

به نام پروردگار مهربان

حسابان کنکور

دهم | یازدهم | دوازدهم

سید عباس موسوی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مقدمه

دوستان عزیز سلام!

بی مقدمه میرم سر اصل مطلب! اصل مطلب اینه که چند ماهه دیگه، یه آزمون خیلی خیلی مهم، پیش رو داری که به احتمال بالای ۵۰ درصد، در جهت گیری زندگی و شغل آینده ات تأثیر میذاره. آزمونی که کمی تا حدودی نامردیه و عادلانه نیست. در «کنکور» شاید اولین اشتباهت، آخرین اشتباه باشه، برای همین باید تا جایی که میشه از اشتباهات کم کنی، مخصوصاً اشتباهات محاسباتی!! (زدم تو خال، درسته؟ 😊)

کتاب «لقمه حسابان کنکور» میخواد تمام مطالبی رو که به اونا احتیاج داری تا از پس سؤالات بر بیای، به طور خیلی خیلی جمع و جور و حساب شده و همراه بهتون هدیه کنه.

من از این که به مطلب و نکته جدیدی احتیاج نداری مطمئنم ولی از این که به حل تست های بیشتری برای تسلط، احتیاج نداشته باشی، نه! چرا که در قالب «وعده» و «چاشنی» مطالب رو به صورت کپسولی و مؤثر، به خوردتون می دیم 😊 ولی به علت محدودیت صفحات و حجم بالای مطالب، تست های مهم کنکوری (اکثراً از سال های اخیر) و تعدادی از تست های نکته دار رو به عنوان مثال حل کردم و در هر صورت امید دارم نمودار مسیر حرکت شما در زندگی، نموداری اکیداً صعودی - و نه صعودی - باشه.

فهرست

- | | | |
|-----|--------|-----------------------------|
| ۷ | فصل ۱ | یادآوری |
| ۱۴ | فصل ۲ | الگو و دنباله |
| ۲۷ | فصل ۳ | معادلات گنگ و گویا |
| ۳۲ | فصل ۴ | آشنایی با هندسه تحلیلی (خط) |
| ۴۱ | فصل ۵ | قدر مطلق |
| ۵۵ | فصل ۶ | معادله و تابع درجه ۲ |
| ۶۹ | فصل ۷ | توابع نمایی و لگاریتمی |
| ۹۱ | فصل ۸ | مثلثات |
| ۱۳۱ | فصل ۹ | تابع |
| ۱۷۱ | فصل ۱۰ | حد و پیوستگی |
| ۲۱۸ | فصل ۱۱ | مشتق |
| ۲۴۶ | فصل ۱۲ | کاربرد مشتق |
| ۲۷۳ | | فرمول‌نامه |

فصل ۸

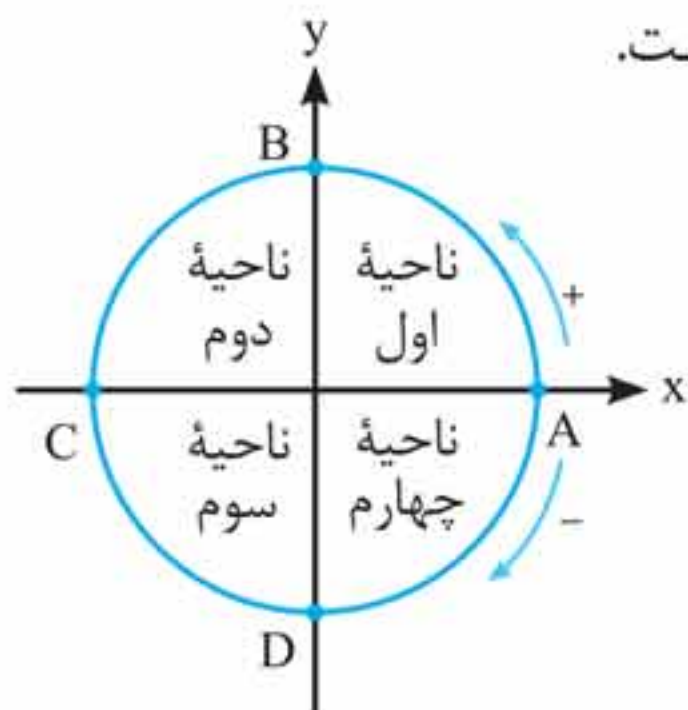
مثلثات

وعدۀ ۱

دایره مثلثاتی



دایره‌ای به شعاع واحد که مرکز آن مبدأ مختصات است، دایره مثلثاتی نام دارد که مبدأ حرکت آن نقطه A و جهت مثبت آن عکس حرکت عقربه‌های ساعت است.



