بخش ۵ـ۱ـ مفاهیم بنیادی

مسائل صفحه ۳۸۲

۵ـ۱ـ۱ـ نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$$

[راهنمایی: به کمک استقرای ریاضی نشان دهید: $S_m=\frac{m}{(2m+1)}$]

حل

$$n=1 \Rightarrow S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\times 1-1)(2\times 1+1)}=\frac{1}{3}$$

فرض :

$$n=m \Rightarrow S_m=\frac{m}{2m+1}$$

حکم:

$$n=m+1 \Rightarrow S_{m+1}=\frac{m+1}{2(m+1)+1}$$

$$S_{m+1}=S_m+a_{m+1}=\frac{m}{2m+1}+\frac{1}{\left[2(m+1)-1\right]\left[2(m+1)+1\right]}$$

$$=\frac{m}{2m+1}+\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}=\frac{m+1}{2(m+1)+1}$$

۵ـ۱ـ۲ـ نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

مجموعه‌های جزئی S_m را بیابید و درستی آن را به کمک استقرای ریاضی تحقیق کنید.

[یادآوری: روش بسط برحسب کسرهای جزئی، بخش ۱۵-۸ راه دیگری برای حل مسئله‌های ۵-۱-۱ و ۵-۱-۲ است.]

راه اول

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

راه دوم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \quad (1)$$

$$n+1=n' \rightarrow n=n'-1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n'-1=1}^{\infty}\frac{1}{n'}=\sum_{n'=2}^{\infty}\frac{1}{n'}=\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{n'}-1\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-1 \quad (2)$$

مقدار بدست آمده را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم

$$(2)\,\text{in}\,(1) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+1=1$$

بخش ۵-۲- آزمونهای همگرایی — مسائل صفحه ۳۹۴

۵-۲-۱- (الف) ثابت کنید که هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} n^{p}u_{n} \rightarrow A<\infty \qquad P>1$$

آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگراست. (ب) ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n\to\infty} nu_{n}=A>0$$

آنگاه سری واگراست (این آزمون به ازای $A=0$ جواب نمی‌دهد). این دو آزمون که به آزمونهای حدی معروف‌اند. اغلب برای اثبات همگرایی یا واگرایی سریها بکار می‌آیند. این آزمونها را می‌توان مانند آزمونهای مقایسه‌ای دانست که آنها را با سری $1\leq q<p$ و $\sum n^{-q}$ مقایسه می‌کند.

حل

$$\lim_{n\to\infty} n^{p}u_{n} \rightarrow A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_{n} \rightarrow \frac{A}{n^{p}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}u_{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n^{p}}=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$$

این سری برای $P>1$ همگراست پس هر مضرب A از آن (یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$) نیز یک سری همگراست (A یک عدد حقیقی محدود)

(ب)

$$\lim_{n\to\infty} nu_{n}=A \quad \Rightarrow \quad \lim u_{n}=\frac{A}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} u_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\frac{A}{n}=\frac{A}{n}=A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

این سری یک سری واگراست پس هر مضربی از آن نیز یک سری واگراست یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ واگراست.

۵ـ۲ـ۳ـ اگر $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=K$ مقداری ثابت باشد و $0<K<\infty$ نشان دهید که همگرایی و واگرایی Σb_n با Σa_n شبیه است.

حل از آزمون همگرایی آزمون مقایسهٔ حد اگر به ازای $n>n_0$ ، $b_n>0$ یک سری همگرا مانند Σa_n موجود باشد بطوریکه $a_n>0$ و $\lim \frac{b_n}{a_n}<\infty$ آنگاه Σb_n همگرا می‌شود این نتیجه از این امر ناشی می‌گردد اگر اندیسی مانند $N\geq n_0$ و ثابتی چون M موجوداند بطوریکه وقتی $n>N$ و $b_n<Ma_n$ و ΣMa_n همگراست.

در مورد واگرایی هرگاه به ازای $n>n_0$ و $b_n>0$ و یک سری واگرا مانند Σa_n موجود باشد بطوریکه $a_n>0$ و $\lim \frac{b_n}{a_n}>0$ آنگاه Σb_n واگرا می‌باشد و این نتیجه بصورتی است که اگر اندیسی چون $N'\geq n_0$ و ثابتی مثل $P>0$ موجوداند بطوریکه به ازای $n\geq N'$ ، $b_n>Pa_n$ و ΣPa_n واگراست.

۵ـ۲ـ۴ـ با نشان دادن این نکته که برای هر دو سری زیر $P=1$، ابهام موجود در آزمون را به ازای $P=1$ را نشان دهید.

(الف) $u_n=\frac{1}{n\,Ln\,n}$ و این سری واگراست.

(ب) $u_n=\frac{1}{n(Ln\,n)^2}$ و این سری همگراست.

[یادآوری: با جمع زدن مستقیم می‌رسیم به: $\sum_{2}^{100000}\left[n(Ln\,n)^2\right]^{-1}=2/0288$ با استفاده از آزمون مقایسهٔ انتگرال پی می‌بریم که باقیماندهٔ سری به ازای $n>10^5$ برابر است با $0/0868$ یعنی مجموع از ۲ تا ∞ جمله برابر است با $2/1097$

حل (الف)

$$u_n=\frac{1}{n\,Lnn} \Rightarrow \int_2^\infty \frac{dx}{xLnx}=\int_2^\infty \frac{\frac{dx}{x}}{Lnx}=\int_2^\infty \frac{du}{u}=Lnu\Big|_{u=Lnx}$$

$$=Ln(Lnx)\Big|_2^\infty=Ln(Ln\infty-Ln2)=Ln(Ln\infty)=Ln(\infty)=\infty$$

اگر حد پائین انتگرال را از یک شروع کنیم داریم $Ln1=0$ که باز هم به جواب واگرا بودن می‌رسیم.

