حل رابطه (۳ـ۶) و $A'_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} A_j$

چون طبق فرض مسئله سه مولفه اول صفرند پس فقط داریم $A'_4 = a_{i4} A_4$

A'_4 در دستگاه پریم‌دار و بطبع A_4 در دستگاه بدون پریم است از طرفی طبق فرض که دست کم یکی از ضرایب $a_{i4}(i=1,2,3)$ مخالف صفر است داریم:

$$IF \quad a_{i4}(i=1,2,3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A'_4 = 0$$

و این در حالتی است که چرخش حول محور A_4 انجام شده است و نتیجه می‌گیریم که مولفهٔ چهارم یعنی $A'_4 = a_{44} A_4$ در تمام چارچوبهای مرجع صفر است.

۳ـ۱ـ۴ـ با بررسی رفتار یک تانسور مرتبهٔ دوم کلی تحت چرخشهای 90° و 180° حول محورهای مختصات، نشان دهید که یک تانسور مرتبهٔ دوم همسانگرد در فضای سه بعدی باید مضربی از δ_{ij} باشد.

حل مسئله را برای چرخش 90° حل می‌کنیم حالت 180° بطور مشابه حل می‌گردد.

$$A = \begin{bmatrix} \cos 90 & \sin 90 & 0 \\ -\sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'_{ij} = \sum_{k\ell} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_j} A_{k\ell} = \sum_{k\ell} a_{ik} a_{j\ell} A_{k\ell}$$

$$A'_{11} = A_{22} \quad , \quad A'_{12} = -A_{21} \quad , \quad A'_{13} = A_{23}$$

$$A'_{21} = -A_{12} \quad , \quad A'_{22} = A_{11} \quad , \quad A'_{23} = A_{3}$$

$$A'_{31} = A_{13} \quad , \quad A'_{32} = A_{23} \quad , \quad A'_{33} = A_{33}$$

چون تانسور همسانگرد است دیده می‌شود که مولفه‌های پریم‌دار آن با بدون پریم یکی است و از طرفی می‌دانیم که خاصیت دلتای کرونکر δ_{ij} این است که در جملهٔ دستگاههای چرخیده مختصاتی مولفه‌های یکسانی دارد و به همین دلیل همسانگرد است پس A مضربی از δ_{ij} می‌باشد.

۳ـ۱ـ۵ـ تانسور خمش مرتبهٔ چهارم چهار بعدی ریمان ـ کریستوفل در نسبیت عامل $R_{ik\ell m}$ در رابطه‌های تقارنی زیر صدق می‌کند.

بخش ۳ـ۱ـ مقدمه ـ تعریفها مسائل صفحه ۱۶۸

۳ـ۱ـ۱ـ نشان دهید که اگر مؤلفه‌های تانسوری از هر مرتبه در یک دستگاه مختصات خاص صفر باشند این مولفه‌ها در هر دستگاه مختصات دیگری صفر خواهند بود.

[یادآوری: این نکته در فضای خمیدهٔ چهار بعدی نسبیت عام اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند اگر کمیتی که به شکل یک تانسور توصیف شده است در یک دستگاه مختصات وجود داشته باشد. در تمام دستگاههای مختصات وجود خواهد داشت و نمی‌تواند (مانند نیروهای مرکز گریز و کور یولیس در مکانیک نیوتونی) پیامد یک انتخاب خاص دستگاه مختصات باشد.]

حل

$$T^{in}_{jkm} = 0 \Rightarrow T'^{in}_{jkm} = 0$$

$$T'^{in}_{jkm} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\ell}\frac{\partial x'^n}{\partial x^m}\frac{\partial x^s}{\partial x'^j}\frac{\partial x^o}{\partial x'^k}\frac{\partial x^p}{\partial x'^m} T^{\ell m}_{sop}$$

$$T^{\ell m}_{sop} = aaaa\ldots = 0 \qquad T'^{in}_{jkm} = 0$$

۳ـ۱ـ۲ـ در یک دستگاه مختصات خاص مؤلفه‌های تانسور A با مؤلفه‌های متناظر تانسور B برابرند یعنی $A^o_{ij} = B^o_{ij}$

نشان دهید که تانسورهای A و B در جملهٔ دستگاههای مختصات با هم برابرند یعنی در تمام دستگاههای مختصات داریم: $A_{ij}=B_{ij}$

حل

$$A_{ij} = B_{ij} \Rightarrow A'_{ij} = B'_{ij}$$

$$A'_{ij} = \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}A_{\ell m} \quad , \quad B'_{ij} = \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}B_{\ell m}$$

$$\Rightarrow B'_{ij} = \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^i}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}A_{\ell m} = A'_{ij} \Rightarrow$$

$$B'_{ij} = A'_{ij}$$

۳ـ۱ـ۳ـ سه مولفهٔ اول یک بردار چهار بعدی در دو چارچوب مرجع صفرند. اگر چارچوب مرجع دوم صرفاً یک چرخش چارچوب مرجع اول حول محور x نباشد، یعنی دست کم یکی از ضرایب a_{i4} $(i=1,2,3)$ غیرصفر باشد. نشان دهید که مولفهٔ چهارم در تمام چارچوبهای مرجع صفر است. این نکته به زبان مکانیک نسبیتی به معنای آن است که اگر تکانه در دو چارچوب لورنتسی پایسته باشد. انرژی در تمام چارچوبهای لورنتسی پایسته خواهد بود.