نقاط A, B, C, D نقاط مرزی هستند.

محور سینوس‌ها: محور y ها

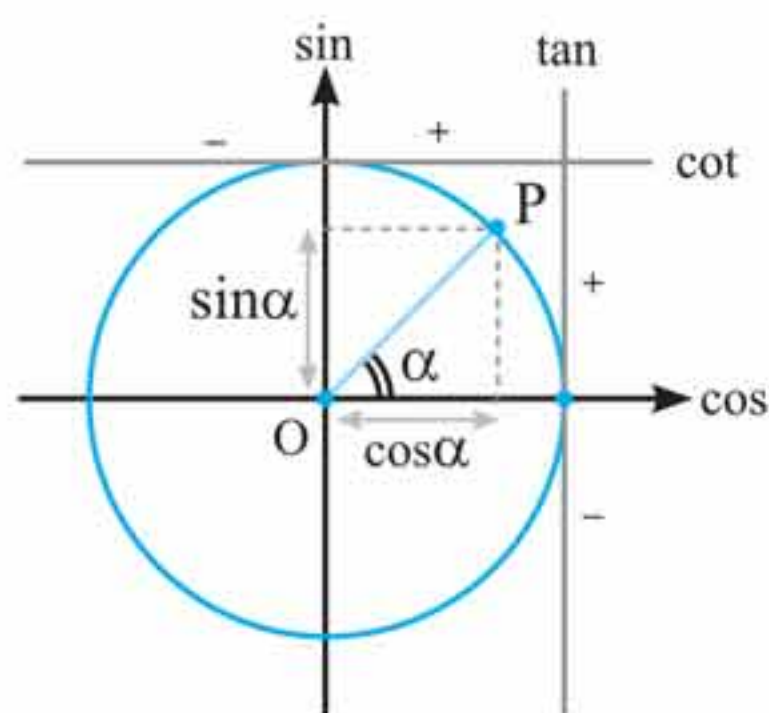
محور کسینوس‌ها: محور x ها

محور تانژانت‌ها: خط عمودی و

مماس بر دایره در نقطه A

محور کتانژانت‌ها: خط افقی و مماس

بر دایره در نقطه B



تصویر نقطه P روی محور x ها

برابر با $\cos \alpha$ و تصویر نقطه P

روی محور y ها برابر با $\sin \alpha$

می‌باشد. محل تقاطع امتداد

شعاع OP با محور \tan ها برابر

با $\tan \alpha$ و با محور \cot ها

برابر با $\cot \alpha$ است.



چاشنی: علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه

(قاعده هستک)



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

تانژانت و کتانژانت هم‌علامت‌اند.

تست: اگر $\sin \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) > 0$ و $\cos \alpha \times \cot \alpha < 0$

انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

پاسخ گزینه «۴»

طبق فرض مسئله، داریم:

$$\sin \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \cancel{\sin \alpha} \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cancel{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$$

پس انتهای کمان α در ناحیه اول یا چهارم است.

$$\cos \alpha \times \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} < 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} < 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0$$

انتهای کمان α در ناحیه سوم یا چهارم است، پس انتهای کمان α باید در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد.

