

موضوع : جزوه کنکوری مبحث دنباله ها (رشته ریاضی فیزیک و تجربی)

مؤلفین : سمانه ترکی و دکتر مسین عبدوی نژاد





با سلام و احترام فراوان.

دانش آموز عزیزم امیدوارم سال تحصیلی جدید رو در اوج سلامتی و شادکامی ، با انرژی زیاد شروع کرده باشی. شما عزیزان باید بدونید که قاره مطالب زیادی رو در هر فصل یاد بگیرید. اما چیزی که همه شما میدونید اینه که مطالب کتابهای درسی در هر سال تحصیلی فوق العاده کم و محدود و با کیفیت آموزشی پایینی مطرح شدن و شما قطعاً برای یادگیری هرچه بهتر مطالب به کتابها و جزوات کمک آموزشی نیاز دارید. لازمه این رو بدونید که ما اعضای **گروه آموزشی اپسیلن** به کمک شما اومدیم تا مطالب هر فصل از کتابهای درسی رو طوری به شما عزیزان آموزش بدیم که اولاً مطالب هر جزوه شامل تمامی مطالب مربوط به سالهای دهم و یازدهم و دوازدهم باشه و کمکتون کنیم امتحانات کتبی پایانترم رو عالی سپری کنید و در نهایت کنکور رو خیلی راحت و عالی تست بزنید .

تلاش ما آموزش هرچه راحت و کامل دروس برای امتحانات و کنکور شماست .

ما با یک تیر نشانهای زیادی را خواهیم زد. بهت قول میدم مطالعه این جزوات برات شیرین و خاطره انگیز باشه طوریکه استرس و نگرانیها به مراتب کم و کمتر بشه و از طرفی با تمرین و دانستن نکات تستی مناسب و کاربردی، اعتماد به نفس بالاتری داشته باشی. خیلی دوستدارم دانش آموز عزیزم

ارائه جزوه مبحث بعدی به میزان درخواستهایی که از طریق تلگرام به دست تیم ما میرسه بستگی داره. خواهش میکنم اگه میخوای بازم برات جزوه بنویسم از طریق تلگرام درخواستت رو برای من بفرست. خوشحال میشم بازم برات جزوه بنویسم.





موضوع : جزوه کنکوری مبحث دنباله ها (رشته ریاضی فیزیک و تجربی)

مؤلفین : سمانه ترکی و دکتر مسین عبدوی نژاد

برای این منظور ابتدا ازت میخوام که بهترین تایم و مکان رو برای مطالعه انتخاب کنی و توصیه میکنم نیم ساعت قبل از مطالعه هر چه که دوست داری نوش جان کن . هرگز موقع مطالعه چیزی نخور. ضمناً توصیه میکنم چون مطالبی که در این جزوات برای هر فصل ، به دلیل تعداد زیاد دروس ارائه شده ، زیاد میشه ، هر زمان که از مطالعه خسته شدی برو و استراحت کن اما این قول رو به من بده که بازم برای ادامه یادگیری

برگردی و مطالعه رو ادامه بدی 😊. لازمه تأکید کنم که این جزوه تمامی نکاتی رو که باید درمورد دنباله

ها بدونی رو بهت آموزش میده

با استفاده از این جزوه میتونی هم سوالات مربوط به دنباله ها رو در امتحان پایانترمت عالی پاسخ بدی و هم میتونی به راحتی تست بزنی

آماده ای ؟ میخوایم حسابی با مبحث دنباله ها بازی کنیم و لذت ببریم 😊
قطعا اینو میدونی که به چند عدد که پشت سرهم نوشته شدن یک دنباله میگیریم . قطعا با یک مثال ، بهتر منظورمو میفهمی .

مثال 1, 10, 17, 1000, 50, 0, 65 یک دنباله است.

خب قطعا با توجه به مثال فوق اینو میدونی که هر جمله از دنباله نام گذاری میشه. مثلاً برای مثال فوق عدد 1 جمله اول و عدد 10 جمله دوم است و ...

جمله عمومی دنباله ها را با a_n, b_n, c_n و ... نامگذاری میکنیم. لازمه بدونی جمله های هر دنباله با جمله عمومی a_n رو به صورت a_1, a_2, a_3, \dots و همینطور برای دنباله با جمله عمومی b_n جمله های این دنباله به صورت b_1, b_2, b_3, \dots نامگذاری میشن. دیگه قطعا میدونی که این نامگذاری برای جملات هر دنباله دلخواهی به همین شکل صورت میگیره . به مثالهای زیر دقت کن :

مثال گاهی میتونیم با دیدن چند جمله از یک دنباله الگوی کلی اون دنباله رو حدس بزنیم مثل نمونه های زیر :

$$a_n = 2^n \xrightarrow{\text{الگوی کلی}} \dots \text{ و } 8 \text{ و } 4 \text{ و } 2 \text{ (الف)}$$

$$b_n = n^2 \xrightarrow{\text{الگوی کلی}} \dots \text{ و } 9 \text{ و } 4 \text{ و } 1 \text{ (ب)}$$

مثال

در یک دنباله از اعداد طبیعی ، جمله اول برابر است با 1 و جمله دوم برابر است با 3 و در جملات

سوم به بعد ، هر جمله از حاصل جمع دو جمله قبلی ساخته میشود . جمله دهم این دنباله را بیابید ؟

قطعاً اینقدر ذهن خلاق داری که سریعاً الگوی جملات دنباله رو برای خودت مینویسی :

$$\underbrace{1}_{a_1}, \underbrace{3}_{a_2}, \underbrace{3+1}_{a_3=a_2+a_1=4}, \underbrace{4+3}_{a_4=a_3+a_2=7}, \underbrace{7+4}_{a_5=a_4+a_3=11}, \underbrace{11+7}_{a_6=18}$$

$$\underbrace{18+11}_{a_7=29}, \underbrace{29+18}_{a_8=47}, \underbrace{47+29}_{a_9=76}, \underbrace{76+47}_{a_{10}=123}$$

خیلی راحت دیدیم که جمله دهم این دنباله یعنی $a_{10} = 123$ ساخته شد.

دنباله ی حسابی (عددی)
دنباله ی هندسی

لازمه بدونی دونوع دنباله داریم :

قبل از شروع آموزش این موضوع باید بدونی تصاعد حسابی همون دنباله عددیه .

دنباله حسابی (عددی) : این نوع دنباله ، دنباله ای است که هر جمله آن به اندازه ی

مقدار ثابتی از جمله ی قبل بیشتر یا کمتر است . یعنی اختلاف دوتا جمله پشت سر هم ، همواره ،

ثابت باشد. به عنوان مثال : ... و 9 و 7 و 5 و 3 یک دنباله حسابی است . چون اختلاف هر دو جمله متوالی

2 است. یعنی $9 - 7 = 2$ و $7 - 5 = 2$ و $5 - 3 = 2$

همیشه باید دنباله حسابی را با جمله اول و قدرنسبتش معرفی کنیم .

جمله اول همیشه اندیس 1 میگیره مثل a_1 ، که برای ساخته شدن جمله دوم ، یعنی a_2 باید یک مقدار ثابت به نام d ، یا همون قدر نسبت خودمون 😊 به a_1 اضافه بشه. یادمون نمیره که برای ساخته شدن هر جمله از این دنباله جمله قبلی رو باید با قدرنسبت همواره جمع کنیم.

خب چیزی که لازمه بدونیم اینه که برای ساختن جمله n ام باید به جمله اول یعنی a_1 ، به تعداد $(n - 1)$ تا d اضافه کنیم . ماجرا خیلی جالب شد. الان خیلی ساده میتونیم با دوتا فرمول راحت جمله n ام رو محاسبه کنیم :



موضوع : جزوه کنکوری مبمٹ دنباله ها (رشته ریاضی فیزیک و تجربی)

مؤلفین : سمانه ترکی و دکتر مسین عبدوی نژاد

فرمول اول : اگر جمله $(n - 1)$ رو داشتیم کافی به اون قدر نسبت d رو اضافه کنیم. یعنی

$$a_n = a_{(n-1)} + d$$

فرمول دوم : این فرمول خیلی مهمه چون بیشتر سوالات دنباله حسابی به این فرمول نیاز دارن. در بیشتر سوالها جمله اول و دوم و یا جمله اول و قدرنسبت رو به ما میدن و از ما میخوان که جمله n ام رو محاسبه کنیم اونوقته که نیاز به یک فرمول یا به عبارت بهتر به یک **قانون کلی** برای محاسبه دنباله حسابی خواهیم داشت . فرمولی کلی این دنباله رو خوب توی ذهنت هک کن :

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

a_1	,	$a_1 + (2 - 1)d$,	$a_1 + (3 - 1)d$,	$a_1 + (4 - 1)d$,	...	,	$a_1 + (n - 1)d$
جمله ی اول		جمله ی دوم		جمله ی سوم		جمله ی چهارم				جمله ی n ام

به مثالهای زیر دقت کن .

مثال ← جمله اول یک دنباله ی عددی (حسابی) 4 و قدر نسبت آن 3 است . جمله شانزدهم آن را محاسبه کنید ؟

خیلی ساده است : از متن سوال میفهمیم که $n = 16$ و $d = 3$ و $a_1 = 4$

حالا کافی به اطلاعاتی که در اختیار داریم رو در فرمول **قانون کلی** دنباله حسابی بزاریم . یعنی داریم :

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow a_{16} = 4 + (16 - 1)3 = 4 + (15 \times 3) = 4 + 45 = 49$$

مثال ← جمله عمومی دنباله حسابی که در آن جمله اول دنباله (یعنی $a_1 = 5$) و قدرنسبت آن برابر با $d = -3$ باشد را بدست آورید؟

انتظار دارم سریع بگی جواب خیلی ساده است و فقط کافی به هر چه اطلاعات که متن سوال به ما داده رو داخل فرمول اصلی دنباله حسابی جایگذاری کنیم. با استفاده از بازکردن فرمول دنباله حسابی داریم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow a_n = a_1 + nd - d \rightarrow a_n = \underbrace{dn}_{d \text{ شیب خط است}} + \underbrace{(a_1 - d)}_{\text{عرض از مبدأ یا عدد ثابت}}$$

$$\underline{\underline{a_1=5, d=-3}} \rightarrow a_n = (-3 \times n) + (5 - (-3)) = -3n + 8 \rightarrow a_n = 8 - 3n$$

مثال اگر جمله اول یک دنباله یعنی $a_1 = 6$ و هر جمله از جمله قبلی خود به اندازه $\frac{1}{2}$ بیشتر باشد جمله 17 ام این دنباله را بیابید؟

پاسخ چرا بیهو این شکلی 😞 میشی ؟ جواب بازهم خیلی ساده است . کافیه فرمول دنباله حسابی رو باز کنیم در این صورت داریم :

$$a_n = \underbrace{nd}_{d \text{ شیب خط است}} + \underbrace{(a_1 - d)}_{\text{عرض از مبدأ یا عدد ثابت}}$$

$$\underline{\underline{a_1=6, d=\frac{1}{2}, a_{17}=?, n=17}} \rightarrow a_{17} = \underbrace{\left(17 \times \frac{1}{2}\right)}_{\frac{17}{2}} + \underbrace{\left(6 - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{11}{2}} = \frac{17}{2} + \frac{11}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

$$a_{17} = 14$$

دنباله حسابی از الگوی خطی پیروی میکنه پس با باز کردن جمله عمومی این دنباله به فرمول معادله خط میرسیم که در آن به جای x از n استفاده شده و شیب خط برابر با d است و از طرفی $a_1 - d$ همون عرض از مبدأ یا عدد ثابت این معادله خط (دنباله حسابی) است.

