی یا دوتایی یکه است.

حل ابتدا در حالت کلی رابطه فوق را در هر مختصات می‌نویسیم.

$$\vec{A}.\vec{\nabla}r = (\hat{e}_1 A_1 + \hat{e}_2 A_2 + \hat{e}_3 A_3).\left(\frac{\hat{e}_1 \partial r}{h_1 \partial q_1} + \frac{\hat{e}_2 \partial r}{h_2 \partial q_2} + \frac{\hat{e}_3 \partial r}{h_3 \partial q_3}\right)$$

(الف) در مختصات دکارتی داریم: $\hat{e}_1 = i\ ,\ \hat{e}_2 = \hat{j}\ ,\ \hat{e}_3 = \hat{k}\quad,\quad h_1 = h_2 = h_3 = 1$

$A_1 = A_x\ ,\ A_2 = A_y\ ,\ A_3 = A_z$ و $q_1 = x\ ,\ q_2 = y\ ,\ q_3 = z$

$$\vec{A}.\vec{\nabla}r = A_x \frac{\partial(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{z}k)}{\partial x} + A_y \frac{\partial(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{z}k)}{\partial y} + A_z \frac{\partial(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{z}k)}{\partial z}$$

$$= \hat{i} A_x \frac{\partial x}{\partial x} + \hat{j} A_y \frac{\partial y}{\partial y} + \hat{k} A_z \frac{\partial z}{\partial z} = \hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z = \vec{A}$$

(ب) در مختصات قطبی کروی داریم:

$$\hat{e}_1 = \hat{r}_0\quad,\quad \hat{e}_2 = \hat{\theta}_0\quad,\quad \hat{e}_3 = \hat{\phi}_0\quad,\quad h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\mathrm{Sin}\theta$$

$$A_1 = A_r\quad,\quad A_2 = A_\theta\quad,\quad A_3 = A_\phi \qquad q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$$

$$\vec{A}.\vec{\nabla}r = A_r \frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{i}(r\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\theta) + \hat{j}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi) + \hat{k}(r\mathrm{Cos}\theta)\right]$$

$$+ A_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta}\left[\hat{i}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi) + \hat{j}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi) + \hat{k}(r\,\mathrm{Cos}\theta)\right]$$

$$+ A_\phi \frac{\partial}{r\mathrm{Sin}\theta\partial\phi}\left[\hat{i}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi) + \hat{j}(r\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi) + \hat{k}(r\,\mathrm{Cos}\theta)\right]$$

$$= A_r \hat{r}_0 + \frac{1}{r} A_\theta (r\hat{\theta}_0) + \frac{1}{r\mathrm{Sin}\theta} A_\phi (r\mathrm{Sin}\theta\hat{\phi}_0) = A_r \hat{r}_0 + A_\theta \hat{\theta}_0 + A_\phi \hat{\phi}_0 = \vec{A}$$

۲-۵-۱۰ ذره‌ای در فضا حرکت می‌کند مولفه‌های مختصات کروی سرعت و شتاب آن را بدست آورید.

[راهنمایی: $r(t)$ $\left[\vec{r}(t) = r_0(t) r(t) = \left[\hat{i}\mathrm{Sin}\theta(t)\,\mathrm{Cos}\phi(t) + \hat{j}\mathrm{Sin}\theta(t)\mathrm{Sin}\phi(t) + \hat{k}\mathrm{Cos}\theta(t)\right]\right.$

[یادآوری: با استفاده از تکنیکهای لاگرانژی بخش ۱۷-۳ می‌توانیم بصورت دقیقتری به این نتایج دست یابیم نقطهٔ بالای $\dot{r}$ به معنای مشتق زمانی است: $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ این نمادگذاری را نیوتون ابداع کرده است].

حل

$\vec{r} = r\hat{r}_0$ بردار مکان $\Rightarrow\quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r}_0 + r\dot{\hat{r}}_0$

$$\hat{r}_\circ = \hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\theta + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Sin}\theta + \hat{k}\,\mathrm{Cos}\theta \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{r}}_\circ = \dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta\left[-\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi\right] + \dot{\theta}\left[\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Cos}\theta + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}\theta - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta\right]$$

$$= \dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta(\hat{\phi}_\circ) + \dot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ$$

$$\vec{V} = \dot{r}\,\hat{r}_\circ + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ + r\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta\,\hat{\phi}_\circ = V_r\,\hat{r}_\circ + V_\theta\,\hat{\theta}_\circ + V_\phi\,\hat{\phi}_\circ \quad \Rightarrow$$

$$V_r = \dot{r} \quad , \quad V_\theta = r\dot{\theta} \quad , \quad V_\phi = r\,\mathrm{Sin}\theta\,\dot{\phi}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{r}_\circ + \dot{r}\,\dot{\hat{r}}_\circ + \dot{r}\,\mathrm{Sin}\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}_\circ + r\,\dot{\theta}\,\mathrm{Cos}\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}_\circ + r\,\mathrm{Sin}\theta\,\ddot{\phi}\,\hat{\phi}_\circ$$

$$+ r\,\mathrm{Sin}\theta\,\dot{\phi}\,\dot{\hat{\phi}}_\circ + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ + r\,\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}}_\circ$$