تست: اگر $-\frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$ و $\cos 2\alpha = \frac{m-1}{m}$ باشد،

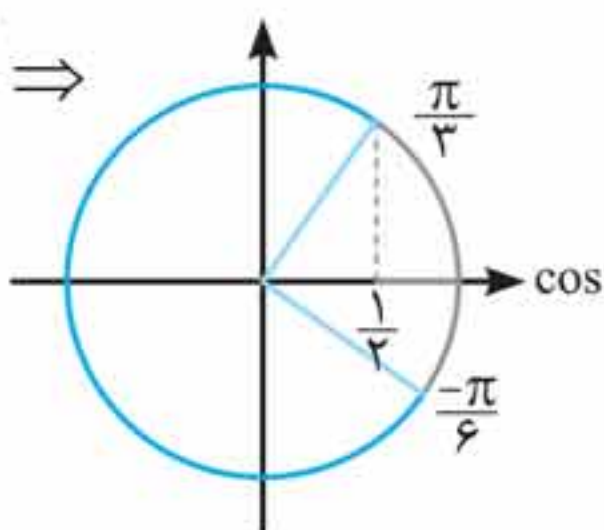
محدوده m کدام است؟

- (1) $(\frac{1}{2}, 1)$ (2) $(\frac{1}{2}, 1)$ (3) $[2, +\infty)$ (4) $(\frac{1}{2}, +\infty)$

پاسخ گزینه «3»

ابتدا محدوده 2α را مشخص می‌کنیم تا مقادیر $\cos 2\alpha$ مشخص شوند:

$$-\frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$



$$\cos \frac{\pi}{3} \leq \cos 2\alpha \leq 1$$

از روی دایره مشخص است که:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{m-1}{m} \leq 1$$

پس:

حال برای حل این نامعادله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

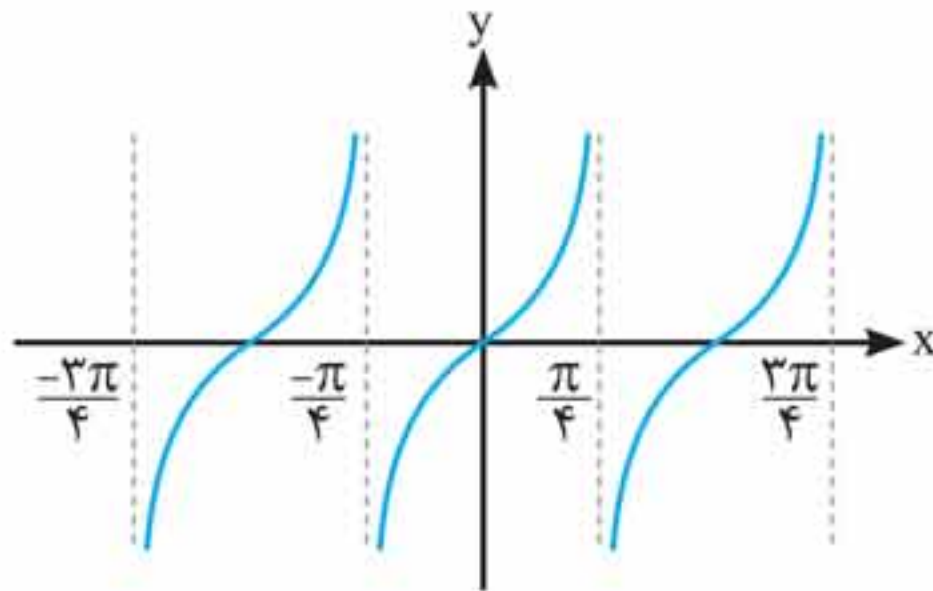
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq \frac{m-1}{m} \Rightarrow \frac{m-1}{m} - \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{m-2}{2m} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m-2}{2m} \geq 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m \geq 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m-1}{m} \leq 1 \Rightarrow \frac{m-1}{m} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{-1}{m} \leq 0 \Rightarrow m > 0 \end{array} \right.$$

$$m \geq 2$$

پس اشتراک جواب‌ها برابر است با:



تابع $y = x$ اکیداً صعودی است، پس اگر در بازه‌های $\tan 2x$ اکیداً صعودی باشد جمع دو تابع نیز اکیداً صعودی خواهد بود. $\tan 2x$ در بازه‌های که مجانب قائم نداشته باشد اکیداً صعودی است، که باتوجه به نمودار گزینه «۳» درست است.