مثال جمله اول یک دنباله حسابی 4 و هر جمله از این دنباله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{2}$ بیشتر است . چندمین جمله از این دنباله عدد 20 است ؟

پاسخ قطعاً بعد از حل شدن مثال قبل جواب دادن به این مثال کار ساده ای شده اما حتما اینو میدونی که توی این مثال جمله نهایی رو داده و از ما میخواد که n رو پیدا بکنیم.

$$a_n = \underbrace{nd}_{d \text{ شیب خط است}} + \underbrace{(a_1 - d)}_{\text{عرض از مبدأ یا عدد ثابت}}$$

$$\underline{\underline{a_1=4, d=\frac{1}{2}, a_n=20, n=?}} \rightarrow 20 = \left(\frac{1}{2} \times n\right) + \left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2} + \frac{7}{2}$$

$$\rightarrow 20 - \frac{7}{2} = \left(\frac{n}{2}\right) \rightarrow \frac{40 - 7}{2} = \left(\frac{n}{2}\right) \rightarrow \frac{33}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\frac{33}{2} = \frac{n}{2} \rightarrow n = 33$$

بزرگترین عدد دو رقمی در دنباله عددی (حسابی) ... و 9 و 4 و 1- را بیابید؟



اگر کمی دقت کنیم میبینیم که $a_1 = -1$ و $d = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5$ خب حالا کافیست که مقادیری که داریم رو داخل فرمول کلی دنباله حسابی جایگذاری کنیم :

$$a_n = nd + (a_1 - d)$$

$$a_n = (5n) + (-1 - 5) = 5n - 6$$

$$a_n = 5n - 6$$

باز برمیگردیم به متن سوال . به ما گفته شده بزرگترین عدد دو رقمی در این دنباله رو میخواد و ما تا اینجا فقط به ضابطه این دنباله رسیدیم. حالا وقتش رسیده که یک نامعادله کوچولو رو حل کنیم تا به اون عدد دو رقمی که این دنباله با ضابطه ای که به دست آوردیم میسازه رو پیدا کنیم: میدونیم که کوچکترین عدد سه رقمی عدد 100 هستش :

$$a_n = 5n - 6 < 100 \rightarrow 5n < \underbrace{100 + 6}_{106} \rightarrow 5n < 106$$

حالا باید دوطرف نا مساوی رو بر عدد 5 تقسیم کنیم :

$$\frac{5n}{5} < \frac{106}{5} \rightarrow n < 21.2$$

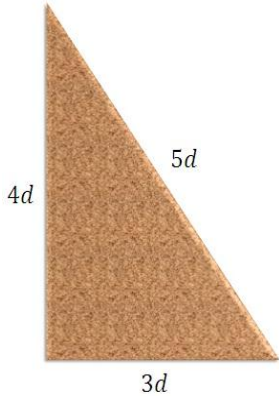
میدونیم که در دنباله حسابی اندیسهها (n ها) اعداد طبیعی هستند و چون $n < 21.2$ هست بزرگترین عدد طبیعی کوچکتر از 21.2 عدد 21 هست و به همین دلیل ما از $n = 21$ در حل این دنباله استفاده میکنیم . پس داریم:

$$a_{21} = a_1 + \underbrace{(21 - 1)}_{20} d \rightarrow a_{21} = (-1) + \underbrace{(20 \times 5)}_{100} = -1 + 100 = 99$$

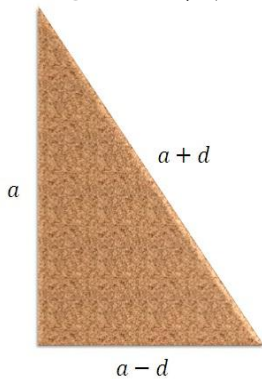
$$a_{21} = 99$$

نکته مهم در دنباله حسابی یک نکته مهم وجود داره : اگر اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل یک دنباله

حسابی d با قدر نسبت بدهند در این صورت اضلاع قائمه این مثلث برابر اند با $3d$, $4d$ و همینطور وتر این مثلث برابر است با $5d$



اثبات : برای اثبات این نکته بهتره اضلاع مثلث رو به صورت زیر نامگذاری کنیم. به شکل زیر نگاه کن. با توجه به نامگذاری که روی شکل مقابل میبینی با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم :



$$(a + d)^2 = a^2 + (a - d)^2 \rightarrow$$

$$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + a^2 - 2ad + d^2$$

$$2ad + 2ad + d^2 - d^2 = 2a^2 - a^2$$

$$4ad = a^2 \rightarrow \frac{4ad}{a} = \frac{a^2}{a} \rightarrow 4d = a$$

بچه ها علت نامگذاری اضلاع به این فرم اینه که تشکیل دنباله حسابی بدن.

حالا کافیه هر جا که توی نامگذاری اضلاع مثلث a میبینیم به جاش $4d$ رو بزاریم در این صورت داریم :

$$a, a - d, a + d \xrightarrow{a=4d} 4d, 4d - d = 3d, 4d + d = 5d$$

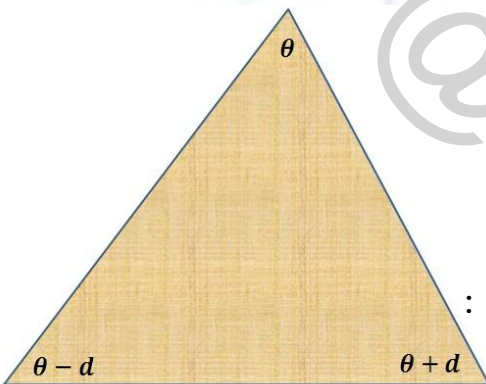
حالا به سادگی میتونیم محیط و مساحت مثلث را هم محاسبه کنیم :

محیط مثلث برابر است با حاصلجمع سه ضلع یعنی : $4d + 3d + 5d = 12d$

مساحت مثلث برابر میشه با نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع آن یعنی :

$$\frac{1}{2}(3d \times 4d) = \frac{12d^2}{2} = 6d^2$$

اگر در یک مثلث زوایای داخلی آن تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d بدهند قطعا یکی از زوایای داخلی مثلث برابر با 60° خواهد بود



اثبات این نکته هم مثل اثبات نکته قبلی بسیار ساده است:

میدونیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با 180° است پس داریم :

$$180 = \theta + (\theta - d) + (\theta + d) = 3\theta \rightarrow 3\theta = 180$$

$$\theta = \frac{180}{3} = 60 \rightarrow \theta = 60$$

حالا زوایای مثلث عبارتند از :

$$\theta, \theta - d, \theta + d \xrightarrow{\theta=60^\circ} 60^\circ, 60^\circ - d, 60^\circ + d$$

تست : در یک مثلث قائم الزاویه با محیط $24cm$ ، اضلاع تشکیل تصاعد حسابی میدهند . اندازه وتر کدام است ؟

11 (4

10 (3

8 (2

6 (1

جواب : با توجه به اثبات نکات فوق داریم :

$$3d, 4d, 5d \xrightarrow{\text{محیط مثلث}} 3d + 4d + 5d = 12d \rightarrow 12d = 24 \rightarrow d = \frac{24}{12} = 2cm$$

$$d = 2 \rightarrow \text{وتر} = 5d \rightarrow \text{وتر} = 5 \times 2 = 10cm$$

پس گزینه 3 صحیحه



دنباله عددی 200 و ... و 8 و 2 چند جمله دارد؟



جواب خیلی ساده است . با توجه به جمله اول و دوم دنباله داریم : $d = 8 - 2 = 6$
حالا با توجه به فرمول دنباله حسابی جمله عمومی این دنباله رو مینویسیم :

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \xrightarrow{a_n=200, d=6, a_1=2, n=?} 200 = 2 + (n - 1)6 =$$

$$200 = 2 + 6n - 6 \rightarrow 200 = 6n - 4 \rightarrow \underbrace{200 + 4}_{204} = 6n$$

$$n = \frac{204}{6} = 34 \rightarrow n = 34$$

پس این دنباله 34 جمله دارد .



در دنباله حسابی تعداد جملات برابر است با :

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

پس برای مثال فوق داریم :

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \xrightarrow{a_n=200, d=6, a_1=2, n=?} n = \frac{200-2}{6} + 1 = \frac{198}{6} + 1 = 33 + 1 = 34 \rightarrow n = 34$$



جمله سوم یک دنباله حسابی ، دو برابر جمله هفتم آن است . کدام جمله این دنباله برابر صفر است ؟



این سوال خیلی مهمه. با توجه به متن سوال که به ما گفته جمله سوم 2 برابر جمله هفتم هست

کافیه چیزی رو که متن سوال به فارسی گفته به شکل ریاضیاتیش بنویسیم پس داریم :

$$a_3 = 2a_7$$

خب حالا با توجه به تعریف دنباله حسابی خوبه ببینیم جمله هفتم دنباله چه شکلیه ؟

$$a_7 = a_1 + (n - 1)d \rightarrow a_7 = a_1 + (7 - 1)d = a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_3 = a_1 + (n - 1)d \rightarrow a_3 = a_1 + (3 - 1)d = a_3 = a_1 + 2d$$

حالا کافیه توی عبارت $a_3 = 2a_7$ هرجا که a_7 رو دیدیم به جاش $a_1 + 6d$ رو بزاریم . پس داریم :

$$a_3 = 2a_7 \xrightarrow{a_3 = a_1 + 2d, a_7 = a_1 + 6d} \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3} = 2 \underbrace{(a_1 + 6d)}_{a_7} =$$

$$a_1 + 2d = 2a_1 + 12d$$

حالا هر دو طرف تساوی را به یک طرف برده و برابر صفر قرار میدهم یعنی داریم :

$$0 = 2a_1 + 12d - (a_1 + 2d) \rightarrow 0 = a_1 + 10d$$

میدونیم که با توجه به تعریف دنباله حسابی $a_1 + 10d$ تعریف جمله یازدهم این دنباله است .

دیدي جواب چقدر ساده بود ؟

ممکن بود در این سوال بگه در یک دنباله حسابی جمله سوم دو برابر جمله هفتم است ، جمله اول آن چند برابر قدر نسبت است؟ اگه به جواب نهایی نگاه کنیم میبینیم به عبارت $a_1 + 10d = 0$ است پس کافیه این معادله رو حل کنیم در این صورت به $a_1 = -10d$ میرسیم که به ما میگه جمله اول (-10) برابر قدر نسبت است .

