نام آزمون: ترکیب توابع و صعودی نزولی

مهندس احمدی ناو

۱- تابع $f(x)=|x(x^{۲}+۳x+۳)+۲|$ در بازهٔ $[a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

① -۱ ② -۲ ③ $-\sqrt[۳]{۲}$ ④ $-۱-\sqrt[۳]{۲}$

۲- اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g(x)=۲^{-x}$ باشد، کدام‌یک از توابع زیر نزولی است؟

① $f+g$ ② fg ③ $g-f$ ④ $\frac{f}{g}$

۳- اگر تابع f نزولی و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(۲)-f(|x-۱|)}$ کدام است؟

① $(-\infty,-۳]\cup[۱,+\infty)$ ② $[-۱,۳]$ ③ $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$ ④ $\mathbb{R}$

۴- به ازای چه مقداری از a، تابع $f(x)=\begin{cases}|x+۱| & ;x\leq -۱\\ -\frac{x}{۲}+a & ;-۱<x<۱\\ -\sqrt{x-۱}-۱ & ;x\geq ۱\end{cases}$ اکیداً نزولی خواهد بود؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ -۱ ④ $-\frac{۳}{۲}$

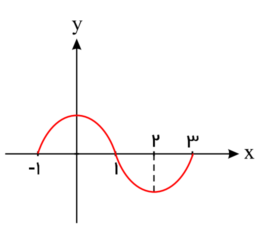
۵- اگر $(fog)(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x-۱}{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع $f+g$ کدام است؟ ($x\neq ۰,۱$)

① $\frac{۴}{x}$ ② $\frac{۲}{x}$ ③ $-\frac{۴}{x}$ ④ $-\frac{۲}{x}$

۶- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x-۴}{f(۳-x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

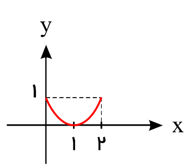
① صفر ② ۲ ③ ۳ ④ بی‌شمار

۷- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار تابع $y=f(۱-x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



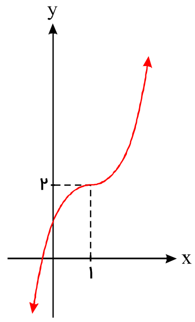
① $[-۴,-۳]$
② $(-۳,-۱)$
③ $(-۱,۱)$
④ $[۱,۲]$

۸- نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. تابع $y=f(f(x))$ با ورودی $۱\leq x\leq ۲$ چگونه است؟



① صعودی ② نزولی
③ ابتدا نزولی سپس صعودی ④ ابتدا صعودی سپس نزولی

۹- نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x-a)^{۳}+b$ به‌صورت زیر است. حاصل $a\cdot b$ کدام است؟

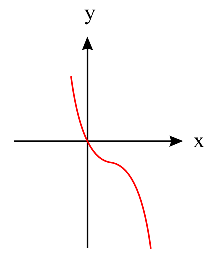


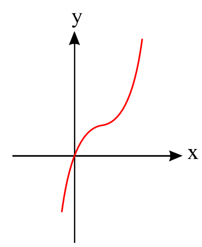
① ۲ ② -۲ ③ ۳ ④ -۳

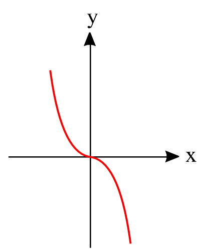
۱۰- بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x-|x|$ در آن بازه صعودی است، کدام است؟

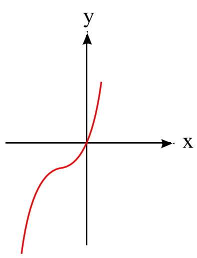
① $(-\infty,۰]$ ② $\mathbb{R}$ ③ $[۰,+\infty)$ ④ $\varnothing$

۱۱- نمودار تابع $f(x)=۶x^{۲}-x^{۳}-۱۲x$ شبیه کدام گزینه است؟

①


②


③


④


۱۲- اگر f تابعی نزولی غیرثابت باشد که نمودار آن بالای محور xها قرار دارد، توابع $g(x)=x-f(x)$ و $h(x)=\dfrac{۱}{f(-x)}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

① نزولی - نزولی ② صعودی - نزولی ③ نزولی - صعودی ④ صعودی - صعودی

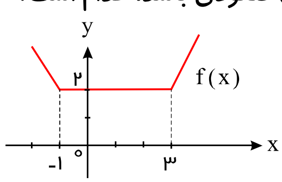
۱۳- تابع چندجمله‌ای $y=f(x)$ اکیداً صعودی است و نمودار آن از نقاط $A(-۴,-۲)$ و $B(۳,۲)$ می‌گذرد. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۴-(f(x))^{۲}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

① ۱۰ ② ۷ ③ ۱۱ ④ ۸

۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases} a-\log^{x}_{\frac{۱}{۳}} & , x\geq ۳ \\ ۲x+۱ & , x<۳ \end{cases}$ به‌ازای چه حدودی از a، همواره در شرط $x_{۲}>x_{۱}\Rightarrow f(x_{۲})\geq f(x_{۱})$ صدق می کند؟

① $a\leq ۶$ ② $a\geq ۶$ ③ هیچ‌مقدار a ④ فقط $a=۶$

۱۵- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y=f(۲+|x|)$ در آن صعودی باشد، کدام است؟

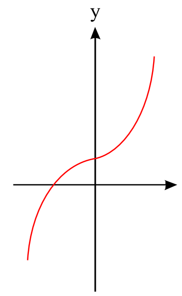


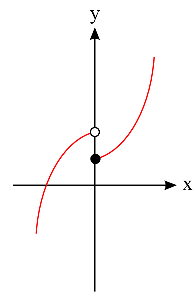
① $[-۲,+\infty)$ ② $[۱,+\infty)$ ③ $[-۱,+\infty)$ ④ $[-۳,+\infty)$

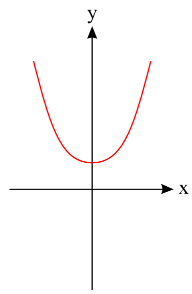
۱۶- تابع $y=۲x+\dfrac{|x|}{x}$ در دامنهٔ خود چگونه است؟

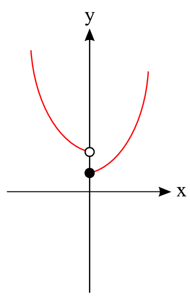
① اکیداً صعودی ② اکیداً نزولی ③ هم صعودی و هم نزولی ④ غیر یکنوا

۱۷- نمودار تابع $y=x^2|x|+1$ به کدام صورت است؟

① 

② 

③ 

④ 

۱۸- تابع $f(x)=3x^2+kx+3k^2$ در بازهٔ $[-2,+\infty)$ صعودی است. حدود k کدام است؟

① $k\geq -12$ ② $k\leq -12$ ③ $k\geq 12$ ④ $k\leq 12$

۱۹- کدام گزینه در مورد ریشه‌های معادلهٔ $x^3=-|x|+2$ درست است؟

① فاقد ریشه ② فقط یک ریشهٔ مثبت ③ فقط یک ریشهٔ منفی ④ دو ریشهٔ مختلف‌العلامه

۲۰- به‌ازای $x\in[a,b]$، تابع $f=\{(1,2x+7),(-2,10-x),(0,x^2+4)\}$ یک تابع صعودی است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۱ ④ ۲

۲۱- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=-x^3+2$ بازهٔ $[-1,3]$ باشد، برد آن به صورت $[a,b]$ می‌باشد. حاصل $b-a$ کدام است؟

① ۲۸ ② ۳۲ ③ ۱۸ ④ ۲۲

۲۲- به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=(\frac{3m+1}{4})^x$ نزولی است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ هیچ مقدار m

۲۳- اگر ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}-x^2+6x-5 & , x>3\\ \frac{4}{5}x+\frac{8}{5} & , -2\leq x\leq 3\\ x^2+6x+8 & , x<-2\end{cases}$ باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن $f(x)$ اکیداً صعودی است، کدام است؟

① ۲ ② ۵ ③ ۶ ④ ۳

۲۴- اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(1)=0$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ $g(x)=\sqrt{(x^3-x)f(x)}$ برابر $\mathbb{R}-(a,b)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

① ۱ ② صفر ③ -1 ④ ۲

۲۵- مساحت محصور بین محورهای مختصات و خط واصل بین نقاط تلاقی منحنی به معادلهٔ $y=(x+1)^3$ با آن‌ها کدام است؟

① ۱ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{2}{3}$

۲۶- تابع $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$ در سه نقطه محور طول‌ها را قطع می‌کند. اگر حاصل‌ضرب طول این نقاط ۳ و $f(2)=15$ باشد، a کدام است؟

① ۱ ② -3 ③ ۳ ④ -1

۲۷- در کدام بازه‌ها، تابع $f(x)=\begin{cases} ۲(x+۳)^۳ & ; x<-۳ \\ -x^۲-۳x & ; -۳\le x<۰ \\ \sqrt{x} & ; x\ge ۰ \end{cases}$، به ترتیب از راست به چپ صعودی و نزولی است؟

① $(-۲,-۱)\ ,\ (-۱,+\infty)$ ② $[-۱,۱]\ ,\ (-۳,-۲)$ ③ $[-۱,۰]\ ,\ [-۴,-۲]$ ④ $\left[-\frac{۳}{۲},-۱\right]\ ,\ [-۲,-۱]$

۲۸- کدام‌یک از توابع زیر در طول دامنهٔ تعریف خود نزولی است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $y=x+|x|$ ② $y=x-[x]$ ③ $y=|x|+|x-۱|$ ④ $y=x\left(\frac{۱}{[x]+[-x]}\right)$

۲۹- کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=x^۲+۴x-۵$ با دامنهٔ $\left|x+\frac{۷}{۲}\right|<\frac{۳}{۲}$ درست است؟

① مثبت است. ② نزولی است. ③ صعودی است. ④ غیر یکنوا است.