حل رابطه (۳-۶) و

$$A'_i = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} A_j$$

چون طبق فرض مسئله سه مولفه اول صفرند پس فقط داریم $A'_4 = a_{i4} A_4$

A'_4 در دستگاه پریم‌دار و بطبع A_4 در دستگاه بدون پریم است از طرفی طبق فرض که دست کم یکی از ضرایب $a_{i4}(i=1,2,3)$ مخالف صفر است داریم:

$$\text{IF} \quad a_{i4}(i=1,2,3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad A'_4 = 0$$

و این در حالتی است که چرخش حول محور A_4 انجام شده است و نتیجه می‌گیریم که مولفهٔ چهارم یعنی $A'_4 = a_{44} A_4$ در تمام چارچوبهای مرجع صفر است.

۳-۱-۴- با بررسی رفتار یک تانسور مرتبهٔ دوم کلی تحت چرخشهای 90° و 180° حول محورهای مختصات، نشان دهید که یک تانسور مرتبهٔ دوم همسانگرد در فضای سه بعدی باید مضربی از δ_{ij} باشد.

حل مسئله را برای چرخش 90° حل می‌کنیم حالت 180° بطور مشابه حل می‌گردد.

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}90 & \mathrm{Sin}90 & 0 \\ -\mathrm{Sin}90 & \mathrm{Cos}90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'_{ij} = \sum_{k\ell} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_j} A_{k\ell} = \sum_{k\ell} a_{ik}\, a_{j\ell} A_{k\ell}$$

$$A'_{11} = A_{22} \quad , \quad A'_{12} = -A_{21} \quad , \quad A'_{13} = A_{23}$$

$$A'_{21} = -A_{12} \quad , \quad A'_{22} = A_{11} \quad , \quad A'_{23} = A_{3}$$

$$A'_{31} = A_{13} \quad , \quad A'_{32} = A_{23} \quad , \quad A'_{33} = A_{33}$$

چون تانسور همسانگرد است دیده می‌شود که مولفه‌های پریم‌دار آن با بدون پریم یکی است و از طرفی می‌دانیم که خاصیت دلتای کرونکر δ_{ij} این است که در جملهٔ دستگاههای چرخیده مختصاتی مولفه‌های یکسانی دارد و به همین دلیل همسانگرد است پس A مضربی از δ_{ij} می‌باشد.

۳-۱-۵- تانسور خمش مرتبهٔ چهارم چهار بعدی ریمان ـ کریستوفل در نسبیت عام $R_{ik\ell m}$ در رابطه‌های تقارنی زیر صدق می‌کند.

$R_{ik\ell m} = -R_{ikm\ell} = -R_{ki\ell m}$

که در آن شاخصها اعداد از یک تا چهار را به خود می‌گیرند. نشان دهید که تعداد مؤلفه‌های مستقل از ۲۵۶ به ۳۶ کاهش می‌یابد و شرط

$$R_{ik\ell m} = R_{\ell mik}$$

تعداد مولفه‌های مستقل را به ۲۱ کاهش می‌دهد. سرانجام نشان دهید که اگر مؤلفه‌ها در اتحاد $R_{ik\ell m} + R_{i\ell mk} + R_{imk\ell} = 0$ صدق کنند. تعداد مولفه‌ها مستقل به ۲۰ می‌رسد.

[یادآوری: اتحاد سه جمله‌ای آخر فقط اگر همه چهار شاخص با هم متفاوت باشند حاوی اطلاعات جدیدی است. این اتحاد یک سوم از تعداد مؤلفه‌های مستقلی راکه دارای این شرط هستند کم می‌کند.]

حل با توجه به تعداد شاخصها که ۴ تا هستند پس 4^4 حالت یعنی ۲۵۶ حالت وجود دارد. با توجه به شرط $R_{ik\ell m} = -R_{ikm\ell} = -R_{ki\ell m}$ و اینکه تانسور به صورت ۱۶ مربع است نتیجتاً دو اندیس اول در هر ربع ثابت می‌باشد و نیز از هر ۶ متغیر یک مربع ۳ تا مستقل وجود دارد پس از شرط اول ۹۶ متغیر داریم و با اعمال شرط دو ۴۸ متغیر خواهیم داشت اما با توجه به $R_{ik\ell m} = R_{ki\ell m}$، ۱۲ متغیر دیگر کاسته شود و ۳۶ متغیر مستقل داریم با اعمال شرط $R_{ik\ell m} = R_{\ell mik}$ داریم

۱۶-۴=۱۲ و ۱۲÷۲=۶

۳۶-۶=۳۰÷۲=۱۵+۶=۲۱

۲۱ متغیر مستقل بدست می‌آید.

و بالاخره شرط آخر یعنی $R_{ik\ell m} + R_{i\ell mk} + R_{imk\ell} = 0$ یک متغیر دیگر می‌کاهد و در کل با اعمال شروط ذکر شده ۲۰ متغیر مستقل بدست خواهد آمد.

۳-۱-۶ $T_{ik\ell m}$ نسبت به هر زوج شاخص از چهار شاخص خود پاد متقارن است این تانسور (در فضای سه بعدی) چند مولفهٔ مستقل دارد؟

حل

$T_{ki\ell m} = -T_{ik\ell m}$ پاد متقارن

$T_{ik\ell m} = -T_{i\ell km}$

ماتریس یک تانسور مرتبه ۲ است.