(ب)

$$u_n=\frac{1}{n(Lnn)^2} \Rightarrow \int_2^\infty \frac{dx}{x(Lnx)^2}=\int_2^\infty \frac{\frac{dx}{x}}{(Lnx)^2}=\int_2^\infty \frac{du}{u^2}$$

$$=\frac{-1}{u}\Big|_{u=Lnx}=\frac{-1}{Lnx}\Big|_2^\infty=\frac{-1}{\infty}+\frac{1}{Ln2}=\frac{1}{Ln2}$$

سری همگراست.

۵-۲-۵- آزمون گاوس اغلب به صورت آزمون نسبت به زیر است:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^2+a_1n+a_0}{n^2+b_1n+b_0}$$

به ازای چه مقادیری از پارامترهای a_1 و b_1 همگرایی و به ازای چه مقادیری واگرایی داریم؟

حل

$$\begin{array}{l|l} n^2+a_1n+a_0 & n^2+b_1n+b_0 \\ \cline{2-2} \underline{\mp n^2 \mp b_1n \mp b_0} & 1+\dfrac{(a_1-b_1)}{n}+\dfrac{(a_0-b_0)}{n^2} \\ (a_1-b_1)n+a_0-b_0 & \\ \underline{\mp(a_1-b_1)n \mp (a_1-b_1)b_1 \mp (a_1-b_1)\dfrac{b_0}{n}} & \\ (a_0-b_0)-(a_1-b_1)b_1-(a_1-b_1)\dfrac{b_0}{n} & \\ \underline{\mp(a_0-b_0)\mp\dfrac{(a_0-b_0)b_1}{n}\mp\dfrac{(a_0-b_0)}{n^2}b_0} & \end{array}$$

$$-(a_1-b_1)(b_1+\frac{b_0}{n})-\frac{(a_0-b_0)}{n}(b_1+\frac{b_0}{n})=(b_1+\frac{b_0}{n})(\frac{b_0-a_0}{n}+b_1-a_1)$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+(\frac{a_1-b_1}{n})+(\frac{a_0-b_0}{n^2})\equiv 1+\frac{h}{n}+\frac{B(n)}{n^2}$$

IF $h>1$ همگرایی $a_1-b_1>1 \rightarrow a_1>1+b_1$

IF $h \leq 1$ واگرایی $a_1 - b_1 \leq 1 \to a_1 \leq 1 + b_1$

ت ۲ـ۶ـ همگرایی سریهای زیر را بیازمایید.

(الف) $\sum_{n=2}^{\infty} (\mathrm{Ln}\,n)^{-1}$ (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+1)\right]^{-\frac{1}{2}}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ (ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$

حل $\infty \to \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ آزمون نسبت (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

همگرا نیست

$0 \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2 - 2n} = \lim_{n\to\infty} a_n$ آزمون جمله nام (ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$

همگراست

همگراست $\frac{1}{4n^2 - 2n} \Rightarrow$ همگراست $\sum \frac{1}{4n^2}$ (یا)

(ه) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}(2x+1) \Big|_0^{\infty} = \infty$

واگراست.

ت ۲ـ۷ـ همگرایی سریهای زیر را بیازمایید.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ln}(1 + \frac{1}{n})$

(ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \mathrm{Ln}\,n}$ (ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.n^{\frac{1}{n}}}$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

حل $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \lim_{n\to\infty} a_n$ آزمون جمله n ام (الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

همگراست

در مسئله ۵-۲-۴- بطور کامل حل شد ← (ب)

(ج) $\frac{۱}{n.۲^n}$ آزمون نسبت : $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{(n+۱)۲^{n+۱}}}{\frac{۱}{n۲^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n۲^n}{(n+۱)۲^{n+۱}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{۲(n+۱)}=\frac{۱}{۲}$$

همگراست.

بخش ۵-۴- جبر سریها مسائل صفحه ۴۰۷

۵-۴-۱- سری زیر را در نظر بگیرید (این سری در بخش ۵-۶ مطرح می‌شود)

$$\mathrm{Ln}(۱+x)=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\quad\ldots\quad -۱<x\leq۱$$

نشان دهید

(الف) $\mathrm{Ln}(۱-x)=-x-\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}-\ldots\quad -۱\leq x<۱$

(ب) $\mathrm{Ln}(\frac{۱+x}{۱-x})=۲(x+\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}+\ldots)\quad -۱<x<۱$

در بررسی انرژی بستگی در بلورها به سری اصلی $\mathrm{Ln}(۱+x)$ بر می‌خوریم. این سری $\frac{۱}{۲}$ ثابت مادلونگ، $(۲\mathrm{Ln}۲)$، برای زنجیری از اتمهاست. سری دوم (ب) در بهنجارش چند جمله‌ایهای لژاندر (بخش ۱۲-۳) و در روند استخراج جواب دوم معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر (بخش ۱۲-۱۰) مفید واقع می‌شود.

حل

(الف) $\mathrm{Ln}(۱-x)=\mathrm{Ln}(۱+(-x))$

$$(-x)-\frac{(-x)^۲}{۲}+\frac{(-x)^۳}{۳}-\frac{(-x)^۴}{۴}+\ldots=$$

$$-x-\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}-\ldots\quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{Ln}(۱-x)=-x-\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}-\ldots\quad -۱\leq x<۱$$

(ب) $\mathrm{Ln}(\frac{۱+x}{۱-x})=\mathrm{Ln}(۱+x)-\mathrm{Ln}(۱-x)\quad\Rightarrow$

$$\mathrm{Ln}(\frac{۱+x}{۱-x})=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\frac{x^۵}{۵}-\ldots-\left[-x-\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}-\ldots\right]$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \quad -1<x<1$$

