بخش ۴ـ۱ـ دترمینانها

مسائل صفحه ۲۳۷

۴ـ۱ـ۱ـ دترمینانهای زیر را محاسبه کنید.

(الف)
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۱(۰-۰)+۰(۰-۰)+۱(۰-۱)=-۱$$

(ب)
$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{vmatrix} ۰ & \sqrt{۳} & ۰ & ۰ \\ \sqrt{۳} & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{vmatrix} = \frac{-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\begin{vmatrix} \sqrt{۳} & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۳} \\ ۰ & \sqrt{۳} & ۰ \end{vmatrix} = \frac{۹}{\sqrt{۲}}$$

(ج)
$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۱(۱-۶)+۲(-۳)+۰(۹-۰)=-۱۱$$

۴ـ۱ـ۲ـ مجموعهٔ معادله‌های خطی زیر را بررسی کنید و ببینید که آیا جواب ناصفر دارد یا خیر؟

حل

$$\begin{aligned} x+۳y+۳z&=۰ \\ x-y+z&=۰ \\ ۲x+y+۳z&=۰ \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -۲ \neq ۰$$

جواب غیر بدیهی ندارد.

۴ـ۱ـ۳ـ دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$x+۲y=۳$$
$$۲x+۴y=۶$$

(الف) نشان دهید که دترمینان ضرایب آن صفر است. (ب) نشان دهید که دترمینانهای صورت (معادلهٔ ۴-۱۴) نیز صفرند (ج) دست کم دو جواب برای این دو معادله بدست آورید.

حل

(الف) $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix} = ۴-۴=۰$

(ب) $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & ۴ \end{vmatrix} = ۱۲-۱۲=۰$

۴ـ۱ـ۴ـ مولفه‌های $\vec{A}\times\vec{B}$ را به صورت دترمینانهای ۲×۲ بنویسید سپس نشان دهید که از حاصلضرب اسکالر $\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})$ بسط لاپلاس یک دترمینان ۳×۳ بدست می‌آید. سرانجام با

توجه به اینکه دو سطر این دترمینان ۳×۳ مساوی است نتیجه بگیرید که:

$$\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})=0$$

حل ⇐ $\vec{A}\times\vec{B}=\hat{i}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}+\hat{j}\begin{vmatrix}A_z & A_x\\ B_z & B_x\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}$

$$\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})=A_x\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}+A_y\begin{vmatrix}A_z & A_x\\ B_z & B_x\end{vmatrix}+A_z\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=0$$

۴ـ۱ـ۵ـ اگر هم‌عامل عنصر a_{ij} را (که از خط زدن سطر i ام و ستون j ام و گنجاندن یک علامت $(-1)^{i+j}$ بدست می‌آید) با C_{ij} نمایش دهیم نشان دهید:

(الف) $\sum_i a_{ij}c_{ij}=\sum_i a_{ji}c_{ji}=|A|$

که در آن $|A|$ دترمینانی است با عناصر a_{ij}

(ب) $\sum_i a_{ij}c_{ik}=\sum_i a_{ji}c_{ki}=0 \quad j\neq k$

حل(الف) یکی از روشها برای محاسبهٔ دترمینان با استفاده از بسط لاپلاس (برحسب کهادها) می‌باشد. این عمل را می‌توان برای یک سطر یا یک ستون انجام داد.

$$|A|=\sum_i a_{ij}c_{ij}=\sum_i a_{ji}c_{ji}$$

(ب) عبارت $\sum_i a_{ij}c_{ik}$ (که در آن $j\neq k$ است) یعنی مجموع ضرب عناصر هر ستون در همسازهٔ مربوط به ستون دیگر یعنی دترمینانی داریم که دو ستون آن مساوی است که چنین دترمینانی صفر است.

بخش ۴ـ۲ـ ماتریسها — مسائل صفحه ۲۴۹

۴ـ۲ـ۱ نشان دهید که ضرب ماتریسی شرکت‌پذیر است:

$$(AB)C=A(BC)$$

حل

$$BC = D \;\Rightarrow\; D_{kj} = \sum_{\ell} b_{k\ell} c_{\ell j}$$

$$A(BC) = AD = E \;\Rightarrow\; E_{ij} = \sum_{k} a_{ik} D_{kj} = \sum_{k} a_{ik} \sum_{\ell} b_{k\ell} c_{\ell j}$$

$$= \sum_{k,\ell} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j} \quad (۱)$$

$$AB = F \;\Rightarrow\; F_{i\ell} = \sum_{k} a_{ik} b_{k\ell}$$

$$(AB)C = FC = \sum_{\ell} F_{i\ell} C_{\ell j} = \sum_{\ell} \sum_{k} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j} \quad (۲)$$

$$(۱),\ (۲) \;\Rightarrow\; (AB)C = A(BC)$$

۴ـ۲ـ۲ـ نشان دهید که اگر و فقط اگر A و B تعویض‌پذیر باشند یعنی $[A,B]=0$ خواهیم داشت

$$(A+B)\,(A-B) = A^2 - B^2$$

حل شرط لازم

$$[A,B] = (AB - BA) = 0$$

$$(A+B)\,(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

شرط کافی

$$(A+B)\,(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2 \;\Rightarrow$$

$$AB = BA \;\Rightarrow\; AB - BA = 0 \;\Rightarrow\; [A,B] = 0$$

۴ـ۲ـ۳ـ نشان دهید که ماتریس A عملگری خطی است. برای این کار نشان دهید که $A(c_1 r_1 + c_2 r_2) = c_1 A r_1 + c_2 A r_2$ می‌توان نشان داد که یک ماتریس $n\times n$ کلی‌ترین عملگر خطی در فضای برداری n بعدی است یعنی هر عملگر خطی در این فضای برداری n بعدی با یک ماتریس هم ارز است.

حل

$$A(c_1 r_1 + c_2 r_2) = A c_1 r_1 + A c_2 r_2 = c_1 A r_1 + c_2 A r_2 \;\Rightarrow$$

$$c_1 A = A c_1 \;,\; c_2 A = A c_2$$

در نتیجه هر ماتریس با یک عملگر خطی هم ارز است.

۴ـ۲ـ۴ـ (الف) اعداد مختلط $a+ib$ با a و b حقیقی را می‌توان توسط ماتریسهای 2×2 نمایش داد (به عبارت دیگر، این اعداد با ماتریسها یکریخت‌اند).

$$a + ib \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

نشان دهید که این نمایش ماتریسی (۱) برای جمع (۲) برای ضرب صادق است

(ب) ماتریس متناظر با $(a+ib)^{-1}$ را بیابید.

حل (الف)

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=\left[(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)\right]=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{bmatrix}$$

برای جمع معتبر است.

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2+ib_1a_2+ia_1b_2-b_1b_2=$$

$$(a_1a_2-b_1b_2)+i(b_1a_2+a_1b_2)=\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & b_1a_2+a_1b_2 \\ -(b_1a_2+a_1b_2) & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & b_1a_2+a_1b_2 \\ -(b_1a_2+a_1b_2) & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix}$$

(ب)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bk \\ -bx+az & -by+ak \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{cases} ax+bz=1 & (1) \\ ay+bk=0 & (2) \\ -bx+az=0 & (3) \\ -by+ak=1 & (4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} (1),(3)\Rightarrow \dfrac{a^2z}{b}+bz=1\Rightarrow z=(\dfrac{a^2+b^2}{b})=1\Rightarrow z=\dfrac{b}{a^2+b^2} \\ x=\dfrac{az}{b} \end{matrix}\right\}\Rightarrow\quad x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$$

از $(2)\Rightarrow y=-\dfrac{bk}{a},\ (4)\Rightarrow \dfrac{b^2k}{a}+ak=1\Rightarrow k(\dfrac{a^2+b^2}{a})=1\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} k=\dfrac{a}{b^{۲}+a^{۲}} \\ y=\dfrac{-bk}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y=\frac{-b}{b^{۲}+a^{۲}}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^{۲}+b^{۲}} & \dfrac{-b}{a^{۲}+b^{۲}} \\ \dfrac{b}{a^{۲}+b^{۲}} & \dfrac{a}{a^{۲}+b^{۲}} \end{bmatrix}=(a+ib)^{-۱}$$

۴ـ۲ـ۵ـ اگر A یک ماتریس n×n باشد نشان دهید که:

$$\det(-A)=(-۱)^{n}\det A$$

حل

در هر مرحله یک (۱−) از هر سطر یا هر ستون فاکتور می‌گیریم پس n تعداد سطرها یا تعداد ستونهای ماتریس است. $[A]_{n\times n}$

$$\begin{bmatrix} -a_{۱۱} & -a_{۱۲} & -a_{۱۳} \\ -a_{۲۱} & -a_{۲۲} & -a_{۲۳} \\ -a_{۳۱} & -a_{۳۲} & -a_{۳۳} \end{bmatrix}=(-۱)\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ -a_{۲۱} & -a_{۲۲} & -a_{۲۳} \\ -a_{۳۱} & -a_{۳۲} & -a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$=(-۱)(-۱)\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ -a_{۳۱} & -a_{۳۲} & -a_{۳۳} \end{bmatrix}=(-۱)(-۱)(-۱)\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(-A)=(-۱)^{n}\det A$$

۴ـ۲ـ۶ـ (الف) ماتریس C حاصلضرب A در B است نشان دهید که دترمینان C برابر است با حاصلضرب دترمینانهای A و B:

$$\det C=\det A\times\det B$$

[راهنمایی: دترمینان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{ijk}\,a_{i\alpha}a_{j\beta}a_{k\gamma}=|A|\;\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$$
$$[\varepsilon_{ijk}\,a_{i۱}a_{i۲}a_{i۳}=|A|$$

(ب) اگر C=A+B در حالت کلی داریم:

$$\det C\neq\det A+\det B$$

با یک مثال عددی خاص این نامساوی را نمایش دهید.

حل (الف) ضرب دترمینانها مثل ضرب ماتریسها است پس دترمینان ماتریسها برابر حاصلضرب دترمینانها است.

$$C=AB \Rightarrow \det C = \det A \det B$$

(ب) اما در مورد جمع
$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det C=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22})-(a_{12}+b_{12})(a_{21}+b_{21}) \qquad (1)$$

$$\det A+\det B=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \det C\neq\det A+\det B$$

۴-۲-۷- سه ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

همهٔ حاصلضربهای ممکن دو عضوی از جمله مربعهای ماتریسهای A، B، C و ۱ ماتریس یکه را بیابید. این سه ماتریس همراه با ماتریس یکه نمایشی از یک گروه ریاضی را به نام گروه چارتایی تشکیل می‌دهند. در بخشهای ۴-۸ و ۴-۹ (نظریه گروهها) بارها به این گروه رجوع خواهیم کرد.

حل

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$B^2=BB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^2=CC=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$AB=BA=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AC=CA=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BC=CB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

x	1	A	B	C
1	1	A	B	C
A	A	1	C	B
B	B	C	1	A
C	C	B	A	1

۴ـ۲ـ۸ـ برای ماتریس $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

نشان دهید که (با انتخاب مناسبی برای n، $n \neq 0$)

$K^n = KKK \ldots (\text{n بار}) = 1$

حل

$$K^2 = KK = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$K^3 = (-1)1 \Rightarrow K^n = 1$

۴ـ۲ـ۹ـ درستی اتحاد ژاکوبی زیر را تحقیق کنید.

$$[A,[B,C]] = [B,[A,C]] - [C,[A,B]]$$

این اتحاد برای توصیف ماتریسی ذرات بنیادی بکار می‌آید با توجه به اینکه اتحاد ژاکوبی به شکل قاعدهٔ BAC-CAB است که در بخش ۱-۵ آمد. بهتر می‌توان آنرا به خاطر سپرد.

حل

$$\big[B,[A,C]\big] - \big[C,[A,B]\big] =$$

$$\big(B(AC-CA) - (AC-CA)B\big) - \big(C(AB-BA) - (AB-BA)C\big) =$$

$$BAC-BCA-ACB+CAB-CAB+CBA-ABC+BAC=$$

$$ABC-ACB-BCA+CBA \qquad (1)$$

$$\big[A,[B,C]\big] = \big(A(BC-CB)-(BC-CB)A\big) = ABC-ACB-BCA+CBA \qquad (2)$$

$$(1) = (2)$$

۴ـ۲ـ۱۰ـ نشان دهید که ماتریسهای

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

در رابطه‌های تعویض پذیری زیر صدق می‌کنند.

$$[A,B]=C \quad , \quad [A,C]=0 \quad , \quad [B,C]=0$$

حل

$$[A,B]=AB-BA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=C$$

$$[A,C]=AC-CA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$

$$[B,C]=BC-CB=0$$

۴-۲-۱۱- برای ماتریسهای

$$i=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} \quad , \quad j=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \quad , \quad k=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

نشان دهید که (الف) $i^2=j^2=k^2=-1$

(ب) $ij=-ji=k$ و $jk=-kj=i$ و $ki=-ik=j$

این ۳ ماتریس (i، j و k) همراه با ماتریس یکهٔ ۱، پایه‌ای برای کواترنیونها تشکیل می‌دهند چهار ماتریس ۲×۲، $i\sigma_1$ ، $i\sigma_2$ و $-i\sigma_3$ و ۱ پایهٔ دیگری را تشکیل می‌دهند؛ σها ماتریسهای اسپینی پاؤلی‌اند (مسئله ۴-۲-۱۳)

حل

(الف)

$$i^2=ii=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-10\end{pmatrix}=-1$$

به همین نحو برای j^2 و k^2 نیز عمل می‌شود.