ولی فضایش هر چه می‌تواند باشد مثلاً ۳×۳ یا n×n و ...

$i=۱,۲,۳$

$k=۱,۲,۳$ اگر فضا سه بعدی باشد

$\ell=۱,۲,۳$

$m=۱,۲,۳$

$T_{۱۲۳۱}=-T_{۱۲۳۱}=۰$

$T_{۱۲۳۳}=-T_{۱۲۳۳}$ $T_{۱۲۳۳}=-T_{۱۲۳۳}=۰$

عنصر مستقل ندارد.

بخش ۳ـ۲ـادغام ـ ضرب مستقیم مسائل صفحه ۱۷۱

۳ـ۲ـ۱ـ اگر $T_{...i}$ تانسوری از مرتبهٔ n باشد نشان دهید که $\partial T_{...i}/\partial x_j$ (در مختصات دکارتی) تانسوری از مرتبهٔ ۱+n خواهد بود.

[یادآوری: ضرایب a_{ij} در دستگاه مختصات غیردکارتی بطور کلی توابعی از مختصات‌اند و مشتق ساده یک تانسور مرتبه n تانسور نیست مگر در حالت خاص ۰=n و فقط در این حالت است که مشتق بنابر معادلهٔ ۳-۱۱ یک بردار (تانسور مرتبه ۱) همورد است].

حل $\xrightarrow{\text{از قاعده زنجیری}}$

$$\frac{\partial T'_{...i}}{\partial x'_j}=\frac{\partial}{\partial x'_j}\left(\frac{\partial x'_۱}{\partial x_m}\frac{\partial x'_۲}{\partial x_n}\cdots\frac{\partial x'_i}{\partial x_z}\right)T_{...z}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial x'_j}\,\frac{\partial}{\partial x_p}\left[\left(\frac{\partial x'_۱}{\partial x_m}\,\frac{\partial x'_۲}{\partial x_n}\cdots\right)T_{...z}\right]$$

$$=\frac{\partial x_p}{\partial x'_j}\left[\left(\frac{\partial x'_۱}{\partial x_m}\,\frac{\partial x'_۲}{\partial x_n}\cdots\right)\frac{\partial T_{...z}}{\partial x_p}\right.$$

$\frac{\partial T_{...z}}{\partial x_j}$ تانسور مرتبه ۱+n است.

۳ـ۲ـ۲ـ اگر $T_{ijk...}$ تانسوری از مرتبهٔ n باشد نشان دهید که:

$\sum\frac{\partial T_{ijk...}}{\partial x_j}$ (در مختصات دکارتی) تانسوری از مرتبه ۱-n است.

حل

$$\underset{\text{مرتبه } n}{T_{ijk\ldots}} \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} \underset{\text{مرتبه } n+1}{\frac{\partial T_{ijk\ldots}}{\partial x_j}} \xrightarrow{\text{ادغام}} \underset{\text{مرتبه } n-1}{\sum \frac{\partial T_{ijk\ldots}}{\partial x_j}}$$

۲-۲-۳ـ عملگر $\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

را می‌توان با استفاده از $x_4 = ict$ به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

این عملگر لاپلاسی چهار بعدی است که معمولاً دالامبری نامیده می‌شود و با $\square^2$ نمایش داده می‌شود. نشان دهید که این عملگر اسکالر است.

حل

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \square^2$$

$$\square'^2 = \square^2$$

$$z_i \frac{\partial^2}{\partial \cancel{x}_1^2} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_\ell}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \sum_i \sum_{k\ell} \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial x_\ell}{\partial x_i'} \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \sum_{k,\ell} \left(\sum_\ell a_{ik}\, a_{i\ell} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

$$= \sum_{\ell,k} \delta_{k,\ell} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_\ell} = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_\ell \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_\ell \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2}$$

بخش ۳ـ۳ـ قاعدهٔ خارج قسمت مسائل صفحه ۱۷۴

۱-۳-۳ـ جمع زنی دوگانهٔ $K_{ij}A_iB_j$ برای هر دو بردار A_i و B_j ناورد است. ثابت کنید K_{ij}

تانسوری مرتبهٔ دوم است.

[یادآوری: این نتیجه در رابطهٔ $dS^{۲}=g_{ij}dx_idx_j$(ناوردا) نشان می‌دهد که «متریک» g_{ij} یک تانسور است].

حل اگر رابطه $K_{ij}A_iB_j$ را در دستگاه مختصات پریم‌دار در نظر بگیریم داریم:

$$K'_{k\ell}A'_kB'_\ell \quad (۱) \quad A'_k = a_{ki}A_i \quad (۲) \quad , \quad B'_\ell = a_{\ell j}B_j \quad (۳)$$

روابط (۲) و (۳) را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم:

$$(۲),(۳)\,\text{in}\,(۱) \;\Rightarrow\; K'_{k\ell}a_{ki}A_ia_{\ell j}B_j \quad (۳)$$

اما در دستگاه بدون پریم $K_{ij}A_iB_j$ را داریم

$$K_{ij}A_iB_j = K'_{k\ell}A'_kB'_\ell \;\Rightarrow$$

طرف راست را از رابطه (۴) جایگزین می‌کنیم:

$$K_{ij}A_iB_j = K'_{k\ell}a_{ki}A_ia_{\ell j}B_j$$

$$K_{ij} = K'_{k\ell}a_{ki}a_{\ell i} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{K'_{k\ell} = K_{ij}a_{ki}a_{\ell j}}$$

۲-۳-۴- معادلهٔ $K_{ij}A_{jk}=B_{ik}$ برای تمام سمتگیریهای دستگاه مختصات برقرار است. اگر A و B تانسورهایی از مرتبهٔ دوم باشند. نشان دهید که K نیز یک تانسور مرتبهٔ دوم است.