۳۰- اگر f در مجموعهٔ اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{f(|x|)-f(۲)}$ کدام است؟

① $[۲,+\infty)$ ② $[-۲,۲]$ ③ $(-\infty,۰]$ ④ $[-۳,۲]$

۳۱- تابع $f(x)=\begin{cases} ۲ & ; x<-۱ \\ k & ; -۱\le x<۱ \\ -x & ; x\ge ۱ \end{cases}$ بر روی دامنه‌اش نزولی است. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۲- اگر تابع $f=\left\{(-۱,a-۱),(۰,a^۳-۱),(-۲,a)\right\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a کدام است؟

① $(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$ ② $(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$ ③ $(-\infty,۰)\cup(۰,۱)$ ④ $(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$

۳۳- تابع $f=\left\{(-۶,۲),(۰,۴),(۶,۷),(۷,۹),(۲,m^۲-۳)\right\}$ غیریکنوا است. m چند عدد صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

① صفر ② ۲ ③ ۴ ④ ۶

۳۴- کدام‌یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} |x+۱| & ; x\le -۱ \\ -x^۲ & ; x\ge ۰ \end{cases}$ درست است؟

① صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست. ② اکیداً صعودی است.

③ نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست. ④ اکیداً نزولی است.

۳۵- اگر $y=f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، تابع $fof(x)$ کدام‌یک از ضابطه‌های زیر را نمی‌تواند داشته باشد؟

① $y=۳+x$ ② $y=x^۹$ ③ $y=۴-x$ ④ $y=۲x-۱$

۳۶- بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y=\left(\frac{۵-k}{۱-۳k}\right)^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

① $(-۱,\frac{۱}{۳})$ ② $(-۲,\frac{۱}{۳})$ ③ $(-۳,\frac{۱}{۳})$ ④ $(-۴,\frac{۱}{۳})$

۳۷- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x-x|x|$ در بازهٔ $(-۱,۱)$ چگونه است؟

① ابتدا نزولی، سپس صعودی ② صعودی ③ ابتدا صعودی، سپس نزولی ④ نزولی

۳۸- وضعیت نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$ چگونه است؟

① همواره صعودی ② همواره نزولی

③ برای $x>۱$ صعودی و برای $x<۱$ نزولی ④ برای $x>۱$ نزولی و برای $x<۱$ صعودی

۳۹-حدود m کدام باشد تا تابع $f=\{(۵,۶),(۳,m^۲-m),(-۴,۲),(۴,m^۲-m)\}$ یک تابع صعودی باشد؟

① $(-۲,۱)\cup(۲,۳)$ ② $[-۲,۱]\cup[۲,۳]$ ③ $[-۲,۳]-[-۱,۲]$ ④ $[-۲,۳]-(-۱,۲)$

۴۰-اگر $f=\{(۵,۲),(۳,۴),(۱,۸),(۶,۹)\}$ و $g(x)=۲f(x+۲)-۳$ باشد و داشته باشیم: $(gof)(a)=۱۵$، در این صورت a کدام است؟

① ۵ ② ۴ ③ ۶ ④ ۳

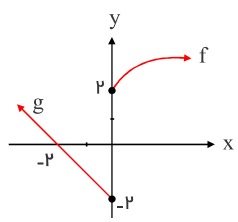
۴۱-اگر $f(x)=x^۲-۲x$ و $g(x)=\sqrt{۴-x}+۱$ باشند، برد تابع $fog(x)$ کدام است؟

① $[-۱,۱]$ ② $[-۱,+\infty)$ ③ $(-\infty,۱]$ ④ $\mathbb{R}$

۴۲-اگر $f(x)=۳x-۲$ و $(gof)(x)=۹x^۲-۹x+۲$ باشد، ضابطهٔ تابع $(g-f)(x)$ کدام است؟

① $-x^۲-۲x+۲$ ② $x^۲+۲x-۱$ ③ $-x^۲+۲x-۱$ ④ $x^۲-۲x+۲$

۴۳-اگر نمودار توابع f و g به‌صورت مقابل باشند، دامنهٔ تابع fog چند عدد صحیح منفی را شامل نمی‌شود؟

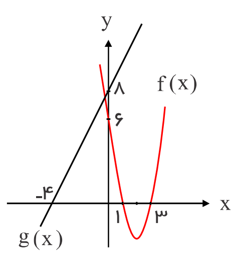


① ۲ ② صفر
③ ۳ ④ ۱

۴۴-اگر $f(x)=\frac{۳x-۱}{۲}$ و $g=\{(-۱,۰),(۲,-۱),(۳,۴)\}$ باشد، آنگاه مجموع عضوهای برد تابع $fo(\frac{۱}{g+۱})$ کدام است؟

① $-\frac{۱}{۵}$ ② $-\frac{۶}{۵}$ ③ $\frac{۴}{۵}$ ④ $\frac{۴}{۳}$

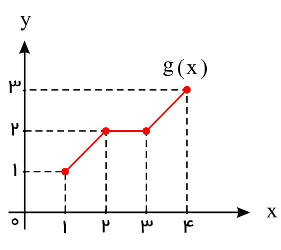
۴۵-نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ به‌صورت زیر می باشد. اگر f یک سهمی باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x)=۰$ کدام است؟

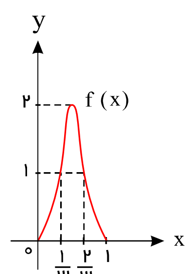


① -۴
② -۶
③ -۸
④ -۱۰

۴۶-اگر توابع f و g به‌شکل زیر باشند، دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ کدام است؟

① $[۰,۱]$
② $[۰,\frac{۱}{۳}]$
③ $[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}]$
④ $[\frac{۲}{۳},۱]$





۴۷-اگر $f=\{(۲,۳),(a,۴),(۱۲,۱)\}$ ، $g(x)=x+\sqrt{x}$ باشد و $fog=\{(۱,۳),(۴,۴),(b,۱)\}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

① ۶ ② ۹ ③ ۳ ④ ۱۵

۴۸-برای دو تابع $f=\{(-۱,a),(۲,۱),(b,۲)\}$ و $g=\{(-۲,-۱),(c,۳),(-۳,\frac{۱}{۳})\}$ اگر داشته باشیم: $(fog)(-۲)+(fog)(۱)=۵$، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

① ۹ ② ۸ ③ ۷ ④ ۶

۴۹-اگر $g(x)=\sqrt{-x^۲-x}$ و $f(x)=-\frac{x^۲+۲x+۲}{x^۲+۲x}$ باشند، آنگاه دامنهٔ تابع $(gof)(x)$ کدام است؟

① $[-۱,۰)$ ② $(-۲,۰)$ ③ $\varnothing$ ④ $(-۱,۱)-\{۰\}$

۵۰-اگر $f(x)=\sqrt{۲+x}$ و $g(x)=x^۲$ باشد، آنگاه معادلهٔ $g(f(x))=۵$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

① فقط یک ریشهٔ مثبت ② فقط یک ریشهٔ منفی ③ یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی ④ ریشهٔ حقیقی ندارد.