داریم:

$$\hat{\theta}_\circ = \left[\hat{i}\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Cos}\theta + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}\theta - \hat{k}\,\mathrm{Sin}\theta\right] \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{\theta}}_\circ = \hat{\phi}_\circ\,\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\theta - \dot{\theta}\,\hat{r}_\circ$$

$$\hat{\phi}_\circ = -\hat{i}\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Cos}\phi \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{\phi}}_\circ = -\hat{i}\,\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\phi - \hat{j}\,\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\phi$$

پس بدست می‌آوریم:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲ - r\dot{\phi}^۲\,\mathrm{Sin}^۲\theta)\hat{r}_\circ + (r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^۲\,\mathrm{Sin}\theta)\,\hat{\theta}_\circ +$$

$$(r\ddot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta + ۲\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta + ۲r\,\dot{\theta}\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\theta)\,\hat{\phi}_\circ \quad \Rightarrow$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^۲ - r\dot{\phi}^۲\,\mathrm{Sin}^۲\theta \quad , \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^۲\,\mathrm{Sin}\theta,$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta + ۲\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta + ۲r\,\dot{\theta}\dot{\phi}\,\mathrm{Cos}\theta$$

۲ـ۵ـ۱۱ـ ذرهٔ m تحت تأثیر یک نیروی مرکزی مطابق قانون دوم نیوتن حرکت می‌کند.

$$m\ddot{\vec{r}} = \hat{r}_\circ\,f(\vec{r})$$

نشان دهید که $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = C$ بردار ثابتی است و تفسیر این نتیجه قانون دوم کپلر را می‌دهد.

حل

$$\vec{r} = r\,\hat{r}_\circ = r\left[\hat{i}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi + \hat{j}\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi + \hat{k}\,\mathrm{Cos}\theta\right]$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V} = \dot{r}\,\hat{r}_\circ + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}_\circ + r\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta\,\hat{\phi}_\circ$$

$$r \times \dot{r} = \frac{۱}{r^۲\,\mathrm{Sin}\theta}\begin{vmatrix} r_\circ & r\theta_\circ & r\,\mathrm{Sin}\theta\,\phi_\circ \\ r & \circ & \circ \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\dot{\phi}\,\mathrm{Sin}\theta \end{vmatrix} =$$

$$\frac{r\hat{\theta}_{\circ}}{r^2 \operatorname{Sin}\theta}\left[-r^2\dot{\phi}\operatorname{Sin}\theta\right]+\frac{r\operatorname{Sin}\theta\hat{\phi}_{\circ}}{r^2\operatorname{Sin}\theta}\left[r^2\dot{\theta}\right]=$$

$$-r\dot{\phi}\hat{\theta}_{\circ}+r\dot{\theta}\hat{\phi}_{\circ}=r\left[\dot{\theta}\hat{\phi}_{\circ}-\dot{\phi}\hat{\theta}_{\circ}\right]=C=\text{ثابت}$$

۲-۵-۱۲- $\frac{\partial}{\partial x}$، $\frac{\partial}{\partial y}$ و $\frac{\partial}{\partial z}$ را برحسب مختصات قطبی کروی بنویسید.

حل

$$\nabla_{r,\theta,\phi}=\hat{r}_{\circ}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}_{\circ}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\phi}_{\circ}\frac{1}{r\operatorname{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi},\quad\begin{cases}\hat{r}_{\circ}=\hat{i}\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Sin}\theta+\hat{j}\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Sin}\theta+\hat{k}\operatorname{Cos}\theta\\ \hat{\theta}_{\circ}=\hat{i}\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Cos}\theta+\hat{j}\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\phi-\hat{k}\operatorname{Sin}\theta\\ \hat{\phi}_{\circ}=-\hat{i}\operatorname{Sin}\phi+\hat{j}\operatorname{Cos}\phi\end{cases}$$