بخش ۵ـ٦ـ بسط تایلور   مسائل صفحه ۴۲۲

۵ـ۶ـ۱ـ نشان دهید

(الف)
$$\mathrm{Sin}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(ب)
$$\mathrm{Cos}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e^{ix} در بخش ۶-۱ به کمک یک بسط سری تعریف می‌شود به گونه‌ای که

$$e^{ix} = \mathrm{Cos}x + i\mathrm{Sin}x$$

این اتحاد اساس نمایش قطبی کمیتهای مختلط است. به عنوان یک مثال خاص، بـه ازای $x=\pi$ پیدا می‌کنیم.
$$e^{i\pi} = -1$$

حل

(الف) $f(x)=\mathrm{Sin}x \Rightarrow f'(x)=\mathrm{Cos}x \Rightarrow f''(x)=-\mathrm{Sin}x \Rightarrow f'''(x)=-\mathrm{Cos}x$

$f(0)=0 \quad , \quad f'(0)=1 \quad , \quad f''(0)=0 \quad , \quad f'''(0)=-1$

$$\mathrm{Sin}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Sin}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(ب) $f(x)=\mathrm{Cos}x \Rightarrow f'(x)=-\mathrm{Sin}x \Rightarrow f''(x)=-\mathrm{Cos}x \Rightarrow f'''(x)=\mathrm{Sin}x$

$f(0)=1 \; , \; f'(0)=0 \; , \; f''(0)=-1 \; , \; f'''(0)=0$

$$\mathrm{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Cos}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

۵-۶-۲- بسط $Cotx$ را با تقسیم $Cosx$ بر $Sinx$ به صورت یک سری از توانهای صعودی x بسط دهید:

[یادآوری: سری حاصل که از $\frac{1}{x}$ شروع می‌شود درواقع یک سری لوران است (بخش ۶-۵) با آنکه دو سری مربوط به $Sinx$ و $Cosx$ به ازای همهٔ xها برقرارند ولی همگرایی سری مربوط به $Cotx$ را صفرهای $Sinx$ در مخرج محدود می‌کنند.]

حل

$$Cotx=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\dots-2^{2n}$$

۵-۶-۳- (الف) $(1+x)Ln(1+x)$ را به صورت یک سری مکلورن بسط دهید با بررسی همگرایی، حدود x را بیابید.

(ب) با استفاده از نتایج (الف) نشان دهید

$$Ln2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

حل

(الف)

$$f(x)=(1+x)Ln(1+x)\Rightarrow f'(x)=(1+x)\frac{1}{(1+x)}+Ln(1+x)=1+Ln(1+x)$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x}\Rightarrow f'''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f(0)=0\quad,\quad f'(0)=1\quad,\quad f''(0)=1\quad,\quad f'''(0)=-1$$

$$(1+x)Ln(1+x)=x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}\quad\Rightarrow$$

$$(1+x)Ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$$

(ب) $Ln2\quad\Rightarrow\quad 1+x=2\quad\Rightarrow\quad x=1$

$$2Ln2=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1^n}{n(n-1)}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$$

$$Ln2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$$

۵-۶-۶- نشان دهید که $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ (الف) بسط مکلورن ندارد ولی (ب) حول هر نقطهٔ $x_0\neq 0$

یک بسط تایلور دارد.

حل

(الف) $f(x)=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow \quad f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f(0)=0 \quad , \quad f'(0)=\infty \quad , \quad f''(0)=\infty$$

پس دیده می‌شود بسط مکلورن نداریم.

(ب) $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$

$$f(x)=x_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x_0^{-\frac{1}{2}}(x-x_0)-\frac{\frac{1}{4}x_0^{-\frac{3}{2}}}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

۵ـ۶ـ۹ـ نسبت دو تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ و $g(x)$ در $x=x_0$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید با استفاده از بسط تایلور، قاعدهٔ هوپیتال را به صورت زیر اثبات کنید.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حل فرض می‌کنیم توابع f و g هر دو بسطهایی بصورت سری توانی از $(x-x_0)$ داشته باشند.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

که در بازه‌ای چون $|x-x_0|<\delta$ همگرا باشند.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}{g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)}$$

$$=\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۵ـ۶ـ۱۱ـ عبارت $(1-2tz+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ را برحسب توانهای t بسط دهید. t را کوچک بگیرید ضرایب t^0 و t^1 و t^2 را جمع بزنید.

حل

$$(1-2tz+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\left[1-(2tz-t^2)\right]^{-\frac{1}{2}}=[1-k]^{-\frac{1}{2}}$$

$k=(2tz-t^2)$

$$= 1+\frac{1}{2}k+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}k^2+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2}k+\frac{3}{8}k^2=1+\frac{1}{2}(2tz-t^2)+\frac{3}{8}(2tz-t^2)^2+\dots$$

$$=1+tz-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{8}(4t^2z^2-4t^3z+t^4)+\dots$$

$$= 1+tz-\frac{1}{2}t^2(1-3z^2)-\frac{3}{2}t^3z+\frac{3}{8}t^4+\dots$$

ضریب t^0 = ۱

ضریب t^1 = z

ضریب t^2 $=-\frac{1}{2}(1-3z^2)=\frac{1}{2}(3z^2-1)$

۵-۶-۱۲- با استفاده از نماد فاکتوریل دوگانه در بخش ۱۰-۱ نشان دهید که به ازای $m=1,2,3,\dots$ داریم

$$(1+x)^{-\frac{m}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(m+2n-2)!!}{2^n n!(m-2)!!}x^n$$

حل از بخش ۱۰-۱ داریم

$$\left.\begin{array}{l}1\times3\times5\times\dots\times(2n+1)=(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}\\ 2\times4\times6\times\dots\times(2n)=(2n)!!=2^n n!\end{array}\right\}$$

$$(1+x)^{-\frac{m}{2}}=1-\frac{m}{2}x+\frac{-\frac{m}{2}(-\frac{m}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{-\frac{m}{2}(-\frac{m}{2}-1)(-\frac{m}{2}-2)}{3!}x^2+\dots$$

$$=1-\frac{m}{2}x+\frac{\frac{m}{2}(\frac{m}{2}+1)}{2!}x^2-\frac{\frac{m}{2}(\frac{m}{2}+1)(\frac{m}{2}+2)}{3!}x^3+\dots$$

$$=1-\frac{m}{2}x+\frac{m(m+2)}{2\times4}x^2-\frac{m(m+2)(m+4)}{2\times4\times6}x^3+\dots$$