(ب) $k= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & +۱ \\ +۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} = ij$

و بهمین نحو برای بقیه موارد عمل می‌شود.

۴ـ۲ـ۱۲ـ ماتریسی را که عناصر آن به ازای $i>j$ صفرند $(a_{ij}=۰)$ می‌توانیم ماتریس مثلثی راست بالا بنامیم. در این ماتریس عناصر چپ پائینی (آنها که در طرف چپ و زیر قطر اصلی قرار دارند) صفرند. در فصلهای ۱۲ و ۱۳ دربارهٔ ارتباط بین سری توانی و بسطهای ویژه تابعی با نمونه‌هایی از این ماتریسها برخواهیم خورد. نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس مثلثی راست بالا نیز یک ماتریس مثلثی راست بالا خواهد برد.

حل A یک ماتریس مثلثی راست

$$A= \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ ۰ & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$B= \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ ۰ & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ ۰ & ۰ & b_{۳۳} \end{bmatrix} \quad AB= \begin{bmatrix} a_{۱۱}b_{۱۱} & a_{۱۱}b_{۱۲}+a_{۱۲}b_{۲۲} & a_{۱۱}b_{۱۳}+a_{۱۲}b_{۲۳}+a_{۱۳}b_{۳۳} \\ ۰ & a_{۲۲}b_{۲۲} & a_{۲۲}b_{۲۳}+a_{۲۳}b_{۳۳} \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳}b_{۳۳} \end{bmatrix}$$

۴ـ۲ـ۱۳ـ ماتریسهای اسپینی پاؤلی عبارت‌اند از:

$$\sigma_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

نشان دهید که (الف) $\sigma_i^۲ = 1$

(ب) (جایگشتهای دوری) $\sigma_i\sigma_j=i\sigma_k (i,j,k)=(۱,۲,۳),(۲,۳,۱),(۳,۱,۲)$

(ج) $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = ۲\delta_{ij}1$

پاؤلی این ماتریسها را در نظریهٔ نانسبیتی اسپین الکترون بکار برد.

حل (الف) $\sigma_i^۲ = \sigma_۱\sigma_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = ۱$

به همین نحو برای $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$

(ب) $\sigma_۱\sigma_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} = i\sigma_۳$

(ج)
$$\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}=0$$

اگر $i\neq j$ و اگر $i=j$ باشد بصورت ۲1 در می‌آید.

۴-۲-۱۴- با استفاده از مقادیر σ پاولی در مسئله ۴-۲-۱۳ نشان دهید که

$$(\sigma.a)(\sigma.b)=a.b1+i\sigma.(a\times b)$$

در اینجا $\sigma\equiv i\sigma_x+j\sigma_y+k\sigma_z$ و a و b بردارهایی معمولی‌اند.

حل
$$\left[\sigma_x a_x+\sigma_y a_y+\sigma_z a_z\right]\left[\sigma_x b_x+\sigma_y b_y+\sigma_z b_z\right]=$$
$$\left[\sigma_x^2 a_x b_x+\sigma_x\sigma_y a_x b_y+\sigma_x\sigma_z b_z a_x\right]+\left[\sigma_y\sigma_x a_y b_x+\sigma_y^2 a_y b_y+\sigma_y\sigma_z a_y b_z\right]$$
$$+\left[\sigma_z\sigma_x a_z b_x+\sigma_z\sigma_y a_z b_y+\sigma_z^2 a_z b_z\right]$$

از $\sigma_i\sigma_j=i\sigma_k$ و $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1$ استفاده می‌شود.

$$1(a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z)+i(\sigma_z a_x b_y-\sigma_y a_x b_z-\sigma_z a_y b_x+\sigma_x a_y b_z+\sigma_y a_z b_x-\sigma_x a_z b_y)$$
$$=a.b+i\left(\sigma_x(a_y b_z-a_z b_y)+\sigma_y(a_z b_x-a_x b_z)+\sigma_z(a_x b_y-a_y b_x)\right)$$
$$=a.b+i\left[\sigma.(a\times b)\right]$$

۴-۲-۱۵- در یک توصیف خاص بر ای ذرات با اسپین ۱، از ماتریسهای زیر استفاده می‌شود.

حل
$$M_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ M_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ M_z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

نشان دهید (الف) $[M_x, M_y]=iM_z$ و غیره (با جایگشت دوری شاخصها) این رابطه را با استفاده از نماد لوی - چی ویتا در بخش ۳-۴ می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$[M_i\ ,\ M_j]=i\varepsilon_{ijk}M_k$$

(ب) $M^2\equiv M_x^2+M_y^2+M_z^2=21$ که در آن 1 ماتریس یکه است.

(ج) $\left[M^2,M_i\right]=0\quad,\quad\left[M_z,L^+\right]=L^+\quad,\quad\left[L^+,L^-\right]=2M_Z$

که در آن $L^+\equiv M_x+iM_y$ و $L^-\equiv M_x-iM_y$

حل

(الف)

$$[M_x,M_y]=M_xM_y-M_yM_x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i&0&-i\\0&0&0\\i&0&-i\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i&0&-i\\0&0&0\\i&0&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0&0\\0&0&0\\0&0&-i\end{pmatrix}=iM_k$$

(ب)

$$M^2\equiv M_x^2+M_y^2+M_z^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2\,1$$

(ج) $$L^+\equiv M_x+iM_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$L^-\equiv M_x-iM_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$$

$$[L^+,L^-]=L^+L^--L^-L^+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=2M_Z$$

$$[M_Z,L^+]=M_zL^+-L^+M_z=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=L^+$$

$$[M^2,M_z]=M^2M_z-M_zM^2=$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=0$$

مسائل ۴ـ۲ـ۱۶ و ۴ـ۲ـ۱۷ و ۴ـ۲ـ۱۸ مشابه مسئله ۴ـ۲ـ۱۵ حل می‌شوند. و از حل آنها صرفنظر می‌شود.

۴ـ۲ـ۱۹ـ عملگر P با j_x و j_y مولفه‌های x و y عملگر تکانهٔ زاویه‌ای تعویض‌پذیر است نشان دهید که P با سومین مولفه تکانهٔ زاویه‌ای نیز تعویض‌پذیر است.

$[P,J_Z]=0$

[راهنمایی: مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای باید در رابطهٔ تعویض پذیری مسئله ۴-۲-۱۵ الف صدق کنند].

حل

$$[P,J_x]=0 \Rightarrow PJ_x-J_xP=0 \Rightarrow PJ_x=J_xP \qquad (1)$$

$$[P,J_y]=0 \Rightarrow PJ_y-J_yP=0 \Rightarrow PJ_y=J_yP \qquad (2)$$

$$[J_x,J_y]=iJ_z \Rightarrow J_xJ_y-J_yJ_x=iJ_z \qquad (3)$$

P را یکبار از سمت راست و بار دیگر از سمت چپ در عبارت (۳) ضرب می‌کنیم داریم:

$$PJ_xJ_y-PJ_yJ_x=iPJ_z \qquad (۵)$$

$$J_xJ_yP-J_yJ_xP=iJ_zP\ ,\ (۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow PJ_xJ_y-PJ_yJ_x=iJ_zP \qquad (۴)$$

$$(۵)-(۴) \Rightarrow ۰=iPJ_z-iJ_zP \Rightarrow i(PJ_z-J_zP)=۰$$

$$\Rightarrow PJ_z-J_zP=۰ \Rightarrow [P,J_z]=۰$$

۴-۲-۲۰ـ ماتریسهای L^+ و L^- در مسئله ۴-۲-۱۵ عملگرهای نردبانی‌اند اگر L^+ روی دستگاهی با تصویر اسپینی m عمل کند در صورتیکه m از مقدار بیشینه‌اش کمتر باشد تصویر اسپینی به $m+۱$ افزایش خواهد یافت. اگر L^+ روی $m_{بیشینه}$ عمل کند حاصل برابر صفر خواهد بود. L^- تصویر اسپینی را به روشی مشابه یکی کم خواهد کردبا تقسیم بر $\sqrt{۲}$ داریم

$$L^+=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad L^-=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

نشان دهید که:

$L^+|-۱\rangle=|۰\rangle$ $L^-|-۱\rangle =$ بردار ستونی پوچ

$L^+|۰\rangle=|۱\rangle$ $L^-|۰\rangle=|-۱\rangle$

$L^+|۱\rangle=$ بردار ستونی پوچ $L^-|۱\rangle=|۰\rangle$

که در آن $|۱\rangle=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و $|۰\rangle=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و $|-۱\rangle=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$

به این ترتیب حالتهای با تصویر اسپینی ۱، ۰ و ۱- را نمایش می‌دهند.

[یادآوری: مشابه عملگر دیفرانسیلی این عملگرهای نردبانی در مسئله ۱۲-۶-۷ ظاهر خواهد شد.]

حل

$$L^+|-۱\rangle=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}=|۰\rangle$$

$$L^+|۰\rangle=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}=|۱\rangle$$

پوچ
$$L^{+}\mid 1> = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

برای L^{-} نیز به همین نحو عمل می‌شود.

۴-۲-۲۱- بردارهای A و B به کمک تانسور T به یکدیگر مربوط می‌شوند. $B=TA$
نشان دهید که اگر A و B معلوم باشند جواب یکتایی برای مؤلفه‌های T وجود ندارد. به همین دلیل تقسیم برداری B/A (جز در حالت خاص بردارهای موازی که در آن صورت T اسکالر است) تعریف نشده است.

حل
$$B=TA \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T_{11}a_1+T_{12}a_2+T_{12}a_3=b_1 \\ T_{21}a_1+T_{22}a_2+T_{23}a_3=b_2 \\ T_{31}a_1+T_{32}a_2+T_{33}a_3=b_3 \end{cases}$$

مشاهده می‌شود جواب یکتایی برای مولفه‌های T وجود ندارد.

۴-۲-۲۲- می‌توانیم برای بردار معلوم A به جستجوی یک وارون به صورت بردار A^{-1} بپردازیم. یعنی
$$A.A^{-1}=A^{-1}.\ A=1$$
نشان دهید که این رابطه به تنهایی برای تعریف A^{-1} کافی نیست. به عبارت دیگر A بی‌نهایت وارون دارد.

حل چون زاویهٔ بین دو بردار تعریف نشده است و برای هر زاویه یک بردار داریم پس به تعداد هر زاویه یک دوران داریم و تعداد دورانها بی‌نهایت است.

۴-۲-۲۳- اگر A قطری باشد و عناصر آن همه با هم متفاوت و A و B تعویض‌پذیر باشند نشان دهید که B قطری است.

حل
$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

حل

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}b_{12}=a_{22}b_{12} \xrightarrow{a_{11}\neq a_{22}} b_{12}=0 \\ \\ a_{22}b_{21}=a_{11}b_{21} \xrightarrow{a_{22}\neq a_{11}} b_{21}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22}\end{bmatrix}$$

B قطری است.

۴ـ۲ـ۲۴ـ نشان دهید که اگر A و B قطری باشند تعویض پذیرند.

حل

$$AB=C \Rightarrow C_{ij}=\sum_{\ell} a_{i\ell}b_{\ell j}=$$

چون A و B قطری‌اند $\begin{cases} C_{ij}=a_{ii}\,b_{ii} \\ C_{ij}=b_{ii}\,a_{ii}\end{cases} \rightarrow C_{ij}=BA$

$$C_{ij}=a_{ii}\,b_{ii} \Rightarrow C_{ij}=BA$$

۴ـ۲ـ۲۵ـ نشان دهید که اگر هر دو ماتریسی از سه ماتریس A، B و C با هم تعویض‌پذیر باشند. آنگاه $Tr(ABC)=Tr(CBA)$

حل $Tr(ABC)=Tr\,(ACB)=Tr\,(CAB)=Tr\,(CBA)$

۴ـ۲ـ۲۶ـ ماتریسهای تکانه زاویه‌ای در رابطهٔ تعویض پذیری زیر صدق می‌کنند.

$[M_i\,,\,M_j]=iM_k$ (i و j و k چرخه‌ای)

نشان دهید که رد هر یک از ماتریسهای تکانهٔ زاویه‌ای صفر است.

حل همانطور که می‌دانیم رد مجموع عناصر روی قطر یک ماتریس مربعی است. در مسائل ۴-۲-۱۵ و ۴-۲-۱۶ اگر این مجموع را برای تک تک M_x و M_y و M_z بدست آوریم صفر خواهد شد.