$$\nabla_{r,\theta,\phi}=\hat{i}\left(\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Sin}\theta\frac{\partial}{\partial r}+\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Cos}\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\operatorname{Sin}\phi}{r\operatorname{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+$$
$$\hat{j}\left(\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Sin}\theta\frac{\partial}{\partial r}+\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{Cos}\phi}{r\operatorname{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)+$$
$$\hat{k}\left(\operatorname{Cos}\theta\frac{\partial}{\partial r}-\operatorname{Sin}\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla_{x,y,z}=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}=\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial r}+\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\operatorname{Sin}\phi}{r\operatorname{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial y}=\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial r}+\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{Cos}\phi}{r\operatorname{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}=\operatorname{Cos}\theta\frac{\partial}{\partial r}-\operatorname{Sin}\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\end{cases}$$

۲-۵-۱۳- با استفاده از مسئله ۲-۵-۱۲ نشان دهید:

$$-\hat{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

این عملگر کوانتومی با مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای متناظر است.

حل

$$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-i\left[r\operatorname{Cos}\phi\operatorname{Sin}\theta\left(\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial r}+\operatorname{Sin}\phi\operatorname{Cos}\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{Cos}\phi}{r\operatorname{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right.$$

$$-r\mathrm{Sin}\phi\mathrm{Sin}\theta(\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial r}+\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Cos}\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{Sin}\phi}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big]=$$

$$-i\left[\frac{\mathrm{Cos}\phi}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-(-\frac{\mathrm{Sin}\phi}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi})\right]=-i\left[\frac{\mathrm{Cos}\phi}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\mathrm{Sin}\phi}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]=-i\frac{\partial}{\partial\phi}$$

۴ـ۵ـ۱۴ـ عملگر تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی، بنابر تعریف عبارت است از: $\vec{L}=-i(\vec{r}\times\vec{\nabla})$ نشان دهید:

(الف) $$L_x+iL_y=e^{i\phi}(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi})$$

(ب) $$L_x-iL_y=-e^{-i\phi}(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi})$$

این عبارتها عملگرهای افزاینده و کاهنده بخشهای ۱۲-۶ و ۷ هستند.

حل $$L_x=-i(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y})=-i\Big[(r\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Sin}\phi)(\mathrm{Cos}\theta\frac{\partial}{\partial r}-\mathrm{Sin}\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})$$

$$-(r\mathrm{Cos}\theta)(\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial r}+\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cos}\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{Cos}\phi}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi})\Big]=$$

$$-i\left[-\mathrm{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\mathrm{Cotg}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]=+i\mathrm{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+i\mathrm{Cotg}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$L_y=-i\left[z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right]=-i\Big[(r\mathrm{Cos}\theta)\times(\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial r}+\mathrm{Cos}\theta\mathrm{Cos}\phi(\frac{1}{r})\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{Sin}\phi}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi})$$

$$-(r\,\mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\theta)(\mathrm{Cos}\theta\frac{\partial}{\partial r}-\mathrm{Sin}\theta(\frac{1}{r})\frac{\partial}{\partial\theta})\Big]=-i\left[\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

(الف) $$L_+=L_x+iL_y=i\mathrm{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+i\mathrm{Cotg}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}+i(-i)(\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi})$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}(i\mathrm{Sin}\phi+\mathrm{Cos}\phi)+i\mathrm{Cotg}\theta(\mathrm{Cos}\phi+i\mathrm{Sin}\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}=\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{i\phi})+i\mathrm{Cotg}\theta(e^{i\phi})\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$=e^{i\phi}(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi})$$

(ب) $$L_-=L_x-iL_y=i\mathrm{Sin}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+i\mathrm{Cotg}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}-i(-i)(\mathrm{Cos}\phi\frac{\partial}{\partial\theta}-\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi})$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}(i\mathrm{Sin}\phi+\mathrm{Cos}\phi)-i\,\mathrm{Cotg}\theta(i\mathrm{Sin}\phi+\mathrm{Cos}\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$= e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\mathrm{Cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

۲-۵-۱۵- برای عملگر تکانهٔ زاویه‌ای در مکانیک کوانتومی: $\vec{L} = -i(\vec{r}\times\vec{\nabla})$ در مختصات قطبی کروی نشان دهید: $\vec{L}\times\vec{L} = i\vec{L}$

[راهنمایی: $\vec{L}$ را برحسب مختصات قطبی کروی بنویسید ولی ضرب برداری را برحسب مولفه‌های دکارتی محاسبه کنید.]

