بخش ۷ـ۱ـ تکنیکها   مسائل صفحه ۵۴۴

۷ـ۱ـ۱ـ بسط سری لوران تابع $f(z)$ نشان می‌دهد که این تابع یک قطب مرتبهٔ mام در $Z=Z_\circ$ دارد نشان دهید که a_{-1} ضریب $(z-z_\circ)^{-1}$ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_\circ)^m f(z)\right]_{z=z_\circ}$$

که اگر این قطب یک قطب ساده $(m=1)$ باشد خواهیم داشت

$$a_{-1}=\left[(z-z_\circ)f(z)\right]_{z=z_\circ}$$

این معادله برای a_{-1} در تعیین مانده‌ای که در بخش بعد در قضیه مانده‌ها بکار می‌رود بسیار سودمند است.

حل

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_\circ)^n \quad f(z)=\frac{a_m}{(z-z_\circ)^m}+\frac{a_{m-1}}{(z-z_\circ)^{m-1}}+\dots+\frac{a_{-1}}{(z-z_\circ)^1}$$

طرفین را در $(z-z_\circ)^m$ ضرب می‌کنیم.

$$(z-z_\circ)^m f(z)=a_m+a_{m-1}(z-z_\circ)+\dots+a_{-1}(z-z_\circ)^{m-1}+\dots$$

حال مشتق‌گیری می‌کنیم

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_\circ)^m f(z)\right]=(m-1)!a_{-1} \Rightarrow$$

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_\circ)^m f(z)\right]$$

۷ـ۱ـ۲ـ تابع $f(z)$ را می‌توان به کمک رابطهٔ زیر نشان داد.

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

که در آن $f_1(z)$ و $f_2(z)$ تحلیلی‌اند. $f_2(z)$ در مخرج در $z=z_\circ$ صفر می‌شود از اینجا پی می‌بریم که $f(z)$ در $z=z_\circ$ یک قطب دارد. ولی $f_1(z)\neq 0$ و $f_2'(z_\circ)\neq 0$. نشان دهید که a_{-1} ضریب $(z-z_\circ)^{-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ به ازای $z=z_\circ$ از رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$a_{-1}=\frac{f_1(z_\circ)}{f_2'(z_\circ)}$$

این نتیجه به قضیه بسط هویساید در بخش ۱۵-۱۲ می‌انجامد.

حل

$$g(z)=(z-z_\circ)f(z)\ ,\ f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

$$\Rightarrow\quad g(Z)=(Z-Z_\circ)\frac{f_1(Z)}{f_2(Z)}$$

$$a_{-1}\Big|_{Z_\circ}=\lim_{Z\to Z_\circ}\frac{Z-Z_\circ}{f_2(Z)}f_1(Z)=f_1(Z_\circ)\lim_{Z\to Z_\circ}\left(\frac{Z-Z_\circ}{f_2(Z)}\right)\ \Rightarrow$$

$$a_{-1}\Big|_{Z_\circ}=\frac{f_1(Z_\circ)}{f_2'(Z_\circ)}$$

۷ـ۱ـ۴ـ تابع نوع دوم لژاندر $Q_v(z)$ در $Z=\pm 1$ نقطه‌های شاخه دارد این نقطه‌های شاخه از طریق خط برشی در راستای محور حقیقی x به یکدیگر متصل می‌شوند (الف) نشان دهید که $Q_\circ(Z)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{(Z+1)}{(Z-1)}\right)$ تک مقدار است (با در نظر گرفتن محور حقیقی به ازای $-1\leq x\leq +1$ به عنوان خط برش) (ب) بهتر است به ازای شناسه‌های حقیقی x و $|x|<1$ تابع را بصورت زیر بنویسیم.

$$Q_\circ(x)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left[\frac{(1+x)}{(1-x)}\right]$$

نشان دهید که

$$Q_\circ(x)=\frac{1}{2}\left[Q_\circ(x+i\circ)+Q_\circ(x-i\circ)\right]$$

که در آن $x+i\circ$ نشان می‌دهد که Z از بالا به محور حقیقی نزدیک می‌شود و $x-i\circ$ نشانگر نزدیک شدن از پائین است.