اگر به صورت کسر دقت شود برای جمله مثلاً چهارم داریم $m(m+2)(m+4)$ یعنی می‌توان در حالت کلی بصورت $m(m+2)(m+4)(m+2n-2)$ نوشت چرا که تعداد پرانتزها یکی از تعداد جملات کمتر است و چون فاصله دو تا دو تا است پس بصورت $2n-2$ ظاهر می‌گردد و در کل طبق تعریف فاکتوریل دوگانه بصورت $(m+2n-2)!!$ ظاهر می‌گردد در مخرج نیز

حاصلضرب اعداد زوج است. که بصورت $(2n)!!$ یا $2^n n!$ ظاهر می‌شود در کل داریم:

$$(1+x)^{-\frac{m}{2}} = 1 - \frac{m}{2}x + \frac{m(m+2)}{2\times 4}x^2 + \frac{m(m+2)(m+4)}{2\times 4\times 6}x^3 + \ldots +$$

$$(-1)^n \frac{m(m+2)(m+4)\ldots(m+2n-2)}{2\times 4\times 6\times \ldots\times 2n}x^n \quad \Rightarrow$$

$$(1+x)^{-\frac{m}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(m+2n-2)!!}{2^n n!(m-2)!!}x^n$$

جمله $(m-2)!!$ که اضافه می‌شود برای از بین بردن فاکتوریلهای اضافی است ضمناً ظاهراً $(-1)^n$ باید صحیح باشد نه $(-1)^m$ چراکه علامت منفی با توجه به مرتبه جمله که چندم است با n مشخص می‌گردد که متغیر است نه m که ثابت می‌باشد.

۶ـ۱۳ـ سه فرمول انتقال دوپلر به صورت زیر را با استفاده از بسط دو جمله‌ای، با یکدیگر مقایسه کنید.

(الف) چشمه متحرک $\quad \nu' = \nu\left(1\mp\frac{V}{C}\right)^{-1}$

(ب) ناظر متحرک $\quad \nu' = \nu\left(1\pm\frac{V}{C}\right)$

(ج) نسبیتی $\quad \nu' = \nu\left(1\pm\frac{V}{C}\right)\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

[یادآوری: اگر بتوان از جمله‌های از مرتبهٔ $\frac{V^2}{C^2}$ چشم پوشید فرمول نسبیتی با فرمولهای کلاسیکی سازگار می‌شود.]

حل

(الف) $\nu'=\nu\left(1\mp\frac{V}{C}\right)^{-1}=\nu\left(1\pm\frac{V}{C}+\frac{1\times 2}{2!}\frac{V^2}{C^2}+\ldots\right)$

(ب) $\nu'=\nu\left(1\pm\frac{V}{C}\right)=\nu\left(1\pm\frac{V}{C}\right)$

(ج) $\nu'=\nu\left(1\pm\frac{V}{C}\right)\left(1-\frac{V^2}{C^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\nu\left(1\pm\frac{V}{C}\right)\left[1+\frac{V^2}{2C^2}+\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2!}\frac{V^2}{C^4}+\ldots\right]$

اگر حالت کلاسیکی در نظر بگیریم از جملات $\frac{V^2}{C^2}$ به بعد صرفنظر شود پس داریم

(الف) $\nu'=\nu\left(1\pm\frac{V}{C}\right)$

(ب) $\nu'=\nu\left(1\pm\frac{V}{C}\right)$

(ج) $\nu'=\nu(1\pm\frac{V}{C})$

۵-۶-۱۴- در نظریهٔ نسبیت عام، روشهای متفاوتی را برای برقراری ارتباط (یا توصیف) سرعت پس‌روی یک کهکشان به انتقال سرخ آن، δ، بکار می‌گیرند. بنابر مدل میلنه (در نسبیت سینماتیکی).

(الف) $V_1=C\delta(1+\frac{1}{2}\delta)$

(ب) $V_2=C\delta(1+\frac{1}{2}\delta)(1+\delta)^{-2}$

(ج) $1+\delta=\left[\frac{1+\frac{V_3}{C}}{1-\frac{V_3}{C}}\right]^{\frac{1}{2}}$

۱- نشان دهید که به ازای $\delta<<1$ ($\frac{V_3}{C}<<1$,) این هر سه فرمول به $V=C\delta$ ساده می‌شوند.

۲- این سه سرعت را تا جمله هایی از مرتبهٔ δ^2 با هم مقایسه کنید.

[یادآوری: نسبت طول موج مشاهده شدهٔ λ به طول موج گسیل شده λ_0 در نظریهٔ نسبیت خاص (با نشاندن Z به جای δ) به قرار زیر است:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=1+Z=\left(\frac{C+V}{C-V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

حل ①

(الف) $V_1=C\delta(1+\frac{1}{2}\delta)=C\delta+\frac{C\delta^2}{2}=C\delta$

می‌توان از $C\frac{\delta^2}{2}$ بدلیل $\delta<<1$ صرفنظر کرد.

(ب) $V_2=C\delta(1+\frac{1}{2}\delta)(1+\delta)^{-2}=C\delta(1+\frac{1}{2}\delta)(1-2\delta)$

$$=C\delta-2C\delta^2+\frac{C\delta^2}{2}-C\delta^3$$

از جملات δ^2 و مرتبه بالای آن می‌توان صرفنظر کرد و داریم.