۵۱-اگر $g(x)=x^۳-x$ و $(fog)(x)=x^۶-۲x^۴+x^۲+۱$ باشند، حاصل $f(۳)$ کدام است؟

① ۳ ② ۵ ③ ۱۷ ④ ۱۰

۵۲-اگر $f(x)=۸x^۳-۱$ و $(fog)(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$ باشد، مقدار $(f+g)(-۱)$ کدام است؟

① -۶ ② -۷ ③ -۸ ④ -۹

۵۳-اگر $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=x+[x]$ آن گاه برد تابع gof کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $[۰,+\infty)$ ② $\mathbb{R}$ ③ $[۰,۱)$ ④ $(۰,۱)$

۵۴-اگر $f(x)=x^۲-۴x+۳$، $(fog)(x)=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴}$ و $g(x)$ یک تابع خطی با شیب مثبت باشد، ضابطهٔ تابع $g\left(f(x)\right)$ کدام است؟

① $-x^۲+۴x+\frac{۱}{۲}$ ② $-x^۲+۴x-\frac{۱۳}{۲}$ ③ $x^۲-۴x-\frac{۱}{۲}$ ④ $x^۲-۴x+\frac{۱۳}{۲}$

۵۵-اگر $f(x)=\sqrt{x}-x$، دامنهٔ تابع fof کدام است؟

① $\{۰,۱\}$ ② $[۰,+\infty)$ ③ $[۰,۱]$ ④ $[۱,+\infty)$

۵۶-توابع $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^۲+ax+b$ مفروضند. اگر برد تابع gof برابر $\{۲\}$ باشد، a کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ -۱ ④ -۲

۵۷-اگر $f(g(x))=۳x^۲-۶x-۵$ و $f(x)=۳x+۴$ باشد، $g(۲)$ کدام است؟

① صفر ② ۲ ③ -۵ ④ -۳

۵۸-اگر $f(x)=x^۲-۳x+۸$ و $g(x)=۱-۲x$ باشند و α و β را ریشه‌های معادلهٔ $(fog)(x)=۱۲$ بنامیم، آن گاه حاصل $|\alpha-\beta|$ کدام است؟

① ۲/۵ ② ۲ ③ ۱/۵ ④ ۴/۵

۵۹- در نمودار مقابل، اگر $f(x)=\dfrac{۲^x-۱}{۳}$ باشد، $g(۵)$ کدام است؟

$x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to x$

① ۲
② ۳
③ ۴
④ ۵

۶۰- اگر $(fog)(x)=۳g(x)+۵$ و $(gof)(x)=۹x^۲+۳۰x+۲۶$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(x)$ کدام است؟

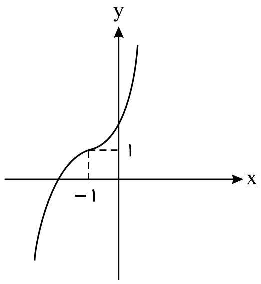
① $x^۲$
② $(x+۱)^۲$
③ $x^۲+۱$
④ $x^۲+۴$

پاسخنامه تشریحی

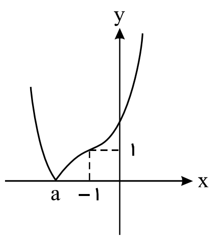
۱ ـ گزینه ۲ ابتدا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = |x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ + ۱| = |(x+۱)^۳ + ۱|$$

نمودار تابع $y = (x+۱)^۳ + ۱$ را به کمک انتقال تابع $y = x^۳$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار f، کافیست قسمتی از نمودار را که زیر محور xهاست، نسبت به محور xها قرینه کنیم و آن قسمت از نمودار را که بالای محور xهاست حفظ کنیم:

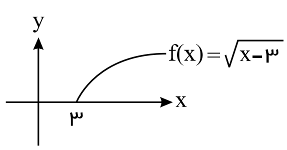


برای به‌دست آوردن a باید معادلهٔ $f(x) = ۰$ را حل کنیم:

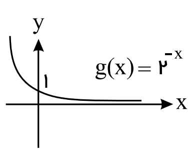
$$(x+۱)^۳ + ۱ = ۰ \to (x+۱)^۳ = -۱ \to x + ۱ = -۱ \to x = -۲$$

پس تابع f در بازهٔ $[-۲, +\infty)$ صعودی اکید است و حداقل مقدار a برابر با -۲ است.

۲ ـ گزینه ۳



$\Rightarrow$ f اکیداً صعودی

$g(x) = ۲^{-x} = (\frac{۱}{۲})^x \Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ g اکیداً نزولی

چون f اکیداً صعودی است، پس $-f$ اکیداً نزولی است و می‌دانیم مجموع دو تابع اکیداً نزولی تابعی اکیداً نزولی است. پس تابع $g + (-f) = g - f$ اکیداً نزولی است.

۳ ـ گزینه ۳ در تابع نزولی به‌ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به دامنه اگر $x_۱ < x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱) \geq f(x_۲)$ است. برای تعیین دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$f(2)-f(|x-1|)\geq 0 \to f(2)\geq f(|x-1|) \xrightarrow{f\ \text{نزولی است}} 2\leq |x-1|$$

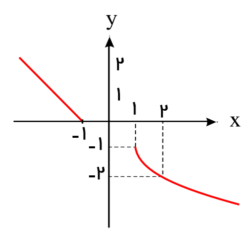
$$\to \begin{cases} x-1\geq 2 \to x\geq 3 \\ \text{یا} \\ x-1\leq -2 \to x\leq -1 \end{cases} \to x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$$

۴ـ گزینه ۲ با رسم نمودار f داریم:

$$f(x)=\begin{cases} |x+1| & ;x\leq -1 \\ -\dfrac{x}{2}+a & ;-1<x<1 \\ -\sqrt{x-1}-1 & ;x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow A\left| \begin{array}{l} x=-1 \\ y=\dfrac{1}{2}+a \end{array}\right. \quad B\left| \begin{array}{l} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{2}+a \end{array}\right.$$

با توجه به نمودار زیر تابع f زمانی نزولی است که عرض نقطهٔ $A(-1,\frac{1}{2}+a)$ کوچکتر یا مساوی صفر و عرض نقطهٔ $B(1,-\frac{1}{2}+a)$ بزرگتر یا مساوی -1 باشد، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}+a\leq 0 \Rightarrow a\leq -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}+a\geq -1 \Rightarrow a\geq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \overset{\text{اشتراک}}{\Rightarrow} a=-\frac{1}{2}$$



۵ـ گزینه ۲

$$fog(x)=\frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f(g(x))=\frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2x+1}{x-1}$$

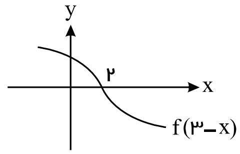
$$\frac{x-1}{x}=t \Rightarrow x-1=tx \Rightarrow x(1-t)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{1-t}$$

$$f(t)=\frac{\dfrac{2}{1-t}+1}{\dfrac{1}{1-t}-1}=\frac{2+1-t}{1-(1-t)}=\frac{3-t}{t} \Rightarrow f(x)=\frac{3-x}{x}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{3-x}{x}+\frac{x-1}{x}=\frac{3-x+x-1}{x}=\frac{2}{x}$$

۶ـ گزینه ۲ f اکیداً صعودی و $y=3-x$ اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی $f(3-x)$ اکیداً نزولی است. چون $f(1)=0$ است، $x=1$ صفر تابع $f(x)$ و $x=2$ صفر تابع $f(3-x)$ است.

پس به‌طور نمادین تابع $f(۳-x)$ به‌صورت مقابل است.



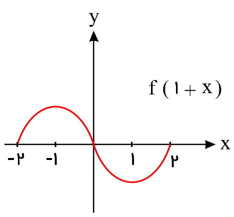
$$g(x)=\sqrt{\frac{x-۴}{f(۳-x)}} \Rightarrow \frac{x-۴}{f(۳-x)} \geq ۰ \Rightarrow$$

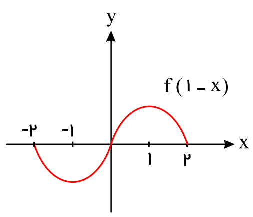
x	$-\infty$		۲		۴		$+\infty$
$x-۴$		$-$		$-$	۰	$+$	
$f(۳-x)$		$+$	۰	$-$		$-$	
$\frac{x-۴}{f(۳-x)}$		$-$	ن	$+$	۰	$-$	

$۲ < x \leq ۴ \Rightarrow$ اعداد صحیح : ۳ و ۴

۷ـ گزینه ۴

نمودار تابع $y=f(۱-x)$ را با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$ رسم می‌کنیم:





برای رسم نمودار $f(۱-x)$، نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ می‌بریم و برای رسم نمودار $f(۱-x)$، نمودار تابع $f(۱+x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. مطابق شکل نمودار حاصل در فاصله‌های $[-۲,-۱]$ و $[۱,۲]$ اکیداً نزولی است.

۸ـ گزینه ۲ اگر $x_۱$ و $x_۲$ در بازهٔ $[۱,۲]$ باشند، داریم:

$$x_۱ < x_۲ \longrightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

اما مقادیر $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ بین صفر و ۱ قرار دارند و f در فاصلهٔ صفر تا ۱ نزولی است. پس:

$f(f(x_۱)) > f(f(x_۲)) \longrightarrow$ یعنی $f(f(x))$ نزولی است.

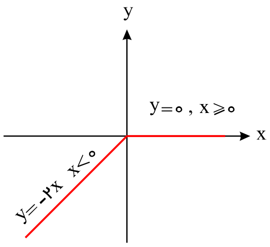
۹ـ گزینه ۱ نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y=x^۳$ به دست آمده است. اگر نمودار $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست (در راستای محور xها) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور yها) انتقال دهیم ضابطهٔ $y=(x-۱)^۳+۲$ به‌دست می‌آید که همان ضابطهٔ مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس:

$$a=۱ \;\;,\;\; b=۲ \Rightarrow a\cdot b=۲$$

۱۰ـ گزینه ۲ شکل تابع داده شده را رسم می‌کنیم.