حل

$$K_{ij}A_{jk} = B_{ik} \;\Rightarrow\; K'_{im}A'_{ms} = B'_{ik} \quad (۳)$$

(از رابطه ۳-۲۹ ج)

$$B'_{ik} = a_{ij}a_{kp}B_{jp} \quad , \quad B_{jp} = K_{j\ell}A_{\ell p}$$

از رابطه ۳-۳۴

$$B'_{ik} = a_{ij}a_{kp}K_{j\ell}A_{\ell p} \quad (۲) \quad , \quad A_{\ell p} = a_{\ell m}a_{ps}A'_{ms} \quad (۱)$$

رابطه (۱) را در طرف راست رابطه (۲) قرار می‌دهیم از طرفی طرف چپ را از رابطه (۳) قرار می‌دهیم.

$$K'_{im}A'_{ms} = a_{ij}a_{kp}K_{j\ell}a_{\ell m}a_{ps}A'_{ms}$$

$$K'_{im} = a_{ij}a_{\ell m}\delta_{kS}K_{j\ell} \quad , \quad \delta_{kS} = ۱$$

$$\boxed{K'_{im} = a_{ij}a_{\ell m}K_{j\ell}}$$

بخش ۳ـ۴ـ شبه تانسورها، تانسورهای دوگان   مسائل صفحه ۱۸۳

۳ـ۴ـ۱ـ آرایهٔ مربعی پاد متقارن زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن (C_1, C_2, C_3) یک شبه بردار است با فرض اینکه رابطهٔ

$$C_i = \frac{1}{2!}\varepsilon_{ijk} C_{jk}$$

در تمام دستگاههای مختصات برقرار باشد ثابت کنید که C_{jk} تانسور است. (این عبارت صورت دیگری از قضیه خارج قسمت است.)

حل از قسمت دوم رابطه ۳ـ۳۷ داریم. (برای شبه‌بردار)

$$C'_i = |a|\ a_{ij} C_j$$

$$C_j = |a|\ a_{ij} C'_i \quad \xrightarrow[\text{مسئله جایگزین می‌شود}]{\text{از رابطه صورت}} \quad |a|\ a_{ij}\left(\frac{1}{2!}\varepsilon'_{imn} C'_{mn}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{مسئله}]{\text{از رابطه صورت}} \quad \frac{1}{2!}\varepsilon_{jki} C_{ki} = |a|\ a_{ij}\left(\frac{1}{2!}\varepsilon'_{imn} C'_{mn}\right) \quad (1)$$

از طرفی طبق روابط (۳-۴۱) و (۳-۴۳) داریم

$$\varepsilon_{ijk} = \delta'_{ijk} = |a|\ a_{ip} a_{jq} a_{kr} \varepsilon_{pqr}$$

پس برای ε_{jki} و ε'_{imn} می‌توان نوشت

$$\varepsilon_{jki} = |a|\ a_{jm} a_{kn} a_{ir} \varepsilon_{mnr}$$

$$\varepsilon'_{imn} = |a|\ a_{ij} a_{mk} a_{ni} \varepsilon_{jki}$$

اگر در رابطه (۱) جایگزین کنیم و بعد از ساده کردن داریم

$$C'_{mn} = a_{mk}\ a_{ni} C_{ki}$$

۳ـ۴ـ۳ـ نشان دهید که (الف) $\delta_{ii}=3$ (ب) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}=0$

(ج) $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpq}=2\delta_{ij}$ (د) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6$

حل از مشابه سازی با رابطه ۳-۱۹ داریم:

(الف)

$$\delta'_{ii} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_\ell}{\partial x'_i}\delta_{k\ell} = \frac{\partial x_\ell}{\partial x_k}\delta_{k\ell} = 3$$

(ب) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$

دو حالت در نظر می‌گیریم (۱) $i=j$ در این حالت می‌دانیم $\delta_{ii}=1$ ولی $\varepsilon_{iik}=0$ (طبق رابطه ۳-۴۰) (۲) $i\neq j$ در این حالت $\delta_{ij}=0$ و با وجود مخالف صفر بودن ε_{ijk} باز هم نتیجه صفر است پس نمی‌توان حالتی بدست آورد که $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}\neq 0$ باشد پس رابطه (ب) برقرار است.

(ج) $\varepsilon_{ipq}\,\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$

(د) $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii}$

با کمک گرفتن از قسمت (ج)