۴ـ۲ـ۲۹ـ برای بردار ستونی N بعدی $|x>$ و بردار سطری N بعدی $<y|$ نشان دهید.

$$Tr(|x><y|=<y|x>$$

[یادآوری: $|x><y|$ یعنی بردار ستونی $|x>$ ضربدر بردار سطری $<y|$ نتیجه یک ماتریس مربعی $N\times N$ است.]

حل

$$Tr(\,|x><y|\,)=tr\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1y_2y_3\dots y_n\end{bmatrix}=Tr\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n\end{bmatrix}$$

$$=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n \qquad (1)$$

$$\langle y\,|\,x\rangle=\begin{bmatrix} y_1y_2y_3\ldots y_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n \qquad (2)$$

$(1)=(2)$

۴ـ۲ـ۳۰ـ (الف) اگر دو ماتریس ناتکین تعویض‌پذیر باشند نشان دهید که رد هر یک صفر است (ناتکین یعنی اینکه دترمینان عناصر ماتریس مخالف صفر است) (ب) برای آنکه شرایط بند (الف) برقرار باشد A و B باید ماتریسهای n×n با n زوج باشند نشان دهید که اگر n فرد باشد تناقضی بروز خواهد کرد.

حل $[A,B]=0 \Rightarrow AB-BA=0 \Rightarrow AB=BA \Rightarrow$

اگر رابطه یکبار از چپ در A^{-1} و یکبار در B^{-1} ضرب کنیم.

$A^{-1}AB=A^{-1}BA \Rightarrow B=A^{-1}BA \Rightarrow$

$trB=tr(A^{-1}BA) \Rightarrow trB=0$

و اگر در B^{-1} ضرب شود داریم. $trA=0$

۴ـ۲ـ۳۱ـ اگر ماتریس A ورارونی داشته باشد نشان دهید که این وارون یکتاست.

حل فرض می‌کنیم B و C هر دو وارون A باشند یعنی

$AB=BA=1 \quad , \quad AC=CA=1$

بنابراین $B=1B=(CA)B=C(AB)=C1=C$

یعنی B و C در اصل یکی هستند و وارون A منحصر به فرد است.

۴ـ۲ـ۳۲ـ اگر A^{-1} دارای عناصر زیر باشد

$$a_{ij}^{-1}=\frac{C_{ji}}{|A|}$$

که در آن C_{ji} هم عامل (ji) ام $|A|$ است نشان دهید $A^{-1}A=1$ بنابراین (اگر $|A|\neq 0$) A^{-1} وارون A است.

[یادآوری: در محاسبات عددی گاهی پیش می‌آید که $|A|$ خیلی به صفر نزدیک می‌شود در این صورت دچار مشکل خواهیم شد.]

حل

$$a_{ij}^{-1}=\frac{C_{ji}}{|A|} \Rightarrow a_{ij}^{-1}a_{ij}=(A^{-1}A)_{ij}=\sum a_{ik}^{-1}a_{kj}$$

به جای a^{-1}_{ik} از تعریف A^{-1} قرار می‌دهیم.

$$a^{-1}_{j}a_{ij}=\sum\frac{C_{ki}}{|A|}a_{kj}=\frac{1}{|A|}\sum C_{ki}\,a_{kj}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

۴ـ۲ـ۳۳ـ نشان دهید که $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$

[راهنمایی: از مسئله ۴-۲-۱۶ استفاده کنید.]

[یادآوری: اگر $\det A$ صفر باشد A وارونی ندارد و تکین است]

حل
$AA^{-1}=1 \;\Rightarrow\; \det(AA^{-1})=\det(1) \Rightarrow \det A\,\det A^{-1}=1$

$$\Rightarrow\; \det A^{-1}=\frac{1}{\det A} \;\Rightarrow\; \det A^{-1}=(\det A)^{-1}$$

۴ـ۲ـ۳۴ـ ماتریسهای M_L را چنان پیداکنید که حاصلضرب M_LA برابر A باشد با این تفاوت که: (الف) سطر i ام آن در ثابت k ضرب شده باشد $(j=1,2,3,\dots,\; a_{ij}\to ka_{ij})$ (ب) به جای سطر i ام، سطر i ام اصلی منهای مضربی از سطر m ام قرار گرفته باشد

$(j=1,2,3,\dots,\; a_{ij}\to a_{ij}-ka_{mj})$

(ج) سطرهای iام و mام با یکدیگر تعویض شده باشند.

$(j=1,2,3,\dots,\; a_{mj}\to a_{ij},\; a_{ij}\to a_{mj})$

حل یک ماتریس ۳×۳ یکه در نظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{c} i\\ j\\ m\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{(الف)}}\begin{bmatrix}k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

فرض کردیم p برابر از سطر m ام باشد.

$$\text{(ب)}\quad\begin{bmatrix}1&0&0-p\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\text{(ج)}\quad\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

۴ـ۲ـ۳۵ـ نیز همانند ۴-۲-۳۴ حل می‌شود.

۴ـ۲ـ۳۶ـ وارون ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{pmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

حل

(۱) سطرهای ماتریس A را بر اولین عدد هر سطر تقسیم می‌کنیم.

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰/۶۶۶۶ & ۰/۳۳۳۳ \\ ۱ & ۱ & ۰/۵ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۰/۳۳۳۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

(۲) سطر اول را از سطرهای دوم و سوم کم می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰/۶۶۶۶ & ۰/۳۳۳۳ \\ ۰ & ۰/۳۳۳۴ & ۰/۱۶۶۷ \\ ۰ & ۰/۳۳۳۴ & ۳/۶۶۶۷ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ۰/۳۳۳۳ & ۰ & ۰ \\ -۰/۳۳۳۳ & ۰/۵ & ۰ \\ -۰/۳۳۳۳ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

(۳) سطر دوم را بر ۰/۳۳۳۴ تقسیم و سپس ۰/۶۶۶۶ برابر آن را از سطر اول و ۰/۳۳۳۴ برابر آن را از سطر سوم کم می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰/۵ \\ ۰ & ۰ & ۳/۵ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -۰/۳۳۳۳ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۱/۵ & ۰ \\ ۰ & -۰/۵ & ۱ \end{pmatrix}$$

(۴) سطر سوم را بر ۳/۵ تقسیم و سپس ۰/۵ برابر آن را از سطر دوم کم می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -۰/۳۳۳۳ & -۱ & ۰ \\ -۱ & +۱/۴۲ & -۰/۱۴ \\ ۰ & -۰/۱۴ & ۰/۲۸ \end{pmatrix}$$

بخش ۴ـ۳ـ ماتریسهای متعامد — مسائل صفحه ۲۷۸

گوشزد: همهٔ عناصر ماتریسی را حقیقی بگیرید.

۴ـ۳ـ۱ـ نشان دهید که حاصلضرب دو ماتریس متعامد، متعامد است.

[یادآوری: این خاصیت برای نشان دادن این حکم که همهٔ ماتریسهای متعامد n×n یک گروه را تشکیل می‌دهند (بخش ۴-۱۰) بسیار اهمیت دارد.]

حل
$$\tilde{A}=A^{-1}\quad \widetilde{AB}=\tilde{B}\tilde{A}=B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$$
$$\tilde{B}=B^{-1}$$

۴ـ۳ـ۲ـ اگر A متعامد باشد نشان دهید که بزرگی دترمینان آن یک است.

حل
$$\tilde{A}=A^{-1}\quad AA^{-1}=1 \text{ و } A\tilde{A}=1$$
$$\left.\begin{array}{l}\det(A\tilde{A})=\det(1)\Rightarrow \det(A)\det(\tilde{A})=1\\ \det(\tilde{A})=\det(A)\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$\det(A^{2})=1 \;\Rightarrow\; \det(A)=1$$

۴ـ۳ـ۳ـ اگر A متعامد باشد و $\det A=+1$ نشان دهید که $a_{ij}=c_{ij}$ که در آن c_{ij} هم عامل a_{ij} است از این خاصیت اتحادهای معادلهٔ ۱-۴۱ بدست می‌آیند که در بخش ۱-۴ برای نشان دادن این حکم بکار رفت که حاصلضرب برداری بردارها (در فضای سه بعدی) خود یک بردار است.
[راهنمایی: به مسئله ۴-۲-۳۲ توجه کنید.]

حل
A متعامد است: $A^{-1}=\tilde{A}$
$$AA^{-1}=1 \;\Rightarrow\; \sum a^{-1}_{ji}a_{ik}=\sum\frac{c_{ij}}{\det(A)}a_{ik}=1,\det A=1$$
$$\Rightarrow\;\sum_i c_{ij}a_{ik}=1\qquad(1)$$
$$\text{متعامد } A\;\Rightarrow\;\sum_i a_{ij}a_{ik}=\delta_{j,k}=1\qquad(2)$$
$$(1)\;,\;(2)\;\Rightarrow\; a_{ij}a_{ik}=c_{ij}a_{ik}\;\Rightarrow\; a_{ij}=c_{ij}$$

۴ـ۳ـ۴ـ مجموعهٔ دیگری از زاویه‌های اویلر که معمولاً به کار می‌آیند عبارت از:

۱- چرخش پاد ساعتگرد به اندازهٔ زاویه ϕ حول محور x_3؛

۲- چرخش پاد ساعتگرد به اندازهٔ زاویه θ حول محور x'_1؛

۳- چرخش پاد ساعتگرد به اندازهٔ زاویه ψ حول محور x''_3؛

اگر
$$\phi=\alpha+\frac{\pi}{2}\qquad \alpha=\phi-\frac{\pi}{2}$$
$$\theta=\beta\qquad \beta=\theta$$
$$\psi=\gamma-\frac{\pi}{2}\qquad \gamma=\psi+\frac{\pi}{2}$$

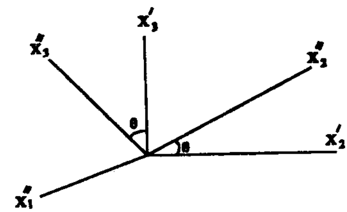
نشان دهید که دستگاههای نهایی یکسان‌اند.

حل

$x_1=x$ و $x_2=y$

$x_3=z$

$$R_z(\phi)=\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi)=\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R=R_z(\psi)R_x(\theta)R_z(\phi)=\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi & \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi-\sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi+\sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi-\cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha & -\cos\gamma\sin\beta \\ -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha+\cos\gamma\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta \\ \sin\beta\cos\alpha & +\sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{bmatrix}$$

۴ـ۳ـ۵ـ فرض کنید زمین بطوری حرکت کرده (چرخیده) است که قطب شمال به وضعیت 30° شمالی و 20° غربی (در دستگاه طول و عرض جغرافیایی اولیه) انتقال یافته و مدار 10° غربی در امتداد جنوب قرار گرفته است. (الف) چه زاویه‌های اویلری این چرخش را تعریف می‌کنند. (ب) کسینوسهای هادی متناظر را بیابید.

حل محور شمال - جنوب را روی محور zها و غرب - شرق را روی محور xها در نظر می‌گیریم.

$$R_z(30)=\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30 & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(۲۰)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \text{Cos}\,۲۰ & \text{Sin}\,۲۰ \\ ۰ & -\text{Sin}\,۲۰ & \text{Cos}\,۲۰ \end{bmatrix}$$

$$R_z(۱۰)=\begin{bmatrix} \text{Cos}\,۱۰^\circ & \text{Sin}\,۱۰ & ۰ \\ -\text{Sin}\,۱۰ & \text{Cos}\,۱۰ & ۰ \\ & & +۱ \end{bmatrix}$$

(ب) با قرار دادن $\alpha=۷۰$ و $\beta=۶۰$ و $\gamma=-۸۰$ در رابطه آخری مسئله ۵-۳-۴ بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} ۰/۹۵۵۱ & -۰/۲۵۵۲ & -۰/۱۵۰۳ \\ ۰/۰۰۵۲ & ۰/۵۲۲۰ & -۰/۸۵۲۸ \\ ۰/۲۹۶۱ & ۰/۸۱۳۷ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

۴-۳-۶ تحقیق کنید که ماتریس چرخش زاویهٔ اویلر معادله ۴-۸۷ تحت تبدیل زیر ناورد است.

$$\alpha \to \alpha+\pi \quad , \quad \beta \to -\beta \quad , \quad \gamma=\gamma-\pi$$

حل معادله ۴-۸۷

$$A(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} \text{Cos}\gamma\text{Cos}\beta\text{Cos}\alpha-\text{Sin}\gamma\text{Sin}\alpha & \text{Cos}\gamma\text{Cos}\beta\text{Sin}\alpha+\text{Sin}\gamma\text{Cos}\alpha & -\text{Cos}\gamma\text{Sin}\beta \\ -\text{Sin}\gamma\text{Cos}\beta\text{Cos}\alpha-\text{Cos}\gamma\text{Sin}\alpha & -\text{Sin}\gamma\text{Cos}\beta\text{Sin}\alpha+\text{Cos}\gamma\text{Cos}\alpha & \text{Sin}\gamma\text{Sin}\beta \\ \text{Sin}\beta\text{Cos}\alpha & \text{Sin}\beta\text{Sin}\alpha & \text{Cos}\beta \end{bmatrix}$$

$$A(\alpha+\pi,-\beta,\gamma-\pi)=\begin{bmatrix} \text{Cos}(\gamma-\pi)\text{Cos}(-\beta)\text{Cos}(\alpha+\pi)-\text{Sin}(\gamma-\pi)\text{Sin}(\alpha+\pi) & \text{Cos}(\gamma-\pi)\text{Cos}(-\beta)\text{Sin}(\alpha+\pi)+\text{Sin}(\gamma-\pi)\text{Cos}(\alpha+\pi) & -\text{Cos}(\gamma-\pi)\text{Sin}(-\beta) \\ -\text{Sin}(\gamma-\pi)\text{Cos}(-\beta)\text{Cos}(\alpha+\pi)-\text{Cos}(\gamma-\pi)\text{Sin}(\alpha+\pi) & -\text{Sin}(\gamma-\pi)\text{Cos}(-\beta)\text{Sin}(\alpha+\pi)+\text{Cos}(\gamma-\pi)\text{Cos}(\alpha+\pi) & \text{Sin}(\gamma-\pi)\text{Sin}(-\beta) \\ \text{Sin}(-\beta)\,\text{Cos}(\alpha+\pi) & \text{Sin}(-\beta)\,\text{Sin}(\alpha+\pi) & \text{Cos}(-\beta) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A(\alpha+\pi,-\beta,\gamma-\pi)=A(\alpha,\beta,\gamma)$$

۴-۳-۷ نشان دهید که ماتریس چرخش زاویه اویلر، $A(\alpha,\beta,\gamma)$ در روابط زیر صدق می‌کند:

(الف) $A^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)=\tilde{A}(\alpha,\beta,\gamma)$

(ب) $A^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)=A(-\gamma,-\beta,-\gamma)$

حل با محاسبهٔ A^{-1} با توجه A (رابطه ۴-۸۷) می‌توان دید که A^{-1} می‌تواند با $\tilde{A}$ (ترانسپوز) و $A(-\gamma,-\beta,-\gamma)$ برابر باشد.