در دنباله حسابی a_n همیشه یک عبارت **درجه اول** بر حسب n است . پس اگه جایی عبارتهایی

مثل : $a_n = n^2$, $b_n = 2^n$, $c_n = \frac{1}{n}$, ... دیدي هیچکدومشون دنباله حسابی نیستن اما

عبارتهایی مثل : $a_n = 2n + 1$, $b_n = 5 - 3n$, $c_n = \frac{2-7n}{4}$ همگی دنباله ی حسابی اند چون درجه اول هستن یعنی توان عبارت مجهول برابر با عدد یک است. لازمه به این موضوع هم دقت کنیم که در دنباله های حسابی همیشه ضریب n همون قدر نسبت دنباله است پس به عنوان مثال در دنباله

$a_n = 2n + 1$ قدر نسبت برابر با $d = 2$ است و در دنباله $b_n = 5 - 3n$ قدر نسبت برابر با $d = -3$ است و در دنباله $c_n = \frac{2-7n}{4}$ قدر نسبت برابر با $d = -\frac{7}{4}$ است.

مثال در دنباله حسابی a_n ، جمله یازدهم 24 واحد بیشتر از جمله هشتم است . جمله بیستم این دنباله چقدر بیشتر از جمله پانزدهم آن است ؟

پاسخ با توجه به متن سوال پاسخ خیلی ساده است : الان میدونیم که $a_{11} - a_8 = 24$ و میدونیم که بین a_8 تا a_{11} ما 3 بار از قدر نسبت استفاده کردیم. پس میتونیم معادله $a_{11} - a_8 = 24$ رو به صورت $a_p - a_q = (p - q)d$ بنویسیم . این فرمول خیلی مهمه و از این نمونه سوالها مانند این مثال توی تستها زیاد میبینیم پس فرمولی که گفتم رو خوب درک کن و به خاطرت بسپار . حالا به راحتی میتونیم پاسخ مثال رو بدیم .

$$a_p - a_q = (p - q)d \rightarrow a_{11} - a_8 = 24 \rightarrow (11 - 8)d = 24 \rightarrow 3d = 24$$

$$\rightarrow d = \frac{24}{3} = 8 \rightarrow d = 8$$

با پیدا کردن قدرنسبت به راحتی میتونیم اختلاف بین جمله بیستم و پانزدهم رو هم محاسبه کنیم:

$$a_p - a_q = (p - q)d \xrightarrow{p=20, q=15, d=8} a_{20} - a_{15} = \left(\underbrace{20 - 15}_5 \right) 8 = 40$$

$$a_{20} - a_{15} = 40$$

به جواب رسیدیم.

نکته مهم در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n که همه جملات آن مخالف صفر اند داریم :

$$\frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n - k}{a_k \cdot a_n}$$

اثبات :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1} a_k} + \frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{a_{k+2} a_{k+1}} + \dots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}} + \frac{1}{a_{k+2}} - \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{a_n - a_k}{a_k a_n} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{(n-k)d}{a_k a_n} \right) = \frac{n-k}{a_k a_n} \end{aligned}$$

تست : در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n که همه جملات آن مخالف صفر اند ، حاصل عبارت زیر کدام است ؟

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{19} \cdot a_{20}} = ?$$

$\frac{20}{a_1 a_{19}}$ (4) $\frac{19}{a_1 a_{20}}$ (3) $20 a_1 a_{19}$ (2) $19 a_1 a_{20}$ (1)

جواب : با توجه به نکته فوق داریم :

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{19} \cdot a_{20}} = \frac{20-1}{a_1 a_{20}} = \frac{19}{a_1 a_{20}}$$

پس گزینه 3 صحیحه

نکته مهم : وقتی دو دنباله حسابی داریم، جملات مشترک آن دو دنباله ، تشکیل دنباله حسابی جدید می دهند

که قدرنسبت آن برابر است با $[d_1 \text{ و } d_2]$ (ک.م.م) و جمله اول آن، اولین جمله مشترک دو دنباله است :

تست : در دو دنباله حسابی به صورت ... و 12 و 7 و 2 و ... و 14 و 11 و 8 چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

61 (4)

60 (3)

59 (2)

58 (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دنباله اول} \quad \dots \text{ و } 17 \text{ و } 12 \text{ و } 7 \text{ و } 2 \\ \text{دنباله دوم} \quad \dots \text{ و } 17 \text{ و } 14 \text{ و } 11 \text{ و } 8 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{دنباله مشترک}} d = [d_1, d_2] = [5, 3] = 5 \times 3 = 15$$

با توجه به نکته فوق می‌دونیم که جمله اول دنباله حسابی جدید برابر است با اولین جمله مشترک هر دو دنباله در این صورت $a_1 = 17$

$$a_n = dn + (a_1 - d) = 15n + (17 - 15) = 15n + 2$$

$$100 \leq 15n + 2 \leq 999 \xrightarrow{-2} 100 - 2 \leq 15n + 2 - 2 \leq 999 - 2 \rightarrow 98 \leq 15n \leq 997$$

$$\xrightarrow{\div 15} \frac{98}{15} \leq \frac{15n}{15} \leq \frac{997}{15} \rightarrow 6.53 \leq n \leq 66.47 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 7, 8, \dots, 66$$

در این صورت 60 جمله مشترک وجود دارد پس گزینه 3 صحیح

شرط سه جمله متوالی در دنباله حسابی : گاهی تستها و سوالاتی رو میبینیم که از سه عدد

A و B و C دنباله حسابی میسازند. می‌دونیم که در دنباله حسابی هر جمله با قدر نسبت جمع میشه و جمله

بعد از خودشو میسازه. یعنی $B - A = d$, $C - B = d$. حالا کافیه یک شرط کوچولو رو توی ذهنمون جا بدیم تا بتونیم به هر سوالی در مورد سه جمله متوالی یا به عبارت دیگه واسطه های دنباله حسابی پاسخ بدیم. در ابتدا باید بدونیم چرا به B میگیم واسطه حسابی ؟ (B واسطه حسابی است چون در وسط قرار دارد). حالا شرط مهم وجود واسطه حسابی رو مطرح میکنیم :

$$A, B, C \text{ دنباله حسابی تشکیل میدهند.} \xleftrightarrow{\text{اگر و تنها اگر}} 2B = A + C$$

به عنوان مثال برای اعداد 2 و 10 واسطه حسابی عبارت است از :

$$2, B, 10 \xleftrightarrow{\text{اگر و تنها اگر}} 2B = A + C \rightarrow 2B = 2 + 10 \rightarrow 2B = 12 \rightarrow B = \frac{12}{2} = 6$$

$$B = 6$$

واسطه حسابی همون میانگین معروفیه که همیشه ازش استفاده میکنیم.

مثال به ازای چه مقدار از k سه عدد $4k - 5$, $2k + 3$, $k + 1$ جملات متوالی دنباله حسابی هستند ؟

پاسخ حتما با دیدن این سوال ترسیدی چون مثالی که برای درک واسطه حسابی زدیم خیلی ساده بود اما الان به سوال نکته دار میبینی؟ اصلا نگران نباش بازم پاسخ خیلی ساده است: کافیه اول A و B و C رو مشخص کنیم و بعدش اونها رو داخل فرمول شرط واسطه حسابی قرار بدیم :

$$A = k + 1 \text{ و } B = 2k + 3 \text{ و } C = 4k - 5$$

$$\xrightarrow{2B=A+C} 2(2k + 3) = (k + 1) + (4k - 5) \rightarrow 4k + 6 = 5k - 4$$

حالا کافیه معلومها رو به یک طرف و مجهولها رو به طرف دیگه تساوی منتقل کنیم:

$$6 + 4 = 5k - 4k \rightarrow 10 = k$$

حالا به راحتی میتونیم دنباله حسابیمونو بسازیم :

$$k = 10 \rightarrow \begin{cases} A = k + 1 \rightarrow A = 10 + 1 = 11 \rightarrow A = 11 \\ B = 2k + 3 \rightarrow b = \underbrace{2(10)}_{20} + 3 = 23 \rightarrow B = 23 \\ C = 4k - 5 \rightarrow C = \underbrace{4(10)}_{40} - 5 = 35 \rightarrow C = 35 \end{cases}$$

خب حالا که A و B و C رو پیدا کردیم میتونیم قدرنسبت این دنباله رو هم پیدا کنیم ، دنباله حسابی ما برابر شد با : 35 و 23 و 11 در این صورت $d = 35 - 23 = 12$ و $d = 23 - 11 = 12$ پس قدر نسبت $d = 12$ رو هم بدست آوردیم .

با یک مثال دیگه این قسمت رو تموم میکنیم .

نکته مهم در دنباله حسابی اگر روابط زیر بین اندیس جملات برقرار باشد ، برای جملات متناظر اندیسها هم برقرار میشود:

$$m + n = p + q \rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$$

$$m - n = p - q \rightarrow a_m - a_n = a_p - a_q$$

$$\frac{m + n + p}{3} = q \rightarrow \frac{a_m + a_n + a_p}{3} = a_q$$

$$\frac{m + n}{2} = t \rightarrow \frac{a_m + a_n}{2} = a_t \rightarrow a_m + a_n = 2a_t$$

حالا بامثال زیر نکته فوق را بهتر درک میکنید.

مثال اگر a_n یک دنباله حسابی باشد حاصل عبارت $\frac{a_1 + a_4 + a_7}{a_2 + a_6}$ را با شرط $a_n \neq 0$ محاسبه نمایید؟

پاسخ بازم شکل سوال ترسناکه اما پاسخش خیلی ساده است. در روش اول : با استفاده از شرط واسطه

حسابی داریم:

$$\begin{aligned} a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = 2a_4 &\rightarrow \frac{a_1 + a_4 + a_7}{a_2 + a_6} = \frac{\overbrace{a_1 + a_7}^{2a_4} + a_4}{\underbrace{a_2 + a_6}_{2a_4}} = \frac{2a_4 + a_4}{2a_4} \\ &= \frac{3a_4}{2a_4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

روش دوم : با کمک نکته فوق داریم :

$$\begin{aligned} 1 + 7 = 6 + 2 = 8 &\rightarrow a_1 + a_7 = a_6 + a_2 \\ \frac{1 + 7 + 6}{3} = \frac{14}{3} \sim 4 &\rightarrow \frac{a_1 + a_7 + a_6}{3} = a_4 \rightarrow a_1 + a_7 + a_6 = 3a_4 \quad * \end{aligned}$$

و داریم :

$$\frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow \frac{a_1 + a_7}{2} = a_4 \rightarrow a_1 + a_7 = 2a_4 \quad **$$

حالا از * و ** داریم :

$$\frac{a_1 + a_4 + a_7}{a_2 + a_6} = \frac{3a_4}{2a_4} = \frac{3}{2}$$

برای حل این سوال روش دیگه ای هم وجود داره. میتونیم تعریف دنباله حسابی رو برای تک تک جمله های a_6 و a_2 و a_7 و a_4 و a_1 به صورت جداگانه بنویسیم و در نهایت نتیجه هر کدوم رو داخل عبارت $\frac{a_1+a_4+a_7}{a_2+a_6}$ جایگزاری کنیم و بازهم جواب برابر با $\frac{3}{2}$ خواهد شد.