حل

$$\vec{L}\times\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ L_x & L_y & L_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = \hat{i}(L_yL_z - L_zL_y) + \hat{j}(L_zL_x - L_xL_z) + \hat{k}(L_xL_y - L_yL_x)$$

$$= \hat{i}[L_y,L_z] + \hat{j}[L_z,L_x] + \hat{k}[L_x,L_y] = iL_x\hat{i} + iL_y\hat{j} + iL_z\hat{k} = i\vec{L}$$

۲-۵-۱۷- با بهره‌گیری از $\vec{L} = -i\vec{r}\times\vec{\nabla}$ اتحادهای عملگری زیر را اثبات کنید.

(الف) $\vec{\nabla} = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\vec{r}\times\vec{L}}{r^2}$ (ب) $r\nabla^2 - \vec{\nabla}(1 + r\frac{\partial}{\partial r}) = -i\vec{\nabla}\times\vec{L}$

حل

طرف راست رابطه (الف) $= \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\vec{r}\times(-i\vec{r}\times\vec{\nabla})}{r^2} = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - i(-i)\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\nabla)}{r^2}$

$$= \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - 1\left[\frac{\vec{r}(\vec{r}.\vec{\nabla}) - (\vec{r}.\vec{r})\vec{\nabla}}{r^2}\right] = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{r}(\vec{r}.\vec{\nabla})}{r^2} - \frac{r^2\vec{\nabla}}{r^2}$$

$$= \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \frac{r^2(\hat{r}_\circ^2.\nabla)}{r^2} + \vec{\nabla} = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \hat{r}_\circ^2.(r_\circ\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{\nabla}$$

$$= \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \hat{r}_\circ(\hat{r}_\circ.\hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r}) + \vec{\nabla} = \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} - \hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r} + \vec{\nabla} = \vec{\nabla}$$

طرف راست رابطه (ب) $= i\vec{\nabla}\times(-i\vec{r}\times\vec{\nabla}) = i(-i)(\vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{\nabla}))$

$$= (\vec{\nabla}\times(\vec{r}\times\vec{\nabla})) = \vec{r}(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}) - \vec{\nabla}(\vec{r}.\vec{\nabla}) = \vec{r}\nabla^2 - \nabla(r\hat{r}_\circ.\hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r})$$

$$= \vec{r}\nabla^2 - \nabla(r\frac{\partial}{\partial r} + 1)$$

۲-۵-۱۸- نشان دهید که سه عبارت زیر برای کمیت $\nabla^2\psi(r)$ (در مختصات کروی) هم ارزند.

(الف) $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\psi(r)}{dr}\right]$

(ب) $\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\psi(r)\right]$ (ج) $\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr}$

به خصوص که عبارت دوم برای اثبات تناظر بین توصیف دکارتی یک مسئله با توصیف قطبی کروی آن سودمند است این تناظر در مسئله ۸-۶-۱۱ تعمیم داده می‌شود.

حل (الف)

$$\vec{\nabla}=\hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}_\circ\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\phi}_\circ\frac{1}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\psi=\hat{r}_\circ\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\hat{\theta}_\circ}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\hat{\phi}_\circ}{r\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\quad\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\psi=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta}\left[\mathrm{Sin}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Sin}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{\mathrm{Sin}\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\psi(r)}{dr}\right]$$

(ب)

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\psi=\frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta}\left(\mathrm{Sin}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[2r\frac{\partial\psi}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right]=\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}+\frac{d^2\psi}{dr^2}\quad\Rightarrow$$

$$\nabla^2\psi(r)=\frac{1}{r}\left[2\frac{d\psi}{dr}+r\frac{d^2\psi}{dr^2}\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{d\psi}{dr}+\frac{d\psi}{dr}+r\frac{d^2\psi}{dr^2}\right]$$

$$=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\psi+r\frac{d\psi}{dr}\right]=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{d(r\psi)}{dr}\right]=\frac{1}{r}\frac{d^2(r\psi)}{dr^2}=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\psi(r)\right]$$

(ج) در حل قسمت (ب) اثبات شد.

۲-۵-۱۹- در یکی از مدلهای هالهٔ خورشیدی فرض می‌شود که معادلهٔ حالت مانای شارش گرما، یعنی عبارت زیر در آن صدق می‌کند:

$$\vec{\nabla}.(K\vec{\nabla}T)=0$$

که در آن K، یعنی رسانندگی گرمایی با $T^{\frac{5}{2}}$ متناسب است با فرض اینکه دمای T با r^n متناسب باشد نشان دهید $T=T_\circ\left(\frac{r_\circ}{r}\right)^{\frac{2}{7}}$ در معادلهٔ شارش گرما صدق می‌کند.