و استفاده از قسمت (الف) که $\delta_{ii}=3$ داریم

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 2\times3=6$$

۳-۴-۴ نشان دهید که

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq}\,\delta_{jp}$$

حل

$$\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \varepsilon_{ij1}\varepsilon_{pq1} + \varepsilon_{ij2}\varepsilon_{pq2} + \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{pq3}$$

$$i(OR)j=k \;\Rightarrow\; \varepsilon_{ij1}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} i,j\neq k \;\Rightarrow\; \varepsilon_{ij1}\neq 0 \\ p,q\neq k \;\Rightarrow\; \varepsilon_{pq1}\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_{ij1}\,\varepsilon_{pq1} \rightarrow \delta_{ip}\,\delta_{jq}\ (i=p,j=q)$$

$$p,q=k \;\Rightarrow\; \varepsilon_{pq1}=0$$

برای حالت دیگر که $j=p$ و $i=q$ داریم:

$$\varepsilon_{ij1}\,\varepsilon_{qp1} \rightarrow -\delta_{iq}\,\delta_{jp}$$

در کل نتیجه می‌گیریم

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq}\,\delta_{jp}$$

۳-۴-۵ (الف) مؤلفه‌های بردار ضرب برداری $\vec{C}$، $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ را برحسب ε_{ijk} و مؤلفه‌های A و B بیان کنید. (ب) با استفاده از پاد تقارن ε_{ijk} نشان دهید که $\vec{A}.\vec{A}\times\vec{B}=0$

حل

(الف)

$$\vec{A}.\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_i & A_j & A_k \\ B_i & B_j & B_k \end{vmatrix} = i\underbrace{(A_jB_k - A_kB_j)}_{C_i} + j\underbrace{(A_kB_i - A_iB_k)}_{C_j}$$

$$\underbrace{+\hat{K}(A_iB_j-A_jB_i)}_{C_k} \quad\Rightarrow\quad C_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k \;,\quad C_k=\varepsilon_{kij}A_iB_j$$
$$C_j=\varepsilon_{jki}\,A_k\,B_i$$

(ب) $\vec{A}.\vec{A}\times\vec{B}=A_i.(\vec{A}\times\vec{B})_i=A_i\,\varepsilon_{ijk}\,A_j\,B_k=0$

۳ـ۴ـ۶ـ (الف) نشان دهید که تانسور (ماتریس) لختی بخش ۴-۶ را برای ذره‌ای به جرم m در (x_1,x_2,x_3) می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$I_{ij}=m(x_nx_n\delta_{ij}-x_ix_j)$$

(ب) نشان دهید :

$$I_{ij}=-M_{i\ell}M_{\ell j}=-m\varepsilon_{i\ell k}\,x_k\,\varepsilon_{\ell jm}\,x_m$$

که در آن $M_{i\ell}=m^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{i\ell k}\,x_k$. این ادغام دو بردار مرتبه دو و شبیه به ضرب ماتریسی بخش ۴-۲ است.

حل حاصلضرب لختی xy (رابطه ۴-۱۴۰) (الف) $I_{xy}=I_{yx}=-\sum_i m_ix_iy_i$

رابطه ۴-۱۳۹ $\quad I_{xx}=\sum_i m_i\,(r_i^2-x_i^2)$

$$r_i^2=\sum_n x_n^2=\sum x_nx_n$$

$$I_{12}=m\,(x_nx_n\,\delta_{x_1x_2}-x_1x_2)$$

(ب) $I_{ij}=-M_{i\ell}M_{\ell j}\begin{cases}M_{i\ell}=m^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{i\ell k}x_k\\ M_{\ell j}=m^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\ell jm}x_m\end{cases}$

$$I_{ij}=-m^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{i\ell k}\,x_k\,m^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\ell jm}\,x_m$$
$$=-m\varepsilon_{i\ell k}\,x_k\,\varepsilon_{\ell jm}\,x_m$$

۳ـ۴ـ۷ـ $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\vec{A}$ و $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi$ را برحسب نماد ε_{ijk} چنان بنویسید که مشخص شود هر یک از این عبارتها صفر است.

حل

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_y\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial z}A_x-\frac{\partial}{\partial x}A_z\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial y}A_z\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\varepsilon_{jki}\frac{\partial}{\partial z}A_x\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x}A_y\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\nabla.\nabla\times A)_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}A_z\\(\nabla.\nabla\times A)_j=\varepsilon_{jki}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}A_x\\(\nabla.\nabla\times A)=\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}A_y\end{cases}$$

$$\nabla\times\nabla\phi=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=i\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]+j\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]+k\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]$$

$$=i\left[\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]+j\left[\varepsilon_{jki}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]+k\left[\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]$$

$$\begin{cases}(\nabla\times\nabla\phi)_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}\\(\nabla\times\nabla\phi)_j=\varepsilon_{jki}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}\end{cases}\quad(\nabla\times\nabla\phi)_k=\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\Rightarrow\begin{cases}(\nabla\times\nabla\phi)_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}\\(\nabla\times\nabla\phi)_j=\varepsilon_{jki}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\(\nabla\times\nabla\phi)_k=\varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\end{cases}$$

۴-۴-۸ ضرب برداری را برحسب نماد لوی - چی ویتا (ε_{ijk}) بیان و قاعدهٔ بک کب معادله ۱-۵۰ را استخراج کنید.

[راهنمایی: از رابطهٔ مسئله ۳-۴-۴ بهره گیرید.]