$x \geq ۰ \to y = x - x \to y = ۰$

$x < ۰ \to y = x + x \to y = ۲x \xrightarrow{\text{برای رسم}} \left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right. \ , \ \left|\begin{matrix} -۱ \\ -۲ \end{matrix}\right.$

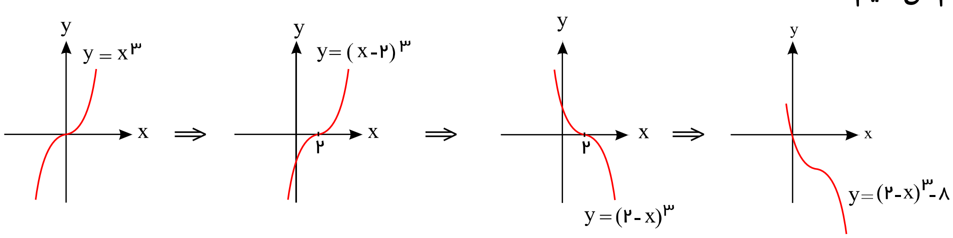


تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است ۰ $\to$

۱۱ـ گزینه ۱ عدد ۸ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$f(x) = \underbrace{۶x^۲ - x^۳ - ۱۲x + ۸}_{(۲-x)^۳} - ۸ = (۲ - x)^۳ - ۸$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



۱۲ـ گزینه ۲ چون نمودار f بالای محور xها قرار دارد یعنی مقادیر تابع f همواره مثبت است، پس f تابعی نزولی با مقادیر مثبت است و داریم:

$$x_۱ < x_۲ \xrightarrow{\text{نزولی}} f(x_۱) \geq f(x_۲) \xrightarrow{\times(-۱)} -f(x_۱) \leq -f(x_۲)$$

پس اگر f نزولی باشد، تابع $-f$ صعودی است. از طرفی جمع دو تابع صعودی، تابعی صعودی است، پس:

$g(x) = x + (-f(x)) \Rightarrow$ g صعودی است.

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow -x_۱ > -x_۲ \xrightarrow{f \text{ نزولی}} f(-x_۱) \leq f(-x_۲)$$

$$\xrightarrow{\text{مقادیر } f \text{ مثبت‌اند.}} \frac{۱}{f(-x_۱)} \geq \frac{۱}{f(-x_۲)} \Rightarrow h(x_۱) \geq h(x_۲)$$

h نزولی است.

۱۳ـ گزینه ۴ چون تابع f از نقاط $A(-۴,-۲)$ و $B(۳,۲)$ می‌گذرد، داریم: $f(-۴) = -۲ \ , \ f(۳) = ۲$

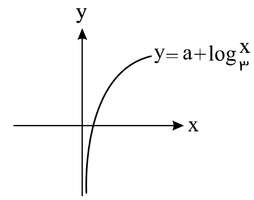
$$y = \sqrt{۴ - f((x))^۲} \Rightarrow ۴ - (f(x))^۲ \geq ۰ \Rightarrow (f(x))^۲ \leq ۴ \Rightarrow |f(x)| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq f(x) \leq ۲$$

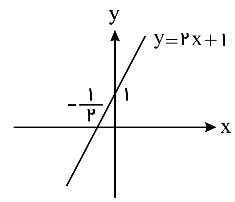
$$\xrightarrow[f(\text{۳})=\text{۲}]{f(-\text{۴})=-\text{۲}} f(-\text{۴}) \le f(x) \le f(\text{۳}) \xrightarrow{f\ \text{اکیداً صعودی}} -\text{۴} \le x \le \text{۳} \Rightarrow$$ اعداد صحیح: $-\text{۴}, -\text{۳}, \cdots, \text{۲}, \text{۳}$

دامنه شامل ۸ عدد صحیح است.

۱۴ـ گزینه ۲ ابتدا شکل کلی از نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{1}{3}}^{x} & , x \ge \text{۳} \\ \text{۲}x + \text{۱} & , x < \text{۳} \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:

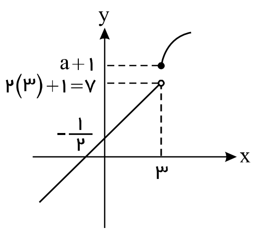
$$y = a - \log_{\frac{1}{3}}^{x} = a - \log_{\text{۳}^{-1}}^{x} = a + \log_{\text{۳}}^{x}$$





حال هردو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

شرط $x_\text{۲} > x_\text{۱} \Rightarrow f(x_\text{۲}) \ge f(x_\text{۱})$ به‌معنی صعودی بودن $f(x)$ است، برای صعودی بودن باید داشته باشیم:

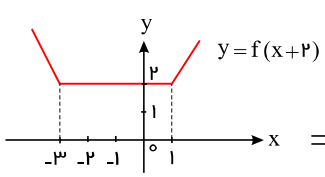


$$\longrightarrow \text{۷} \le a + \text{۱} \Rightarrow \text{۶} \le a$$

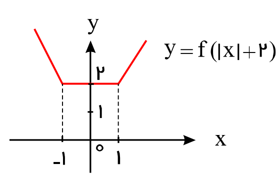
۱۵ـ گزینه ۳

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{۲ واحد به چپ}]{x \to x+\text{۲}} y = f(x+\text{۲}) \xrightarrow{x \to |x|} y = f(|x| + \text{۲})$$

در نمودار $y = f(x+\text{۲})$ سمت چپ محور y ها را حذف کرده و قرینهٔ سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها یافته و به شکل اضافه می‌کنیم تا نمودار $y = f(|x| + \text{۲})$ حاصل شود.



$\Rightarrow$



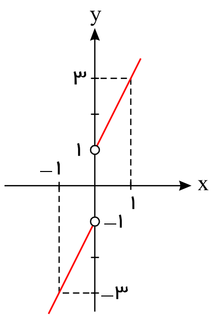
بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = f(|x| + \text{۲})$ در آن بازه صعودی است بازهٔ $[-\text{۱}, +\infty)$ است.

۱۶ـ گزینه ۱ ابتدا به صورت مشروط قدر مطلق را از بین می‌بریم:

$$x > \text{۰} \to y = \text{۲}x + \frac{x}{x} \to y = \text{۲}x + \text{۱}$$

$$x < \text{۰} \to y = \text{۲}x + \frac{-x}{x} \to y = \text{۲}x - \text{۱}$$

اکنون دو خط داده شده را با توجه به شرط رسم می‌کنیم.

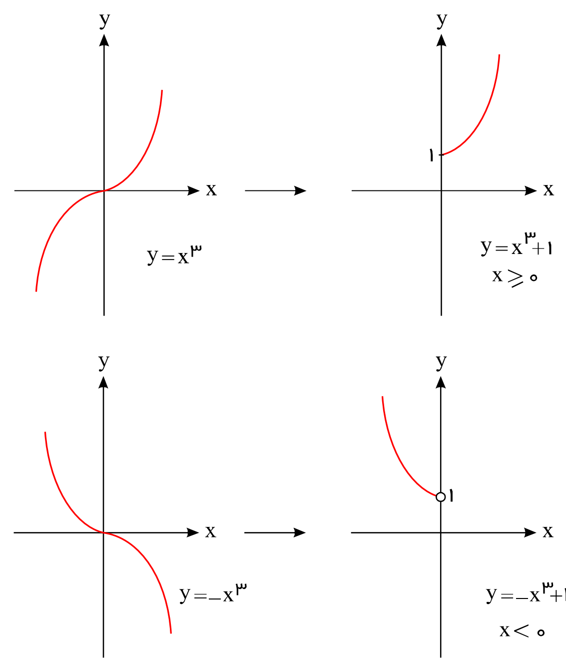


تابع اکیداً صعودی است

۱۷ـ گزینه ۳ ابتدا به صورت مشروط، قدر مطلق را از بین می‌بریم.

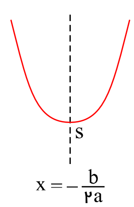
$$x \geq 0 \to y = x^2(x) + 1 \to y = x^3 + 1$$

$$x < 0 \to y = x^2(-x) + 1 \to y = -x^3 + 1$$



از ترکیب دو شکل به شکل گزینهٔ سوم می‌رسیم.

۱۸ـ گزینه ۳ تابع $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a > 0$ به صورت

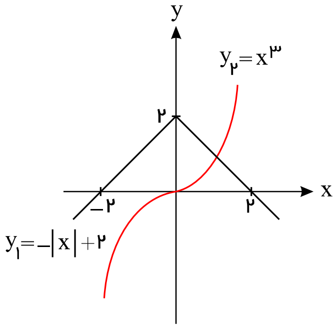


است که در بازهٔ $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ صعودی است

پس $x = -2$ می‌تواند طول رأس سهمی و یا بزرگتر از طول رأس سهمی باشد.

$$-2 \geq \frac{-b}{2a} \to -2 \geq \frac{-k}{6} \to k \geq 12$$

۱۹ـ گزینه ۲ نمودارهای توابع $y_1 = -|x| + 2$ و $y_2 = x^3$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودارهای رسم شده، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه با طول مثبت قطع می‌کنند. بنابراین معادلهٔ مورد نظر فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

۲۰ـ گزینه ۳ ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f = \{(-۲, ۱۰ - x), (۰, x^۲ + ۴), (۱, ۲x + ۷)\}$$

در تابع صعودی با افزایش x، مقدار y ثابت مانده یا افزایش می‌یابد، پس باید $۱۰ - x \le x^۲ + ۴ \le ۲x + ۷$ باشد.