حل
$$\vec{\nabla}.(K\vec{\nabla}T)=\vec{\nabla}K.\vec{\nabla}T+K\nabla^{2}T=0$$

با توجه به اینکه $K\propto T^{\frac{5}{2}}$ و $T\propto r^{n}$ اگر در رابطه قرار دهیم داریم $K\propto r^{\frac{5n}{2}}$

$$\vec{\nabla}.(K\vec{\nabla}T)=\vec{\nabla}r^{\frac{5n}{2}}.\nabla r^{n}+r^{\frac{5n}{2}}\nabla^{2}[\,r^{n}]\ =0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{5n}{2}r^{(\frac{5n}{2}-1)}(nr^{n-1})+r^{\frac{5n}{2}}\left[n(n-1)r^{n-2}+\frac{2n}{r}r^{n-1}\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad n^{2}+n+\frac{5}{2}n^{2}=0\quad\Rightarrow\quad n=-\frac{2}{7}\quad\Rightarrow$$

$$T\propto r^{\frac{-2}{7}}\quad\Rightarrow\boxed{T=T_{0}(\frac{r_{0}}{r})^{\frac{2}{7}}}$$

۲ـ۵ـ۲۰ـ میدان نیرویی (در مختصات قطبی کروی) به قرار زیر است:

$$\vec{F}=\hat{r}_{0}\frac{2P\,Cos\theta}{r^{3}}+\hat{\theta}_{0}\frac{P}{r^{3}}Sin\theta\quad و\quad r\geq\frac{P}{2}$$

(الف) با محاسبهٔ $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ امکان وجود یک پتانسیل را بررسی کنید. (ب) $\oint\vec{F}.d\vec{\lambda}$ را روی دایرهٔ واحد در صفحه $\theta=\frac{\pi}{2}$ محاسبه کنید این محاسبه درباره پایستار یا ناپایستار بودن نیرو چه اطلاعی به ما می‌دهد؟ (ج) اگر باور می‌کنید که F را می‌شود به صورت $\vec{F}=-\vec{\nabla}\psi$ توصیف کرد ψ را بیابید در غیر اینصورت فقط بگوئید که هیچ پتانسیل قابل قبولی وجود ندارد.

حل (الف)

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\frac{1}{r^{2}Sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r}_{0} & r\hat{\theta}_{0} & rSin\theta\hat{\phi}_{0}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ \frac{2PCos\theta}{r^{3}} & \frac{rPSin\theta}{r^{3}} & 0\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\frac{1}{r^{2}Sin\theta}\left[0-0+rSin\theta\phi_{0}[-\frac{2PSin\theta}{r^{3}}-\frac{2P(-Sin\theta)}{r^{3}})\right]=0$$

پتانسیل وجود دارد ⇐ نیرو پایستار است ⇐

(ب)
$$\oint F.d\lambda=\oint(\hat{r}_{0}\frac{2P\,Cos\theta}{r^{3}}+\hat{\theta}_{0}\frac{PSin\theta}{r^{3}}).(r_{0}dr+r\theta_{0}d\theta+rSin\theta\phi d\phi)$$

$$=\oint_{\circ}^{1}\frac{2P\,Cos\theta}{r^{3}}dr=2PCos\theta\oint_{\circ}^{1}\frac{dr}{r^{3}}=\frac{-PCos\theta}{r^{2}}\Bigg|_{\circ}^{1}=-P\,Cos\theta$$

(ج) $$F=-\nabla\psi\ \Rightarrow\ \psi=-\int F.d\lambda=-(-PCos\theta)=PCos\theta$$

۲ـ۵ـ۲۱ـ (الف) نشان دهید که $\vec{A}=-\phi_{\circ}\,Cotg\frac{\theta}{r}$ یکی از جوابهای معادلهٔ $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{\hat{r}_{\circ}}{r^{2}}$ است. (ب) نشان دهید این جواب که برحسب مختصات قطبی کروی است با جوابی که در مسئله ۱-۱۳-۵ بدست آمد یعنی $\vec{A}=\hat{i}\frac{yz}{r(x^{2}+y^{2})}-\hat{j}\frac{xz}{r(x^{2}+y^{2})}$ سازگار است توجه کنید که این جواب به ازای $\theta=\circ$ و $\theta=\pi$ (متناظر با $y=\circ$ و x) و اگرا می‌شود. (ج) سرانجام نشان دهید که $\vec{A}=-\hat{\theta}_{\circ}\phi\frac{Sin\theta}{r}$ نیز یکی از جوابهاست. توجه داشته باشید که این جواب (به ازای $r\neq\circ$) واگرا نیست ولی به ازای هیچیک از زاویه‌های سمتی ممکن تک مقدار نیست.