$V_2=C\delta$

(ج) $1+\delta=\left[\frac{1+\frac{V_3}{C}}{1-\frac{V_3}{C}}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{(1+\frac{V_3}{C})^{\frac{1}{2}}}{(1-\frac{V_3}{C})^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow$

از جملات مرتبهٔ $\frac{V_3^2}{C^2}$ بدلیل $\frac{V_3}{C} << 1$ صفرفنظر شده است.

$$1+\delta = \frac{1+\frac{V_3}{2C}}{1-\frac{V_3}{2C}}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{\frac{V_3}{C}}{1-\frac{V_3}{2C}} \quad \Rightarrow \quad \delta\left(1-\frac{V_3}{2C}\right) = \frac{V_3}{C}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_3}{C}\left(1+\frac{\delta}{2}\right) = \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3}{C} = \frac{\delta}{1+\frac{\delta}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad V_3 = C\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{-1} = C\delta\left(1-\frac{\delta}{2}\right) = C\delta - \frac{C\delta^2}{2}$$

از جملات δ^2 به بالا صرفنظر می‌شود بدلیل $\delta << 1$.

(۲)

$$V_3 = C\delta$$

$$(\text{الف})\ V_1 = C\delta + \frac{C\delta^2}{2}$$

$$(\text{ب})\ V_2 = C\delta\left(1+\frac{1}{2}\delta\right)\left(1-2\delta+\frac{6}{2!}\delta^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$V_2 = \left(C\delta + \frac{C\delta^2}{2}\right)\left(1-2\delta+3\delta^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$V_2 = C\delta - 2C\delta^2 + 3C\delta^3 + \frac{C\delta^2}{2} - C\delta^3 + \frac{3}{2}C\delta^4$$

$$V_2 = C\delta - \frac{3}{2}C\delta^2 + 2C\delta^3 + \ldots$$

$$(\text{ج})\ (1+\delta)^2 = \left(\frac{1+\frac{V_3}{C}}{1-\frac{V_3}{C}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$(1+\delta)^2\left(1-\frac{V_3}{C}\right) = 1+\frac{V_3}{C} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_3}{C}\left[2+\delta^2+2\delta\right] = \delta(\delta+2) \quad \Rightarrow$$

$$V_3 = \frac{C\delta(\delta+2)}{\delta^2+2\delta+2}$$

۵ـ۶ـ۱۵ـ مجموع نسبیتی دو سرعت u و v از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\frac{W}{c}=\frac{\frac{u}{c}+\frac{v}{c}}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

اگر

$$\frac{v}{c}=\frac{u}{c}=1-\alpha$$

که در آن $0\leq\alpha\leq 1$ ؛ $\frac{W}{c}$ را برحسب توانهای α تا جمله‌هایی از مرتبهٔ α^3 بدست آورید.

حل

$$\frac{W}{c}=\frac{\frac{u}{c}+\frac{v}{c}}{1+\frac{uv}{c^2}}=\frac{1-\alpha+1-\alpha}{1+(1-\alpha)^2}=\frac{2-2\alpha}{1+\alpha^2-2\alpha+1}$$

$$\frac{W}{c}=\frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2-2\alpha+2}=2(1-\alpha)\left(\alpha^2-2\alpha+2\right)^{-1}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{W}{c}=2(1-\alpha)\left[\alpha^2-(2\alpha-2)+\frac{1\times 2}{2!}(2\alpha-2)^2-\frac{6}{3!}(2\alpha-2)^3+\ldots\right]$$

$$\frac{W}{c}=2(1-\alpha)\left[\alpha^2-(2\alpha-2)+(2\alpha-2)^2-(2\alpha-2)^3\right]$$

$$\frac{W}{c}=2(1-\alpha)\left[-8\alpha^3+17\alpha^2-18\alpha+14\right]$$

$$\frac{W}{c}=28-64\alpha+70\alpha^2-50\alpha^3+16\alpha^4+\ldots$$

۵ـ۶ـ۱۶ـ x جابه‌جایی ذره‌ای با جرم سکون m_0 در اثر نیروی ثابت m_0g در امتداد محور x با در نظر گرفتن آثار نسبیتی، عبارت است از:

$$x=\frac{c^2}{g}\left\{\left[1+(g\frac{t}{c})^2\right]^{\frac{1}{2}}-1\right\}$$

جابه‌جایی x را به صورت یک سری توانی برحسب زمان t به دست آورید. نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید، با نتیجهٔ کلاسیکی زیر مقایسه کنید.

$$x=\frac{1}{2}gt^2$$

حل

$$x=\frac{c^2}{g}\left\{\left[1+(g\frac{t}{c})^2\right]^{\frac{1}{2}}-1\right\}$$

$$=\frac{c^2}{g}\left\{\left[1+\frac{1}{2}(g\frac{t}{c})^2+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}g^4(\frac{t}{c})^4+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}(g\frac{t}{c})^6+\ldots\right]-1\right\}$$

$$x=\frac{c^2}{g}\left[\frac{1}{2}(g\frac{t}{c})^2-\frac{1}{8}(g\frac{t}{c})^4+\frac{1}{16}(g\frac{t}{c})^6-\ldots\right]$$

$$x = \frac{gt^۲}{۲} - \frac{g^۳t^۴}{۸c^۲} + \frac{g^۵t^۶}{۱۶c^۴} - ...$$

دیده می‌شود نتیجه فوق در صورتیکه از جملات $t^۴$ به بالا صرفنظر شود به حالت کلاسیکی می‌انجامد.

$$\boxed{x = \frac{۱}{۲} gt^۲}$$

بخش ۵ـ۷ـ سری توانی   مسائل صفحه ۴۳۳

۵ـ۷ـ۲ـ ضریب و اقطبیدگی L برای یک بیضیوار پخت در میدان الکتریکی یکنواخت موازی با محور چرخش، عبارت است از:

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_۰}(۱+\xi_۰^۲)(۱-\xi_۰ \, Cot^{-۱}\xi_۰)$$

که $\xi_۰$ در مختصات کره‌وار پخت (ξ, ζ, ϕ) معرف یک بیضیوار پخت است.

$$\lim_{\xi_۰ \to \infty} L = \frac{۱}{۳\varepsilon_۰} \qquad (\text{کره})$$

$$\lim_{\xi \to ۰} L = \frac{۱}{\varepsilon_۰} \qquad (\text{ورقه نازک})$$

حل

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_۰}(۱+\xi_۰^۲)(۱-\xi_۰ \, Cotg^{-۱}\xi_۰)$$

$$Cot^{-۱}x = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{۳x^۳} + \frac{۱}{۵x^۵} - ... \qquad x > ۱$$

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_۰}(۱+\xi_۰^۲)\left[۱-\xi_۰\left(\frac{۱}{\xi_۰} - \frac{۱}{۳\xi_۰^۳} + \frac{۱}{۵\xi_۰^۵} - ...\right)\right]$$

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_۰}(۱+\xi_۰^۲)\left(\frac{۱}{۳\xi_۰^۲} - \frac{۱}{۵\xi_۰^۴} + ...\right)$$

$$L = \frac{۱}{\varepsilon_۰}\left[\frac{۱}{۳\xi_۰^۲} - \frac{۱}{۵\xi_۰^۴} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵\xi_۰^۲} + ...\right)$$

$$\lim_{\xi_۰ \to \infty} L = \frac{۱}{۳\varepsilon_۰}$$

برای حالت $\xi_۰ \to ۰$ باید $Cot^{-۱}$ را مجدداً بنویسیم.

$$Cot^{-۱}x = \frac{\pi}{۲} - \left(x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - ...\right) \qquad |x| < ۱$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(1+\zeta_\circ^2)\left[1-\zeta_\circ\left(\frac{\pi}{2}-\zeta_\circ+\frac{\zeta_\circ^3}{3}-\ldots\right)\right]$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(1+\zeta_\circ^2)\left(1-\zeta_\circ\frac{\pi}{2}+\zeta_\circ^2-\frac{\zeta_\circ^4}{3}+\ldots\right)$$

$$\lim_{\zeta_\circ\to 0} L=\frac{1}{\varepsilon_\circ}$$

۵-۷-۳- ضریب و اقطبیدگی متناظر (مسئله ۵-۷-۲) برای بیضیوار کشیده به قرار زیر است:

$$L=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(\eta_\circ^2-1)\left(\frac{1}{2}\eta_\circ \operatorname{Ln}\frac{\eta_\circ+1}{\eta_\circ-1}-1\right)$$

نشان دهید که

$$\lim_{\eta_\circ\to\infty} L=\frac{1}{3\varepsilon_\circ} \qquad \text{(کره)}$$

$$\lim_{\eta_\circ\to 1} L=0 \qquad \text{(سوزن دراز)}$$

حل از نتیجه مسئله ۵-۶-۵ داریم:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{\eta_\circ+1}{\eta_\circ-1}=\operatorname{Coth}^{-1}\eta_\circ\ ;\ |\eta_\circ|>1$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(\eta_\circ^2-1)(\eta_\circ\operatorname{Coth}^{-1}\eta_\circ-1)$$

$$\operatorname{Coth}^{-1}\eta_\circ=\frac{1}{\eta_\circ}+\frac{1}{3\eta_\circ^3}+\frac{1}{5\eta_\circ^5}+\ldots$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(\eta_\circ^2-1)\left[\eta_\circ\left(\frac{1}{\eta_\circ}+\frac{1}{3\eta_\circ^3}+\frac{1}{5\eta_\circ^5}+\ldots\right)-1\right]$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_\circ}(\eta_\circ^2-1)\left(\frac{1}{3\eta_\circ^2}+\frac{1}{5\eta_\circ^4}+\ldots\right)$$

$$L=\frac{1}{\varepsilon_\circ}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{5\eta_\circ^2}-\frac{1}{3\eta_\circ^2}-\frac{1}{5\eta_\circ^4}+\ldots\right]$$

$$\lim_{\eta_\circ\to\infty} L=\frac{1}{3\varepsilon_\circ}$$

و برای حالت $\eta_\circ\to 1$ چون $\operatorname{Coth}^{-1}\eta_\circ=0$ پس داریم

$$\lim_{\eta_\circ\to 1} L=0$$

۵-۷-۴- در بررسی نقشه پراش حاصل از یک گشودگی دایره‌ای به انتگرال زیر بر می‌خوریم.

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{Cos}(c \operatorname{Cos}\phi)\, d\phi$$

انتگرالده را به صورت یک سری بسط دهید و با استفاده از انتگرالهای زیر انتگرال بگیرید.

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{Cos}^{2n}\phi\, d\phi = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times 2\pi$$

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{Cos}^{2n+1}\phi\, d\phi = 0$$

حاصل برابر است با 2π ضربدر تابع بسل $J_0(c)$.