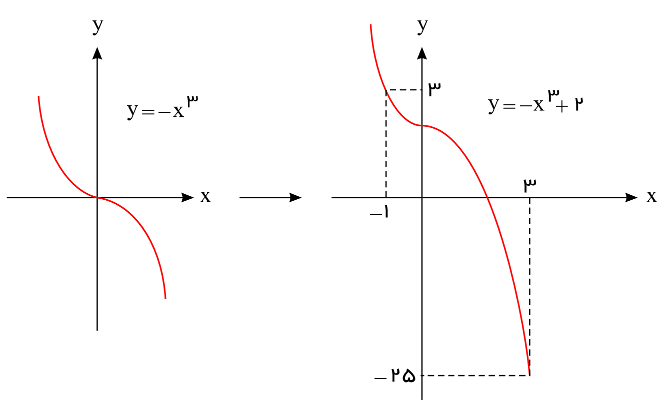
$$۱۰ - x \le x^۲ + ۴ \to x^۲ + x - ۶ \ge ۰ \to (x + ۳)(x - ۲) \ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \le -۳ \text{ یا } x \ge ۲ \quad (I)$$

$$x^۲ + ۴ \le ۲x + ۷ \to x^۲ - ۲x - ۳ \le ۰ \to (x - ۳)(x + ۱) \le ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \le x \le ۳ \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $۲ \le x \le ۳$ می‌رسیم.

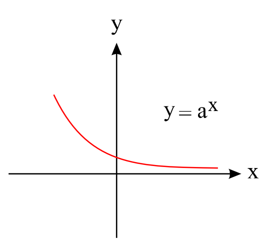
$$x \in [۲, ۳] \to b - a = ۳ - ۲ = ۱$$

۲۱ـ گزینه ۱ با رسم تابع داده شده و تعیین نقاط ابتدائی و انتهایی بازهٔ داده شده، برد تابع مشخص می‌شود.



پس برد تابع به صورت $[-۲۵, ۳]$ است و $b - a = ۲۸$ می‌باشد.

۲۲ـ گزینه ۲ تابع $y = a^x$ به‌ازای $۰ < a < ۱$ اکیداً نزولی است و به صورت



است و به‌ازای $a = ۰$ و $a = ۱$ تابع ثابت و درنتیجه هم صعودی و هم نزولی است پس برای آنکه تابع داده شده نزولی باشد باید:

$$۰ \leq \frac{۳m+۱}{۴} \leq ۱ \to ۰ \leq ۳m+۱ \leq ۴ \to -۱ \leq ۳m \leq ۳ \to \frac{-۱}{۳} \leq m \leq ۱$$

که در این بازه، اعداد صحیح صفر و یک قرار دارند.

۲۳ - گزینه ۳ تابع داده شده را رسم می‌کنیم.

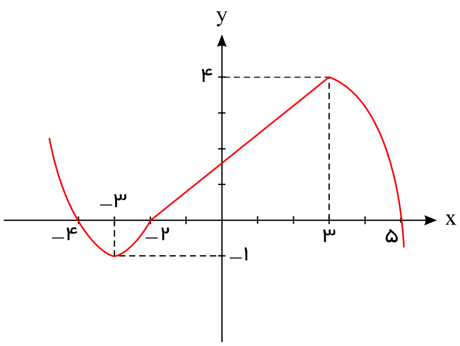
$$y_۱ = -x^۲ + ۶x - ۵ = -(x^۲ - ۶x + ۵) = -(x-۱)(x-۵) \xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}} x = ۱ \ , \ x = ۵$$

$$\to S\left|\begin{array}{l}\dfrac{-b}{۲a}\\[2mm] \dfrac{۴ac-b^۲}{۴a}\end{array}\right. \to S\left|\begin{array}{l}۳\\ ۴\end{array}\right.$$

$$y_۲ = \frac{۴}{۵}x + \frac{۸}{۵} \to \left|\begin{array}{l}-۲\\ ۰\end{array}\right. \ , \ \left|\begin{array}{l}۳\\ ۴\end{array}\right. \quad \text{دو نقطه برای رسم}$$

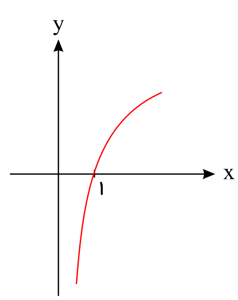
$$y_۳ = x^۲ + ۶x + ۸ = (x+۴)(x+۲) \xrightarrow{\text{محل برخورد تابع با محور طول‌ها}} x = -۴ \ , \ x = -۲$$

$$\to S\left|\begin{array}{l}\dfrac{-b}{۲a}\\[2mm] \dfrac{۴ac-b^۲}{۴a}\end{array}\right. \to S\left|\begin{array}{l}-۳\\ -۱\end{array}\right.$$



تابع داده شده در بازهٔ $[-۳,۳]$ اکیداً صعودی است و طول این بازه برابر ۶ است.

۲۴ - گزینه ۳ شکل فرضی



را می‌توان برای تابع f در نظر گرفت. برای تعیین دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$(x^3-x)f(x)\ge 0 \to \begin{cases} x^3-x=0 \to x(x^2-1)=0 \to x=0\ ,\ x=\pm 1 \\ f(x)=0 \to x=1 \end{cases}$$

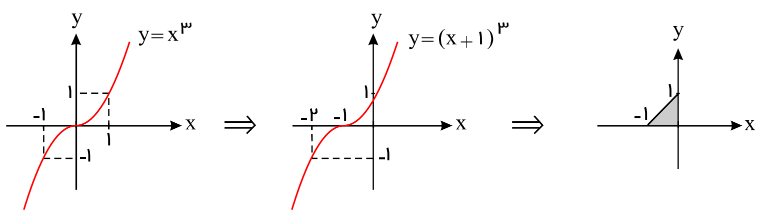
$\rightarrow$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^3+x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
عبارت ≥ 0		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

بنابراین دامنهٔ تعریف تابع داده شده به صورت $\mathbb{R}-(-1,0)$ است پس:

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} \to a+b=-1$$

۲۵ـ گزینه ۲ نمودار $y=x^3$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=(x+1)^3$ حاصل شود.



$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

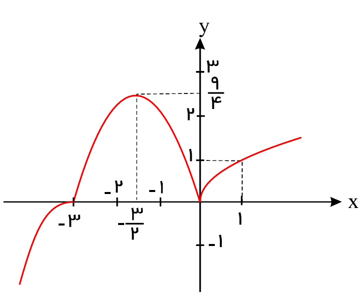
۲۶ـ گزینه ۴ اگر تابع $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$ در سه نقطهٔ $x=\alpha$ و $x=\beta$ و $x=\gamma$ محور x ها را قطع کند، با توجه به این که ضریب x^3 برابر یک است، می‌توان $f(x)$ را به‌صورت زیر نوشت.

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3+3x^2+ax+b$$
$$\Rightarrow x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\alpha=x^3+3x^2+ax+b\ \ (1)$$

از طرفی $\alpha\beta\gamma=3$ پس داریم:

$$(1)\Rightarrow -\alpha\beta\gamma=b\Rightarrow b=-3\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2+ax-3$$
$$f(2)=15\Rightarrow 8+12+2a-3=15\Rightarrow a=-1$$

۲۷ـ گزینه ۳ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، توجه کنید سهمی $y=-x^2-3x$ دارای رأس به مختصات $S\left|\begin{array}{l} -\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2} \\ \frac{4ac-b^2}{4}=\frac{9}{4}\end{array}\right.$ است که محور طول‌ها را در ۰ و ۳− قطع می‌کند.



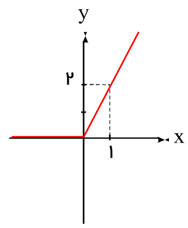
تابع در بازهٔ $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$ صعودی، در بازهٔ $\left[-\frac{3}{2},0\right]$ نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است.

$[-4,-2]\subset(-\infty,-\frac{3}{2}] \Rightarrow [-4,-2] \Rightarrow$ نزولی

$[-1,0]\subset[-\frac{3}{2},0] \Rightarrow [-1,0] \Rightarrow$ صعودی

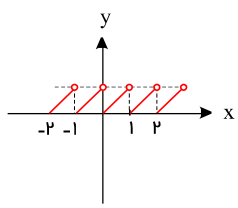
۲۸ ـ گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱) $y=x+|x|=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}\Rightarrow$



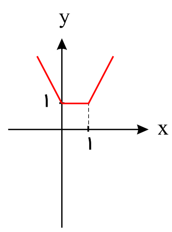
$\Rightarrow$ تابع صعودی است.

گزینهٔ ۲) $y=x-[x]\Rightarrow$



$\Rightarrow$ تابع غیر یکنوا است.