حل

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\quad,\quad\vec{B}\times\vec{C}=\vec{D}$$

با کمک از مسئله ۳-۴-۵ می‌نویسیم.

$$\vec{A}\times\vec{D}=\hat{i}\left[\varepsilon_{ijk}A_jD_k\right]+\hat{k}\left[\varepsilon_{jki}A_kD_i\right]+\hat{k}\left[\varepsilon_{kij}A_iD_j\right]$$

از طرفی خود D یک حاصلضرب برداری بین B و C است می‌توان نوشت

$$D_i=\varepsilon_{ijk}B_jC_k \quad , \quad D_j=\varepsilon_{jki}B_kC_i \quad , \quad D_k=\varepsilon_{kij}B_iC_j$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=i\left[\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij}A_jB_iC_j\right]+\hat{j}\left[\varepsilon_{jki}\varepsilon_{ijk}A_kB_jC_k\right]+\hat{k}\left[\varepsilon_{kij}\varepsilon_{jki}A_iB_kC_i\right]$$

با ادامه دادن به رابطه بک کب می‌رسیم

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$$

۳-۴-۹- تحقیق کنید که هر یک از تانسورهای مرتبهٔ چهار زیر همسانگرد است یعنی مؤلفه‌های آن مستقل از هر چرخش دستگاه مختصات ثابت می‌ماند

(الف) $A_{ijk\ell}=\delta_{ij}\,\delta_{k\ell}$ (ب) $B_{ijk\ell}=\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}+\delta_{i\ell}\delta_{jk}$

(ج) $C_{ijk\ell}=\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}-\delta_{i\ell}\delta_{jk}$

حل

(الف)
$$\left.\begin{aligned}A'_{ijk\ell}&=a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{\ell q}A_{mnpq}\\ A_{mnpq}&=\delta_{mn}\,\delta_{pq}\end{aligned}\right\}=a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{\ell q}\delta_{mn}\delta_{pq}$$

$$A'_{ijk\ell}=a_{im}\delta_{mn}a_{jn}\,a_{kp}\,\delta_{pq}\,a_{\ell q}=a_{in}\,a_{jn}\,a_{kq}\,a_{\ell q}$$

$$A'_{ijk\ell}=\delta_{ij}\,\delta_{k\ell}$$

(ب)
$$\left.\begin{aligned}B'_{ijk\ell}&=a_{im}\,a_{jn}\,a_{kp}\,a_{\ell q}\,B_{mnpq}\\ B_{mnpq}&=\delta_{mp}\,\delta_{nq}+\delta_{mq}\,\delta_{np}\end{aligned}\right\}=a_{im}\,a_{jn}\,a_{kp}\,a_{\ell q}\,(\delta_{mp}\,\delta_{nq}+\delta_{mq}\delta_{np})$$

$$B'_{ijk\ell}=a_{im}\,\delta_{mp}\,a_{jn}\,\delta_{nq}\,a_{kp}a_{\ell q}+a_{im}$$

بخش ۳ـ۵ـ دوتاییها — مسائل صفحه ۱۸۸

۳-۵-۱- اگر A و B مطابق معادله‌های ۳-۶ و ۳-۸ مانند بردار تبدیل شوند نشان دهید که دوتایی AB در قانون تبدیل تانسوری، معادلهٔ ۳-۱۳ صدق می‌کند.

حل (معادله ۳-۶)
$$\left.\begin{aligned}A'_i&=\sum_j a_{ij}A_j\\ B'_k&=\sum_\ell a_{k\ell}B_\ell\end{aligned}\right\}$$
و (معادله ۳-۸) $a_{ij}=\dfrac{\partial x'_i}{\partial x_j}$

$$a_{k\ell} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_\ell}$$

$$(AB)'_{ik} = A'_i B'_k = \sum_j a_{ij} A_j \sum_\ell a_{k\ell} B_\ell = \sum_j \sum_\ell a_{ij} a_{k\ell} A_j B_\ell$$

$$= \sum_j \sum_\ell a_{ij}\, a_{k\ell} (AB)_{j\ell}$$

از روابط ۳-۸ به جای a_{ij} و $a_{k\ell}$ قرار می‌دهیم و داریم

$$(AB)'_{ik} = \sum_j \sum_\ell \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_\ell} (AB)_{j\ell} = \sum_{j\ell} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\ell}{\partial x'_k} (AB)_{j\ell}$$

که رابطه اخیر یکی از ۳ رابطه ۳-۱۳ یعنی تعریف تانسور مرتبه دوم است.

۳-۵-۲- نشان دهید که $\mathbf{I} = ii + jj + kk$ یک دوتایی یکه است. به این معنا که برای هر بردار V داریم: $\mathbf{I}.V = V$

هر یک از دوتاییهای ii و غیره مثالهای خاصی از عملگر تصویری در مکانیک کوانتومی‌اند.

حل

$$\mathbf{I}\cdot\vec{V} = (\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}) . (V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k})$$

$$= \hat{i}\hat{i} . V_x \hat{i} + \hat{j}\hat{j} . V_y \hat{j} + \hat{k}\hat{k} . V_z \hat{k}$$

$$= \hat{i}\, V_x (\hat{i} . \hat{i}) + \hat{j}\, V_y (\hat{j} . \hat{j}) + \hat{k}\, V_z (\hat{k} . \hat{k})$$

$$= \hat{i}\, V_x + \hat{j}\, V_y + \hat{k}\, V_z = \vec{V}$$

۳-۵-۳- نشان دهید که $\nabla \vec{r}$ برابر است با دوتایی یکهٔ $\mathbf{I}$.