درج واسطه حسابی :

هدف از درج واسطه حسابی اینه که بین دو عدد یا به عبارت بهتر دو جمله از دنباله حسابی چندین عدد رو بنویسیم به طوری که همه اعداد با هم دنباله حسابی بسازن. ممکنه بین دوجمله از دنباله حسابی چندین واسطه حسابی رو قرار بدیم یعنی این بار بیش از یک واسطه حسابی مدنظر ماست. با یک مثال این قسمت رو به خوبی یاد میگیری:

مثال
بین دو عدد 13 و 41 سه عدد x, y, z را طوری محاسبه کنید که نتیجه یک دنباله حسابی باشد و بزرگترین عدد بین سه واسطه حسابی پیدا شده را مشخص کنید؟

پاسخ
با توجه به متن سوال میدونیم که $a_1 = 13, a_2 = x, a_3 = y, a_4 = z, a_5 = 41$

میدونیم که تعریف دنباله حسابی به صورت :

$$a_2 = a_1 + (2 - 1)d, \quad a_3 = a_1 + (3 - 1)d, \quad a_4 = a_1 + (4 - 1)d$$

$$, a_5 = a_1 + (5 - 1)d$$

$$a_2 = a_1 + d \rightarrow a_2 = 13 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d \rightarrow a_3 = 13 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow a_4 = 13 + 3d$$

$$a_5 = a_1 + 4d \rightarrow a_5 = 13 + 4d = 41 \rightarrow 4d = 41 - 13 = 28 \rightarrow d = \frac{28}{4} = 7$$

$$d = 7$$

$$a_2 = 13 + d \rightarrow a_2 = 13 + 7 = 20 \rightarrow x = 20$$

$$a_3 = 13 + 2d \rightarrow a_3 = 13 + 2(7) = 13 + 14 = 27 \rightarrow y = 27$$

$$a_4 = 13 + 3d \rightarrow a_4 = 13 + 3(7) = 13 + 21 = 34 \rightarrow z = 34$$

$z = 34$ بزرگترین واسطه حسابی این دنباله شد که ما محاسبه کردیم.

نکته خیلی خیلی مهم تستی : اگر بخوایم بین دو عدد a, b به تعداد n تا عدد (واسطه حسابی) درج

کنیم ، میدونیم که در این صورت $n + 2$ تا جمله داریم که قدر نسبت آن با استفاده از فرمول زیر به راحتی محاسبه میشه :

$$d = \frac{b - a}{n + 1}$$

ممکنه توی تست ، به جز محاسبه n تا واسطه حسابی بین دو عدد a, b که با استفاده از فرمول محاسبه قدرنسبت فوق به راحتی قابل محاسبه شد از ما بخوان که مجموع جملات دنباله حسابی رو هم بخوان در این صورت اگه بخوایم همه $n + 2$ جمله های دنباله رو باهم جمع کنیم زمان زیادی رو باید صرف کنیم برای این کار کافیه از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$a + x_1 + x_2 + \dots + x_n + b = (a + b) \frac{n + 2}{2}$$

و برای محاسبه مجموع n واسطه ی حسابی کافیه از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n}{2} (a + b)$$

مثال پنج عدد بین 5 و 26 بنویسید تا دنباله عددی با 7 جمله ساخته شود. قدر نسبت این دنباله و مجموع تمام جملات دنباله و مجموع واسطه های حسابی این دنباله را بدست آورید؟

پاسخ خیلی ساده است کافیه اول قدر تسبیت رو محاسبه کنیم: n تعداد واسطه های حسابی است

$$a = 5 , b = 26 , n = 5 \rightarrow d = \frac{b - a}{n + 1} \rightarrow$$

$$d = \frac{26 - 5}{5 + 1} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$d = 3.5$$

$$x_1 = 5 + 3.5 = 8.5, \quad x_2 = 8.5 + 3.5 = 12, \quad x_3 = 12 + 3.5 = 15.5$$

$$x_4 = 15.5 + 3.5 = 19, \quad x_5 = 19 + 3.5 = 22.5$$

مجموع تمام جملات دنباله عبارت است از :

$$a + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + b = \frac{n + 2}{2} (a + b) = \frac{5 + 2}{2} (5 + 26) =$$

$$\frac{7}{2} \times 31 = \frac{217}{2}$$

حالا مجموع واسطه های حسابی رو هم محاسبه میکنیم :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{n}{2} (a + b) = \frac{5}{2} (5 + 26) = \frac{5}{2} \times 31 = \frac{155}{2}$$

مجموع جملات دنباله حسابی :

تا به حال با تمامی راه کارهای محاسبه قدر نسبت و شرط تشکیل دنباله حسابی و تعریف دنباله حسابی به خوبی آشنا شدیم حالا برای تکمیل مبحث دنباله حسابی کافیه مجموع جملات دنباله حسابی رو هم یاد بگیریم. به مجموع n جمله از دنباله حسابی S_n میگویم و آن را با استفاده از فرمول زیر نمایش میدیم :

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

به عنوان مثال مجموع 3 جمله از دنباله حسابی رو با $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ نمایش میدیم.

برای محاسبه S_n دو فرمول مهم وجود داره که باید خوب این فرمولها رو یاد بگیریم :

(1) اگر a_1 و d و n رو داشته باشیم باید از فرمول زیر استفاده کنیم :

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \rightarrow S_n = a_1n + \frac{n^2d}{2} - \frac{nd}{2} = \frac{d}{2}n^2 + n(a_1 - \frac{d}{2})$$

هرزمان که به ما فرمول کلی S_n داده بشه همیشه ضریب n^2 برابر است با نصف قدرنسبت یعنی $\frac{d}{2}$ در این صورت اگر بخوایم قدر نسبت یک دنباله هندسی رو با استفاده از فرمول S_n محاسبه کنیم کافیست که ضریب n^2 را دو برابر کنیم یعنی داریم $d = 2 \times \frac{d}{2}$. از طرفی اگر بخوایم با استفاده از فرمول S_n جمله اول دنباله حسابی را محاسبه کنیم کافیست که $n = 1$ قرار داده بشه در این صورت $S_1 = a_1$. پس فهمیدیم که با استفاده از جمله عمومی S_n به راحتی هم قدرنسبت و هم جمله اول یک دنباله حسابی به راحتی قابل محاسبه هستند.

(2) اگر a_1 و a_n و n رو داشته باشیم باید از فرمول زیر استفاده کنیم :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال مجموع 12 جمله اول از دنباله حسابی با شرایط $a_1 = 2$ و $d = \frac{1}{2}$ را محاسبه نمایید ؟

پاسخ با توجه به داده های سوال میدونیم که $n = 12$ جمله اول و قدر نسبت هم داده شده کافیست از فرمول زیر استفاده کنیم :

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow{n=12, a_1=2, d=\frac{1}{2}}$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} \left((2 \times 2) + \left((12-1) \times \frac{1}{2} \right) \right) = 6(4 + 5.5) = 6 \times 9.5 = 57$$

مثال مجموع تمام مضارب دو رقمی عدد 6 چقدر است؟ ($12 + 18 + \dots + 90 + 96 = ?$)

پاسخ از متن سوال مشخصه که $d = 6$ و جمله اول این دنباله $a_1 = 12$ و $a_n = 96$

حالا برای حل این سوال به تعداد جملات هم نیاز داریم پس باید قبل از محاسبه S_n ابتدا n را محاسبه کنیم:

$$n = 15$$

حالا مجموع جملات دنباله را محاسبه میکنیم :

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \rightarrow S_{15} = \frac{15}{2} (12 + 96) = 7.5 \times 108 = 810$$

$$S_{15} = 810$$

دنباله هندسی : این نوع دنباله ، دنباله ای است که هر جمله ، مضرب ثابتی از جمله ی قبلی است . یعنی نسبت دوتا جمله متوالی (پشت سر هم) ، همواره ، مقدار ثابتی باشد .
به عنوان مثال :

$$a_1 \xrightarrow{\times q} a_2 \xrightarrow{\times q} a_3 \longrightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$\underbrace{a_1}_{\text{جمله ی اول}}, \quad \underbrace{a_1 q}_{\text{جمله ی دوم}}, \quad \underbrace{a_1 q^2}_{\text{جمله ی سوم}}, \quad \underbrace{a_1 q^3}_{\text{جمله ی چهارم}}, \quad \dots, \quad \underbrace{a_1 q^{n-1}}_{\text{جمله ی } n \text{ ام}}$$

حالا دیگه فرمول کلی دنباله هندسی رو میتونیم به راحتی بنویسیم و از اون استفاده کنیم :

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

حالا با چندتا مثال خیلی بهتر این مبحث رو یاد میگیریم :

مثال - در دنباله هندسی با جمله اول 3 و قدرنسبت 2 مقدار جمله ی هفتم را محاسبه نمایید؟

جواب خیلی ساده است فقط یه جایگذاری ساده است :

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} \xrightarrow{a_1=3, \quad q=2, \quad a_7=?} a_7 = 3 \times (2^{7-1}) = 3 \times 2^6 = 3 \times 64 = 192 \longrightarrow a_7 = 192$$

دیدنی چقدر ساده بود ؟

مثال

جمله عمومی دنباله ی هندسی با جمله اول 4 و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ را بدست آورید؟

پاسخ

بازم یه جایگذاری ساده داریم فقط باید دقت کنیم که باید تا جایی که ممکنه جوابی رو که با جایگذاری بدست میاریم نیاز به ساده کردن داشته باشه پس حتما در این مثال استفاده از خواص و ویژگیهای اعداد تواندار به کمک ما میان.

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} \xrightarrow{a_1=4, \quad q=\frac{1}{2}, \quad a_n=?} a_n = \underset{2 \times 2 = 2^2}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \times \frac{1^{n-1}}{2^{n-1}}$$

حالا باید کسر $\frac{1^{n-1}}{2^{n-1}}$ رو معکوس کنیم و علامت توان عدد 2^{n-1} رو به منفی تغییر بدیم . یعنی داریم :

$$a_n = 2^2 \times \frac{1^{n-1}}{2^{n-1}} \xrightarrow{\text{معکوس میکنیم}} a_n = 2^2 \times \frac{2^{-(n-1)}}{1^{-(n-1)}} \xrightarrow{1^{-(n-1)}=1} a_n = 2^2 \times 2^{-(n-1)} = \\ = 2^2 \times 2^{-n+1} = 2^{2+(-n+1)} = 2^{2+1-n} = 2^{3-n} \longrightarrow a_n = 2^{3-n}$$

جواب خیلی ساده بود برای اینکه کمی ویژگیهای اعداد توان دار برات یادآوری بشه جواب رو حسابی باز کردم. درواقع برای دانش آموزانی که ویژگیهای اعداد توان دار رو به خوبی یادشونه پاسخ به چنین سوالی خیلی راحت و کوتاه خواهد بود.