حل

$$Q_\circ(Z)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{Z+1}{Z-1}\qquad\qquad \begin{array}{l}Z+1=\circ\ \Rightarrow\ Z=-1\\ Z-1=\circ\ \Rightarrow\ Z=1\end{array}$$

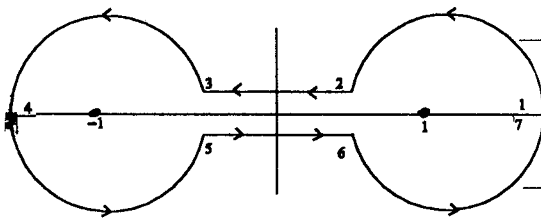
$$\arg Q_\circ=\arg\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{Z+1}{Z-1}\right]$$

$$\arg Q_\circ=\tan^{-1}\frac{\frac{Q}{2}}{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}R}=\tan^{-1}\frac{Q}{\mathrm{Ln}R}$$

$$\arg Q_\circ=\arg\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}R+i\frac{\phi}{2}\right]$$

وقتی از صفر شروع و یکدور می‌زنیم به مضرب $2k\pi$ می‌رسیم.

$$\arg Q_0 = \arg\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\rho + \frac{1}{2}\mathrm{Ln}e^{i\phi}\right] = \arg\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\rho + i\frac{\phi}{2}\right]$$



نقطه	$(z-1)^{\frac{1}{2}}$	$(z+1)^{\frac{1}{2}}$	$(\text{کل})^{\frac{1}{2}}$
۱	0	0	0
۲	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$
۳	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$
۴	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0
۵	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
۶	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
۷	π	π	0

$$Q(x) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\left[Q_0(x+i0) + Q_0(x-i0)\right]$$

می‌خواهد نشان دهد که $Q_0(x)$ میانگین حد بالا و پائین $Q_0(x)$ است.

۷ـ۱ـ۵ـ بعنوان نمونه‌ای از یک تکینگی اساسی، رفتار $e^{\frac{1}{z}}$ را با نزدیک شدن z به صفر در نظر بگیرید. به ازای هر عدد مختلط z_0، $z_0 \neq 0$ نشان دهید.

$$e^{\frac{1}{z}} = z_0$$

بی نهایت جواب دارد.

حل

$$z_0 = r_0 e^{i\theta_0} = r_0 e^{i(\theta + 2\pi N)}\ ,\ N = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$z_0 = r_0 e^{i(\theta_0 + 2\pi N)} = e^{\frac{1}{z}}$$

از طرفین Ln می‌گیریم:

$$\frac{1}{z} = \mathrm{Ln}r_0 + i(\theta_0 + 2\pi N) \Rightarrow$$

$$z = \frac{1}{\mathrm{Ln}r_0 + i(\theta_0 + 2\pi N)} = \frac{\mathrm{Ln}r_0 - i(\theta_0 + 2\pi N)}{(\mathrm{Ln}r_0)^2 + (\theta_0 + 2\pi N)^2}$$

که تعداد بی نهایت جواب دارد.

بخش ۷ـ۲ـ حساب مانده‌ها　　　　مسائل صفحه ۵۶۴

۷ـ۲ـ۱ـ ماهیت تکینگی هر یک از تابعهای زیر را تعیین و مانده‌ها را حساب کنید. $(a>0)$

(الف) $\dfrac{1}{z^2+a^2}$　(ب) $\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$　(ج) $\dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$　(د) $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+a^2}$

(هـ) $\dfrac{ze^{+iz}}{z^2+a^2}$　(و) $\dfrac{ze^{+iz}}{z^2-a^2}$　(ز) $\dfrac{e^{+iz}}{z^2-a^2}$　(ح) $\dfrac{z^{-k}}{z+1}\,,\ 0<k<1$