۴-۳-۸- نشان دهید که رد حاصلضرب یک ماتریس متقارن در یک ماتریس پاد متقارن صفر است.

حل ماتریس متقارن $\rightarrow A=\tilde{A}$

$(A+\tilde{A}) \rightarrow$ متقارن و $(A-\tilde{A}) \rightarrow$ پاد متقارن

$$(A+\tilde{A})(A-\tilde{A})=A^2-A\tilde{A}+\tilde{A}A-\tilde{A}^2 \quad , \quad A=\tilde{A} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A^2-A(A)+A(A)-(A)^2=A^2-A^2+A^2-A^2=0 \\ (\tilde{A})^2-\tilde{A}(\tilde{A})+\tilde{A}(\tilde{A})-(\tilde{A})^2=\tilde{A}^2-\tilde{A}^2+\tilde{A}^2-\tilde{A}^2=0 \end{cases}$$

۴-۳-۹- نشان دهید که رد ماتریس تحت تبدیلهای تشابهی ناوردا می‌ماند.

حل

$$A'=BAB^{-1}$$

$$\mathrm{tr}A'=\mathrm{tr}\left[B(AB^{-1})\right]=\mathrm{tr}\left[(AB^{-1})B\right]=\mathrm{tr}\left[AB^{-1}B\right]$$
$$=\mathrm{tr}[A1]=\mathrm{tr}[A]$$

۴-۳-۱۰- نشان دهید که دترمینان یک ماتریس تحت تبدیلهای تشابهی ناوردا می‌ماند.

[یادآوری: دو مسئله اخیر (۴-۳-۹ و ۴-۳-۱۰) نشان می‌دهند که رد و دترمینان مستقل از پایه‌اند. این دو ماهیت، مشخصهٔ خود ماتریس (یا عملگر) به شمار می‌آیند.]

حل

$$\det A'=\det(BAB^{-1})=\det B\det A\det B^{-1}=\det A\det B\det B^{-1}$$
$$=\det A\det(BB^{-1})=\det A\det(1)=\det A$$

۴-۳-۱۱- نشان دهید خاصیت پاد تقارن تحت تبدیل تشابهی متعامد، ناورد است.

حل

$$A=-\tilde{A} \quad (1) \qquad\qquad A'=BAB^{-1} \ (2)$$

$$A'=BAB^{-1} \rightarrow -A'=-BAB^{-1} \rightarrow -\tilde{A}'=-\widetilde{BAB^{-1}} \rightarrow$$

$$-A'=-(\widetilde{BAB^{-1}}) \rightarrow -A'=-(\tilde{B}^{-1}\tilde{A}\tilde{B}) \xrightarrow[\text{تبدیل تشابه متعامد}]{\tilde{A}=-A,\ B^{-1}=\tilde{B}}$$

$$-\tilde{A}'=-(\tilde{\tilde{B}}(-A)B^{-1}) \rightarrow -\tilde{A}'=+BAB^{-1} \qquad (3)$$

خاصیت یاد تقارن تحت تبدیل تشابه متعامد ناورداست. ⇐ (۳) و (۲) و (۱)

۴ـ۳ـ۱۴ـ نشان دهید که مجموع مربعهای عناصر یک ماتریس تحت تبدیلهای تشابهی متعامد ناوردا می‌ماند.

[یادآوری: C^2B^2-E^2 در مسئله ۳-۷-۱۱ را می‌توان بصورت مجموع مربعهای مولفه‌های ماتریس (تانسور) $f_{\mu\nu}$ بدست آورد.]

حل $A'=BAB^{-1}$, $\tilde{B}=B^{-1}$ $a'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell}a_{\ell k}b^{-1}_{kj}$, $b^{-1}_{kj}=\tilde{b}_{kj}=b_{jk}$

$$a'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell}b_{jk}a_{\ell k} \rightarrow a'^2_{ij}=\sum_{\ell,k}(b_{i\ell}b_{jk}a_{\ell k})(b_{i\ell}b_{jk}a_{\ell k})$$

$$\sum_{i,j} a'^2_{ij}=\sum_{i,j}\sum_{\ell,k}(b_{i\ell}b_{jk}a_{\ell k})(b_{i\ell}b_{jk}a_{\ell k})=\sum_{\ell,k}\Big(\sum_i b_{i\ell}b_{i\ell}\Big)\Big(\sum_j b_{jk}b_{jk}\Big)a^2_{\ell k} \quad (1)$$

شرط تعامد: $\sum_i b_{ij}b_{ik}=\delta_{j,k}=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$ (۲)

$$(1)\ ,\ (2) \Rightarrow \sum_{\ell,k} a^2_{\ell k}=\sum_{i,j} a'^2_{ij}$$

۴ـ۳ـ۱۵ـ بعنوان تعمیم مسئله ۴-۳-۱۴ نشان دهید که

$$\sum_{jk} S_{jk}T_{jk}=\sum_{\ell,m} S'_{\ell m}T'_{\ell m}$$

که در آن مولفه‌های پریم‌دار و غیر پریم‌دار به واسطهٔ تبدیل تشابهی متعامد به یکدیگر مربوط می‌شوند این نتیجه در استخراج ناورداها در نظریهٔ الکترومغناطیس بکار می‌آید (با بخش ۳-۷ مقایسه کنید)

[یادآوری: حاصلضرب $M_{jk}=\sum S_{jk}T_{jk}$ راگاهی حاصلضرب هادامارد می‌نامند این مسئله در چارچوب بررسیهای تانسوری فصل ۳ به صورت ادغام دوگانه دو تانسور مرتبه دو در می‌آید و در نتیجه اسکالر بودن (یعنی ناوردایی) آن بدیهی است]

حل $a'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell}a_{\ell k}b^{-1}_{kj} \Rightarrow S'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell}S_{\ell k}b^{-1}_{kj} \xrightarrow{b^{-1}_{kj}=\tilde{b}_{kj}=b_{jk}}$

$$S'_{ij}=\sum_{\ell,k} b_{i\ell}b_{jk}S_{\ell k} \quad (1)$$

$$a'_{ij} = \sum_{\ell,k} b_{i\ell} b_{jk} a_{\ell k} \xrightarrow{T' = BTB^{-1}} T'_{ij} = \sum_{\ell,k} b_{i\ell} b_{jk} T_{\ell k} \qquad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \sum_{i,j} S'_{ij} T'_{ij} = \sum_{i,j} \sum_{\ell,k} (b_{i\ell} b_{jk} S_{\ell k})(b_{i\ell} b_{jk} T_{\ell k}) \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j} S'_{ij} T'_{ij} = \sum_{\ell,k} \Big(\sum_{i} b_{i\ell} b_{i\ell}\Big)\Big(\sum_{j} b_{jk} b_{ik}\Big) S_{\ell k} T_{\ell k}$$

چون b متعامد است.

$$\sum_{i,j} S'_{ij} T'_{ij} = \sum_{\ell,k} S_{\ell k} T_{\ell k}$$

۴-۳-۱۶- چرخش $\phi_۲+\phi_۱$ حول محور Z بصورت دو چرخش متوالی $\phi_۱$ و $\phi_۲$ حول محور Z بصورت گرفته است. با استفاده از نمایش ماتریسی این چرخش، اتحادهای مثلثاتی زیر را استخراج کنید:

$$\cos(\phi_۱+\phi_۲) = \cos\phi_۱ \cos\phi_۲ - \sin\phi_۱ \sin\phi_۲$$

$$\sin(\phi_۱+\phi_۲) = \sin\phi_۱ \cos\phi_۲ + \cos\phi_۱ \sin\phi_۲$$

حل

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi_۱+\phi_۲) & \sin(\phi_۱+\phi_۲) \\ -\sin(\phi_۱+\phi_۲) & \cos(\phi_۱+\phi_۲) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_۱ & \sin\phi_۱ \\ -\sin\phi_۱ & \cos\phi_۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi_۲ & \sin\phi_۲ \\ -\sin\phi_۲ & \cos\phi_۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi_۱\cos\phi_۲ - \sin\phi_۱\sin\phi_۲ & \cos\phi_۱\sin\phi_۲ + \sin\phi_۱\cos\phi_۲ \\ -\sin\phi_۱\cos\phi_۲ - \cos\phi_۱\sin\phi_۲ & -\sin\phi_۱\sin\phi_۲ + \cos\phi_۱\cos\phi_۲ \end{bmatrix}$$

بخش ۴-۴- مختصات مایل   مسائل صفحه ۲۸۵

۴-۴-۱- با استفاده از نتیجه مسئله ۴-۲-۳۲ $q_{ij} = \dfrac{P_{ji}}{|P|}$ رابطهٔ زیر را بدست آورید.

$$a' = \frac{b \times c}{a \times b . c}$$

حل

$$\det P = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \quad , \quad Q = \begin{vmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \\ c'_x & c'_y & c'_z \end{vmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{\text{ماتریس همسازه } P}{\det P} = \begin{vmatrix} \dfrac{(b\times c)x}{a.b\times c} & \dfrac{(c\times a)x}{a.b\times c} & \dfrac{(a\times b)x}{a.b\times c} \\ \dfrac{(b\times c)y}{a.b\times c} & \dfrac{(c\times a)y}{a.b\times c} & \dfrac{(a\times b)y}{a.b\times c} \\ \dfrac{(b\times c)z}{a.b\times c} & \dfrac{(c\times a)z}{a.b\times c} & \dfrac{(a\times b)z}{a.b\times c} \end{vmatrix}$$

از Q و P^{-1} می‌توان نتیجه گرفت که $a' = \dfrac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}}$ و به همین نحو برای b' و c' نیز بدست خواهد آمد.

۴ـ۴ـ۲ـ بردارهایی که دستگاه مختصات مایل به خصوصی را تعریف می‌کنند به قرار زیرند.

$$a=i \quad , \quad b=j \quad , \quad c=\frac{(j+k)}{\sqrt{۲}}$$

(الف) P، Q و سنجهٔ $\tilde{P}P$ را بیابید.

(ب) اگر $V=i+۳j+۲k$، آنگاه V و V' را بیابید. درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید.

$$V^{۲}=\langle V'|\,|V\rangle$$

حل (الف) در حالت کلی P و $\tilde{P}$ را می‌نویسیم و با توجه به a و b و c داده شده جایگزین می‌کنیم.

$$P=\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ ۰ & ۰ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$a'_x=\frac{(b\times c)x}{a.b\times c}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱ \quad , \quad a'_y=\frac{(b\times c)}{a.b\times c}=۰, a'_z=۰$$

$$b'_x=\frac{(c\times a)x}{a.b\times c}=۰ \quad , \quad b'_y=\frac{(c\times a)y}{a.b\times c}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-۱ \quad , \quad b'_z=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱$$

$$c'_x=\frac{(a\times b)x}{a.b\times c}=۰ \quad , \quad c'_y=۰ \quad , \quad c'_z=\frac{(a\times b)z}{a.b\times c}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$Q=\begin{bmatrix} a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \\ c'_x & c'_y & c'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&1\end{bmatrix}$$

(ب)
$$V=Q\vec{V}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3+\sqrt{2}\\\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\end{bmatrix}$$

$$V'=\tilde{P}\vec{V}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$<V'\mid\mid V>=\begin{bmatrix}1&3&\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3+\sqrt{2}\\\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\end{bmatrix}$$

۴ـ۴ـ۳ـ نشان دهید (الف) $V'_a = a'.\vec{V}$ (ب) $V_a = a'.\vec{V}$ توجه کنید که در اینجا نیازی نیست بزرگی بردارهای معرف شبکه a و a' وغیره واحد باشد.