مثال

در یک دنباله ، جمله اول 24 و هر جمله نصف جمله قبلی خودش است. جمله چندم این دنباله برابر

با $\frac{3}{16}$ است ؟

پاسخ

پاسخ ساده است. قطعا چون نوع دنباله رو متن سوال مطرح نکرده باید نوع دنباله رو خودمون تشخیص بدیم. وقتی متن سوال میگوهر جمله نصف جمله قبلی خودش است ما سریع این توی ذهنمون میاد که مثلا $a_2 = \frac{a_1}{2}$ ، وقتی که چنین نسبتی توی ذهنمون از متن سوال شکل میگیره یعنی هر جمله از این دنباله از حاصلضرب جمله اول در عدد $\frac{1}{2}$ ساخته میشه و این بیانگر اینه که ما با دنباله هندسی سروکار داریم: حالا جواب رو محاسبه میکنیم:

$$a_1=24, \quad q=\frac{1}{2}, \quad a_n=\frac{3}{16}, \quad n=? \rightarrow a_n = a_1 \times q^{n-1} \rightarrow \frac{3}{16} = 24 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

اگر عدد 24 رو باز کنیم میبینیم که $24 = 3 \times \underbrace{8}_{2^3} = 3 \times 2^3$. حالا کافیه که به جای عدد 24 از عدد 3×2^3 استفاده کنیم. حالا داریم :

$$\frac{3}{16} = 24 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{3}{16} = (3 \times 2^3) \times \frac{1^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{3}{16} = (3 \times 2^3) \times \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow n = 8$$

جمله هشتم این دنباله برابر است با $\frac{3}{16}$ یعنی داریم : $a_8 = \frac{3}{16}$ به جواب نهایی رسیدیم.

لازمه بازم بگم دانش آموزانی که پایه ریاضی قوی ای دارن هیچوقت پاسخ چنین سوالی رو تا این اندازه باز نمیکنن.

جملات دوم ، سوم و پنجم یک دنباله هندسی مثبت و سه جمله متوالی دنباله حسابی اند. اگر قدر

مثال

نسبت این دنباله q باشد مقدار $q^3 + 1$ چند برابر خود q خواهد بود؟

میدونیم که ضابطه دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ است. حالا پس میدونیم که

جمله دوم برابر است با $a_2 = a_1 \times q^{2-1} = a_1 q^1$ و جمله سوم برابر است با $a_3 = a_1 \times q^{3-1} = a_1 q^2$

و جمله پنجم برابر است با $a_5 = a_1 \times q^{5-1} = a_1 q^4$ حالا این سه جمله با هم جملات متوالی دنباله

حسابی رو میسازن . یادته که شرط سه جمله متوالی دنباله حسابی $2B = A + C$ هست پس به راحتی میتونیم جواب رو محاسبه کنیم:

$$A = a_2 = a_1 q^1 \quad \text{و} \quad B = a_3 = a_1 q^2 \quad \text{و} \quad C = a_5 = a_1 q^4$$

$$2B = A + C \rightarrow 2(a_1 q^2) = a_1 q^1 + a_1 q^4$$

حالا کافیه دو طرف معادله فوق را بر $a_1 q^1$ تقسیم کنیم در این صورت داریم :

$$\frac{a_5 = a_1 q^{5-1} = a_1 q^4 \quad \text{و} \quad a_3 = a_1 q^{3-1} = a_1 q^2}{\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 q^4}{a_1 q^2} = q^{4-2} = q^2}$$

$$\rightarrow q^2 = \frac{9}{4} \rightarrow q = \pm \frac{3}{2}$$

چون سوال به ما گفته جملات این دنباله مثبت هستند پس برای ما $q = -\frac{3}{2}$ قابل قبول نیست چون باعث میشه جملات دنباله هندسی مورد نظر ما **نوسانی** بشن. پس فقط $q = +\frac{3}{2}$ رو میپذیریم. حالا برای بدست آوردن نسبت جملات هفتم و دهم داریم :

$$\frac{a_7}{a_{10}} = q^{7-10} = q^{-3} = \frac{1}{q^3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{8}} = \frac{1}{\frac{27}{8}} = \frac{1 \times 8}{1 \times 27} = \frac{8}{27}$$

$$\frac{a_7}{a_{10}} = q^{7-10} = q^{-3} = \frac{8}{27}$$

دور در دور ، نزدیک در نزدیک رو یادته ؟

حالا میریم سراغ نکات مهمی که باید موقع تست زدن به آنها توجه کنیم :

در دنباله هندسی با کمک جمله اول a_1 و قدرنسبت q میتونیم به راحتی روند **صعودی** یا **نزولی** و یا **نوسانات** دنباله هندسی رو بررسی کنیم. بنابراین برای دنباله هندسی حالت های زیر رو داریم :

الف) اگر جمله اول و قدرنسبت دنباله مثبت باشن یعنی $a_1 > 0$ و $q > 1$ در این صورت چون $a_n = a_1 \times q^{n-1} > 0$ پس جملات دنباله هندسی افزایش می یابند پس این دنباله یک دنباله **صعودی** است. مثلا در دنباله هندسی $a_1 = 2$ و $q = 2$ داریم : ... و 32 و 16 و 8 و 4

ب) اگر جمله اول دنباله منفی و قدرنسبت دنباله مثبت باشه یعنی $a_1 < 0$ و $q > 1$ در این صورت چون $a_n = a_1 \times q^{n-1} < 0$ پس جملات دنباله هندسی کاهش می یابند پس این دنباله یک دنباله **نزولی** است. مثلا در دنباله هندسی $a_1 = -2$ و $q = 3$ داریم : ... -54 , -18 , -6 , -2

ج (اگر جمله اول دنباله مثبت و قدر نسبت دنباله مثبت باشه یعنی $a_1 > 0$ و $0 < q < 1$ در این صورت چون $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ پس جملات دنباله هندسی کاهش می یابند اما لزوماً منفی نیستند پس این دنباله یک دنباله نزولی است. مثلاً در دنباله هندسی $a_1 = 2$ و $q = \frac{1}{2}$ داریم:

$$2, 1, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, \dots$$

د (اگر جمله اول دنباله منفی و قدر نسبت دنباله مثبت باشه یعنی $a_1 < 0$ و $0 < q < 1$ در این صورت چون $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ پس جملات دنباله هندسی افزایش می یابند اما لزوماً مثبت نیستند پس این دنباله یک دنباله صعودی است. مثلاً در دنباله هندسی $a_1 = -3$ و $q = \frac{1}{2}$ داریم:

$$-3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \dots$$

هـ (اگر جمله اول دنباله مثبت و قدر نسبت دنباله منفی باشه یعنی $a_1 > 0$ و $q < 0$ در این صورت چون $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ پس جملات دنباله هندسی نوسان میکنند و متوالیاً مثبت و منفی میشوند و رفتار یکنواختی ندارند. پس این دنباله یک دنباله نوسانی است. مثلاً در دنباله های هندسی زیر داریم:

$$2, -6, 18, -54, \dots \quad (1) \quad a_1 = 2, q = -3 \text{ در این صورت داریم:}$$

$$-2, 6, -18, 54, \dots \quad (2) \quad a_1 = -2, q = -3 \text{ در این صورت داریم:}$$

$$6, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \dots \quad (3) \quad a_1 = 6, q = -\frac{1}{2} \text{ در این صورت داریم:}$$

و (اگر جمله اول دنباله مثبت یا منفی و قدر نسبت دنباله ثابت و برابر با عدد 1 باشه یعنی $q = 1$ در این صورت چون $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ پس جملات دنباله هندسی ثابت باقی میمانند. پس این دنباله یک دنباله ثابت است. تنها دنباله ای که هم حسابی و هم هندسی است این دنباله است. این دنباله اگر هندسی در نظر گرفته شود، در آن قدرنسبت $q = 1$ است و اگر حسابی در نظر گرفته شود قدر نسبت $d = 0$ خواهد بود که در این دنباله تمامی جملات آن برابر با a_1 است و داریم:

$$a_1, a_1, a_1, a_1, \dots$$

شرط سه جمله متوالی در دنباله هندسی : گاهی تستها و سوالاتی رو میبینیم که از میگو سه عدد A و B و C دنباله هندسی میسازند. میدونیم که در دنباله هندسی هر جمله در قدر نسبت ضرب میشه و جمله بعد از خودشو میسازه. یعنی $\frac{B}{A} = q$, $\frac{C}{B} = q$. حالا کافیه یک شرط کوچولو رو توی ذهنمون جا بدیم تا بتونیم به هر سوالی در مورد سه جمله متوالی یا به عبارت دیگه واسطه های دنباله هندسی رو که میبینیم به راحتی پاسخ بدیم. در ابتدا باید بدونیم چرا به B میگی واسطه هندسی ؟ (B واسطه هندسی است چون در وسط قرار دارد). حالا شرط مهم وجود واسطه هندسی رو مطرح میکنیم :

$$A, B, C \text{ دنباله هندسی تشکیل میدهند.} \iff B^2 = AC \quad \text{اگر و تنها اگر}$$

به عنوان مثال برای اعداد 2 و 10 واسطه هندسی عبارت است از :

$$2, B, 10 \xrightarrow{\text{اگر و تنها اگر}} B^2 = AC \rightarrow B^2 = 2 \times 10 \rightarrow B^2 = 20 \rightarrow B = \pm\sqrt{20}$$

$$B = \pm\sqrt{20}$$

اگر $B = +\sqrt{20}$ در نظر گرفته بشه دنباله ما **یکنوا** و **صعودی** است و اگر $B = -\sqrt{20}$ در نظر گرفته بشه هم دنباله هندسی ما **غیریکنوا** (یعنی این دنباله **نوسانی**) است. پس نترس از پاسخی که به دست میاری

مثال اگر در دنباله هندسی $a_1 = A = 2$ و $a_3 = C = 8$ باشد ، واسطه هندسی این دنباله را محاسبه نمایید؟

جواب : با توجه به فرمول واسطه هندسی داریم :

$$A, B, C \text{ دنباله هندسی تشکیل میدهند.} \iff B^2 = AC \quad \text{اگر و تنها اگر}$$

$$2, B, 8 \xrightarrow{\text{اگر و تنها اگر}} B^2 = AC \rightarrow B^2 = 2 \times 8 \rightarrow B^2 = 16 \rightarrow B = \pm\sqrt{16} \rightarrow B = \pm 4$$

اگر $B = +4$ در نظر گرفته بشه دنباله ما **یکنوا** و **صعودی** است و اگر $B = -4$ در نظر گرفته بشه دنباله ما **غیریکنوا** و **نوسانی** است یعنی داریم : برای دنباله صعودی 2, 4, 8 و برای دنباله نوسانی 2, -4, 8 است.