حل

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad \vec{r} = \hat{i} x + \hat{j} y + \hat{k} z$$

$$\nabla \vec{r} = (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z})(\hat{i} x + \hat{j} y + \hat{k} z)$$

$$= \hat{i}\hat{i} \frac{\partial x}{\partial x} + \hat{i}\hat{j} \frac{\partial y}{\partial x} + \hat{i}\hat{k} \frac{\partial z}{\partial x} + \hat{j}\hat{i} \frac{\partial x}{\partial y} + \hat{j}\hat{j} \frac{\partial y}{\partial y} + \hat{j}\hat{k} \frac{\partial z}{\partial y} + \hat{k}\hat{i} \frac{\partial x}{\partial z} + \hat{k}\hat{j} \frac{\partial y}{\partial z} + \hat{k}\hat{k} \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= \hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k} = \mathbf{I}$$

۳-۵-۴- اگر U یک دوتایی پاد متقارن و V یک بردار باشد نشان دهید.

(الف) $\vec{V} . \vec{U} = -\vec{U} . \vec{V}$ (ب) $\vec{V} . \vec{U} . \vec{V} = 0$

حل چون U یک دوتایی پاد متقارن است پس $U_{xx}=0$ و $U_{xy}=-U_{yx}$ و بقیه موارد

(الف) $$V.U=(V_x\hat{i}+V_y\hat{j}+V_z\hat{k}).(U_{xy}\hat{i}\hat{j}-U_{xy}\hat{j}\hat{i}+U_{xz}\hat{i}\hat{k}-U_{zx}\hat{k}\hat{i}+U_{yz}\hat{j}\hat{k}-U_{zy}\hat{k}\hat{j})$$

$$=V_xU_{xy}\hat{i}.\hat{i}\hat{j}-V_xU_{xy}\hat{i}.\hat{j}\hat{i}+V_xU_{xz}\hat{i}.\hat{i}\hat{k}-V_xU_{xz}\hat{i}.\hat{k}\hat{i}+\ldots=-\vec{U}.\vec{V}$$

(ب) $$\vec{V}.\vec{U}.\vec{V}=-\vec{U}.\vec{V}.\vec{V}=0$$

۳-۵-۵- مابین بردارهای دو بعدی $\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y$ و $\vec{t}=-y\hat{i}+\hat{j}x$ می‌توان توسط معادلهٔ تانسوری $\vec{r}.\vec{U}=\vec{t}$ رابطه برقرار کرد. (الف) با استفاده از توصیف مؤلفه‌ای که قبلاً برای تانسور ارائه کردیم تانسور U را بدست آوردید. (ب) U را بعنوان یک دوتایی بدست آورید.

حل

$$\vec{r}.\vec{U}=\vec{t}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}r_xU_{xx}+r_yU_{yx}=t_x\\ r_xU_{xy}+r_yU_{yy}=t_y\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}xU_{xx}+yU_{yx}=-y\\ xU_{xy}+yU_{yy}=x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}x\times 0+y(-1)=-y\\ x\times 1+y\times 0=x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad U=\begin{bmatrix}0&+1\\-1&0\end{bmatrix}$$

(ب) مشابه رابطه (۳-۶۸) در کتاب می‌توان نوشت.

$$\vec{r}.\vec{U}=\vec{t}\quad\Rightarrow\quad(\hat{i}x+\hat{j}y).(\hat{i}\hat{i}U_{xx}+\hat{i}\hat{j}U_{xy}+\hat{j}\hat{i}U_{yx}+\hat{j}\hat{j}U_{yy})=-y\hat{i}+\hat{j}x\quad\Rightarrow$$

$$\hat{i}xU_{xx}+\hat{j}xU_{xy}+\hat{i}yU_{yx}+\hat{j}yU_{yy}=-y\hat{i}+\hat{j}x$$

$$\hat{i}\,[\,xU_{xx}+yU_{yx}\,]+\hat{j}\,[\,xU_{xy}+yU_{yy}\,]=-y\hat{i}+\hat{j}x$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}xU_{xx}+yU_{yx}=-y\\ xU_{xy}+yU_{yy}=x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad U=\begin{bmatrix}0&+1\\-1&0\end{bmatrix}$$

۳-۵-۶- در بررسی بر هم کنش بین مولکولها، یک دوتایی از بردارهای یکهٔ فاصلهٔ نسبی e_{12}

$$e_{12}=\frac{r_2-r_1}{|\,r_2-r_1\,|}$$

بدست می‌آید.

این دوتایی بصورت زیر است:

$$U=\mathbf{I}-3e_{12}e_{12}$$

نشان دهید که

$$\mathrm{Tr}\ U.U=6$$

$\mathbf{I}$ دوتایی یکه است، یعنی $\mathbf{I}=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}$

حل

$$U=\blacksquare-۳e_{۱۲}e_{۱۲}=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}-۳\frac{(r_۲-r_۱)(r_۲-r_۱)}{|r_۲-r_۱|^۲}$$

$$=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}-\frac{۳\left[r_۲^۲-r_۱r_۲-r_۲r_۱+r_۱^۲\right]}{|r_۲-r_۱|^۲}$$

$$=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}-\frac{۳\left[r_۲^۲-۲r_۱r_۲+r_۱^۲\right]}{|r_۲-r_۱|^۲}$$

$$=\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}-\frac{۳\left[x_۲^۲+y_۲^۲+z_۲^۲-۲x_۱x_۲-۲y_۱y_۲-۲z_۱'z_۲+x_۱^۲+y_۱^۲+z_۱^۲\right]}{|r_۲-r_۱|^۲}$$