حل (الف)
$$\vec{V}=V'_a\,\vec{a'}+V'_b\,\vec{b'}+V'_c\,\vec{c'}$$
$$\vec{V}.\vec{a}=V'_a\,(a.a')\ \Rightarrow\ \vec{V}.\vec{a}=V'_a$$

(ب)
$$\vec{V}=V_a\,\vec{a}+V_b\,\vec{b}+V_c\,\vec{c}$$
$$\vec{V}.\vec{a'}=V_a(a'.a)\ \Rightarrow\ \vec{V}.\vec{a'}=V_a$$

۴ـ۴ـ۵ـ نشان دهید که سنجهٔ بردارهای پاد وردا یعنی $\tilde{P}P=(g_{ij})$ به قرار زیر است.

$$\begin{pmatrix}\vec{a}.\vec{a}&\vec{a}.\vec{b}&\vec{a}.\vec{c}\\\vec{b}.\vec{a}&\vec{b}.\vec{b}&\vec{b}.\vec{c}\\\vec{c}.\vec{a}&\vec{c}.\vec{b}&\vec{c}.\vec{c}\end{pmatrix}$$

برای مختصات مایل همهٔ این ضربهای نقطه‌ای ۰ و در نتیجه همهٔ g_{ij}ها ثابت‌اند.

حل

$$P=\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{P}=\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}P=\begin{bmatrix} a_x^2+a_y^2+a_z^2 & a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z & a_x c_x+a_y c_y+a_z c_z \\ b_x a_x+b_y a_y+b_z a_z & b_x^2+b_y^2+b_z^2 & b_x c_x+b_y c_y+b_z c_z \\ c_x a_x+c_y a_y+c_z a_z & c_x b_x+c_y b_y+c_z b_z & c_x^2+c_y^2+c_z^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} & \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{c}.\vec{a} & \vec{c}.\vec{b} & \vec{c}.\vec{c} \end{bmatrix}$$

بخش ۴ـ۵ـ ماتریسهای هرمیتی ـ ماتریسهای یکانی مسائل صفحه ۲۹۱

۴ـ۵ـ۱ـ نشان دهید: $\det(A^*)=(\det A)^*=\det(A^+)$

حل

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \Rightarrow A^+=\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$(\det A)^*=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^*=a_{11}^*a_{22}^*-a_{12}^*a_{21}^* \quad (3)$$

$$\det A^*=a_{11}^*a_{22}^*-a_{12}^*a_{21}^* \quad (2)$$

$$\det A^+=a_{11}^*a_{22}^*-a_{12}^*a_{21}^* \quad (1)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow (\det A)^*=\det(A^*)=\det(A^+)$$

۴ـ۵ـ۲ـ سه ماتریس تکانهٔ زاویه‌ای در رابطهٔ جابجایی اساسی زیر صدق می‌کنند.

$$[J_x , J_y] = iJ_z$$

(با جایگشت چرخه‌ای شاخصها). اگر عناصر دو تا از این ماتریسها حقیقی باشند نشان دهید که عناصر ماتریس سوم باید موهومی محض باشند.

حل

$$[J_x , J_y]=J_xJ_y-J_yJ_x=iJ_z$$

حقیقی $J_x , J_y \rightarrow J_z$ موهومی

۴ـ۵ـ۳ـ نشان دهید $(AB)^+=B^+A^+$

حل $(AB)^+=(\widetilde{AB})^*=(\widetilde{A^*B^*})=\widetilde{B}^*\widetilde{A}^*=B^+A^+$

۴ـ۵ـ۴ـ برای ماتریس c داریم: $C=S^+S$. نشان دهید که رد C قطعاً مثبت است مگر آنکه S ماتریس صفری باشد که در آن صورت $Tr(c)=0$.

حل
$$C=S^+S \Rightarrow C_{ij}=\sum_x S^+_{ix}S_{xj} \quad , \quad S^+=\tilde{S}^*$$
$$tr(C)=\sum_i c_{ii}=\sum_i\sum_x S^+_{ix}S_{xi} \quad , \quad S_{xi}=a+ib$$
$$S^+_{ix}=a-ib$$
$$S^+_{ix}S_{xi}=(a+ib)(a-ib)=a^2-iab+iab+b^2=a^2+b^2 \Rightarrow TR(C)>0$$

۵ـ۵ـ۴ـ اگر A و B ماتریسهایی هرمیتی باشند. نشان دهید $(AB+BA)$ و $i(AB-BA)$ نیز هرمیتی‌اند.

حل
$$A=A^+ \quad , \quad B=B^+$$
(الف)
$$\left[i(AB-BA)\right]^+=\left[-i(AB-BA)^+\right]=\left[-i(B^+A^+-A^+B^+)\right]$$
$$=-i(BA-AB)=i(AB-BA)$$
(ب)
$$(AB+BA)^+=(\widetilde{AB+BA})^*=(\widetilde{A^*B^*+B^*A^*})=\widetilde{A^*B^*}+(\widetilde{B^*A^*})$$
$$=\tilde{B}^*\tilde{A}^*+(\tilde{A}^*\tilde{B}^*)=(B^+A^++A^+B^+)=(BA+AB)=(AB+BA)$$

۶ـ۵ـ۴ـ ماتریس c هرمیتی نیست. نشان دهید که $C+C^+$ و $i(C-C^+)$ هرمیتی‌اند. یعنی یک ماتریس غیرهرمیتی را می‌توان به دو جزء هرمیتی تجزیه کرد:
$$C=\frac{1}{2}(C+C^+)+\frac{1}{2i}i(C-C^+)$$

حل
$$\left[C+C^+\right]^+=C^++(C^+)^+=C^++C=C+C^+$$
$$\left(i\left[C-C^+\right]\right)^+=\left(\widetilde{i\left[C-C^+\right]}\right)^*=-i(C^+-C)=i(C-C^+)$$

پس می‌توان داشت:
$$C=\frac{1}{2}(C+C^+)+\frac{i}{2i}(C-C^+)$$

۷ـ۵ـ۴ـ A و B دو ماتریس هرمیتی تعویض ناپذیراند.
$$AB-BA=iC$$
ثابت کنید C هرمیتی است.

حل $A=A^+ \ , \ B=B^+$

$$\left[\frac{(AB-BA)}{i}\right]=C \Rightarrow \left[\frac{AB-BA}{i}\right]^+=\frac{(AB)^+-(BA)^+}{-i}=$$

$$\frac{B^+A^+-A^+B^+}{-i}=\frac{BA-AB}{-i}=\frac{AB-BA}{i}=C$$

نتیجه گرفتیم که $C=C^+$ پس C هرمیتی است.

۴ـ۵ـ۸ـ نشان دهید یک ماتریس هرمیتی تحت تبدیل تشابهی یکانی کماکان هرمیتی می‌ماند.

حل $A'=BAB^{-1} \ , \ A'=BAB^+ \Rightarrow$

$$A'^+=(BAB^+)^+=(B^+)^+A^+B^+=BA^+B^+=BAB^+$$

$\Rightarrow (BAB^+)^+=BAB^+ \rightarrow$ هرمیتی است.

۴ـ۵ـ۹ـ هر یک از دو ماتریس A و B هرمیتی‌اند. شرط لازم و کافی برای آنکه حاصلضرب AB هرمیتی باشد چیست؟

حل $A=A^+ \ , \ B=B^+$

$$(AB)=(AB)^+=B^+A^+=BA \Rightarrow AB=BA \Rightarrow AB-BA=0 \Rightarrow [A,B]=0$$

۴ـ۵ـ۱۰ـ نشان دهید که وارون هر ماتریس یکانی، یکانی است.

حل $u^{-1}=u^+ \equiv$ ماتریس یکانی است

$$(u^{-1})^{-1}=(u^+)^+=u$$

۴ـ۵ـ۱۱ـ از یک تبدیل تشابهی به خصوصی داریم

$$A'=UAU^{-1} \quad , \quad A^{+'}=UA^+U^{-1}$$

اگر رابطهٔ الحاقی پایسته باشد $(A^{+'}=A'^+)$ و $\det U=1$ نشان دهید U باید یکانی باشد.

حل $A'^+=(UAU^{-1})^+=U^{-1+}A^+U^+=UA^+U^+$

$$UA^+U^+=(U^{-1})^+A^+U^+ \Rightarrow U^+=U^{-1}$$

۴ـ۵ـ۱۲ـ رابطهٔ زیر بین دو ماتریس U و H برقرار می‌شود.

$$U=e^{iaH}$$

که در آن a حقیقی است. (تابع نمایی با بسط ملکورن تعریف می‌شود. این کار در بخش ۴-۱۱ انجام خواهد شد.) (الف) نشان دهید که اگر H هرمیتی باشد. U یکانی خواهد بود. (ب) نشان

دهید که اگر U یکانی باشد H هرمیتی خواهد بود (H از a مستقل است).

[یادآوری: اگر Hها میلتونی باشد آنگاه

$$\psi(x,t)=U(x,t)\psi(x,\circ)=\exp(-it\frac{H}{\hbar})\psi(x,\circ)$$

یکی از جوابهای معادلهٔ شر و دینگر وابسته به زمان است. $U(x,t)=\exp(-it\frac{H}{\hbar})$

یک "عملگر تحول" است.]

حل $e^A=\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\quad,\quad U=e^{iaH}\Rightarrow U^{-1}=e^{-iaH}$

$$1-iaH+\frac{(-iaH)^2}{2!}+\frac{(-aiH)^3}{3!}+\ldots=\left[1+(iaH)^++\frac{(iaH)^2}{2!}+\ldots\right]$$

$$=\left[i+(iaH)+\frac{(iaH)^2}{2!}+\ldots\right]^+=(e^{iaH})^+$$

۴ـ۵ـ۱۳ـ عملگر $T(t+\varepsilon,t)$ تغییرات تابع موج از t تا $t+\varepsilon$ را توصیف می‌کند. به ازای ε حقیقی و آنقدر کوچک که بشود از ε^2 صرفنظر کرد. داریم

$$T(t+\varepsilon,t)=1-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(t)$$

(الف) اگر T یکانی باشد نشان دهید که H هرمیتی است (ب) اگر H هرمیتی باشد نشان دهید T یکانی است.

[یادآوری: هرگاه $H(t)$ مستقل از زمان باشد می‌توان این رابطه را بصورت نمایی درآورد (مسئله ۴-۵-۱۲)]

حل $T^{-1}=T^+\quad,\quad T=1-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(t)=e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(t)}$

$$\left.\begin{array}{l}T^{-1}=e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar}H(t)}=1+\frac{i}{\hbar}\varepsilon H(t)\\ T^+=1-(\frac{-i}{\hbar}\varepsilon H^+(t))=1+\frac{i}{\hbar}\varepsilon H^+(t)\end{array}\right\}\Rightarrow H=H^+$$

قسمت (ب) نیز روشی مشابه خواهد داشت.

مسئله **۴ـ۵ـ۱۴** روشی مشابه دو مسئله قبل دارد.

۴ـ۵ـ۱۵ـ ثابت کنید که حاصلضرب مستقیم دو ماتریس یکانی، خودش یکانی است.

حل

$$\left.\begin{array}{r}(U_1U_2)^{-1}=U_2^{-1}U_1^{-1}\\ U_2^{-1}=U_2^{+}\\ U_1^{-1}=U_1^{+}\end{array}\right\} = U_2^{+}U_1^{+}=(U_1U_2)^{+}$$

پس حاصلضرب نیز یکانی است.

۴ـ۵ـ۱۶ـ ۱۶ ماتریس دیراک را به کمک تساوی $E_{ij}=\rho_i\sigma_j$ $(\sigma_\circ=\rho_\circ=1)$ نمایش دهید نشان دهید که (الف) به ازای همهٔ iها و همهٔ jها $E_{ij}^2=1$

(ب) (هرمیتی) $E_{ij}=E_{ij}^{+}$

[راهنمایی: از خواص ρ_i ها و σ_jها استفاده کنید.]

حل

(الف) $E_{ij}^2=E_{ij}\,E_{ij}=(\rho_i\sigma_j)\,(\rho_i\sigma_j)=\rho_i\sigma_j\sigma_j\rho_i=1$

(ب) $(E_{ij})^{+}=(\rho_i\sigma_j)^{+}=\sigma_j^{+}\rho_i^{+}=\sigma_j\rho_i=E_{ij}$

پس E_{ij} هرمیتی است.

۴ـ۵ـ۱۷ـ درستی معادله‌های ۴-۱۳۴ تا ۴-۱۳۶ را برای ماتریسهای σ و ρ چهار در چهار تحقیق کنید.