حالا یک نکته مهم کنکوری رو هم مطرح میکنیم به مثال زیر توجه کن :

مثال - برای دنباله ای با جملات $a_1 = A = -2$ و $a_3 = C = 7$ واسطه هندسی را محاسبه نمایید ؟
جواب : با توجه به فرمول واسطه هندسی داریم :

$$A, B, C \xLeftrightarrow[\text{اگر و تنها اگر}] B^2 = AC \text{ دنباله هندسی تشکیل میدهند.}$$

$$2, B, 8 \xLeftrightarrow[\text{اگر و تنها اگر}] B^2 = AC \rightarrow B^2 = -2 \times 7 \rightarrow B^2 = -14 \text{ غیر ممکن است}$$

مگه میشه که توان دوم یک عدد برابر با عددی منفی بشود؟

نکته خیلی خیلی مهم واسطه هندسی : دو عدد فقط زمانی واسطه هندسی دارند که حاصلضربشان برابر با عددی مثبت باشد یا به عبارت بهتر میگیریم : دو عدد فقط زمانی واسطه هندسی دارند که هر دو هم علامت باشند

مثال - به ازای چه مقدار از x اعداد $2x + 1$ و $x + 2$ و x جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند ؟
جواب خیلی ساده است با توجه به اینکه شرط لازم برای جملات متوالی دنباله هندسی رو میدونی توقع دارم سریعاً پاسخ این سوال رو خودت به خوبی بدی :

$$A, B, C \xLeftrightarrow[\text{اگر و تنها اگر}] B^2 = AC \text{ دنباله هندسی تشکیل میدهند.}$$

$$A = x \text{ و } B = x + 2 \text{ و } C = 2x + 1 \xLeftrightarrow[\text{اگر و تنها اگر}] B^2 = AC \rightarrow$$

$$(x + 2)^2 = x \times (2x + 1) \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + x$$

حالا تمام عبارتتها را به یکطرف تساوی منتقل میکنیم و عبارت حاصل رو برابر با صفر قرار میدیم در این صورت داریم:

$$0 = 2x^2 + x - (x^2 + 4x + 4) \rightarrow 2x^2 + x - x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

حالا با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک داریم :

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow (x + 1)(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

حالا پاسخهای بدست آمده رو بررسی میکنیم : اگر $x = -1$ آنگاه داریم :

$$x \text{ و } x + 2 \text{ و } 2x + 1 \rightarrow -1 \text{ و } -1 + 2 = 1 \text{ و } 2 \times (-1) + 1 = -2 + 1 = -1 \\ \rightarrow -1 \text{ و } 1 \text{ و } -1$$

پس به ازای $x = -1$ دنباله هندسی مورد نظر ما یک دنباله نوسانی است.

اگر $x = 4$ آنگاه داریم :

$$x \text{ و } x + 2 \text{ و } 2x + 1 \rightarrow 4 \text{ و } 4 + 2 = 6 \text{ و } 2 \times (4) + 1 = 9 \rightarrow 4 \text{ و } 6 \text{ و } 9$$

پس به ازای $x = 4$ دنباله هندسی مورد نظر ما یک دنباله یکنوای صعودی است . البته دوستان عزیزم جواب بررسی نهایی ما به نوع انتخاب A, B, C هم بستگی داره ممکنه شما A, B, C رو برعکس من انتخاب کنید در این صورت در بررسی جوابهای نهایی دنباله به 4 و 6 و 9 میرسید که نمایش یک دنباله نزولی است.

مثال اگر b_n یک دنباله هندسی باشد حاصل $b_2 b_6 b_{10} b_{14}$ را بیابید؟

این سوال جواب ساده و کوتاهی داره . خوب حواستو جمع کن چون ممکنه از این نوع

سوالها توی کنکور ببینی. اول بهتره واسطه هندسی بین b_2 و b_{14} و همینطور واسطه هندسی بین b_6 و b_{10} رو پیدا کنیم در این صورت داریم :

حتما میگی که من هنوز واسطه هندسی رو نخوندم ؟!!! درسته اما جملات متوالی رو که خوندی و میدونی که بین b_2 و b_{14} یک جمله وجود داره و بین b_6 و b_{10} هم همینطور :

باید وسط 2 و 14 رو محاسبه کنیم . $\frac{2+14}{2} = \frac{16}{2} = 8$ و همینطور وسط 6 و 10 رو هم محاسبه میکنیم

در این صورت داریم : $\frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$ حالا فهمیدیم که b_8 وسط b_2 و b_{14} قرار داره و همینطور b_8

وسط b_6 و b_{10} قرار داره پس با توجه با شرط جملات متوالی دنباله هندسی داریم :

اگر و تنها اگر A, B, C دنباله هندسی تشکیل میدهند.

$$B^2 = AC$$

$$b_8^2 = b_2 b_{14} \quad , \quad b_8^2 = b_6 b_{10} \quad \rightarrow \quad b_2 \underbrace{b_6 b_{10}}_{b_8^2} b_{14} = b_8^4$$

$b_8^2 \times b_8^2$

جواب نهایی برابر شد با :

$$b_2 b_6 b_{10} b_{14} = b_8^4$$

مثال بعدی مثال مهم و کاربردی و نکته داری هستش لطفا با دقت این مثال رو مطالعه کن

مثال - جملات سوم ، هفتم و دوازدهم از یک دنباله حسابی غیر ثابت ، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی

هستند جمله اول این دنباله حسابی چند برابر قدر نسبت این دنباله حسابی است؟

پاسخ - با توجه به اینکه پیش از این مثال هم ، ما یک مثال ترکیبی دیگه هم از دنباله حسابی و هندسی با هم رو حل کردیم توقع دارم دیگه هر سوالی که از دنباله های حسابی و هندسی به صورت ترکیبی در مقابلت قرار میگیره تو رو نگران و وحشت زده نکنه. با توجه به جزوه کاملی که برای شما عزیزان طراحی و تدوین شده همه تلاش ما اینه که با دیدن تنوع سوالها این رو باور کنی که موقع حل هر سوال از دنباله ها داری با فرمولها بازی میکنی و قرار نیست هیچ راه حل سخت و غیرممکنی رو مورد استفاده قرار بدی. حالا باهم به سوال جواب میدیم: فرمول دنباله حسابی رو یادته ؟

دنباله حسابی :

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

دنباله هندسی :

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

با توجه به متن سوال ما به جملات سوم و هفتم و دوازدهم دنباله حسابی نیاز داریم پس :

$$a_3 = \underbrace{a_1 + (3 - 1)d}_{\text{جمله اول}} \quad \text{و} \quad a_7 = \underbrace{a_1 + (7 - 1)d}_{\text{جمله وسط}} \quad \text{و} \quad a_{12} = \underbrace{a_1 + (12 - 1)d}_{\text{جمله نهایی}}$$

حالا چون متن سوال به ما گفته این جملات ، برای ما جملات متوالی دنباله هندسی رو میسازن پس باید با استفاده از شرط سه جمله متوالی دنباله هندسی استفاده کنیم :

اگر و تنها اگر

$$A, B, C \xleftrightarrow{\quad} B^2 = AC \xleftrightarrow{B=a_1+6d \quad , \quad A=a_1+2d \quad , \quad C=a_1+11d}$$

$$(a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 11d) \rightarrow$$

$$a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d = a_1^2 + \underbrace{11a_1d + 2a_1d}_{13a_1d} + 22d^2$$

با ساده کردن a_1^2 ها از هردو طرف تساوی داریم :

$$\underbrace{36d^2 - 22d^2}_{14d^2} = \underbrace{13a_1d - 12a_1d}_{a_1d} \implies \frac{14d^2}{d} = \frac{a_1d}{d} \implies 14d = a_1$$

پس جمله اول این دنباله 14 برابر قدرنسبت آن است.

حالا اگر ازما بخوان جملات دنباله هندسی رو محاسبه و قدرنسبت دنباله هندسی رو پیداکنیم چی ؟ دلم میخواد بگی اینکار دیگه خیلی برای ما ساده شد چون جمله اول دنباله رو داریم کافیه جایگذاری کنیم :

جمله سوم و هفتم و دوازدهم رو محاسبه میکنیم:

$$a_3 = a_1 + 2d \xrightarrow{14d=a_1} a_3 = 14d + 2d = 16d$$

$$a_7 = a_1 + 6d \xrightarrow{14d=a_1} a_7 = 14d + 6d = 20d$$

$$a_{12} = a_1 + 11d \xrightarrow{14d=a_1} a_{12} = 14d + 11d = 25d$$

$$q = \frac{a_7}{a_3} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \quad \text{و} \quad q = \frac{a_{12}}{a_7} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

بازم یه نکته کنکوری جالب و راحت که کار ما رو توی تست زدن خیلی راحت میکنه : وقتی به ما میگه برای جملاتی از یک دنباله هندسی قدرنسبت آنها را محاسبه کنید و ما فقط شماره (اندیس) جملات رو داریم مثل مثال قبل که گفته بود جملات سوم و هفتم و دوازدهم دنباله حسابی جملات متوالی دنباله هندسی هستند کافیه برای محاسبه قدرنسبت دنباله هندسی از فرمول زیر استفاده کنیم :

$$q = \frac{\text{اختلاف اندیس های بزرگ}}{\text{اختلاف اندیس های کوچک}} = \frac{12 - 7}{7 - 3} = \frac{5}{4}$$



موضوع : جزوه کنکوری مبمٹ دنباله ها (رشته ریاضی فیزیک و تجربی)

مؤلفین : سمانه ترکی و دکتر مسین عبدوی نژاد

دانش آموز عزیزم به این موضوع دقت کن که این راه حل فقط و فقط برای محاسبه قدرنسبت دنباله هندسی مورد استفاده قرار میگیره .

حالا میریم سراغ درج واسطه هندسی

درج واسطه هندسی : همانطور که برای دنباله های حسابی واسطه حسابی داشتیم برای دنباله های هندسی هم واسطه هندسی داریم: اگر جمله دو عدد b و a به اندازه n تا عدد بتونیم بنویسیم در این صورت در کل $n + 2$ تا جمله داریم که باهم یک دنباله هندسی میسازن یعنی داریم :

$$a, \underbrace{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n}_{n \text{ تا جمله}}, b$$

$(n+2) \text{ تا جمله}$

پس الان میدونیم که a جمله اول و b جمله $(n + 2)$ ام این دنباله است. پس در این صورت برای محاسبه قدرنسبت q داریم : $a_1 = a$ و $a_{n+2} = b$

$$\text{قدرنسبت} = \frac{b}{a} = \frac{a_{n+2}}{a_1} = q^{n+2-1} = q^{n+1}$$

با کمک فرمول فوق به راحتی میتونیم قدرنسبت رو محاسبه کنیم و سپس به راحتی میتونیم x ها را هم محاسبه کنیم. با یک مثال منظورمو بهتر متوجه میشی:

مثال بین دو عدد 3 و 48 سه واسطه هندسی مثبت مینویسیم مقدار بزرگترین واسطه و قدرنسبت این دنباله را محاسبه نمایید؟

پاسخ وقتی به ما میگه بین 3 و 48 سه واسطه هندسی میخوایم یعنی $3+2=5$ تا جمله داریم. پس به راحتی میتونیم قدرنسبت رو محاسبه کنیم :

$$a_1 = 3 \text{ و } a_{3+2} = a_5 = 48$$

$$\text{قدرنسبت} = \frac{b}{a} = \frac{a_{n+2}}{a_1} = q^{n+2-1} = q^{n+1} \rightarrow \frac{48}{3} = 16 = q^{5-1} = q^4$$

$$\rightarrow q^4 = 16 = 2^4 \rightarrow q = \pm 2$$

چون سوال به ما گفته بین عدد 48 و 3 سه واسطه مثبت داریم پس -2 برای ما قابل قبول نیست.