با محاسبه می‌توان نشان داد که

$$U.U=\blacksquare+۳\hat{e}_{۱۲}\quad\hat{e}_{۱۲}$$

$$Tr(U.U)=Tr(\blacksquare+۳\hat{e}_{۱۲}\hat{e}_{۱۲})=$$

$$Tr\blacksquare+۳Tr\,\hat{e}_{۱۲}\hat{e}_{۱۲}\text{ و }Tr\blacksquare=۳,\ Tr\hat{e}_{۱۲}\hat{e}_{۱۲}=1$$

$$=۳+۳\times۱=۳+۳=۶\quad\Rightarrow$$

$$Tr(U.U)=۶$$

۳-۵-۷- نشان دهید که قضیه گاؤس برای دوتاییها صادق است یعنی

$$\int_S d\vec{\sigma}.\vec{D}=\int_V\vec{\nabla}.\vec{D}d\tau$$

حل D یک دوتایی است که آنرا مطابق رابطه ۳-۶۲ بصورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$D=\vec{A}\vec{B}=(\hat{i}A_x+\hat{j}A_y+\hat{k}A_z)(\hat{i}B_x+\hat{j}B_y+\hat{k}B_z)$$

$$=\hat{i}\hat{i}A_xB_x+\hat{i}\hat{j}A_xB_y+\hat{i}\hat{k}A_xB_z$$

$$+\hat{j}\hat{i}A_yB_x+\hat{j}\hat{j}A_yB_y+\hat{j}\hat{k}A_yB_z$$

$$+\hat{k}\hat{i}A_zB_x+\hat{k}\hat{j}A_zB_y+\hat{k}\hat{k}A_zB_z$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}).\vec{D}\quad\Rightarrow$$

$$=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}A_xB_x+\hat{j}\frac{\partial}{\partial x}A_xB_y+\hat{k}\frac{\partial}{\partial x}A_xB_z$$

$$+\hat{i}\frac{\partial}{\partial y}A_yB_x+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}A_yB_y+\hat{k}\frac{\partial}{\partial y}A_yB_z$$

$$+\hat{i}\frac{\partial}{\partial z}A_zB_x+\hat{j}\frac{\partial}{\partial z}A_zB_y+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}A_zB_z$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\vec{\nabla}.\vec{D})_x=\frac{\partial}{\partial x}A_xB_x+\frac{\partial}{\partial y}A_yB_x+\frac{\partial}{\partial z}A_zB_x=\vec{\nabla}.(AB_x) & (۱)\\ (\vec{\nabla}.\vec{D})_y=\frac{\partial}{\partial x}A_xB_y+\frac{\partial}{\partial y}A_yB_y+\frac{\partial}{\partial z}A_zB_y=\vec{\nabla}.(AB_y) & (۲)\\ (\vec{\nabla}.\vec{D})_z=\frac{\partial}{\partial x}A_xB_z+\frac{\partial}{\partial y}A_yB_z+\frac{\partial}{\partial z}A_zB_z=\vec{\nabla}.(AB_z) & (۳)\end{cases}$$

از طرفین روابط (۱) و (۲) و (۳) روی حجم انتگرال می‌گیریم و با هم جمع می‌کنیم

$$\int_V(\nabla.D)_x\,d\tau+\int_V(\nabla.D)_y\,d\tau+\int_V(\nabla.D)_z\,d\tau$$

$$=\int\nabla.(AB_x)\,d\tau+\int\nabla.(AB_y)\,d\tau+\int\nabla.(AB_z)\,d\tau$$

با استفاده از قضیه گوس برای هر یک از سه رابطه طرف چپ می‌توان نوشت

$$\int_V\nabla.(AB_x)\,d\tau=\int_S B_x A.d\sigma$$

$$\int_V\nabla.(AB_y)\,d\tau=\int_S B_y A.d\sigma$$

$$\int_V\nabla.(AB_z)\,d\tau=\int_S B_z A.d\sigma$$

و در جمع کردن بطور کل داریم

$$\int_V(\vec{\nabla}.\vec{D})\,d\tau=\int_S\vec{A}\vec{B}.\,d\sigma=\int_S\vec{D}.d\sigma$$

۴ـ۵ـ۸ نشان دهید که

$$\int_S d\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\vec{E}+\int_S d\vec{\sigma}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})-\int_S d\vec{\sigma}\,\vec{\nabla}.\vec{E}=0$$

تابع $\vec{E}$ یک تابع برداری از مکان است. انتگرال‌گیری روی یک سطح بستهٔ ساده صورت می‌گیرد.

این ترکیب نسبتاً بعید از انتگرالهای سطحی در واقع در نظریهٔ برداری پراش کیرشهف ظاهر می‌شود.

حل

$$\int_S d\vec{\sigma}.\vec{\nabla}\vec{E}+\int_S d\vec{\sigma}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})-\int_S d\vec{\sigma}\vec{\nabla}.\vec{E}=$$

قضیه گاوس ↓ قضیه گاوس ↓ قضیه گاوس ↓

$$\int_V \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{E}d\tau+\int_V \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})d\tau-\int \nabla(\nabla.E)d\tau=0$$

انتگرال دوم بصورت دو انتگرال $\int_V \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\vec{E})d\tau-\int \nabla^2 E d\tau$ در می‌آید

توضیح پایانی: برای اطلاعات بیشتر در رابطه با تانسورها و کاربرد آنها در فیزیک به دوکتاب زیر مراجعه گردد.

1. TENSORS, DIFFERENTIAL FORMS, AND VARIATIONAL PRINCIPLES

by: David Lovelock and Honno Rund

2. TENSOR ANALYSIS FOR PHYSICISTS

by: J.A. Schouten