حل (الف)

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r^{2}Sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r}_{\circ} & r\hat{\theta}_{\circ} & rSin\theta\hat{\phi}_{\circ}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ \circ & \circ & -rSin\theta\frac{Cotg\theta}{r}\end{vmatrix}=\frac{\hat{r}_{\circ}}{r^{2}}$$

(ب) $$\vec{A}=\hat{i}\frac{xz}{r(x^{2}+y^{2})}-\hat{j}\frac{xz}{r(x^{2}+y^{2})}=\hat{i}\frac{r^{2}Sin\theta\,Cos\theta\,Sin\phi}{r^{3}Sin^{2}\theta}-\hat{j}\frac{r^{2}Sin\theta\,Cos\theta\,Cos\phi}{r^{3}Sin^{2}\theta}$$

$$=\frac{1}{r}Cotg\theta\left[\hat{i}\,Sin\phi-\hat{j}\,Cos\phi\right]$$

(ج) $$\hat{\phi}_{\circ}=-\hat{i}\,Sin\phi+\hat{j}\,Cos\phi\quad,\quad A=-\hat{\theta}_{\circ}\frac{\phi Sin\theta}{r}$$

$$\vec{\nabla}\times\hat{A}=\frac{1}{r^{2}Sin\theta}\begin{vmatrix}r_{\circ} & r\theta_{\circ} & rSin\theta\phi_{\circ}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ \circ & -\frac{\phi Sin\theta}{r} & \circ\end{vmatrix}=\frac{\vec{r}_{\circ}}{r^{2}}$$

پس $\vec{A}$ قسمت (ج) نیز جواب است.

۲ـ۵ـ۲۲ـ پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}$ به قرار زیر داده شده است.

$\vec{A}=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ نشان دهید که این پتانسیل برداری به القای مغناطیسی $\vec{B}$ ناشی از یک دو قطبی مغناطیسی نقطه‌ای با گشتاور دوقطبی $\vec{m}$ منجر می‌شود.

حل

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta}\begin{vmatrix} \hat{r}_\circ & r\hat{\theta}_\circ & r\mathrm{Sin}\theta\hat{\phi}_\circ \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \circ & \circ & r\mathrm{Sin}\theta\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{m\times r}{r^3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta}\left[\left[\hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial\theta}(r\mathrm{Sin}\theta\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\right]-\left[r\hat{\theta}_\circ\frac{\partial}{\partial r}r\mathrm{Sin}\theta(\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{m\times r}{r^3})\right]\right]$$

$$=\frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta}\left[\left[\hat{r}_\circ\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{mr^2\mathrm{Sin}^2\theta}{r^3}\right]-\left[r\hat{\theta}_\circ\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{mr^2\mathrm{Sin}^2\theta}{r^3})\right]\right]$$

$$=\frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta}\left[\left[\hat{r}_\circ\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{2m\,\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\theta}{r}\right]+\left[\hat{\theta}_\circ\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{m\mathrm{Sin}^2\theta}{r}\right]\right]$$

$$=\hat{r}_\circ\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{2m\,\mathrm{Cos}\theta}{r^3}+\hat{\theta}_\circ\frac{\mu_\circ}{4\pi}\frac{m\,\mathrm{Sin}\theta}{r^3}$$

۲ـ۵ـ۲۳ـ تابش دو قطبی الکتریکی در فاصلهٔ زیادی از منبع آن دارای میدانهایی به قرار زیر است:

$$\vec{E}=a_E\,\mathrm{Sin}\theta\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\hat{\theta}_\circ \quad , \quad \vec{B}=a_B\,\mathrm{Sin}\theta\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\hat{\phi}_\circ$$

نشان دهید که معادلات ماکسول $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_\circ\mu_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ و $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ به شرطی صادق‌اند که بگیریم.

$$\frac{a_E}{a_B}=\frac{\omega}{k}=C=(\varepsilon_\circ\mu_\circ)^{-\frac{1}{2}}$$

[راهنمایی: چون r بزرگ است می‌توانیم از جمله‌هایی از مرتبهٔ r^{-2} صرفنظر کنیم.]