حل

(الف) $\dfrac{1}{z^2+a^2}$　$z^2+a^2=0 \Rightarrow z_1=ia\,,\ z_2=-ia$

$$a_{-1}\Big|_{ia}=\lim_{z\to ia}\frac{z-ia}{z^2+a^2}=\frac{1}{z+ia}=\frac{1}{2ia}$$

$$a_{-1}\Big|_{-ia}=\lim_{z\to -ia}\frac{z+ia}{z^2+a^2}=\frac{-1}{2ia}$$

(ب) $\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2}$　$z^2+a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=-ia \\ z_2=ia \end{cases}$

$$a_{-1}\Big|_{-ia}=\lim_{z\to -ia}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ia)^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}\right]=\lim_{z\to -ia}\frac{1}{2(z-ia)}=\frac{-1}{4ia}$$

$$a_{-1}\Big|_{ia}=\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ia)^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}\right]=\lim_{z\to ia}\frac{1}{2(z+ia)}=\frac{1}{4ia}$$

(ج) $\dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$　$z^2+a^2=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=-ia \\ z_2=ia \end{cases}$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=-ia}=\lim_{z\to -ia}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+ia)^2z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}\right]=-\frac{1}{4ia}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=ia}=\lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ia)^2z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}\right]=\frac{1}{4ia}$$

$$(د)\ \frac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+a^2} \qquad z^2+a^2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1=+ia \\ z_2=-ia \end{cases}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=ia} = \frac{\sin\frac{1}{z}(z-ia)}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\sin\frac{1}{z}}{2ia} = \frac{-i(\sin(-i\frac{1}{a})}{2a} = \frac{-\sinh\frac{1}{a}}{2a}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=-ia} = \frac{\sin\frac{-1}{ia}}{-2ia} = \frac{i\sin\frac{i}{a}}{2a} = \frac{-\sinh\frac{1}{a}}{2a}$$

$$(ه)\ \frac{ze^{+iz}}{z^2+a^2} \quad , \quad z^2+a^2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1=+ia \\ z_2=-ia \end{cases}$$

$$a_{-1}\Big|_{ia=z_1} = \frac{ze^{iz}}{z+ia} = \frac{e^{+a}}{ia}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=-ia} = \frac{-iae^{-i(ia)}}{z-ia} = \frac{-e^{a}}{ia}$$

$$(و)\ \frac{ze^{+iz}}{z^2-a^2} \quad , \quad z^2-a^2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1=+a \\ z_2=-a \end{cases}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=a} = \frac{ae^{ia}}{a+a} = \frac{e^{ia}}{2}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=a} = \frac{-1}{2e^{ia}}$$

$$(ز)\ \frac{e^{+iz}}{z^2-a^2} \quad , \quad z^2-a^2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1=+a \\ z_2=-a \end{cases}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=a} = \frac{e^{ia}}{2a} \quad , \quad a_{-1}\Big|_{z_2=-a} = \frac{-1}{2ae^{ia}}$$

$$(ح)\ \frac{z^{-k}}{z+1} = \frac{1}{(z+1)z^k} \qquad , \qquad z_1=0 \quad , \quad z_2=1$$

$$a_{-1}\Big|_{z_2=-1} = \frac{1}{-1^k} = e^{-i\pi k} = \cos k\pi - i\sin k\pi$$

۷-۲-۲- محل تکینگیهای هر یک از توابع زیر را مشخص و مانده‌ها را حساب کنید.

(الف) $z^{-n}(e^{z}-1)^{-1}$, $z\neq 0$ (ب) $\frac{z^{2}e^{z}}{1+e^{2z}}$

حل

(الف) $z^{-n}\left(e^{z}-1\right)=\frac{z^{-n}}{\left(e^{z}-1\right)}$

$$e^{z}-1=0 \quad\Rightarrow\quad e^{z}=1=e^{i(0+2k\pi)}\Rightarrow z=i(0+2n\pi)$$

$$a_{-1}\Bigg|_{z=i2\pi}=\mathrm{Lim}\frac{z^{-n}}{e^{z}}=\frac{i(2\pi)^{n}}{e^{i2\pi}}=(i2\pi)^{n}$$

(ب) $\frac{z^{2}e^{z}}{1+e^{2z}}$ $\quad 1+e^{2z}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{2z}=-1=e^{i(\pi+2n\pi)}$ بی نهایت قطب

$$2z=i(2n\pi+\pi)\ \overset{n=0}{\Rightarrow}\ z=i\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{z\to i\frac{\pi}{2}}\frac{z^{2}e^{z}}{2e^{2z}}=\frac{\pi^{2}i}{8}$$

۷-۲-۳- این گزاره که انتگرال روی نیمی از پربند حول یک نقطهٔ تکین برابر است با نصف انتگرال روی همهٔ پربند به قطبهای ساده اختصاص دارد. با ذکر یک مثال خاص نشان دهید که اگر پربند انتگرال‌گیری یک قطب از مرتبهٔ بالاتر را دور بزند رابطهٔ

$$\int_{\text{نیم دایره}} f(z)\,dz=\frac{1}{2}\oint_{\text{دایره}} f(z)\,dz$$

لزوماً برقرار نیست.