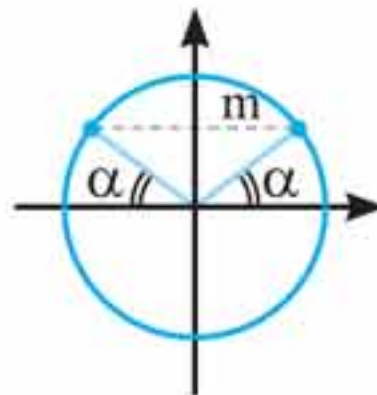
وعده ۱۵

معادلات مثلثاتی

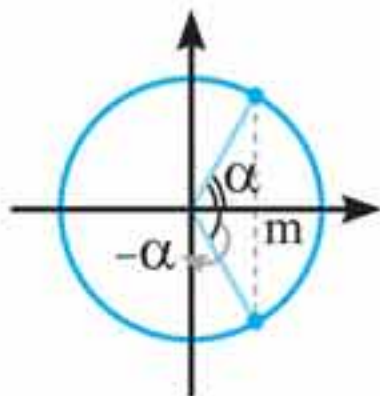


حل معادلات مثلثاتی معمولاً به یکی از حالت‌های زیر منجر می‌شود:

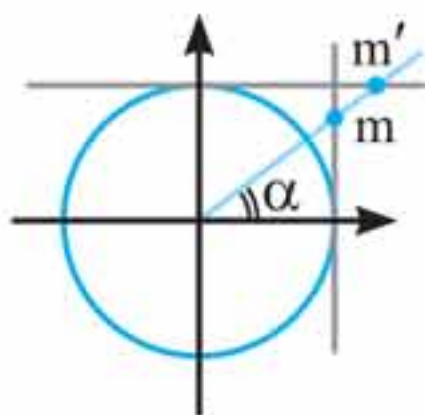
$$1 \quad \begin{cases} \sin x = m \\ |m| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$



$$۲ \begin{cases} \cos x = m \\ -1 \leq m \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

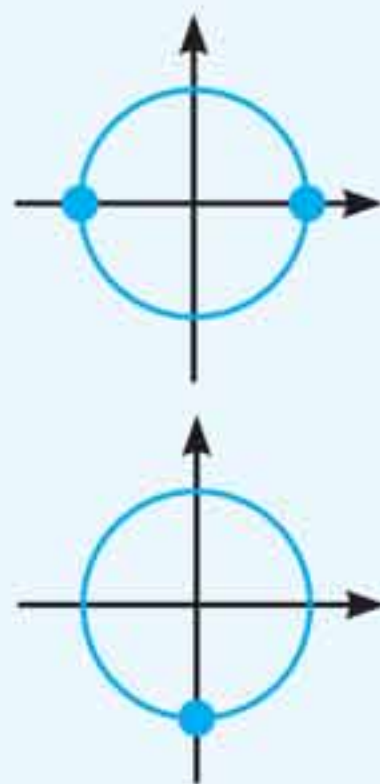


$$۳ \begin{cases} \tan x = m \\ \cot x = m' \\ (m, m' \in \mathbb{R}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



یادداشت: (معادلات خاص)

$$۱ \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$





۲

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (ریشه مضاعف)} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \text{ (ریشه مضاعف)} \end{array} \right.$$

۳

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ (ریشه مضاعف)} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \text{ (ریشه مضاعف)} \end{array} \right.$$

🔗 **تست:** مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی

$\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

$\frac{11\pi}{4}$ (۴)

$\frac{5\pi}{2}$ (۳)

$\frac{9\pi}{4}$ (۲)

$\frac{7\pi}{4}$ (۱)

پاسخ گزینه «۳»

طبق فرض داریم:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = \underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{-\cos 2x} \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (1 + 2 \sin 2x) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} x = \frac{11\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} x = \frac{7\pi}{12} \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

جمع ریشه‌ها:

🔗 **تست:** جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin x \sin 3x = \cos 2x$

(ریاضی ۹۶)

کدام است؟

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۴)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳)$$



پاسخ گزینه «۲»