گزینهٔ ۳) $y=|x|+|x-1|\Rightarrow$

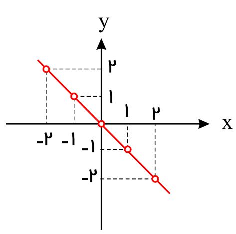


$\Rightarrow$ تابع غیر یکنوا است.

گزینهٔ ۴) توجه کنید که $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ است.

$$y=x\left(\frac{1}{[x]+[-x]}\right)\Rightarrow [x]+[-x]\neq 0\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\Rightarrow y=x(\frac{1}{-1})=-x$$

$y=-x\ ,\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$



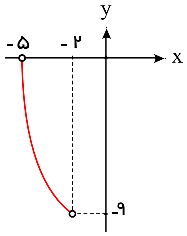
$\Rightarrow$ تابع نزولی است.

۲۹ ـ گزینه ۲

$$\left|x+\frac{7}{2}\right|<\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{3}{2}<x+\frac{7}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{3}{2}-\frac{7}{2}<x<\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\Rightarrow -5<x<-2$$

نمودار تابع $f(x)=x^2+4x-5$ **را در بازهٔ** $(-5,-2)$ **رسم می‌کنیم، توجه کنید که رأس این سهمی** $S\left|\begin{matrix}-\frac{b}{2a}=-2\\ \frac{4ac-b^2}{4}=-9\end{matrix}\right.$

است و محور طول‌ها را در $x=۱$ و $x=-۵$ قطع می‌کند.



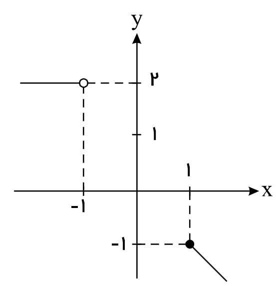
تابع در بازهٔ $(-۵,-۲)$ نزولی است.

۳۰- گزینه ۲ اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a)\le f(b)$ آن‌گاه $a\ge b$.

$$y=\sqrt{f(|x|)-f(۲)}\Rightarrow f(|x|)-f(۲)\ge ۰\Rightarrow f(|x|)\ge f(۲)\xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}}|x|\le ۲$$

$$\Rightarrow -۲\le x\le ۲\Rightarrow \text{دامنه}=[-۲,۲]$$

۳۱- گزینه ۴ ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.



$$f(x)=\begin{cases}۲ & ; x<-۱\\ k & ; -۱\le x<۱\\ -x & ; x\ge ۱\end{cases}$$

با توجه به نمودار بالا برای این که تابع f نزولی باشد، باید داشته باشیم: $-۱\le k\le ۲$

$$k\text{ اعداد صحیح}=-۱,۰,۱,۲\Rightarrow \text{۴مقدار}$$

۳۲- گزینه ۴ با مرتب کردن اعضای دامنهٔ تابع داریم:

$$f:\{(-۲,a),(-۱,a-۱),(۰,a^۳-۱)\}$$

$$-۲<-۱<۰\xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}}f(-۲)>f(-۱)>f(۰)\Rightarrow a>a-۱>a^۳-۱$$

$$a>a-۱\ \Rightarrow ۰>-۱\ \Rightarrow \text{برقرار است}\Rightarrow a\in\mathbb{R}\quad (۱)$$

$$a^۳-۱<a-۱\Rightarrow a^۳-a<۰\Rightarrow a(a^۲-۱)<۰$$

a	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$a(a^۲-۱)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow a<-۱ \text{ یا } ۰<a<۱\quad (۲)$$

$(1)\cap(2)\Rightarrow a<-1$ یا $0<a<1 \ \Rightarrow a\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

۳۳ـ گزینه ۲ با مرتب کردن اعضای دامنهٔ تابع داریم:

x	-6	0	2	6	7
y	2	4	m^2-3	7	9

با توجه به این که تابع غیریکنوا است، باید $4<m^2-3$ یا $m^2-3>7$ باشد، داریم:

$$m^2-3<4\Rightarrow m^2<7\Rightarrow -\sqrt{7}<m<\sqrt{7}\quad (1)$$

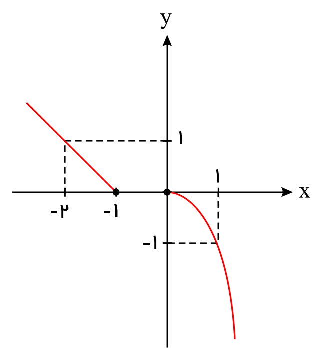
$$m^2-3>7\Rightarrow m^2>10\Rightarrow m<-\sqrt{10} \text{ یا } m>\sqrt{10}\quad (2)$$

مجموعه جواب : $(1)\cup(2)\Rightarrow(-\infty,-\sqrt{10})\cup(-\sqrt{7},\sqrt{7})\cup(\sqrt{10},+\infty)$

m اعداد صحیح ۳ و ۳− را نمی‌تواند بپذیرد.

۳۴ـ گزینه ۳ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}|x+1| & ;\ x\le -1\Rightarrow y=|x+1|=-x-1\\ -x^2 & ;\ x\ge 0\end{cases}\rightarrow$$



با توجه به نمودار واضح است که تابع f نزولی است ولی چون $f(-1)=f(0)=0$، تابع اکیداً نزولی نمی‌باشد.

۳۵ـ گزینه ۳ اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، داریم:

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\left(f(x_1)\right)<f\left(f(x_2)\right)\Rightarrow (fof)(x_1)<(fof)(x_2)$$

تابع fof اکیداً صعودی است.

اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، داریم:

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\left(f(x_1)\right)<f\left(f(x_2)\right)\Rightarrow (fof)(x_1)<(fof)(x_2)$$

تابع fof اکیداً صعودی است.

بنابراین اگر تابع f اکیداً یکنوا باشد آن‌گاه تابع fof در هر صورت اکیداً صعودی است. در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۳) اکیداً نزولی است و نمی‌تواند fof باشد. (گزینهٔ سوم خطی است با شیب منفی)

۳۶ـ گزینه ۲ تابع نمایی $f(x)=a^x$ با شرط $a>1$ تابعی اکیداً صعودی است. پس داریم:

$$y=\left(\frac{5-k}{1-3k}\right)^x\Rightarrow\frac{5-k}{1-3k}>1\Rightarrow\frac{5-k}{1-3k}-1>0\Rightarrow\frac{5-k-1+3k}{1-3k}>0$$

$$\Rightarrow \frac{2k+4}{1-3k} > 0 \Rightarrow$$

k	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$\frac{2k+4}{1-3k}$		$-$	0	$+$	ن	$-$	

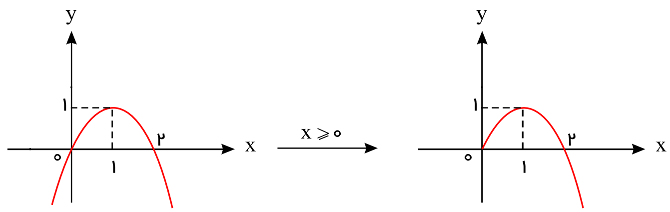
$$\Rightarrow -2 < k < \frac{1}{3}$$

۳۷- گزینه ۲ ابتدا با گذاشتن شرط، قدرمطلق را از بین می‌بریم:

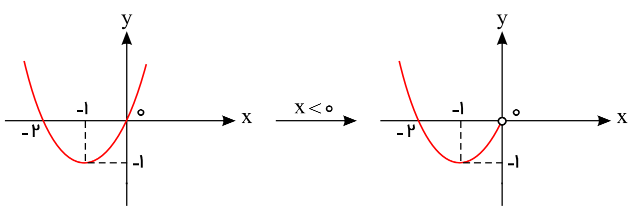
$$x \geq 0 \longrightarrow y = 2x - x^2 \longrightarrow S\left|\begin{array}{l}\frac{-b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{array}\right. \longrightarrow S\left|\begin{array}{l}1\\ 1\end{array}\right.$$

$$x < 0 \longrightarrow y = 2x + x^2 \longrightarrow S\left|\begin{array}{l}\frac{-b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{array}\right. \longrightarrow S\left|\begin{array}{l}-1\\ -1\end{array}\right.$$

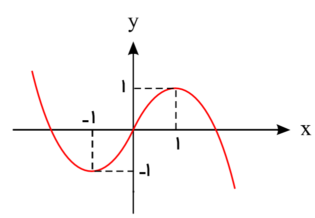
$y = 2x - x^2 \longrightarrow$



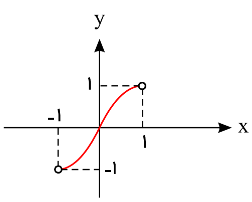
$y = 2x + x^2 \longrightarrow$



از ترکیب در شکل به



می‌رسیم که در بازهٔ $(-1, 1)$ به‌صورت

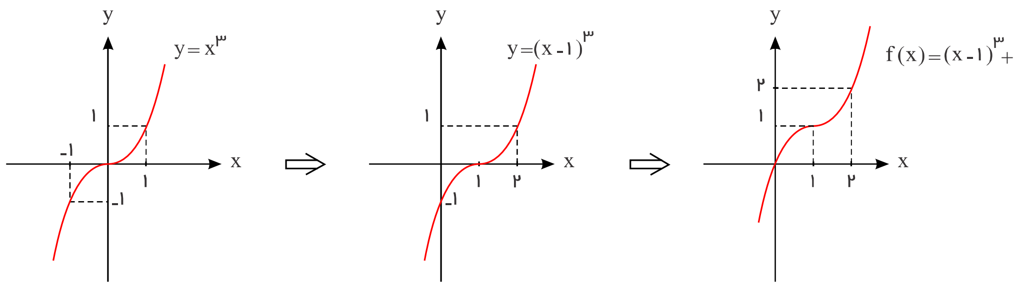


است

که صعودی است.