[راهنمایی: تابع $f(z)=z^{-2}$ را در نظر بگیرید.]

حل

$f(z)=z^{-2}\Rightarrow g(z)=z^{2}\Rightarrow g'(z)=2z\Rightarrow g''(z)=2=$ ثابت

$$z=0\quad\Rightarrow\quad g'(z)=0$$

۷-۲-۷- برای تعمیم مثال ۷-۲-۱- نشان دهید

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{a\pm b\cos\theta}=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{a\pm b\sin\theta}=\frac{2\pi}{(a^{2}-b^{2})^{\frac{1}{2}}}$$ به ازای $a>|b|$

در حالت $|b|>|a|$ چه پیش می‌آید؟

حل
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a-b\mathrm{Sin}\theta}=\oint\frac{i\frac{dz}{z}}{a-b\frac{(z-z^{-1})}{2i}}=\oint\frac{2dz}{2zai-bz(z+\frac{1}{z})}=\oint\frac{2dz}{2zai-bz^2+b}$$

$$=2\oint\frac{dz}{bz^2-2zai+b}\qquad bz^2-2zai+b=0\quad\Rightarrow$$

$$z=\frac{ai\pm\sqrt{-a^2+b^2}}{b}\quad\Rightarrow$$

درون دایره
$$z_1=i\left(\frac{-a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\qquad |z_1|<1$$

بیرون دایره
$$z_2=i\left(\frac{+a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\qquad |z_2|>1$$

$$a_{-1}=\frac{\text{صورت}}{\text{مشتق مخرج}}=\frac{1}{2ia+2bz}\Bigg|_{z_1}=\frac{1}{2bi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a-b\mathrm{Sin}\theta}=2\pi i\times a_{-1}=2\pi i\frac{1}{2bi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

بقیه حالات نیز بطور مشابه بدست می‌آیند.

۷ـ۲ـ۹ـ نشان دهید.

به ازای
$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2t\mathrm{Cos}\theta+t^2}=\frac{2\pi}{1-t^2}\qquad |t|<1$$

اگر $1<|t|$ چه پیش می‌آید؟ به ازای $1>|t|$ چه خواهد شد؟

حل
$$\int_0^{\infty}\frac{dz}{z^2}=\oint\frac{-i\frac{dz}{z}}{1-2t(\frac{z+z^{-1}}{2})+t^2z}=-i\oint\frac{dz}{z-z^2t-t+t^2z}+i\oint\frac{dz}{z+z^2t+t-t^2z}$$

$$=i\oint\frac{dz}{z^2t-(t^2+1)z+t}\quad,\quad z=\frac{t^2+1\pm\sqrt{(t^2+1)^2-4t^2}}{2t}$$

$$\Rightarrow\quad z=\frac{(t^2+1)\pm\sqrt{t^4+2t^2+1-4t^2}}{2t}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}z_1=t\\ z_2=\frac{1}{t}\end{cases}$$

$$a_{-1}\Big|_{z_1}=\left[2Z_1t-(t^2+1)=\left[2t^2-t^2+1\right]^{-1}=(t^2+1)^{-1}\right.$$

$$I = i\times 2\pi i\times(t^2+1)^{-1} = \frac{2\pi}{1-t^2}$$

۷-۲-۱۰- به کمک حساب مانده‌ها نشان دهید:

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad n=0, 1, 2$$

(تعریف نماد فاکتوریل دوگانه در بخش ۱۰-۱ آمده است.)