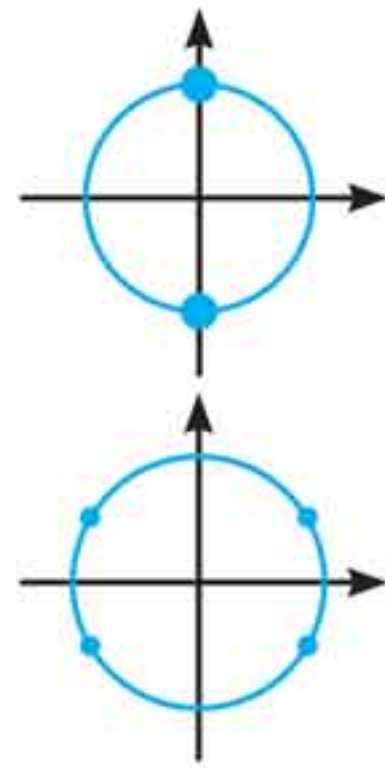
تمام عبارتها را بر حسب $\sin x$ می نویسیم:

$$\sin x (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 4 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + 1 = 0$$

با توجه به این که جمع ضرایب معادله صفر است، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2} \end{array} \right.$$



جوابهای فوق توسط رابطه $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ تولید می شوند.

تست: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x - \sin x + 4 \sin^2 x = 2$

با شرط $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)

$$\frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

$$(2k+1)\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

پاسخ گزینه «۲»

با توجه به رابطه $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ معادله را

بازنویسی می کنیم:

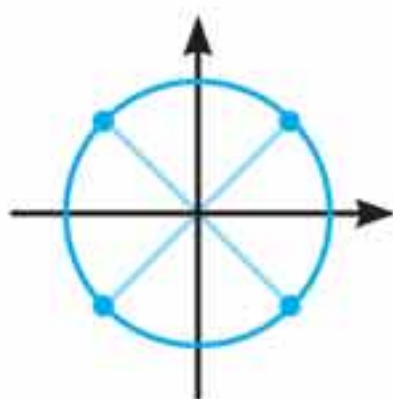
$$3 \sin x - 4 \sin^3 x - \sin x + 4 \sin^2 x - 2 = 0$$

$$-4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 2 = 0$$

پس از تجزیه عبارت فوق داریم:

$$(1 - \sin x)(4 \sin^2 x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غیر قابل قبول } \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

زوایای مربوط به جواب‌ها را روی دایره مثلثاتی نمایش می‌دهیم:



فرم کلی جواب‌ها به صورت $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$ می‌باشد.

تذکره ۱ در حل معادله‌های کسری مثلثاتی (یا معادله‌های شامل $\tan x$ و $\cot x$) ریشه‌های مخرج باید از مجموعه جواب نهایی معادله حذف شوند.

۲ گاهی در حل معادلات ریشه‌های اضافی تولید می‌شوند. این جواب‌ها باید از مجموعه جواب نهایی معادله حذف شوند. مخصوصاً اگر طرفین معادله‌ای را به توان زوج برسانید امکان تولید ریشه اضافی وجود دارد.

فصل ۱۱

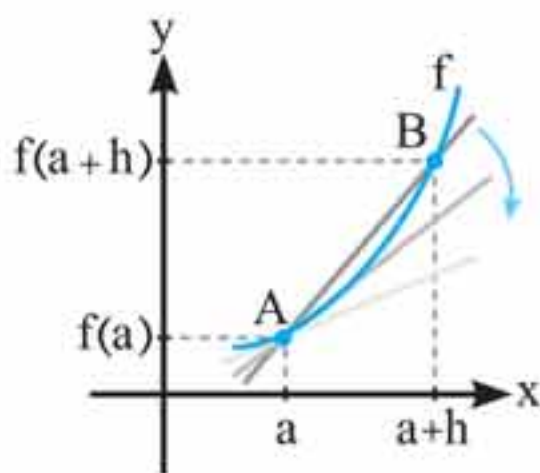
مشتق

وعدۀ ۱

تعریف مشتق در نقطه



در شکل زیر نقطه ثابت A به طول a و نقطه متحرک B به طول (a+h) را روی تابع $y = f(x)$ در نظر می‌گیریم. به خط گذرنده از نقاط A و B یک خط قاطع می‌گوییم.