حالا با توجه با اینکه جمله اول و قدرنسبت این دنباله رو داریم به راحتی میتونیم بزرگترین واسطه هندسی رو محاسبه کنیم: $q = +2$

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} 48$$

پس بزرگترین واسطه هندسی ما در این سوال عدد 24 است.

حالا شاید بهتره این رو هم بگم که اگه شرط مثبت بودن جملات دنباله مطرح نمیشد و ما اجازه داشتیم قدر نسبتمون رو برابر با -2 در نظر بگیریم در این صورت با یک دنباله هندسی نوسانی مواجه میشدیم یعنی داشتیم: $q = -2$

$$3 \xrightarrow{\times (-2)} -6 \xrightarrow{\times (-2)} 12 \xrightarrow{\times (-2)} -24 \xrightarrow{\times (-2)} 48$$

در این صورت بزرگترین واسطه هندسی این سوال میشد عدد 12

مجموع جملات دنباله هندسی : خیلی وقتها وقتی با موضوع جدیدی در درس ریاضیات مواجه میشیم از خودمون میپرسیم این موضوع و مبحث رو برای چی میخوانیم و قراره این مبحث چه کمکی به ما بکنه.

حتما تا به حال کلمه تصاعد رو شنیدی ؟ یا شنیدی که قیمت منابع سوخت فسیلی مصرفی خانوارها اگه از

یک مقدار ثابت افزایش پیدا کنه بعد از اون مقدار، هر مقداری که به مصرف هر خانوار، افزوده بشه قیمت آن فراورده سوختی برای هر خانواده به صورت تصاعدی محاسبه میشه. از تصاعد (یا دنباله هندسی) در محاسبه خیلی از مسائل مثل مسائل مربوط به فیشهای آب و برق و گاز ویا سود بانکها و ... استفاده میشه.

تا به اینجا ما راههای محاسبه قدرنسبت یا میزان جهش جمله اول در دنباله هندسی رو یادگرفتیم و همینطور با استفاده از بازی با فرمولهای مربوط به جملات متوالی و درج واسطه های هندسی فهمیدیم که محاسبه جملات و قدرنسبت این دنباله کار خیلی خیلی ساده ایه حالا میخوایم به دلیل اصلی یادگیری این دنباله بپردازیم. فرمولهایی رو که در این قسمت یادمیگیری رو به خوبی درک کن چون خیلی جاها به کمکت میان و لازمه شما دانش آموزان تیزهوش رشته ریاضیات بدونید که از این فرمولها در تستهای کنکوری خیلی استفاده میشه :

جمع n جمله ی اول از یک دنباله هندسی را هم مثل دنباله حسابی با S_n نمایش میدیم .

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \text{مجموع جملات اول تا } n \text{ ام}$$

برای S_n در دنباله هندسی داریم :

اگر جمله اول a_1 و تعداد جملات n و قدر نسبت q رو داشته باشیم در این صورت باید از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

مجموع جملات اول تا پنجم در دنباله هندسی با شرایط $a_1 = 2$ و $q = \frac{3}{2}$ را محاسبه نمایید؟



وقتی می‌گه مجموع جملات اول تا پنجم یعنی $n = 5$ پس باید از فرمول فوق برای حل این مثال استفاده کنیم :



$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \xrightarrow{n=5} S_5 = \frac{2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{2\left(\frac{3^5}{2^5} - 1\right)}{\frac{3-2}{2}} = \frac{2\left(\frac{243}{32} - 1\right)}{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{2\left(\frac{243-32}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{2\left(\frac{211}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{211}{16}}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

حالا با انجام ضرب دور در دور و نزدیک در نزدیک داریم :

$$\frac{\frac{211}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \times 211}{1 \times 16} = \frac{211}{8} \rightarrow S_5 = \frac{211}{8}$$

با یه سوال ترسناک موافقی؟ می‌خواوم با چندتا مثال متفاوت تنوع سوالاتی رو که ممکنه در مورد این



قسمت مشاهده کنی رو بهت نشون بدم . این موضوع کمکت میکنه به راحتی و با شجاعت بیشتری به استقبال سوالات کنکوری این مبحث بری .

مثال - مجموع جملات اول تا هشتم دنباله هندسی ... , -6 , 3 را بدست آورید؟

پاسخ - توقع دارم سریعاً خودت قدرنسبت رو محاسبه کنی. با توجه به متن سوال که گفته مجموع جملات اول تا هشتم دنباله هندسی ... , -6 , 3 به راحتی میشه فهمید $n = 8$ و $a_2 = -6$ و $a_1 = 3$ حالا به راحتی با توجه به فرمول محاسبه قدرنسبت میبینیم که $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$ حالا با توجه به داده های مسئله میفهمیم که باید از فرمول شماره 1 برای محاسبه مجموع جملات اول تا هشتم این دنباله استفاده کنیم : دیدی چقدر ساده بود تا اینجا کار ؟

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \xrightarrow{n=8, q=-2, a_1=3} S_8 = \frac{3((-2)^8 - 1)}{-2 - 1} = \frac{3 \times (256 - 1)}{-3} = \frac{3 \times 255}{-3} = \frac{255}{-1} = -255 \rightarrow S_8 = -255$$

مثال - در دنباله هندسی با قدرنسبت $\sqrt{3}$ مجموع 12 جمله اول چند برابر مجموع جملات اول تا ششم آن است ؟

پاسخ - وای چه سوال سختی !!! اما جوابش خیلی ساده است بازم میخوایم با فرمولهای دنباله هندسی بازی کنیم 😊 بازم متن سوال داره مارو حسابی راهنمایی میکنه پس اطلاعات مسئله رو مینویسیم. اینجا از ما

میخوان که یکبار مجموع جملات دنباله رو برای $n = 12$ و یکبار هم مجموع جملات دنباله رو برای $n = 6$ محاسبه کنیم البته در این سوال ما جمله اول رو نداریم. به جواب دقت کن :

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \xrightarrow{n=12, q=\sqrt{3}} S_{12} = \frac{a_1(\sqrt{3}^{12} - 1)}{\sqrt{3} - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \xrightarrow{n=6, q=\sqrt{3}} S_6 = \frac{a_1(\sqrt{3}^6 - 1)}{\sqrt{3} - 1}$$

حالا باید $\frac{S_{12}}{S_6}$ رو محاسبه کنیم پس داریم :

$$\frac{S_{12}}{S_6} = \frac{\frac{a_1(\sqrt{3}^{12}-1)}{\sqrt{3}-1}}{\frac{a_1(\sqrt{3}^6-1)}{\sqrt{3}-1}} = \frac{(\sqrt{3}^{12}-1)}{(\sqrt{3}^6-1)} = \frac{(\sqrt{3}^6-1)(\sqrt{3}^6+1)}{(\sqrt{3}^6-1)} = (\sqrt{3}^6+1)$$

$$= (((\sqrt{3})^2)^3 - 1) = 3^3 - 1 = 27 - 1 = 26 \rightarrow \frac{S_{12}}{S_6} = 26$$

بچه ها این سوال به ما یک فرمول مناسب میدی برای اینکه هر زمان که باتستی مواجه شدیم که چنین شکلی داشت به راحتی بتونیم به تست پاسخ بدیم برای اینکه اون نکته رو به خوبی متوجه بشی به اثبات

زیر دقت کن:

اثبات :

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}} = \frac{(q^{2n}-1)}{(q^n-1)} = \frac{(q^n-1)(q^n+1)}{(q^n-1)} = (q^n+1)$$

مثل مثال فوق :

$$\frac{S_{12}}{S_6} = \frac{\frac{a_1(q^{12}-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}} = \frac{(q^{12}-1)}{(q^6-1)} = \frac{(q^6-1)(q^6+1)}{(q^6-1)} = (q^6+1)$$

حالا قطعا متوجه شدی که چرا عبارت $(q^{2n}-1) = (q^n-1)(q^n+1)$ رو دیدی .

در دنباله $a_n = 3(-\frac{1}{2})^n$ مجموع جولات اول تا هفتم را محاسبه نمایید؟

مثال

بازم پاسخ خیلی ساده است. میدونیم که برای محاسبه مجموع جملات دنباله در هر دو روش باید جمله اول رو داشته باشیم و برای محاسبه جمله اول این دنباله هندسی کافیه به جای n در دنباله $a_n = 3(-\frac{1}{2})^n$ ، $n = 1$ رو قرار بدیم در این صورت داریم :

$$a_n = 3(-\frac{1}{2})^n \xrightarrow{n=1} a_1 = 3(-\frac{1}{2})^1 = -\frac{3}{2} \rightarrow a_1 = -\frac{3}{2}$$

حالا به راحتی میتونیم S_7 رو بدست بیاریم :

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \xrightarrow{n=7, q=-\frac{1}{2}, a_1=-\frac{3}{2}} S_7 = \frac{-\frac{3}{2} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^7 - 1 \right)}{-\frac{1}{2} - 1}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} \left(-\frac{1^7}{2^7} - 1 \right)}{\frac{-1-2}{2}} = \frac{-\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{128} - 1 \right)}{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{-1 - 128}{128} \right) = \frac{-129}{128} \rightarrow S_7 = \frac{-129}{128}$$

مثال در یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 6$ ، هر جمله نصف جمله قبلی است . مجموع n جمله اول این دنباله را بیابید؟

بازهم جمله عمومی و قدرنسبت رو داریم خیلی راحت میتونیم مجموع جملات دنباله رو بر حسب n محاسبه کنیم. جواب خیلی ساده است :

چون متن سوال گفته که هر جمله نصف جمله قبلی خودش است داریم:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} a_n \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

حالا به راحتی با استفاده از فرمول شماره 1 مجموع جملات دنباله هندسی جواب رو بدست میاریم:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \xrightarrow{a_1=6, q=\frac{1}{2}} S_n = \frac{6\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \xrightarrow{a_1=6, q=\frac{1}{2}} S_n = \frac{6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \times 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1} = 12\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = -\frac{12}{2^n} + 12$$

پس : $S_n = -\frac{12}{2^n} + 12$

مثال در یک دنباله هندسی صعودی ، جمله پنجم 4 برابر جمله سوم آن است. اگر جمله دوم برابر با عدد 1 باشد ، مجموع جملات ششم تا دهم این دنباله را بدست آورید؟

پاسخ تا اینجا با سوال سختی مثل این سوال برخورد نکرده بودیم . درسته که متن سوال سخت و پیچیده تر از سوالهای قبلی اما پاسخش مثل سوالهای قبلی ساده است. فقط باید بتونیم اطلاعاتی رو که متن سوال به ما میدی رو خوب آنالیز کنیم. بریم سراغ جواب :

متن سوال به ما میگه جمله پنجم 4 برابر جمله سوم آن است پس به راحتی میفهمیم که $a_5 = 4a_3$ یاده قدر نسبت رو در چنین مواقعی چطور محاسبه میکردیم ؟

$$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n} \xrightarrow{a_5=4a_3} \frac{a_5}{a_3} = q^{5-3} = 4 \rightarrow q^2 = 4 \rightarrow q = \pm 2$$

چون متن سوال به ما گفته که دنباله هندسی مورد نظر صعودی هستش پس ما باید $q = +2$ رو در نظر بگیریم. اگه میگفت دنباله مورد نظر نزولی هست ما باید $q = -2$ رو میپذیرفتیم.