[راهنمایی: $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z+z^{-1}) \qquad |z| = 1$]

حل

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^{2n}\frac{dz}{iz} = \oint\left\{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}^{2n}\frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}i}\oint\frac{1}{z}\left\{z^{2n}+\begin{pmatrix}2n\\1\end{pmatrix}z^{2n-1}\left(\frac{1}{z}\right)+\begin{pmatrix}2n\\2\end{pmatrix}z^{2n-2}\left(\frac{1}{z}\right)^2+\dots+\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}2n\\k\end{pmatrix}z^{2n-k}\left(\frac{1}{z}\right)^k+\dots+\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}\right\}dz$$

$$\frac{1}{2^{2n}i}\oint\left[(z^{2n-1})+\begin{pmatrix}2n\\1\end{pmatrix}z^{2n-2}+\dots+\begin{pmatrix}2n\\k\end{pmatrix}z^{2n-k-1}\right]dz=$$

$$\frac{1}{2^{2n}i}\left[\oint z^{2n-1}dz+\dots+\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}\oint\frac{dz}{z}+\begin{pmatrix}2n\\n+1\end{pmatrix}\oint\frac{dz}{z}+\oint\frac{dz}{z^{2n+1}}\right]$$

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)\,dz}{z^n}$$

$f(z)$ متناوب است.

$$\oint\frac{dz}{z^n} = \frac{f^n(z)\,2\pi i}{n!} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{2^{2n}i}\left[\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}\oint\frac{dz}{z}\right] = \frac{1}{2^{2n}i}\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}2\pi i f(z_0)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(2n-n)!\times n!}\times 2\pi = \frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

۷-۲-۱۲- ثابت کنید.

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

[راهنمایی: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

حل

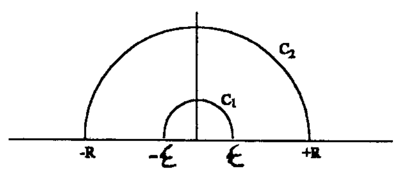
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{e^{-2xi}}{2}}{x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}}{x^2}\,dx+\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{-2xi}}{2}}{x^2}\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}}{x^2}\,dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}}{x^2}\,dx\right]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{e^{2xi}}{2}}{x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\oint\frac{1-e^{2iz}}{z^2}\,dz\quad,\quad z=0$$

$$a_{-1}\Big|_{z=0}=\frac{-2ie^{2iz}}{1}=-2i$$



$$\int_{-R}^{R}\frac{1-e^{2\pi i}}{x^2}\,dx=\pi i\times -2i=2\pi$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx=\frac{1}{4}\times 2\pi=\frac{\pi}{2}$$

۷ـ۲ـ۱۳ـ در محاسبهٔ احتمال گذار در مکانیک کوانتومی به تابع $f(t,\omega)=2(1-\cos\omega t)/\omega^2$ برمی‌خوریم. نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t,\omega)\,d\omega=2\pi t$$

حل

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1-\cos\omega t)}{\omega^2}\,d\omega=2\oint\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}\,d\omega=\int\frac{2-(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})d\omega}{\omega^2}$$

$$=\oint\frac{2-(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})}{\omega^2}\,d\omega$$

$$I_1=\oint\frac{1-e^{i\omega t}}{\omega^2}\,d\omega\quad,\quad I_2=\oint\frac{1-e^{-i\omega t}}{\omega^2}\,d\omega$$

$$I_1\quad,\quad \omega=0\quad a_{-1}\Big|_{\omega=0}=\lim_{\omega\to 0}\frac{1-e^{i\omega t}}{\omega}=\frac{0}{0}$$

$$a_{-1}\Big|_{Z=0} = \frac{-ite^{i\omega t}}{1} = -it$$

$$\oint \frac{1-e^{+i\omega t}}{\omega^2} d\omega = \pi i \times (-it) = \pi t$$

$$I_2 \quad , \quad \omega = 0 \qquad a_{-1}\Big|_{\omega=0} = it$$

$$I_2 = \oint \frac{1-e^{-i\omega t}}{\omega^2} d\omega = -2\pi i\,(it) = \pi t$$

$$I_{کل} = I_1 + I_2 = \pi t + \pi t = 2\pi t$$

۷-۲-۱۴- نشان دهید ($a>0$)

(الف)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cosx}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}$$

اگر به جای Cosx کمیت Coskx قرار داده شود در جواب چه تغییری پیش خواهد آمد؟

(ب)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xSinx}{x^2+a^2}\, dx = \pi e^{-a}$$

اگر به جای Sinx کمیت Sinkx نشانده شود. جواب چه تغییری خواهد کرد؟ این انتگرالها را می‌توان به صورت تبدیلهای کسینوس و سینوس فوریه نیز تعبیر کرد (فصل ۱۵).