حل

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad,\quad\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-i&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-i&0\\0&0&0&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0$$

$$\sigma_1\sigma_1+\sigma_1\sigma_1=2\sigma_1\sigma_1=2\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=2\,1$$

پس می‌توان داشت: $\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij}1$

به همین نحو برای سایر موارد و معادلات عمل می‌شود.

مسئله ۴ـ۵ـ۱۸ نیز روشی مشابه مسئله قبل دارد.

۴ـ۵ـ۱۹ـ با استفاده از معادلات ۴-۱۳۵ و ۴-۱۳۶ نشان دهید که

(الف) $a_1a_2a_3a_4a_5=+1$ (ب) $Y_1Y_2Y_3Y_4Y_5=+1$

حل داریم: $a_i=\rho_i\sigma_i$ و $\sigma_i\sigma_j=i\sigma_k$ و $\rho_i\rho_j=i\rho_k$ و $[\sigma_i,\rho_j]=0$

$$a_4=\rho_3$$

$$a_1a_2a_3a_4a_5=\rho_1\sigma_1\rho_1\sigma_2\rho_1\sigma_3\rho_3\rho_2=\sigma_1\rho_1^2\sigma_2\rho_1\sigma_3\rho_3\rho_2=$$
$$\sigma_1\sigma_2(\sigma_3\rho_1)(-i\rho_1)=(i\sigma_3)(\sigma_3\rho_1)(-i\rho_1)=-i^2\sigma_3^2\rho_1^2=-i^2=+1$$

قسمت (ب) نیز همانند (الف) بدست می‌آید.

۴ـ۵ـ۲۰ـ اگر $M=(\frac{1}{2})(1+Y_5)$ نشان دهید که $M^2=M$ توجه کنید که به جای Y_5 می‌شود هر یک از ماتریسهای دیگر دیراک (هر یک از E_{ij} ها در جدول ۴-۱) را قرار داد. اگر M هرمیتی باشد این نتیجه یعنی $M^2=M$ معادلهٔ معرف یک عملگر تصویر در مکانیک کوانتومی است.

حل از جدول ۴-۱ صفحهٔ ۲۶۰ داریم:

$$\rho_{1},\ -Y_5=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow Y_5=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$M=\frac{1}{2}(1+Y_5)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M^2=MM=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&0&-2&0\\0&2&0&-2\\-2&0&2&0\\0&-2&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$$

۴ـ۵ـ۲۱ـ نشان دهید $\alpha\times\alpha=2i\sigma$

که در آن α برداری است که ماتریسهای a مولفه‌های آن را تشکیل می‌دهند

$$\alpha=(a_1, a_2, a_3)$$

دقت کنید که اگر α یک بردار قطبی باشد (بخش ۳-۴) آنگاه σ برداری محوری است.

حل

$$\alpha\times\alpha= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(a_2a_3-a_3a_2)+\hat{j}(a_3a_1-a_1a_3)+\hat{k}(a_1a_2-a_2a_1)$$

از رابطه $a_i=\rho_1\sigma_i$ استفاده می‌شود

$$=\hat{i}(\rho_1\sigma_2\rho_1\sigma_3-\rho_1\sigma_3\rho_1\sigma_2)+\hat{j}(\rho_1\sigma_3\rho_1\sigma_1-\rho_1\sigma_1\rho_1\sigma_3)+\hat{k}(\rho_1\sigma_1\rho_1\sigma_2-\rho_1\sigma_2\rho_1\sigma_1)$$

$$=\hat{i}(2i\sigma_1)+\hat{j}(2i\sigma_2)+\hat{k}(2i\sigma_3)=2i\sigma$$

البته می‌توان از جدول ۴-۱ مستقیماً به جای a_1، a_2 و a_3 ماتریس‌های مربوطه را قرار داد.

۴ـ۵ـ۲۲ـ ثابت کنید که ۱۶ ماتریس دیراک یک مجموعهٔ مستقل خطی می‌سازند.

[راهنمایی: عکس این حکم را فرض کنید E_{mn} را ترکیب خطی دیگر E_{ij}ها بگیرید در E_{mn} ضرب کنید رد بگیرید و نشان دهید که به تناقض می‌رسید.]

حل

$$E_{mn}=\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij} \Rightarrow E_{mn}E_{mn}=E_{mn}^2=\sum_{i,j}a_{ij}E_{mn}E_{ij}=1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr}\sum_{i,j}a_{ij}E_{mn}E_{ij}=\sum_{ij}a_{ij}\operatorname{Tr}(E_{mn}E_{ij})=0=\operatorname{Tr}(1)$$

و حال آنکه می‌دانیم $\operatorname{Tr}(1)=4$ است پس به تناقض می‌رسیم و نتیجتاً داریم

رابطه مقابل برقرار نیست.

$$E_{mn}=\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}$$

۴ـ۵ـ۲۳ـ (الف) اگر فرض کنیم که ماتریس ۴×۴ معلوم A (با عناصر ثابت) را بتوان بصورت ترکیب خطی ۱۶ ماتریس دیراک نوشت:

$$A=\sum_{i,j=0}^{3}C_{ij}E_{ij}$$

نشان دهید: $C_{mn}=\frac{۱}{۴}\,Tr(AE_{mn})$

(ب) اگر A فقط و فقط یک عنصر ناصفر داشته باشد نشان دهید که در این بسط دقیقاً چهار ضریب ناصفر وجود خواهد داشت.

(ج) ماتریس A را برحسب E_{ij}ها بسط دهید.

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

حل

$$\text{(الف)}\ A=\sum_{i,j=۰}^{۳} C_{ij}\,E_{ij} \;\Rightarrow\; AE_{mn}=\sum_{i,j=۰}^{۳} C_{ij}\,E_{ij}\,E_{mn}$$

$$Tr(AE_{mn})=Tr\sum_{i,j=۰}^{۳} C_{ij}\,E_{ij}\,E_{mn}=۴C_{mn} \;\Rightarrow\; C_{mn}=\frac{۱}{۴}Tr(AE_{mn})$$

(ب) از (الف) داریم: $C_{mn}=\frac{۱}{۴}Tr(AE_{mn})$

$$C_{mn}=\frac{۱}{۴}\sum_{k}\sum_{\ell} a_{k\ell}(E_{mn})_{\ell k}=\frac{۱}{۴}a_{ij}\,(E_{mn})_{ji}$$

$$\text{(ج)}\ A=\frac{۱}{۴}(E_{۰۰}+E_{۰۳}+E_{۳۰}+E_{۳۳})$$

$$C_{۰۰}=\frac{۱}{۴}\times ۱\times(۱)=\frac{۱}{۴}\quad,\quad C_{۰۳}=\frac{۱}{۴}\times ۱\times ۱=\frac{۱}{۴}$$

$$C_{۳۰}=\frac{۱}{۴}\quad,\quad C_{۳۳}=\frac{۱}{۴}\quad A=\frac{۱}{۴}(1+\sigma_{۳}+\rho_{۳}+\delta_{۳})$$

۴ـ۵ـ۲۴ـ اگر A یکی از ماتریسهای دیراک (جز ماتریس یکه) باشد. با هشت تا از ماتریسهای دیراک تعویض‌پذیر و با هشت تای دیگر پاد تعویض‌پذیر است هشت ماتریس را بیابید که با $Y_{۱}$ پاد تعویض‌پذیر باشند.

حل شرط $[A,Y_{۱}]=۰$ باید برقرار باشد تا بتوان ماتریس‌های تعویض‌پذیر و از مخالف صفر بودن عبارت فوق ماتریس‌های پاد تعویض‌پذیر را پیدا کنیم. که در کل بعد از بررسی از جدول صفحه ۲۶۰ بدست می‌آید.

$$\sigma_{۲},\sigma_{۳},\rho_{۱},a_{۱},Y_{۲},Y_{۳},\rho_{۳},\delta_{۱}$$

۴ـ۵ـ۲۶ـ (الف) داریم، $r'=Ur$ که در آن U یک ماتریس یکانی و r برداری (ستونی) با عناصر

مختلط است. نشان دهید که نرم (بزرگی) r تحت این عمل ناورد است (ب) ماتریس، U، هر بردار ستونی r با عناصر مختلط را به r' تبدیل می‌کند و بزرگی آن همچنان ناوردا می‌ماند: $r^+r=r'^+r'$.

نشان دهید که U یکانی است.

حل (الف) $r'^+r'=(Ur)^+Ur=r^+U^+Ur=r^+1r=r^+r$

قسمت (ب) نیز به راحتی قابل دستیابی است.

بخش ۴ـ٦ـ قطری کردن ماتریسها — مسائل صفحه ۳۰۶

۴ـ۶ـ۳ـ بعنوان عکس این قضیه که ماتریسهای هرمیتی ویژه مقدارهای حقیقی دارند و ویژه بردارهای متناظر به ویژه مقدارهای متمایز آنها متعامدند. نشان دهید که هرگاه (الف) ویژه مقدارهای یک ماتریس حقیقی باشند و (ب) ویژه بردارهای آن در معادلهٔ ۴-۱۸۰، $r_i^+r_j=\delta_{ij}$ یا $(\langle r_i \mid r_j\rangle=\delta_{ij})$ صدق کنند آنگاه آن ماتریس هرمیتی است.

حل

$\lambda_i=\lambda_i^*$ ویژه مقادیر حقیقی

$\vec{r}_i^*\vec{r}_j=\delta_{ij}$ ویژه بردارها

$$\begin{matrix} Ar_i=\lambda_i r_i \\ Ar_j=\lambda_j r_j \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} r_j^+Ar_i=\lambda_i r_j^+r_i \\ r_i^+Ar_j=\lambda_j r_i^+r_j \end{matrix} \qquad (۱)$$

از طرفی $\lambda_j r_j^+ r_i \underset{\lambda_j^*=\lambda_j}{=} \lambda_j^* r_j^+ r_i = r_j^+A^+r_i \quad (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow r_i^+Ar_i=r_i^+A^+r_i \Rightarrow A=A^+$$

A هرمیتی است.

۴ـ۶ـ۴ـ نشان دهید که ماتریس حقیقی نامتقارن را نمی‌توان به کمک یک تبدیل تشابهی متعامد قطری کرد.

[راهنمایی: فرض کنید که ماتریس حقیقی نامتقارن را بتوان قطری کرد و برای این فرض یک تناقض پیدا کنید.]

حل $A\neq\tilde{A} \;,\; C=BA\tilde{B} \Rightarrow \tilde{C}=B\tilde{A}\tilde{B}$

اگر $C=\tilde{C} \Rightarrow BA\tilde{B}=B\tilde{A}\tilde{B} \Rightarrow A=\tilde{A}$

که این خلاف فرض است و نمی‌تواند چنین باشد.

۴-۶-۵- ماتریسهایی که مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای J_x، J_y و J_z را نمایش می‌دهند. جملگی هرمیتی‌اند. نشان دهید که ویژه مقدارهای $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ حقیقی و نامنفی‌اند.

حل $J^2 r = J_x^2 r + J_y^2 r + J_z^2 r = (\lambda_x^2 r + \lambda_y^2 r + \lambda_z^2 r)$

پس چون J_x، J_y و J_z هرمیتی است ویژه مقادیر نیز حقیقی‌اند و درنتیجه ویژه مقدارهای $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ حقیقی است و البته غیرمنفی.

۴-۶-۷- ماتریسهای مربعی با دترمینان صفر را تکین می‌نامند (الف) اگر A تکین باشد نشان دهید که دست کم یک بردار ستونی غیرصفر V چنان وجود دارد که

$$A\,|\,V> = 0$$

(ب) اگر یک بردار غیرصفر $|V>$ چنان وجود داشته باشد که $A|V> = 0$ نشان دهید که A یک ماتریس تکین است. یعنی اگر یکی از ویژه مقدارهای یک ماتریس (یا یک عملگر) صفر باشد آن ماتریس (یا عملگر) وارونی ندارد.

حل (الف) A یک ماتریس تکین است. $[A]_{m\times m} \;,\quad \det A = 0 \quad \Rightarrow$

اگر A را قطری کنیم بصورت زیر آنرا داریم

$$A' = (\text{قطری } A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & O \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & O & 0 & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A' = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n$$

اگر نتیجه دترمینان A' برابر صفر شود دست کم یکی از ویژه مقادیر صفر است و به طبع برای ویژه بردار مربوطه داریم $Ar_k = \lambda_k r_k = 0 \quad \Rightarrow \quad Ar_k = 0$

(ب) اگر بطور عکس عمل شود به یک ویژه مقدار صفر خواهیم رسید.

۴-۶-۸- تبدیل تشابهی یکسانی هر یک از دو ماتریس را قطری می‌کند. نشان دهید که دو ماتریس اولیه باید با یکدیگر تعویض‌پذیر باشند [این خاصیت مخصوص در فرمولبندی ماتریسی (هایز نبرگ) در مکانیک کوانتومی حائز اهمیت است.]