حل

$$\operatorname{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{Cos}(c \operatorname{Cos}\phi) d\phi = \int_{0}^{2\pi} \left[1 - \frac{(c \operatorname{Cos}\phi)^2}{2!} + \frac{(c \operatorname{Cos}\phi)^4}{4!} - \frac{(c \operatorname{Cos}\phi)^6}{6!} + \dots \right] d\phi$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\phi - \int_{0}^{2\pi} \frac{c^2 \operatorname{Cos}^2\phi}{2!} d\phi + \int_{0}^{2\pi} \frac{c^4 \operatorname{Cos}^4\phi}{4!} d\phi - \dots$$

با استفاده از انتگرال اول هر کدام را بسط می‌دهیم.

$$= 2\pi - \left(\frac{c^2}{2!} \frac{2!}{2^2(1!)^2} \times 2\pi\right) + \left(\frac{c^4}{4!} \frac{4!}{2^4(2!)^2} \times 2\pi\right) - \dots$$

$$= 2\pi \left[1 - \frac{c^2}{2^2} + \frac{c^4}{2^4(2!)^2} - \frac{c^6}{2^6(3!)^2} + \dots \right]$$

$$= 2\pi \left[1 - \frac{c^2}{2^2} + \frac{c^4}{2^2.4^2} - \frac{c^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots \right]$$

که داخل کروشه تعریف $J_0(c)$ می‌باشد پس داریم

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{Cos}(c \operatorname{Cos}\phi)\, d\phi = 2\pi\, J_0(c)$$

۵ـ۷ـ۶ـ می‌دانیم که

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x \Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{4}$$

انتگرالده را به صورت یک سری بسط دهید و از جمله به جملهٔ آن انتگرال بگیرید تا برسید به

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

این فرمول لایب نیتس برای π است. همگرا بودن (یا نبودن) آنرا برای سری انتگرالده و سری

انتگرالگیری شده در $x=1$ مقایسه کنید.

آهنگ همگرایی فرمول لایب نیتس چندان کند است که برای محاسبات عددی عملاً بی‌فایده است؛ π را با استفاده از عباراتی نظیر

$$\pi = 24\tan^{-1}\frac{1}{8} + 8\tan^{-1}\frac{1}{57} + 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{18} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

تا ۱۰۰۰۰۰ رقم اعشار محاسبه کرده‌اند درستی عبارتهای بالا را می‌توان با استفاده از مسئله ۵-۶-۲ تحقیق کرد.

حل در حالت کلی داریم:

$$\tan^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

از سری

$$\frac{1}{1+t^2} = 1-t^2+t^4-t^6+\dots$$

انتگرال می‌گیریم داریم:

$$(1) \quad \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x| \le 1$$

اگر در رابطه بالا قرار دهیم $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$ و $x=1$ فرمول لایب نیتس بدست می‌آید.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$$

چون این سری خیلی کند همگراست. در تقریب π با ارقام اعشاری زیاد به کار نمی‌رود. سری $\tan^{-1}x$ به ازای xهای نزدیک صفر سریعتر همگراست. به این دلیل، افرادی که در محاسبهٔ π از سری $\tan^{-1}x$ استفاده می‌کنند اتحادهای مثلثاتی مختلف را بکار می‌گیرند.

مثلاً هرگاه

$$\beta = \tan^{-1}\frac{1}{3} \quad , \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$

آنگاه

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

و

$$\frac{\pi}{4} = \alpha+\beta = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$$

حال از معادلهٔ (۱) به ازای $x=\frac{1}{2}$ می‌توان در محاسبهٔ $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ و به ازای $x=\frac{1}{3}$ در محاسبهٔ $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ استفاده کرد. مجموع این نتایج ضربدر ۴ مقدار π را به ما خواهد داد.

۵ـ۷ـ۷ـ تابع فاکتوریل ناکامل

$$\int_0^x e^{-t} t^n \, dt$$

را به ازای مقادیر کوچک x به صورت یک سری از توانهای x بسط دهید.

حل

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$\int_0^x e^{-t} t^n \, dt = \int_0^x \left[1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right] t^n dt$$

$$= \int_0^x t^n dt - \int_0^x t^{n+1} dt + \frac{1}{2!}\int_0^x t^{n+2} dt - \frac{1}{3!}\int_0^x t^{n+3} dt + \dots$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+3}}{2!(n+3)} - \frac{x^{n+4}}{3!(n+4)} + \dots + \frac{(-1)^m x^{n+1+m}}{m!(n+1+m)} + \dots$$

$$= x^{n+1} \left[\frac{1}{(n+1)} - \frac{x}{(n+2)} + \frac{x^2}{2!(n+3)} - \frac{x^3}{3!(n+4)} + \dots + \frac{(-1)^m x^m}{m!(n+1+m)} + \dots \right]$$

۵ـ۷ـ۱۲ـ تابع $f(z)$ به صورت یک سری از توانهای نزولی نمایش داده شده است.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \qquad R \le z < \infty$$

نشان دهید که این بسط سری یکتاست؛ یعنی اگر در $R \le z < \infty$، $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ آنگاه به ازای همهٔ n ها، $a_n = b_n$

حل چون این دو بسط تابع $f(z)$ را نمایش می‌دهند پس باید فاصله‌ای در اطراف نقطه مثلاً $z=a$ وجود داشته باشد که این دو بسط حول آن نقطه صدق کنند پس در این فاصله

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z-a)^{-n} = 0$$

می‌دانیم اگر سری توان‌دار $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ برای جمیع مقادیر z در ناحیه‌ای در اطراف $z=0$ مساوی

صفر گردد در این صورت ضرایب هر یک از توانهای z نیز صفر می‌گردند.

یعنی $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0$

و در مورد این مسئله $(n=0,1,2,\ldots)$ $\quad (a_n-b_n)=0$

یا $a_n=b_n$

۵-۷-۱۳- سری توانی زیر

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

به ازای همهٔ مقادیر $-R<x<R$ همگراست نشان دهید که سریهای حاصل از مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری دارای همین بازه همگرایی‌اند. (زحمت بررسی نقاط انتهایی $x=\pm R$ را به خود ندهید.)

حل (الف) مشتق‌گیری

چون f' همان شعاع همگرایی f را دارد قضیه در مورد f' نیز به کار رفته می‌گوید که دارای مشتق f'' بر $(-R,R)$ است این به نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که f'' بر $(-R,R)$ مشتق‌پذیر باشد و همین طور تا آخر. لذا اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بر $-R<x<R$ همگرا باشد در هر نقطه $(-R,R)$ از هر مرتبه مشتق خواهد داشت.