حل

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{1}{r^2\mathrm{Sin}\theta}\begin{vmatrix} \hat{r}_\circ & r\hat{\theta}_\circ & r\mathrm{Sin}\theta\hat{\phi}_\circ \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \circ & ra_E\mathrm{Sin}\theta\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} & \circ\end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} = \hat{\phi}_\circ\, a_E\, ki\, Sin\theta \dfrac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \\ -\dfrac{\partial B}{\partial t} = (a_B \omega i\, Sin\theta \dfrac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}) \\ a_B\omega = a_E k \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{r^2 Sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r}_\circ & r\hat{\theta}_\circ & rSin\theta\hat{\phi}_\circ \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ \circ & \circ & rSin\theta(a_B Sin\theta \dfrac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \underbrace{\frac{r_\circ}{r^2} 2a_B\, Cos\theta e^{i(kr-\omega t)}}_{\text{صرفنظر می‌شود}} - \frac{\theta_\circ}{rSin\theta}\left(a_B\, Sin^2\theta(ik)\, e^{i(kr-\omega t)}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = a_B Sin\theta \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}(-ik)\hat{\theta}_\circ$$

$$= a_E\, Sin\theta(-i\omega)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\hat{\theta}_\circ(\frac{a_B k}{a_E \omega}) = \frac{\partial E}{\partial t}(\frac{a_B}{a_E})(\frac{k}{\omega})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\mu_\circ \varepsilon_\circ)$$

۲ـ۵ـ۲۴ـ (الف) توضیح دهید که به چه دلیل ∇^2 در مختصات قطبی تخت از ∇^2 در مختصات استوانه‌ای دوار با z=Cost بدست می‌آید. (ب) توضیح دهید که چرا ∇^2 در مختصات قطبی کروی با محدود کردن θ به $\frac{\pi}{2}$ به صورت ∇^2 در مختصات قطبی تخت منجر نمی‌شود.

[یادآوری: $$\nabla^2(\rho,\phi) = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

حل (الف) چون دستگاه مختصات تخت همان دستگاه استوانه‌ای است که ارتفاع آن صفر باشد پس نه تنها در مورد ∇^2 بلکه در سایر موارد جمله مربوط به ارتفاع حذف می‌گردد.

(ب) $$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2 Sin\theta}\left[Sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(Sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$ در مختصات کروی

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$=\frac{2r}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\sin\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2},\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \underset{\text{کروی}}{\nabla^2\psi}=\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\neq \underset{\text{تخت}}{\nabla^2\psi}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

بخش ۲ـ۶ـ جداسازی متغیرها — مسائل صفحه ۱۵۹

۲ـ۶ـ۱ـ با اعمال عملگر ∇^2+k^2 روی تابع کلی $a_1\psi_1(x,y,z)+a_2\psi_2(x,y,z)$ نشان دهید که این عملگر خطی است یعنی

$$(\nabla^2+k^2)(a_1\psi_1+a_2\psi_2)=a_1(\nabla^2+k^2)\psi_1+a_2(\nabla^2+k^2)\psi_2$$

حل

$$(\nabla^2+k^2)(a_1\psi_1+a_2\psi_2)=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2)(a_1\psi_1+a_2\psi_2)$$

$$=a_1(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}+k^2\psi_1)+a_2(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}+k^2\psi_2)$$

$$=a_1(\nabla^2+k^2)\psi_1+a_2(\nabla^2+k^2)\psi_2$$

۲ـ۶ـ۲ـ نشان دهید که اگر k^2 در معادله هلمهولتز $\nabla^2\psi+k^2\psi=0$ به $k^2+f(\rho)+(\frac{1}{\rho^2})g(\phi)+h(z)$ تعمیم یابد باز هم این معادله در مختصات استوانه‌ای دوار تفکیک پذیر است.

حل

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\left(k^2+f(\rho)+\frac{1}{\rho^2}g(\phi)+h(z)\right)\psi=0$$

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho})+f(\rho)\psi\right]+\frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+g(\phi)\psi)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+h(z)\psi+k^2\psi=0$$

$$\psi(\rho,\phi,z)=R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

$$\Phi Z\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})+f(\rho)R\right]+\frac{1}{\rho^2}RZ\left[\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+g(\phi)\Phi\right]+R\Phi\frac{d^2Z}{dz^2}+h(z)R\Phi Z+k^2R\Phi Z=0$$

با تقسیم طرفین بر $R\Phi Z$ داریم

$$\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})+f(\rho)R\right]+\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\left[\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+g(\phi)\Phi\right]+\frac{1}{Z}\left[\frac{d^2Z}{dz^2}\right]+h(z)+k^2=0$$