خب حالا باید بریم مجموع جملات دنباله رو محاسبه کنیم :

$$\overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}^{S_5} + \overbrace{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}}^{S_{10}}$$

بعد از محاسبه قدر نسبت ما به جمله اول این دنباله هم نیاز داریم :

میدونیم که جمله دوم از حاصلضرب جمله اول در قدرنسبت بدست اومده پس وقتی سوال به ما میگه اگر جمله دوم برابر با عدد 1 باشد یعنی داریم :

$$a_2 = 1 \rightarrow a_2 = a_1 q \rightarrow 1 = 2a_1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

حالا کافیه که فرمول مجموع جملات دنباله های هندسی رو برای ج-ملات اول تا پنجم و اول تا دهم رو بنویسیم و درنهایت اونها رو از هم کم کنیم :

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{2}, n=5, q=2} S_5 = \frac{\frac{1}{2}(2^5 - 1)}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}(32 - 1)}{1} = \frac{31}{2}$$

$$S_5 = \frac{31}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{2}, n=10, q=2} S_{10} = \frac{\frac{1}{2}(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}(1024 - 1)}{1} = \frac{1023}{2}$$

$$S_{10} = \frac{1023}{2}$$

حالا بابد برای بدست آوردن مجموع جملات ششم تا دهم $S_{10} - S_5$ رو محاسبه کنیم پس داریم :

$$S_{10} - S_5 = \frac{1023}{2} - \frac{31}{2} = \frac{1023 - 31}{2} = \frac{992}{2} = 496$$

$$S_{10} - S_5 = 496$$

مجموع جملات ششم تا دهم این دنباله برابر با 496 شد.

مجموع n جمله اول در یک دنباله هندسی به صورت $S_n = 5 - 5 \times 2^n$ است. قدرنسبت این دنباله چندبرابر جمله اول این دنباله است؟

مثال

میدونیم که برای محاسبه جمله اول این دنباله باید $n = 1$ در نظر بگیریم از طرفی میدونیم که $S_1 = a_1$ پس داریم :

$$n = 1 \rightarrow S_1 = a_1 = 5 - 5 \times 2^1 = 5 - 10 = -5$$

میدونیم که ضرب به جمع و تفریق اولویت داره و با توجه به اینکه در صورت سوال هیچ پرانتزی نیست باید حواسمون باشه که اول ضرب رو انجام بدیم و بعد تفریق رو انجام بدیم.

از طرفی میدونیم که قدرنسبت برابر با عددیه که به توان n میرسه پس $q = 2$ با توجه به داده های مسئله داریم :

$$\frac{\text{قدرنسبت}}{\text{جمله ی اول}} = \frac{q}{a_1} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$$

در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول تا n ام به صورت $\frac{4^n - 3^n}{4^n}$ است . جمله سوم این دنباله را

مثال

بیابید؟

پاسخ

جواب خیلی ساده است کافیه که ظاهر S_n را بنویسیم . پس داریم :

$$S_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n}$$

برای اینکه بتونیم ظاهر S_n را ساده تر کنیم کافیه که مخرج کسر را تفکیک کنیم :

$$S_n = \frac{4^n}{4^n} - \frac{3^n}{4^n} = 1 - \frac{3^n}{4^n} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

با توجه به اینکه در دنباله هندسی عددی که به توان n میرسد همون قدرنسبت دنباله است پس داریم $q = \frac{3}{4}$ با توجه به فرمول دنباله هندسی داریم :

$$S_1 = a_1 \xrightarrow{n=1, q=\frac{3}{4}} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4} = a_1$$

حالا برای محاسبه جمله سوم از فرمول دنباله هندسی استفاده میکنیم :

$$a_n = a_1 q^{n-1} \xrightarrow{n=3, q=\frac{3}{4}, a_1=\frac{1}{4}} a_3 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{3-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{64}$$

$$a_3 = \frac{9}{64}$$

با توجه به اینکه $a_3 = S_3 - S_2$ پس به عنوان روش دوم حل این سوال میتونیم از $a_3 = S_3 - S_2$ برای به دست آوردن جمله سوم استفاده کنیم. دراین صورت داریم:

$$S_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n} \rightarrow \begin{cases} S_3 = \frac{4^3 - 3^3}{4^3} = \frac{64 - 27}{64} = \frac{37}{64} \\ S_2 = \frac{4^2 - 3^2}{4^2} = \frac{16 - 9}{16} = \frac{7}{16} \end{cases} \Rightarrow a_3 = S_3 - S_2 = \frac{37}{64} - \frac{7}{16} = \frac{37 - 28}{64} = \frac{9}{64}$$

جزوه تکمیلی :

وقتی با حد آشنا میشیم گاهی حد دنباله هندسی رو هم حساب میکنیم یا به عبارت بهتر میتونیم با استفاده از حد دنباله هندسی مجموع تمام جملات دنباله هندسی رو محاسبه کنیم در این صورت با استفاده از ∞ به جای n جمله ∞ ام این دنباله یعنی S_∞ رو بدست می آوریم.

جمع تمام جملات دنباله هندسی:

$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

این جمع تمامی جملات دنباله هندسی زمانی معنی و مفهوم پیدا میکنه که قدرنسبت دنباله هندسی بین 1 و -1 باشه یعنی $-1 < q < 1$ با توجه به این شرط ، فرمول اصلی S_∞ به صورت زیر است :

$$|q| < 1 \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\text{جمله ی اول}}{\text{قدرنسبت} - 1}$$

میدونیم که از فرمول $\frac{a_1}{1-q}$ پیش از این هم توی فرمول S_n استفاده کردیم . پس هر موقع شرط $-1 < q < 1$ برقرار باشد ، داریم :

$$S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \text{مجموع تمام جملات} = \text{حد مجموع} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1-q}$$

مجموع تمام جملات دنباله هندسی ... و $\frac{4}{3}$ و 2 را بیابید؟

مثال

جواب این سوال خیلی ساده است. اول باید قدرنسبت دنباله رو بدست بیاریم و بعدش ببینیم که آیا شرط محاسبه مجموع تمام جملات دنباله برقرار هست یا نه. پس داریم :

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3 \times 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad -1 < \frac{2}{3} < 1$$

$$\xrightarrow{a_1=2, \quad q=\frac{2}{3}} S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{3-2}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = \frac{2 \times 3}{1} = 6$$

در دنباله $a_n = 3(-\frac{1}{2})^{n+1}$ حاصل مجموع تمام جملات این دنباله را محاسبه نمایید؟

مثال

جمله اول دنباله رو محاسبه میکنیم در این صورت داریم :

$$a_n = 3(-\frac{1}{2})^{n+1} \rightarrow a_1 = 3(-\frac{1}{2})^{1+1} = 3(-\frac{1}{2})^2 = 3\left(\frac{1}{2^2}\right) = 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

قدرنسبت این دنباله $q = -\frac{1}{2}$ چون شرط $-1 < -\frac{1}{2} < 1 \rightarrow -1 < q < 1$ برقراره پس داریم:

$$a_2 + a_3 + \dots = S_{\infty} - a_1 = \frac{a_1}{1-q} - a_1 = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} - \frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2+1}{2}} - \frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$S_{\infty} = -\frac{1}{4}$$

یک راه حل کوتاهتر هم وجود داره که موقع حل تستها خیلی به کمکمون میاد.

روش دوم : وقتی در دنباله هندسی جمله اول آن به جای a_1 با a_2 شروع میشه در این صورت داریم :

$$\frac{a_2}{1-q}$$

$$a_2 = a_1 q = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_2}{1-q} = \frac{-\frac{3}{8}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{2+1}{2}} = \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$S_{\infty} = -\frac{1}{4}$$

خسته نباشی عزیزم. امیدوارم از مطالعه جزوه خسته نشده باشی. تا اینجا تمام تلاشمو کردم که مبحث دنباله ها رو به خوبی و کامل یادگیری. امیدوارم این جزوه مؤثر واقع شده باشه.

مطمئنم که دیدن تستهای مربوط به مبحث دنباله ها در دفترچه سوالات کنکور سالهای قبل ، مسبب ایجاد نگرانیهای زیادی برای شما عزیزان شده ... دلم میخواد اینو بدونید که حال و هوای این روزای شما برای ما

خاطره شده و ماهم حال و هوای شمارو تجربه کردیم 😊 میخوام بهتون مژده بدم که شما دانش آموزان نظام جدید مطالب کمتر و به مراتب ساده تری رو نسبت به دانش آموزان نظام قدیم میخونید پس برای مبحثی مثل دنباله ها مطالعه این جزوه که صفر تا صد نکات کنکوری رو داره تست زنی رو برای شما عزیزان در کنکور ساده میکنه. با توجه به مژده ای که دادم دلم میخواد نفس عمیقی بکشی و با آرامش خاطر درس بخونی.

تمام تلاش تیم ما اینه که شما عزیزانی که در کلاسهای کنکور شرکت نمی کنید و یا مطالب مربوط به هر مبحث رو توی کلاسهای مدرسه یا کلاسهای کنکور به خوبی یاد نمیگیرید ، با یک جزوه ، مطالب مربوط به سالهای دهم و یازدهم و دوازدهم رو به خوبی یاد بگیرید.

راستی یادتون نره که ارائه جزوه بعدی به درخواست شما عزیزان از طریق تلگرام بستگی داره. چنانچه تعداد درخواستها به میزان کافی به دست ما برسه انشاالله بازهم برای شما عزیزان جزوه می نویسیم.

با تشکر فراوان از استاد ارجمند **جناب آقای دکتر حسین عبدوی نژاد** از استان آذربایجان شرقی که بزرگوارانه مرا در تألیف این جزوه همراهی کردند. خوشحال میشم به کانال آموزشی ما بپیوندید.

لطفا چنانچه میخوای بازم برات جزوه بنویسم درخواست و نظرت رو برای من از طریق تلگرام یا از طریق SMS ارسال کن خوشحال میشم نظرات و انتقادهای شما رو بشنوم. خیلی خیلی متشکرم از اینکه جزوات گروه آموزشی ما رو برای مطالعه انتخاب کردی.

تماس با جناب آقای دکتر عبدوی نژاد : 09148908734

تماس با استاد ترکی : 09186998130

کانال آموزشی ما : @math_torki

سمانه ترکی