همگرایی یک سری توانی ممکن است ضمن مشتق‌گیری در یکی یا هر دو نقطه انتهایی بازهٔ همگرایی از دست برود به این دلیل قضیه در رابطه با بازه باز $(-R,R)$ ذکر می‌شود.

(ب) انتگرال‌گیری

همانند مشتق‌گیری بدین نحو که وقتی از جملات یک سری انتگرال می‌گیریم در هر نقطه $(-R,R)$ مراتب انتگرال همگراست و البته مجدداً در نقاط ابتدا و انتها مورد بررسی قرار نمی‌گیرند.

۵-۷-۱۴- فرض کنید $f(x)$ را بشود به صورت یک سری توانی حول مبدأ بسط داد $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، و گسترهٔ همگرایی غیرصفر باشد. با استفاده از روشهایی که در اثبات یکتایی سریها بکار بردیم، نشان دهید که سری مفروض یک سری مکلورن است با ضرایب

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{n}(0)$$

حل در ابتدا این موضوع را بیان می‌کنیم که هر تابع تعریف شده با یک سری توانی به

شعاع همگرایی $R>0$ سری مکلورنی دارد که در هر نقطه $(-R,R)$ به تابع همگرا می‌باشد زیرا سری مکلورن تابع $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ خود سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ می‌باشد برای مشاهده این امر از

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$$

جمله به جمله مشتق گرفته و در هر مشتق $f^n(x)$ قرار می‌دهیم $x=0$

از این کار به ازای هر n داریم

$$a_n=\frac{f^n(0)}{n!} \quad \text{یا} \quad f^n(0)=n!a_n$$

لذا

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n \qquad -R<x<R$$

۵ـ۷ـ۱۸ـ π را (با دقت مضاعف) توسط هر یک از عبارتهای arctan زیر محاسبه کنید.

(الف) $\pi=16\tan^{-1}(\frac{1}{5})-4\tan^{-1}(\frac{1}{239})$

(ب) $\pi=24\tan^{-1}(\frac{1}{8})+8\tan^{-1}(\frac{1}{57})+4\tan^{-1}(\frac{1}{239})$

(ج) $\pi=48\tan^{-1}(\frac{1}{18})+32\tan^{-1}(\frac{1}{57})-20\tan^{-1}(\frac{1}{239})$

باید ۱۶ رقم با معنا به دست آورید.

[یادآوری: از این فرمولها در برخی محاسبه‌ها دقیقتر π استفاده شده است.]

حل از نتیجه مسئله ۵-۷-۶ استفاده می‌شود.

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

(الف) $$\tan^{-1}(\frac{1}{5})=\frac{1}{5}-\frac{(\frac{1}{5})^3}{3}+\frac{(\frac{1}{5})^5}{5}-\frac{(\frac{1}{5})^7}{7}+\dots$$

$$\tan^{-1}(\frac{1}{5})=0/197395559$$

$$\tan^{-1}(\frac{1}{239})=\frac{1}{239}-\frac{(\frac{1}{239})^3}{3}+\frac{(\frac{1}{239})^5}{5}-\frac{(\frac{1}{239})^7}{7}+\dots$$

$$\tan^{-1}(\frac{1}{239})=0/004184076$$

$$\pi = ۱۶\tan^{-۱}(\frac{۱}{۵}) - ۴\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹}) = ۳/۱۴\ ۱۵۹۲۶۴$$

(ب) $\tan^{-۱}(\frac{۱}{۸}) = ۰/۱۲۴۳۵۴۹۹۴$

$$\tan^{-۱}(\frac{۱}{۵۷}) = ۰/۰۱۷۵۴۲۰۶$$

$$\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹}) = ۰/۰۰۴۱۸۴۰۷۶$$

$$\pi = ۲۴\tan^{-۱}(\frac{۱}{۸}) + ۸\tan^{-۱}(\frac{۱}{۵۷}) + ۴\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹})$$

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۴$$

(ج) $\tan^{-۱}\frac{۱}{۱۸} = ۰/۰۵۵۴۹۸۵۰۵$

$$\tan^{-۱}\frac{۱}{۵۷} = ۰/۰۱۷۵۴۲۰۶$$

$$\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹}) = ۰/۰۰۴۱۸۴۰۷۶$$

$$\pi = ۲۴\tan^{-۱}(\frac{۱}{۱۸}) + ۳۲\tan^{-۱}(\frac{۱}{۵۷}) - ۲۰\tan^{-۱}(\frac{۱}{۲۳۹})$$

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۴$$

۵-۷-۱۹- بررسی پدیدهٔ گیبس در بخش ۱۴-۵ به عبارت زیر می‌انجامد.

$$\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$$

انتگرالده را به صورت یک سری بسط دهید و از جمله به جملهٔ آن انتگرال بگیرید. مقدار عددی این عبارت را تا چهار رقم با معنا حساب کنید.

حل

$$\sin\xi = \xi - \frac{\xi^۳}{۳!} + \frac{\xi^۵}{۵!} - \frac{\xi^۷}{۷!} + \dots$$

$$\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}\frac{\xi - \frac{\xi^۳}{۳!} + \frac{\xi^۵}{۵!} - \dots}{\xi}\,d\xi$$

$$= \frac{۲}{\pi}\left[\int_۰^{\pi}d\xi - \frac{۱}{۳!}\int_۰^{\pi}\xi^۲ d\xi + \frac{۱}{۵!}\int_۰^{\pi}\xi^۴ d\xi - \frac{۱}{۷!}\int_۰^{\pi}\xi^۶ d\xi + \dots\right]$$

$$= \frac{۲}{\pi}\left[\pi - \frac{\pi^۳}{۳\times۳!} + \frac{\pi^۵}{۵\times۵!} - \frac{\pi^۷}{۷\times۷!} + \dots\right]$$

$$= \frac{۲}{\pi}[\ ۱/۸۵۱۹۰\ ] = ۱/۱۷۸۹۵۷۸۱$$