حل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sinkx}{x^2+a^2} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Coskx}{x^2+a^2}$$

$$I'' = I + iI' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2} dx \quad , \quad k>0$$

$$z_1 = ia \quad , \quad z_2 = -ia$$

$$a_{-1}\Big|_{z_1=ia} = \frac{e^{ik(ia)}}{2ia} = \frac{-i}{2a} e^{-ka}$$

$$\oint \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i\,(a_{-1}) = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$$

$$\int_{-a}^{+a} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2} dx + \lim_{z\to\infty} \int \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2} dz = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Cos}kx}{x^{۲}+a^{۲}} dx = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin}kx}{x^{۲}+a^{۲}} dx = \frac{\pi}{a}(-a) e^{-ka} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\text{Sin}kx}{x^{۲}+a^{۲}} dx = \pi e^{-ka}$$

و اگر $k=۱$ شود فرمولهای (الف) و (ب) بدست خواهد آمد فرمولهای اخیر حالت کلی اند.

۷ـ۲ـ۱۵ـ با استفاده از پربند نموده شده (شکل ۷-۱۲ ثابت کنید با $R \to \infty$ داریم

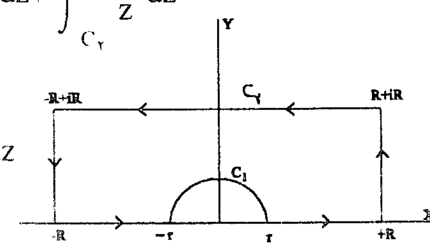
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin}x}{x} dx = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz =$$

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_۱} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_۲} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر حدود}} \int \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{C_۱} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_۲} \frac{e^{iz}}{z} dz = ۰$$

$$a_{-۱} = \frac{\text{Sin}x}{۱} = ۰$$



$$۲i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\text{Sin}x}{x} dx = -\int_{C_۱} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_۲} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

$$\lim_{\varepsilon \to ۰} \int_{\pi}^{۰} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} = -\lim_{\varepsilon \to ۰} \int_{\pi}^{۰} ie^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = \pi i$$

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to ۰}} ۲i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\text{Sin}x}{x} dx = \pi i \qquad \text{یا} \qquad \int_{۰}^{\infty} \frac{\text{Sin}x}{x} dx = \frac{\pi}{۲}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Sin}x}{x} dx = \pi$$

۷ـ۲ـ۱۶ـ در نظریه کوانتومی برخوردهای اتمی به انتگرال زیر برمی‌خوریم.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Sin}t}{t} e^{iPt} dt$$

که در آن P حقیقی است نشان دهید

$$I = 0 \qquad |P| > 1$$

$$I = \pi \qquad |P| < 1$$

اگر $P = \pm 1$ چه پیش می‌آید؟

حل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Cos}t}{t} e^{iPt} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\mathrm{Sin}t}{t} e^{iPt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2t} + \frac{e^{it}-e^{-it}}{it}\right) e^{iPt} dt = \oint \frac{e^{iz(P+1)}}{z} dz$$

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = 1$$

$$= \oint \frac{e^{iz(P+1)}}{z} dz = 0$$

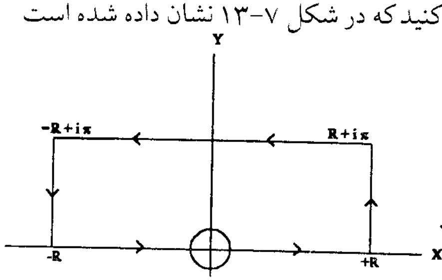
$$= \pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Sin}t}{t} e^{iPt} dt = \pi$$

۷ـ۲ـ۱۷ـ (الف) با بسط مناسب انتگرالده نشان دهید.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}x)^2}{1+x^2} dx = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-3}$$

(ب) انتگرال بند (الف) را با روش انتگرال پربندی محاسبه کنید و نشان دهید مقدارش عبارت است از $\frac{\pi^3}{8}$

[راهنمایی: قرار دهید $x \to z = e^t$: پربندی را اختیار کنید که در شکل ۷-۱۳ نشان داده شده است و قرار دهید $R \to \infty$.]