۳۸- گزینه ۱

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$



تابع f در کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

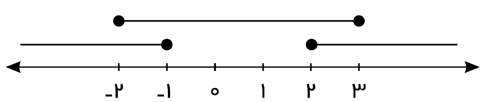
۳۹- گزینه ۴ ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f:\{(-۴,۲),(۳,m^۲-m),(۴,m^۲-m),(۵,۶)\}$$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_۱<x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱)\le f(x_۲)$ است پس:

$$۲\le m^۲-m\le ۶\to\begin{cases}m^۲-m\ge ۲\to m^۲-m-۲\ge ۰\to(m-۲)(m+۱)\ge ۰\\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m\le -۱ \text{ یا } m\ge ۲\quad (I)\\ m^۲-m\le ۶\to m^۲-m-۶\le ۰\to(m-۳)(m+۲)\le ۰\\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲\le m\le ۳\quad (II)\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$$\to m\in[-۲,۳]-(-۱,۲)$$

۴۰- گزینه ۴

$$gof(a)=۱۵\to g(f(a))=۱۵\xrightarrow{f(a)=t} g(t)=۱۵$$

$$\to g(t)=۲f(t+۲)-۳=۱۵\to ۲f(t+۲)=۱۸$$

$$\to f(t+۲)=۹\xrightarrow{f(۶)=۹} t+۲=۶\to t=۴$$

پس: $f(a)=۴\to a=۳$

۴۱- گزینه ۲

$$f(x)=x^۲-۲x+۱-۱=(x-۱)^۲-۱\ ,\ D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{۴-x}+۱\ ,\ D_g=(-\infty,۴]$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\le ۴|(\sqrt{۴-x}+۱)\in\mathbb{R}\}=(-\infty,۴]$$

$$fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{۴-x}+۱)=(\sqrt{۴-x}+۱-۱)^۲$$
$$=۴-x-۱=۳-x\ ,\ D_{fog}=(-\infty,۴]$$

برای پیدا کردن برد fog، از روی دامنهٔ fog شروع به ساختن fog می‌کنیم:

$$x\leq ۴\Rightarrow -x\geq -۴\Rightarrow ۳-x\geq -۱\Rightarrow fog(x)\geq -۱\Rightarrow R_{fog}=[-۱,+\infty)$$

۴۲ـ گزینه ۴

$$f(x)=۳x-۲\ \ ,\ \ (gof)(x)=g(f(x))=۹x^۲-۹x+۲\Rightarrow g(۳x-۲)=۹x^۲-۹x+۲$$
$$۳x-۲=t\Rightarrow x=\frac{t+۲}{۳}$$

$$g(t)=۹(\frac{(t+۲)^۲}{۹})-۹(\frac{t+۲}{۳})+۲\ \Rightarrow g(t)=t^۲+۴+۴t-۳t-۶+۲\ \Rightarrow g(t)=t^۲+t$$
$$\Rightarrow g(x)=x^۲+x$$

پس: $(g-f)(x)=g(x)-f(x)\ =x^۲+x-(۳x-۲)\ =x^۲-۲x+۲$

۴۳ـ گزینه ۴ با توجه به نمودارهای داده شده، دامنهٔ توابع f و g و ضابطهٔ g را می‌یابیم.

$$D_f=[۰,+\infty)\ \ ,\ \ D_g=(-\infty,۰]$$

ضابطهٔ تابع خطی $g(x)$ را که از دو نقطهٔ $\left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix}-۲\\۰\end{matrix}\right.$ می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$\frac{y+۲}{x}=\frac{-۲-۰}{۰+۲}=-۱\ \Rightarrow y+۲=-x\ \Rightarrow y=-x-۲\ \Rightarrow g(x)=-x-۲$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}\ =\{x\leq ۰\ ,\ g(x)\geq ۰\}\ =\{x\leq ۰\ ,\ -x-۲\geq ۰\}\ =\{x\leq ۰\ ,\ x\leq -۲\}$$
$$=x\leq -۲$$

اعداد صحیح منفی که در دامنه حضور ندارند فقط -۱ می‌باشد.

۴۴ـ گزینه ۳ اول تابع $\frac{۱}{g+۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$g+۱=\{(-۱,۱),(۲,۰),(۳,۵)\}\Rightarrow\frac{۱}{g+۱}=\{(-۱,۱),(\underbrace{۲,\frac{۱}{۰}}_{\text{تعریف نشده}}),(۳,\frac{۱}{۵})\}$$

$$\frac{۱}{g+۱}=\{(-۱,۱),(۳,\frac{۱}{۵})\}$$

حال $fo(\frac{۱}{g+۱})$ را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x=-۱ \Rightarrow fo(\frac{۱}{g+۱})(-۱)=f(۱)=\frac{۳(-۱)-۱}{۲}=۱ \Rightarrow (-۱,۱) \\ x=۳ \Rightarrow fo(\frac{۱}{g+۱})(۳)=f(\frac{۱}{۵})=\frac{\frac{۳}{۵}-۱}{۲}=\frac{\frac{-۲}{۵}}{۲}=-\frac{۱}{۵} \Rightarrow (۳,-\frac{۱}{۵}) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow fo(\frac{۱}{g+۱})=\{(-۱,۱),(۳,-\frac{۱}{۵}\}$$

مجموع عضوهای برد تابع برابر است با: $۱+(-\frac{۱}{۵})=\frac{۴}{۵}$

۴۵- گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ تابع خطی g که گذرنده از دو نقطهٔ $\begin{vmatrix} -۴ \\ ۰ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۸ \end{vmatrix}$ است را می‌نویسیم.

$$\frac{y}{x+۴}=\frac{۰-۸}{-۴-۰}=۲ \to y=۲x+۸ \to g(x)=۲x+۸$$

با توجه به نمودار تابع f، در نقاط ۱ و ۳ مقدار تابع f صفر است، یعنی $f(۳)=۰$ و $f(۱)=۰$ پس داریم:

$$f(g(x))=۰ \Rightarrow g(x)=۱ \quad \text{یا} \quad g(x)=۳$$

حال ضابطهٔ تابع g را می‌یابیم.

$$g(x)=۱ \Rightarrow ۲x+۸=۱ \Rightarrow x=-\frac{۷}{۲}$$

$$g(x)=۳ \Rightarrow ۲x+۸=۳ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها}=-\frac{۷}{۲}-\frac{۵}{۲}=-۶$$

۴۶- گزینه ۳ از روی شکل‌ها مشخص است که $D_f=[۰,۱]$ و $R_f=[۰,۲]$ و $D_g=[۱,۴]$ و $R_g=[۱,۳]$ است.

$$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{۰\le x\le ۱\ ,\ ۱\le f(x)\le ۴\}$$

$$=\{۰\le x\le ۱\ ,\ \frac{۱}{۳}\le x\le \frac{۲}{۳}\} \longrightarrow D_{gof}=[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}]$$

۴۷- گزینه ۴

$$(۲,۳)\in f\ ,\ (۱,۳)\in fog \ \Rightarrow (۱,۲)\in g \Rightarrow g(۱)=۲$$

$$(a,۴)\in f\ ,\ (۴,۴)\in fog \ \Rightarrow (۴,a)\in g \Rightarrow g(۴)=a \Rightarrow ۴+\sqrt{۴}=a \Rightarrow a=۶$$

$$(۱۲,۱)\in f\ ,\ (b,۱)\in fog \ \Rightarrow (b,۱۲)\in g \Rightarrow g(b)=۱۲ \Rightarrow b+\sqrt{b}=۱۲ \to b=۹$$

بنابراین $a+b=۱۵$ است.