حل $C_1 = BAB^{-1} \quad , \quad C_2 = BDB^{-1}$

$$C_1C_2 - C_2C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad BAB^{-1}\,BDB^{-1} - BDB^{-1}\,BAB^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad BADB^{-1} - BDAB^{-1} = \quad \Rightarrow \quad AD-DA= \quad \Rightarrow \quad AD=DA$$

۴ـ۶ـ۹ـ ویژه مقدارهای دو ماتریس هرمیتی A و B با هم برابرند. نشان دهید که A و B را می‌توان توسط یک تبدیل تشابهی به هم مربوط کرد.

حل r_i و r_j ویژه بردار و λ ویژه مقدار است.

$$\left.\begin{aligned} Ar_i = \lambda r_i \quad &\rightarrow \quad r_i^+ Ar_i = \lambda r_i^+ r_i = \lambda \\ Br_j = \lambda r_j \quad &\rightarrow \quad r_j^+ Br_j = \lambda r_j^+ r_j = \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$r_i^+ Ar_i = r_j^+ Br_j$$

دیده می‌شود A و B به هم مربوط شده‌اند.

۴ـ۶ـ۱۰ـ ویژه مقدارها و مجموعهٔ ویژه بردارهای متعامد یکه (متعامد بهنجار) ماتریسهای مسئله ۴-۲-۱۵ را بیابید.

حل از مسئله ۴-۲-۱۵ داریم:

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det | M_x - \lambda 1 | = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda \left[\lambda^2 - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \left[-\lambda^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_۲}{\sqrt{۲}} = ۰ \\ \dfrac{x_۱}{\sqrt{۲}} + \dfrac{x_۳}{\sqrt{۲}} = ۰ \quad \Rightarrow \quad x_۱ = -x_۳ = ۱ \quad \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix} \\ \dfrac{x_۲}{\sqrt{۲}} = ۰ \end{cases}$$

بعد از بهنجار کردن (نرمالیزه کردن)

$$r_{۱x} \quad \rightarrow \quad \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_۱ = ۰$$

$$\lambda_۲ = ۱ \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -۱ & \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ \\ \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} & -۱ & \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ & \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_۱ \\ x'_۲ \\ x'_۳ \end{pmatrix} = ۰ \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -x'_۱ + \frac{x'_۲}{\sqrt{۲}} = ۰ \\ & \frac{x'_۱}{\sqrt{۲}} - x'_۲ + \frac{x'}{\sqrt{۳}} = ۰ \\ & \frac{x'_۲}{\sqrt{۲}} - x'_۳ = ۰ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad x'_۱ = x'_۳ = ۱ \quad , \quad x'_۲ = \sqrt{۲}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ \\ \sqrt{۲} \\ ۱ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{بعد از نرمالیزه کردن}} \frac{۱}{۲} \begin{pmatrix} ۱ \\ \sqrt{۲} \\ ۱ \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad r_{۲x} \ , \lambda_۲ = ۱$$

$$\lambda_۳ = -۱ \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} ۱ & \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ \\ \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} & ۱ & \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} \\ ۰ & \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_۱ \\ x''_۲ \\ x''_۳ \end{pmatrix} = ۰$$

$$\left\{\begin{array}{l} x''_1 + \dfrac{x''_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ \dfrac{x''_1}{\sqrt{2}} + x''_2 + \dfrac{x''_3}{\sqrt{2}} = 0 \\ \dfrac{x''_3}{\sqrt{2}} + x''_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x''_1 = x''_3 = 1 \quad , \quad x''_2 = -\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow r_{3x} \quad , \quad \lambda_3 = 1$$

برای M_y و M_z نیز به همین نحو عمل می‌شود.

نکته (۱): برای بدست آوردن ضریب نرمالیزه از رابطهٔ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}}$ عمل می‌شود.

نکته (۲): اگر ماتریس قطری باشد عناصر روی قطر اصلی ویژه مقادیرند بعنوان نمونه در مورد M_z که قطری است ۱ و ۰ و ۱- ویژه مقادیرند.

۴-۶-۱۱- نشان دهید که دترمینان ماتریس لختی تک ذره‌ای به جرم m در (x,y,z) صفراست. این نتیجه را از دیدگاه ناوردایی دترمینان یک ماتریس تحت تبدیل تشابهی (مسئله ۴-۳-۱۰) و یک چرخش ممکن دستگاه مختصات توجیه کنید.

حل اگر فرض شود که در دستگاه مختصات جدید (چرخش یافته) m در مبدأ قرار گیرد لختی دورانی صفر می‌شود و از طرفی دترمینان یک کمیت ناورد است پس در دستگاه مختصات دیگر نیز صفر است.

۴-۶-۱۲- جسم صُلبی را می‌توان با سه جرم نقطه‌ای زیر نمایش داد.

$$m_1 = 1 \quad \text{در} \quad (1,1,-2)$$

$$m_2 = 2 \quad \text{در} \quad (-1,-1,0)$$

$$m_3 = 1 \quad \text{در} \quad (1,1,2)$$

(الف) ماتریس لختی را بیابید. (ب) ماتریس لختی را با بدست آوردن ویژه مقدارها و محورهای اصلی (بعنوان ویژه بردارهای متعامد یکه) قطری کنید.

حل (الف)

لنگر لختی حول محور x
$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^۲ + z_i^۲)$$

لنگر لختی حول محور y
$$I_{yy} = \sum_i m_i (z_i^۲ + x_i^۲)$$

لنگر لختی حول محور z
$$I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^۲ + y_i^۲)$$

حاصلضرب لختی xy
$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

حاصلضرب لختی yz
$$I_{yz} = I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

حاصلضرب لختی zx
$$I_{zx} = I_{xz} = -\sum_i m_i z_i x_i$$

$$I_{xx} = ۱(۱^۲+(-۲)^۲)+۲((-۱)^۲+۰^۲)+۱(۱^۲+۲^۲)=۱۲$$

$$I_{yy} = ۱((-۲)^۲+۱^۲)+۲(۰^۲+(-۱)^۲)+۱(۲^۲+۱^۲)=۱۲$$

$$I_{zz} = ۱(۱^۲+۱^۲)+۲((-۱)^۲+(-۱)^۲)+۱(۱^۲+۱^۲)=۸$$

$$I_{xy} = -\left[۱\times۱\times۱+۲\times(-۱)\times(-۱)+۱\times۱\times۱\right]=-۴=I_{yx}$$

$$I_{yz} = -\left[۱\times۱\times(-۲)+۲\times(-۱)\times۰+۱\times۱\times۲\right]=۰=I_{zy}$$

$$I_{zx} = -\left[۱\times(-۲)\times۱+۲\times۰\times(-۱)+۱\times۲\times۱\right]=۰=I_{xz}$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ & -۴ & ۰ \\ -۴ & ۱۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

(ب) $|I-\lambda 1| = ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} ۱۲-\lambda & -۴ & ۰ \\ -۴ & ۱۲-\lambda & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸-\lambda \end{vmatrix} = ۰$

$$(۱۲-\lambda)\left[(۱۲-\lambda)(۸-\lambda)\right] -۴\left[۴(۸-\lambda)\right] =(۸-\lambda)\left[(۱۲-\lambda)^۲-۱۶\right] = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_۱ = ۸ \\ \lambda_۲ = ۱۶ \\ \lambda_۳ = ۸ \end{cases}$$

$$\lambda_1=8 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 4x_1-4y_1=0 & \Rightarrow \quad x_1=y_1=1 \\ -4x_1+4y_1=0 & \quad z_1=0 \end{cases} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=16 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -4x_2-4y_2=0 & \\ -4x_2-4y_2=0 & x=-y=1 \\ -8z_2=0 & z=1 \end{cases} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

مسائل ۴-۶-۱۳، ۴-۶-۱۴ و ۴-۶-۱۵ همانند مسئله ۴-۶-۱۲ حل می‌شوند و از حل آنها صرفنظر می‌شود.

۴ـ۶ـ۱۶ـ ویژه مقدارها و ویژه بردارهای متعامدیکه متناظر با ماتریسهای زیر را بیابید. (توجه کنید که برای امتحان کردن جواب خود از طریق عددی، مجموع ویژه مقدارها باید با مجموع عناصر قطری ماتریس اصلی برابر باشد (مسئله ۴-۳-۹)). همچنین به تناظر بین $\det A=0$ و وجود $\lambda=0$ که در مسئله‌های ۴-۶-۲ و ۴-۶-۷ نمایش داده شده توجه کنید.

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل

$$|A-\lambda 1|=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\lambda)\right] - 1(1-\lambda)=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=2 \end{cases}$$

$$\lambda_1=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} z_1=0 \\ y_1=1 \rightarrow r_1 \rightarrow \\ x_1=0 \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_2+z_2=0 \rightarrow x_2=-z_2=1 \\ y_2=0 \\ x_2+z_2=0 \end{cases} \qquad r_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad r_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بدلیل مشابه بودن مسائل ۴-۶-۱۷ تا ۴-۶-۲۹ بعنوان نمونه چند مسئله از این دسته مسائل حل می‌کنیم.

۴-۶-۱۹-

$$A= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 1 & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 1 \end{pmatrix}$$

حل

$$|A-\lambda 1|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 1-\lambda & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-8\right] - \sqrt{8}\left[\sqrt{8}(1-\lambda)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-16\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=5 \\ \lambda_3=-3 \end{cases}$$

$$\lambda_1=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 0 & \sqrt{8} \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases}\sqrt{۸}\,y_۱=۰\\ \sqrt{۸}\,x_۱+\sqrt{۸}\,z_۱=۰\\ \sqrt{۸}\,y_۱=۰\end{cases}\Rightarrow\quad x_۱=-z_۱=۱$$

$$r_۱\ \rightarrow\ \frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ -۱\end{pmatrix}$$

$$\lambda_۲=۵\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}-۴ & \sqrt{۸} & ۰\\ \sqrt{۸} & -۴ & \sqrt{۸}\\ ۰ & \sqrt{۸} & -۴\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_۲\\ y_۲\\ z_۲\end{pmatrix}=۰$$

$$\begin{cases}-۴x_۲+\sqrt{۸}\,y_۲=۰\\ \sqrt{۸}\,x_۲-۴y_۲+\sqrt{۸}\,z_۲=۰\\ \sqrt{۸}\,y_۲-۴z_۲=۰\end{cases}\Rightarrow\quad x_۲=z_۲=۱,\quad y_۲=\frac{\sqrt{۸}}{۲}$$

$$r_۲\ \rightarrow\ \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱\\ \frac{\sqrt{۸}}{۲}\\ ۱\end{pmatrix}$$

$$\lambda_۳=-۳\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}۴ & \sqrt{۸} & ۰\\ \sqrt{۸} & ۴ & \sqrt{۸}\\ ۰ & \sqrt{۸} & ۴\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_۳\\ y_۳\\ z_۳\end{pmatrix}=۰$$

$$\begin{cases}۴x_۳+\sqrt{۸}\,y_۳=۰\\ \sqrt{۸}\,x_۳+۴y_۳+\sqrt{۸}\,z_۳=۰\\ \sqrt{۸}\,y_۳+۴z_۳=۰\end{cases}\Rightarrow\quad x_۳=z_۳=۱,\quad y_۳=-\frac{\sqrt{۸}}{۲}$$

$$r_۳\ \rightarrow\ \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱\\ -\frac{\sqrt{۸}}{۲}\\ ۱\end{pmatrix}$$

۴ـ۶ـ۲۲ـ

$$A=\begin{pmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{pmatrix}$$

حل

$$\det(A-\lambda 1)=۰\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}-\lambda & ۱ & ۰\\ ۱ & -\lambda & ۱\\ ۰ & ۱ & -\lambda\end{vmatrix}=۰\ \Rightarrow$$

$$-\lambda(\lambda^{۲}-۱)+\lambda=۰ \quad\Rightarrow\quad \lambda\left[۱-\lambda^{۲}+۱\right]=۰ \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda=۰\\ \lambda=\pm\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$\lambda_{۱}=۰ \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{۱}\\ y_{۱}\\ z_{۱}\end{pmatrix}=۰$$

$$\begin{cases} y_{۱}=۰\\ x_{۱}+z_{۱}=۰ \\ y_{۱}=۰\end{cases} \quad\Rightarrow\quad x_{۱}=-z_{۱}=۱ \quad\rightarrow\quad r_{۱}\rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{pmatrix}۱\\ ۰\\ -۱\end{pmatrix}$$

$$\lambda_{۲}=\sqrt{۲} \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} -\sqrt{۲} & ۱ & ۰\\ ۱ & -\sqrt{۲} & ۱\\ ۰ & ۱ & -\sqrt{۲}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{۲}\\ y_{۲}\\ z_{۲}\end{pmatrix}=۰$$

$$\left.\begin{cases} -\sqrt{۲}x_{۲}+y_{۲}=۰\\ x_{۲}-\sqrt{۲}y_{۲}+z_{۲}=۰\\ y_{۲}-\sqrt{۲}z_{۲}\end{cases}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} x_{۲}=z_{۲}=۱\\ y_{۲}=\sqrt{۲}\end{matrix} \qquad r_{۲}\rightarrow\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱\\ \sqrt{۲}\\ ۱\end{pmatrix}$$

$$\lambda_{۳}=-\sqrt{۲} \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} \sqrt{۲} & ۱ & ۰\\ ۱ & \sqrt{۲} & ۱\\ ۰ & ۱ & \sqrt{۲}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{۳}\\ y_{۳}\\ z_{۳}\end{pmatrix}=۰$$

$$\left.\begin{cases} \sqrt{۲}x_{۳}+y_{۳}=۰\\ x_{۳}+\sqrt{۲}y_{۳}+z_{۳}=۰\\ y_{۳}+\sqrt{۲}z_{۳}=۰\end{cases}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} x_{۳}=z_{۳}=۱\\ y_{۳}=-\sqrt{۲}\end{matrix} \qquad r_{۳}\rightarrow\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱\\ -\sqrt{۲}\\ ۱\end{pmatrix}$$