حل

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}x)^2}{1+x^2} dx \Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{1+z^2} dz$$

$$1+z^2=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z=\pm i$$

$$a_{-1}=-\frac{\pi^2}{8i}, \quad \oint \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz = 2\pi i\, a_{-1} = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\oint \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{1+z^2}dz + \int_{C_1} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz + \int_{C_2} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz$$

در انتگرال اول $z=-u \Rightarrow \mathrm{Ln}(-u)=\mathrm{Ln}u+\mathrm{Ln}(-1)=\mathrm{Ln}u+\pi i$

$dz=-du$

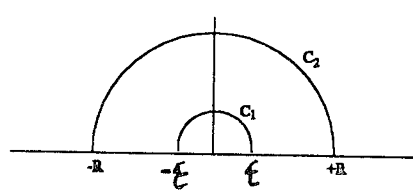
در انتگرال سوم $z=u \Rightarrow dz=du$

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{(\mathrm{Ln}u+\pi i)^2}{u^2+1}du + \int_{C_1} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1}du + \int_{C_2} \frac{(\mathrm{Ln}z)^2}{z^2+1}dz = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{(\mathrm{Ln}u+\pi i)^2}{u^2+1}du + \int_0^\infty \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1}du = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$2\int_0^\infty \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1}du + 2\pi i\int_0^\infty \frac{\mathrm{Ln}u}{u^2+1}du - \pi^2\int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}u \Big|_0^\infty$$



$$2\int_0^\infty \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1}du + 2\pi i\int_0^\infty \frac{\mathrm{Ln}u}{u^2+1}du = \frac{\pi^3}{4}$$

$$2\int_0^\infty \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1} = \frac{\pi^3}{4} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{(\mathrm{Ln}u)^2}{u^2+1} = \frac{\pi^3}{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Ln}u}{1+u^2}du = 0$$

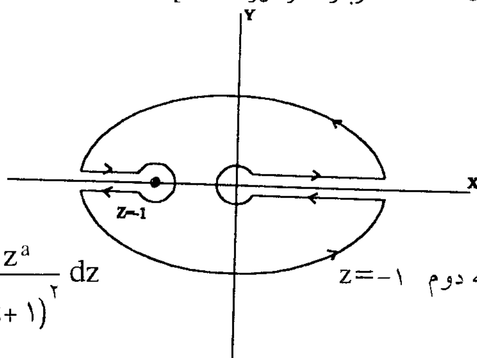
۷-۲-۱۸- نشان دهید

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}dx = \frac{\pi a}{\mathrm{Sin}\pi a}$$

که $-1<a<1$. این هم راه دیگری برای استخراج معادلهٔ ۷-۵۹ است.

[راهنمایی: از پربندی که در شکل ۷-۱۴ نشان داده شده است بهره گیرید توجه کنید که نقطهٔ $z=0$ یک نقطه شاخه و محور حقیقی مثبت یک خط برش است.
همچنین به نکاتی توجه کنید که در مثال ۷-۱-۱ درباره فاز آورده شد.]

حل



شاخه‌ای $z=0$ و قطب مرتبه دوم $z=-1$

$$\oint \frac{z^a}{(z+1)^2}\,dz$$

$$\oint \frac{z^a}{(z+1)^2}\,dz =$$

$$\int_{FA} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz + \int_{ABC} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz + \int_{CD} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz + \int_{DEF} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz = 2\pi i a$$