سه معادلهٔ دیفرانسیلی پیدا می‌شود که هر کدام را مساوی یک ثابت قرار می‌دهیم و ضرایب را بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+h(z)=-b^2$$

$$\left[\frac{1}{R\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho}+f(\rho)+\frac{1}{\Phi\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\frac{1}{\rho^2}g(\phi)+k^2=b^2 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\rho^2f(\rho)+g(\phi)+k^2\rho^2=b^2\rho^2 \qquad (1)$$

$$b^2\rho^2-k^2\rho^2-g(\phi)+\rho^2f(\rho)=-m^2 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \quad\Rightarrow\quad \frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2=0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2-\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho}) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-L^2$$

$$\Rightarrow\quad -L^2=-m^2-\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dR}{d\rho})$$

۲ـ۶ـ۳ـ در معادلهٔ هلمهولتز در مختصات قطبی کروی متغیرها را چنان تفکیک کنید که وابستگی شعاعی اول جدا شود نشان دهید که معادله‌های تفکیک شده‌ای که بدست آورده‌اید به همان صورت معادله ۲-۸۷، ۲-۹۰ و ۲-۹۱ هستند.

حل حل همانند مسئله قبل می‌باشد و در بعضی موارد در حل مسئله قبل به حل این مسئله نیز اشاره شده است.

۲ـ۶ـ۴ـ ثابت کنید که معادلهٔ

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\phi)+\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\phi)\right]\psi(r,\theta,\phi)=0$$

(در مختصات قطبی کروی) تفکیک‌پذیر است. توابع f و g و h هر یک تابعی از تنها متغیری‌اند که در رابطهٔ مشخص شده است؛ K^2 ثابت است.

حل

$$\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})+\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right]+$$

$$\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\phi)\right]\psi(r,\theta,\phi)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\Bigg]+$$

$$\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\phi)\right]\psi(r,\theta,\phi)$$

$$\psi(r,\theta,\phi)=R(r)\ \Theta(\theta)\ \Phi(\phi)$$

$$\left[\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\ \ \Theta}{d\theta})+\frac{1}{\Phi r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right]$$

$$+\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}h(\phi)\right]=0 \quad \Rightarrow$$

$$r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right]+r^2\sin^2\theta\left[k^2+f(r)+\frac{1}{r^2}g(\theta)\right] \quad \Rightarrow$$

$$(\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+h(\phi))=-m^2$$

$$\frac{m^2}{\sin^2\theta}=\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+$$

$$k^2r^2+r^2f(r)+g(\theta)=\frac{m^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})-g(\theta)$$

$$=\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+k^2r^2+r^2$$

۴ـ۶ـ۵ـ یک ذره اتمی در جعبهٔ مکعب مستطیلی به یالهای a، b و c محبوس است این ذره در مکانیک کوانتومی توسط تابع موج ψ توصیف می‌شود که در معادلهٔ شرودینگر $\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=E\psi$ صدق می‌کند. تابع موج باید روی هر یک از رخهای جعبه صفر باشد (ولی نباید متحد با صفر شود) این شرط محدودیتهایی روی ثابتهایی جداسازی و در نتیجه روی انرژی E اعمال می‌کند. کمترین مقداری که E می‌تواند داشته باشد تا چنین جوابی وجود داشته باشد، چقدر است؟

حل

$$\frac{-\hbar^{2}}{2m}\nabla^{2}\psi = E\psi \quad , \quad \psi = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \quad (1)$$

$$\frac{-\hbar^{2}}{2m}\left[\frac{d^{2}\psi}{dx^{2}}+\frac{d^{2}\psi}{dy^{2}}+\frac{d^{2}\psi}{dz^{2}}\right] = E\psi \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^{2}\psi}{dx^{2}}+\frac{d^{2}\psi}{dy^{2}}+\frac{d^{2}\psi}{dz^{2}} = \frac{-2mE}{\hbar^{2}}\psi$$

با اعمال ψ به صورت (۱) و جداسازی داریم:

$$\frac{1}{X}\frac{d^{2}X}{dx^{2}} = -\ell^{2} \quad , \quad X = \sin \ell x \quad , \quad \ell a = P_{1}\pi$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^{2}Y}{dy^{2}} = -m^{2} \quad , \quad Y = \sin my \quad , \quad mb = P_{2}\pi$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^{2}Z}{dz^{2}} = -n^{2} \quad , \quad Z = \sin nz \quad , \quad nc = P_{3}\pi$$

$$\frac{2mE}{\hbar^{2}} = \pi^{2}\left(\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}+\frac{1}{c^{2}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{\hbar^{2}\pi^{2}}{2m}\left(\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}+\frac{1}{c^{2}}\right)}$$