۴-۶-۲۷

$$A=\begin{pmatrix} ۵ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۲\end{pmatrix}$$

حل

$$\det(A-\lambda 1)=۰ \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} ۵-\lambda & ۰ & ۲\\ ۰ & ۱-\lambda & ۰\\ ۲ & ۰ & ۲-\lambda\end{vmatrix}=۰$$

$$(۵-\lambda)\left[(۱-\lambda)(۲-\lambda)\right]-۲\left[۲(۱-\lambda)\right]=۰ \Rightarrow$$

$$(۱-\lambda)\left[(۵-\lambda)(۲-\lambda)-۴\right]=۰ \Rightarrow (۱-\lambda)\left[۱۰-۷\lambda+\lambda^۲-۴\right]=۰$$

$$\Rightarrow (۱-\lambda)(\lambda^۲-۷\lambda+۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\lambda=۱\\ \lambda=۶\\ \lambda=۱\end{cases}$$

$$\lambda_۱=۱ \rightarrow \begin{pmatrix}۴ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_۱\\ y_۱\\ z_۱\end{pmatrix}=۰$$

$$\begin{cases}۴x_۱+۲z_۱=۰\\ ۲x_۱+z_۱=۰ \rightarrow ۲x_۱=-z_۱=۲\end{cases} \quad y_۱=۱ \qquad r_۱ \rightarrow \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۱\\ ۱\\ -۲\end{pmatrix}$$

$$\lambda_۲=۶ \rightarrow \begin{pmatrix}-۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & -۵ & ۰\\ ۲ & ۰ & -۴\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_۲\\ y_۲\\ z_۲\end{pmatrix}=۰$$

$$\begin{cases}-x_۲+۲z_۲=۰ \Rightarrow x_۲=۲z_۲=۲\\ -۵y_۲=۰ \qquad y_۲=۰\\ ۲x_۲-۴z_۲=۰\end{cases} \qquad r_۲ \rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۵}}\begin{pmatrix}۲\\ ۰\\ ۱\end{pmatrix}$$

۴ـ۶ـ۴۰ـ (الف) ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$\begin{pmatrix}۱ & \varepsilon\\ \varepsilon & ۱\end{pmatrix}$$

توجه کنید که ویژه مقدارها به ازای $\varepsilon=۰$ واگن اندولی ویژه بردارها به ازای همهٔ $\varepsilon\neq۰$ و $\varepsilon\rightarrow۰$ متعامدند. (ب) ویژه مقدارها و ویژه بردارهای ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$\begin{pmatrix}۱ & ۱\\ \varepsilon^۲ & ۱\end{pmatrix}$$

توجه کنید که ویژه مقدارها به ازای $\varepsilon=۰$ واگن‌اند و ویژه بردارهای این ماتریس (نامتقارن) (به ازای $\varepsilon=۰$) فضا را نمی‌تنند.

حل

$$(\text{الف})\ A=\begin{pmatrix}۱ & \varepsilon\\ \varepsilon & ۱\end{pmatrix}$$

$$\det\ (A-\lambda1)=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix}۱-\lambda & \varepsilon\\ \varepsilon & ۱-\lambda\end{vmatrix}=۰ \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)^2-\varepsilon^2=0 \quad\Rightarrow\quad 1-\lambda=\pm\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda_1=1-\varepsilon\\ \lambda_2=1+\varepsilon\end{cases}$$

مشاهده می‌شود اگر $\varepsilon=0$ باشد داریم $\lambda_1=\lambda_2$ پس واگنی (تبهگنی) داریم

$$\text{(الف)}\ \lambda_1=1-\varepsilon \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=0$$

$$\varepsilon a_1+\varepsilon b_1=0 \quad\Rightarrow\quad a_1=-b_1=1$$

$$r_1 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=1+\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}-\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & -\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}=0$$

$$-\varepsilon a_2+\varepsilon b_2=0 \quad\Rightarrow\quad a_2=b_2=1$$

$$r_2 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\text{(ب)}\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varepsilon^2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\det\ (B-\lambda 1)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ \varepsilon^2 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\lambda^2-\varepsilon^2=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda_1=\varepsilon\\ \lambda_2=-\varepsilon\end{cases}$$

به ازای $\varepsilon=0$ واگنی داریم $\lambda_1=\lambda_2=0$.

$$\lambda_1=\varepsilon \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}-\varepsilon & 1\\ \varepsilon^2 & -\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}-a_1\varepsilon+b_1=0 \quad\rightarrow\quad \varepsilon a_1=b_1=\varepsilon\\ a\varepsilon^2-\varepsilon b_1=0\end{cases} \qquad r_1 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}\begin{pmatrix}1\\ \varepsilon\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=-\varepsilon \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix}\varepsilon & 1\\ \varepsilon^2 & \varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}a_2\varepsilon+b_2=0 \quad\rightarrow\quad \varepsilon a_2=-b_2=\varepsilon\\ a_2\varepsilon^2+b_2\varepsilon=0\end{cases} \qquad r_2 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}\begin{pmatrix}1\\ -\varepsilon\end{pmatrix}$$

بخش ۴ـ۷ـ ویژه بردارها ـ ویژه مقدارها   مسائل صفحه ۳۲۰

۴ـ۷ـ۱ـ نشان دهید که هر ماتریس ۲×۲ دو ویژه بردار و دو ویژه مقدار متناظر دارد. ویژه بردارها لزوماً متعامد نیستند. ویژه مقدارها نیز لزوماً حقیقی نیستند.

حل

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \det=(A-\lambda 1)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$$

$$\lambda=\frac{(a_{11}+a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}}{2}$$

که λ_1 و λ_2 دو ویژه مقدار حاصل خواهد شد و متناظر آن دو ویژه بردار داریم و لزوماً نه ویژه بردارها متعامدند و نه ویژه مقادیر حقیقی‌اند.

۴ـ۷ـ۲ـ برای تجسم مسئله ۴-۷-۱ ویژه مقدارها و ویژه بردارهای متناظر را برای ماتریس زیر بدست آورید.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که ویژه بردارها متعامد نیستند.

حل

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ,\det\cdot(A-\lambda 1)=0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=4 \end{cases}$$

$$\lambda_1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} 2a_1+4b_1=0 \\ a_1+2b_1=0 \quad \Rightarrow \quad a_1=-2b_1=2 \end{cases} \qquad r_1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=4 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} -2a_2+4b_2=0 \\ a_2-2b_2=0 \quad \Rightarrow \quad a_2=2b_2=2 \end{cases} \qquad r_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۴ـ۷ـ۳ـ نشان دهید که در ماتریس دو دردوی A ویژه مقدارهای λ در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$\lambda^2-\lambda Tr(A)+\det(A)=0$$

حل

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad Tr(A)=a_{11}+a_{22} \quad (3)$$

$$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \quad (2)$$

$$|A-\lambda 1|=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \quad (1)$$

$$(1),(2),(3) \quad \Rightarrow \quad \lambda^2-Tr(A)\lambda+\det A=0$$

۴ـ۷ـ۴ـ فرض کنید ماتریس یکانی U در معادلهٔ ویژه مقداری $Ur=\lambda r$ صدق کند نشان دهید که بزرگی ویژه مقدارهای این ماتریس یکانی برابر یک است. همین قضیه دربارهٔ ماتریسهای متعامد حقیقی صادق است.

حل

$$Ur_i=\lambda_i r_i \quad \Rightarrow \quad r_i^+U^+=\lambda_i^* r_i^+$$

$$r_i^+U^+Ur_i=\lambda_i\lambda_i^* r_i^+r_i \Rightarrow \lambda_i\lambda_i^*=1 \quad \Rightarrow \quad |\lambda_i|=1$$

۴ـ۷ـ۷ـ ماتریس خاصی را در نظر بگیرید که هم یکانی و هم هرمیتی باشد نشان دهید که ویژه مقدارهای آن جملگی ۱± هستند.

[یادآوری: ماتریسهای پاؤلی و دیراک انواع خاصی از این ماتریسها هستند.]

حل

$$A^2=1 \quad , \quad Ar=\lambda r \quad \Rightarrow \quad A^2r=\lambda Ar$$

$$1r=\lambda(\lambda r)=\lambda^2 r \quad \Rightarrow \quad \lambda^2=1 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm 1$$

۴ـ۷ـ۱۱ـ ویژه مقدارهای ماتریس غیر هرمیتی A عبارت‌اند از λ_i و ویژه بردارهای متناظر آنها عبارت‌اند از: $|u_i\rangle$. ماتریس الحاقی A^+ نیز دارای همین مجموعه از ویژه مقدارهاست ولی ویژه بردارهای متناظر $|v_i\rangle$ آن متفاوت است. نشان دهید این ویژه بردارها یک مجموعه متعامد دوگانه می‌سازند به این معنا که:

به ازای $\lambda_i^* \neq \lambda_j$ $\quad <v_i \mid u_j> = 0$

حل

$$v_i^+ (Au_j = \lambda_j u_j) \quad , \quad u_j(A^+ v_i = \lambda_i v_i) \quad \Rightarrow$$

$$v_i^+ A u_j = \lambda_i^* u_i^+ u_j = \lambda_j v_i^+ u_j$$

$$(\lambda_i^* - \lambda_j) v_i^+ u_j = 0 \quad \Rightarrow \quad v_i^+ u_j = 0$$

به ازای $\lambda_i^* \neq \lambda_j$

۴ـ۷ـ۱۶ـ در ادامهٔ مسئله ۴-۵-۱۲ که در آن ماتریس یکانی U و ماتریس هرمیتی H به کمک رابطهٔ زیر به هم مربوط شدند.

$$U = e^{iaH}$$

(الف) اگر $TrH = 0$ نشان دهید که $detU = +1$ (ب) اگر $detU = +1$ نشان دهید که $TrH = 0$.

[راهنمایی: H را می‌توان به کمک یک تبدیل تشابهی قطری کرد در نتیجه با بسط تابع نمایی بصورت سری مکلورن، دیده می‌شود که U نیز قطری می‌شود. ویژه مقدارهای متناظر توسط $u_j = \exp(iah_j)$ داده می‌شوند.]

[یادآوری: این خواص و خواصی در مسئله ۴-۵-۱۲ بدست آمدند در ارائه مفهوم مولدها در نظریهٔ گروهها، بخش ۴-۱۱ اهمیت به سزایی دارند.]

حل

(الف) $$u = e^{iaH} = \sum \frac{(iaH)^n}{n!} = 1 + iaH - \frac{a^2}{2!} H^2 + \dots$$

$$Ur = r + a\lambda r - \frac{a^2}{2!}\lambda^2 r + \dots = (1 + ia\lambda - \frac{a^2}{2!}\lambda^2 + \dots) r = (e^{ia\lambda}) r$$

$$\det(U) = e^{ia\lambda_1} e^{ia\lambda_2} e^{ia\lambda_3} = e^{ia\sum_{k=1} \lambda_k} = e^{iaTrH}$$

$$= e^0 = 1 \quad \Rightarrow \boxed{\det(U) = 1}$$

۴ـ۷ـ۱۸ـ ماتریس P عملگر تصویر است که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$P^2 = P$$

نشان دهید که ویژه مقدارهای متناظر $(\rho^2)_\lambda$ و ρ_λ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$(\rho^2)_\lambda = (\rho_\lambda)^2 = \rho_\lambda$$

این تساوی به آن معناست که ویژه مقدارهای P عبارتند از صفر و یک.

حل

$$P^{۲} = P \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P^{۲}(\rho^{۲})_\lambda = \lambda(\rho^{۲})_\lambda \Rightarrow P(\rho^{۲})_\lambda = \lambda(\rho^{۲})_\lambda \quad (۱) \\ P(\rho)_\lambda = \lambda(\rho)_\lambda \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱)\,,\,(۲) \quad \Rightarrow \quad (\rho^{۲})_\lambda = (\rho)_\lambda$$

$$P\rho_\lambda = \lambda\rho_\lambda \xrightarrow{\text{به توان ۲}} P^{۲}(\rho_\lambda)^{۲} = \lambda^{۲}(\rho_\lambda)^{۲} = \lambda P\rho_\lambda$$

$$P(\rho_\lambda)^{۲} = \lambda\rho_\lambda \quad \Rightarrow \quad (\rho_\lambda)^{۲} = \rho_\lambda$$

$$(\lambda^{۲} - \lambda)\rho_\lambda = ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = ۰ \\ \lambda = ۱ \end{cases}$$