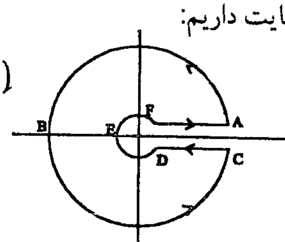
$$a_{-1} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{z^a}{(z+1)^2}\right] = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^a}{1}\right)$$

$$= \lim_{z\to -1} a z^{a-1} = a(-1)^{a-1} = a\left(e^{i\pi}\right)^{a-1} = -ae^{i\pi a}$$

$$\lim \int_{ABC} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz = \lim_{z\to\infty}\left|z\frac{z^a}{(z+1)^2}\right| = \lim_{z\to\infty}\left|\frac{z^{a+1}}{(z+1)^2}\right| = 0$$

$$\lim_{z\to 0} \int_{DEF} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz = \lim_{z\to 0}\left|z\frac{z^a}{(z+1)^2}\right| = \lim_{z\to 0}\left|\frac{z^{a+1}}{z+1}\right| = 0$$

پس در نهایت داریم:



$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}dx + \int_\infty^0 \frac{\left(xe^{2\pi i}\right)^a}{\left[xe^{2\pi i}+1\right]^2}\,d\left(xe^{2\pi i}\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}dx - e^{2\pi i a}\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a}}{(x+1)^{2}}dx=\frac{-2\pi i a e^{i\pi a}}{(1-e^{2\pi i a})}=\frac{\pi a}{\sin\pi a}$$

۷-۴-۱۹ـ نشان دهید

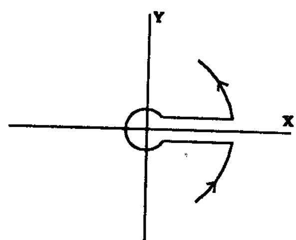
$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{-a}}{x+1}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

که در آن $0<a<1$ این مسئله راه دیگری برای استخراج رابطهٔ تابع فاکتوریل در معادل ۷-۵۹ ارائه می‌کند.

[**راهنمایی**: یک نقطه شاخه دارید و باید یک خط برش داشته باشید. به یاد بیاورید که صورت قطبی $z^{-a}=w$ عبارت است از

$$\left[re^{i(\theta+2\pi n)}\right]^{-a}=\rho e^{i\phi}$$

که به رابطهٔ $-a\theta-2an\pi=\phi$ می‌انجامد باید n را به صفر (یا یک عدد صحیح دیگر) محدود کنید تا ϕ بطور یکتا مشخص شود. از پربند بهره گیرید که در شکل ۷-۱۵ نشان داده شده است.]



شکل ۷-۱۵

حل قطب ساده $z+1=0 \Rightarrow z=-1$ $\quad\oint\frac{z^{-a}}{z+1}$

نقطه شاخه‌ای $z=0$

$$\oint\frac{z^{-a}}{z+1}dz=$$

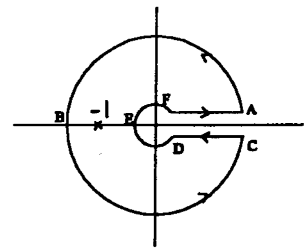
$$\int_{FA}\frac{z^{-a}}{z+1}dz+\int_{AC}\frac{z^{-a}}{z+1}dz+\int_{CD}\frac{z^{-a}}{z+1}dz+\int_{DF}\frac{z^{-a}}{z+1}dz=2\pi i a_{-1}$$

$$a_{-1}=\lim_{z\to-1}\frac{z^{-a}}{1}=(-1)^{-a}=(e^{i\pi})^{-a}=e^{-i\pi a}$$

انتگرالهای دوم و چهارم بنا به لِم جردن در حد مربوطه صفر می‌شوند پس باقی می‌ماند:

$$-\int_{0}^{\infty}\frac{x^{-a}}{x+1}dx+\int_{\infty}^{0}\frac{(xe^{2\pi i})^{-a}}{(xe^{2\pi i})+1}d(xe^{i2\pi})=$$

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{x^{-a}}{(x+۱)}dx - \int_{\cdot}^{\infty} \frac{x^{-a}e^{-۲\pi a i}}{x+۱}dx$$



$$= (۱-e^{-۲\pi ia}) \int_{\cdot}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+۱}dx = e^{-i\pi a} \times ۲\pi i$$

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+۱}dx = \frac{e^{i\pi a}}{(۱-e^{-۲\pi ia})} \times ۲\pi i = \frac{۲\pi i}{e^{+ia\pi} - e^{-i\pi a}}$$

$$= \frac{\pi}{\frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{۲i}} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}$$