۴۸ـ گزینه ۳

$$fog(-۲) = f(g(-۲)) = f(-۱) = a$$

می‌دانیم که $D_{fog} = \{x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$ است پس:

$$fog(۱) \to ۱ \in D_g \to c = ۱ \ , \ g(۱) \in D_f \to ۳ \in D_f \longrightarrow b = ۳$$

طبق فرض: $fog(-۲) + fog(۱) = ۵ \to a + ۲ = ۵ \to a = ۳ \to a + b + c = ۷$

۴۹ـ گزینه ۳

$$f(x) = -\frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \to D_f : \text{مخرج} = ۰ \to x(x + ۲) = ۰$$

$$\to x = ۰, x = -۲ \to D_f = \mathbb{R} - \{-۲, ۰\}$$

$$g(x) = \sqrt{-x^۲ - x} \to D_g : -x^۲ - x \geq ۰ \to x(-x - ۱) \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \leq x \leq ۰$$

$$D_{gof(x)} = \{x \in D_f \ , \ f(x) \in D_g\} = \{x \neq ۰, -۲ \ , \ -۱ \leq -\frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \leq ۰\}$$

$$= \{x \neq ۰, -۲ \ , \ ۰ \leq \frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \leq ۱\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \geq ۰ \xrightarrow[\text{و } \Delta < ۰ \text{ است.}]{\text{صورت کسر همواره مثبت است چون } a > ۰} x^۲ + ۲x > ۰ \quad (I) \\ \dfrac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} \leq ۱ \to \dfrac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x} - ۱ \leq ۰ \to \dfrac{۲}{x^۲ + ۲x} \leq ۰ \to x^۲ + ۲x < ۰ \quad (II) \end{cases}$$

واضح است که (I) و (II) هیچ اشتراکی ندارند پس $D_{gof(x)} = \{\ \}$ است.

۵۰ـ گزینه ۱ باید تابع $g(f(x))$ را تشکیل دهیم. ابتدا دامنهٔ gof را می‌یابیم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \geq -۲ | \sqrt{x + ۲} \in \mathbb{R}\} \Rightarrow D_{gof} = [-۲, +\infty)$$

حال تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = g(\sqrt{۲ + x}) = (\sqrt{۲ + x})^۲ = ۲ + x$$

بنابراین:

$$g(f(x)) = ۵ \Rightarrow ۲ + x = ۵ \Rightarrow x = ۳$$

پس معادله فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

۵۱ـ گزینه ۴

$$fog(x) = x^۶ - ۲x^۴ + x^۲ + ۱ \longrightarrow f(g(x)) = x^۶ - ۲x^۴ + x^۲ + ۱$$

$$\longrightarrow f(x^۳-x)=(x^۳-x)^۲+۱ \xrightarrow{x^۳-x=t} f(t)=t^۲+۱$$

$$\longrightarrow f(۳)=۳^۲+۱=۱۰$$

۵۲ - گزینه ۴

$$f(x)=۸x^۳-۱ \to f(g(x))=f(-۱)=۸g^۳(x)-۱ \quad (I)$$

$$(fog)(x)=x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱ \ \to f(g(x))=(x+۱)^۳-۱ \quad (II)$$

$$(I),(II): ۸g^۳(x)-۱=(x+۱)^۳-۱ \ \to g^۳(x)=\frac{۱}{۸}(x+۱)^۳ \to g(x)=\frac{۱}{۲}(x+۱)$$

پس: $(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=-۹+۰=-۹$

۵۳ - گزینه ۳

تابع gof را تشکیل می‌دهیم.

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x-[x])=(x-[x])+[x-[x]]$$

می‌دانیم عدد صحیح در جمع و تفریق می‌تواند از داخل براکت خارج شود و چون $[x]$ عددی صحیح است، داریم:

$$(gof)(x)=x-[x]+[x]-[x]=x-[x]$$

می‌دانیم: $۰\leq x-[x]<۱ \Rightarrow ۰\leq gof(x)<۱ \Rightarrow R_{gof}=[۰,۱)$

۵۴ - گزینه ۴

$$f(x)=x^۲-۴x+۳ \to f(g(x))=g^۲(x)-۴g(x)+۳$$

$$fog(x)=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴} \to f(g(x))=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴}$$

پس: $g^۲(x)-۴g(x)+۳=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴} \to (g(x)-۲)^۲-۴+۳=(x+\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}+\frac{۵}{۴}$

$$\to (g(x)-۲)^۲-۱=(x+\frac{۳}{۲})^۲-۱ \to (g(x)-۲)^۲=(x+\frac{۳}{۲})^۲$$

$$\to \begin{cases} g(x)-۲=x+\frac{۳}{۲} \to g(x)=x+\frac{۷}{۲} \to \text{شیب خط، مثبت است ۰} \\ g(x)-۲=-x-\frac{۳}{۲} \to g(x)=-x+\frac{۱}{۲} \to \text{شیب خط، منفی است ۰} \end{cases}$$

$$g(f(x))=g(f(x))=x^۲-۴x+۳+\frac{۷}{۲}=x^۲-۴x+\frac{۱۳}{۲}$$

۵۵ـ گزینه ۳ دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ به صورت $x \geq ۰$ است.

$$D_{fof(x)} = \{x \in D_f \ , \ f(x) \in D_f\} = \{x \geq ۰ \ , \ \sqrt{x} - x \geq ۰\}$$

اکنون نامعادلهٔ $\sqrt{x} - x \geq ۰$ را حل می‌کنیم.

$$\sqrt{x} - x \geq ۰ \rightarrow \sqrt{x} \geq x \rightarrow x \geq x^۲ \rightarrow x^۲ - x \leq ۰ \rightarrow x(x-۱) \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \leq x \leq ۱$$

پس: $D_{fof(x)} = \{x \geq ۰ \ , \ ۰ \leq x \leq ۱\} = ۰ \leq x \leq ۱ \rightarrow x \in [۰,۱]$

۵۶ـ گزینه ۱ می‌دانیم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(۰) = b & x \in \mathbb{Z} \\ g(-۱) = ۱ - a + b & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

چون برد تابع برابر $\{۲\}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} b = ۲ \\ ۱ - a + b = ۲ \xrightarrow{b=۲} a = ۱ \end{cases}$$

۵۷ـ گزینه ۴

$$f(x) = ۳x + ۴ \rightarrow f(g(x)) = ۳g(x) + ۴$$

پس: $۳g(x) + ۴ = ۳x^۲ - ۶x - ۵ \rightarrow ۳g(x) = ۳x^۲ - ۶x - ۹$

$$\rightarrow g(x) = x^۲ - ۲x - ۳ \rightarrow g(۲) = ۴ - ۴ - ۳ = -۳$$

۵۸ـ گزینه ۱

$$fog(x) = ۱۲ \rightarrow f(g(x)) = ۱۲ \rightarrow (۱ - ۲x)^۲ - ۳(۱ - ۲x) + ۸ = ۱۲$$

$$\rightarrow ۱ + ۴x^۲ - ۴x - ۳ + ۶x + ۸ = ۱۲ \rightarrow ۴x^۲ + ۲x - ۶ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} \alpha = ۱ \\ \beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-۶}{۴} = \dfrac{-۳}{۲} \end{cases}$$

پس $|\alpha - \beta| = |۱ + \frac{۳}{۲}| = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$ است.

۵۹ـ گزینه ۳

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x \Rightarrow g(f(x)) = x \quad , \quad f(x) = \frac{۲^x - ۱}{۳} \Rightarrow g\left(\frac{۲^x - ۱}{۳}\right) = x$$

$$\frac{۲^x - ۱}{۳} = ۵ \Rightarrow ۲^x = ۱۶ = ۲^۴ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow g(۵) = ۴$$

۶۰ـ گزینه ۳

$(fog)(x) = f\left(g(x)\right) = ۳g(x) + ۵\ ,\ g(x) = t \Rightarrow f(t) = ۳t + ۵ \Rightarrow f(x) = ۳x + ۵$

$(gof)(x) = g\left(f(x)\right) = ۹x^۲ + ۳۰x + ۲۶ \Rightarrow g(۳x + ۵) = ۹x^۲ + ۳۰x + ۲۵ + ۱$

$\Rightarrow g(۳x + ۵) = (۳x + ۵)^۲ + ۱ \Rightarrow g(x) = x^۲ + ۱$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۱۱ - ۱	۲۱ - ۱	۳۱ - ۴	۴۱ - ۲	۵۱ - ۴
۲ - ۳	۱۲ - ۲	۲۲ - ۲	۳۲ - ۴	۴۲ - ۴	۵۲ - ۴
۳ - ۳	۱۳ - ۴	۲۳ - ۳	۳۳ - ۲	۴۳ - ۴	۵۳ - ۳
۴ - ۲	۱۴ - ۲	۲۴ - ۳	۳۴ - ۳	۴۴ - ۳	۵۴ - ۴
۵ - ۲	۱۵ - ۳	۲۵ - ۲	۳۵ - ۳	۴۵ - ۲	۵۵ - ۳
۶ - ۲	۱۶ - ۱	۲۶ - ۴	۳۶ - ۲	۴۶ - ۳	۵۶ - ۱
۷ - ۴	۱۷ - ۳	۲۷ - ۳	۳۷ - ۲	۴۷ - ۴	۵۷ - ۴
۸ - ۲	۱۸ - ۳	۲۸ - ۴	۳۸ - ۱	۴۸ - ۳	۵۸ - ۱
۹ - ۱	۱۹ - ۲	۲۹ - ۲	۳۹ - ۴	۴۹ - ۳	۵۹ - ۳
۱۰ - ۲	۲۰ - ۳	۳۰ - ۲	۴۰ - ۴	۵۰ - ۱	۶۰ - ۳