شیب خط قاطع AB برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اکنون اگر نقطه B را به A نزدیک و نزدیک‌تر نماییم پارامتر h کم و کمتر می‌شود اگر h به قدر کافی نزدیک به صفر اختیار شود و

در پی آن حاصل $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ به عدد معینی نزدیک شود به

این عدد، شیب خط مماس بر تابع f در نقطه $(a, f(a))$ می‌گوییم، یعنی به شرط وجود حد زیر داریم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی } f \text{ در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

به شرط این که این حد موجود باشد به آن مشتق تابع f در نقطه a می‌گوییم و با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق راست f در a (شیب نیم‌مماس راست):

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشتق چپ f در a (شیب نیم‌مماس چپ):

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

یادداشت: شرط مشتق‌پذیری $f'_-(a) = f'_+(a)$ است، یعنی اگر تابعی مشتق‌پذیر باشد شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست با هم برابر بوده و این دو نیم‌مماس در یک راستا واقع خواهند شد و تابع در a دارای یک خط مماس واحد است، در غیر این صورت می‌گوییم تابع مشتق‌ناپذیر است.



تذکره: برای این که $f'(a)$ موجود باشد تابع f باید در همسایگی نقطه a پیوسته باشد. یعنی اگر تابعی در نقطه a ناپیوسته باشد آن گاه مشتق‌پذیر نخواهد بود یعنی پیوستگی شرط لازم برای مشتق‌پذیری است، هر چند کافی نیست. اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد آن گاه پیوسته خواهد بود.



$$\Rightarrow -2 \simeq \frac{f(2/8) - (-1)}{-0/2} \Rightarrow f(2/8) \simeq -0/6$$

$$h = 0/3 \Rightarrow f'(3) \simeq \frac{f(3 + 0/3) - f(3)}{0/3}$$

$$\Rightarrow -2 \simeq \frac{f(3/3) - (-1)}{0/3} \Rightarrow f(3/3) \simeq -1/6$$

$$y_A - y_B \simeq -1/6 - (-0/6) \simeq -1$$

تست: در شکل مربوط به تست قبل حاصل $y_{A'} - y_{B'}$ کدام است؟

$$(1) 0/5 \quad (2) -1 \quad (3) 1/4 \quad (4) -1/4$$

پاسخ گزینه «۲»

نقاط A' و B' روی خط مماس بر تابع f در نقطه به طول ۳ واقع هستند. معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$y - (-1) = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 5$$

$$\begin{cases} x = 3/3 \Rightarrow y_{A'} = -2 \times 3/3 + 5 = -1/6 \\ x = 2/8 \Rightarrow y_{B'} = -2 \times -2/8 + 5 = -0/6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2/8 \Rightarrow y_{B'} = -2 \times -2/8 + 5 = -0/6 \end{cases}$$

$$y_{A'} - y_{B'} = -1/6 + 0/6 = -1$$

وعدۀ ۲

نقاط مشتق‌ناپذیری تابع



تابع در یکی از حالت‌های ۶ گانه زیر مشتق‌پذیر نیست.

۱ تابع f در a پیوسته نباشد، مانند تابع $y = [x]$ در نقاط به طول صحیح.

چاشنی: تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که پیوسته نباشد مشتق پذیر نمی باشد، ولی در نقاطی که پیوسته است، مشتق پذیر و مشتق آن صفر است.

تست: تابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق پذیر

است؟ ([] نماد جزء صحیح می باشد). (ریاضی ۹۱)

(۱) $[0, 1]$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1)$

پاسخ گزینه «۴»

گزینه ۱: شامل عدد صفر است که عضو دامنه تابع نمی باشد.

گزینه ۲: شامل اعدادی است که به ازای آنها $\frac{1}{x}$ عددی صحیح خواهد شد:

شامل بی شمار عدد صحیح است. $\Rightarrow \frac{1}{x} < -1 \Rightarrow -1 < x < 0$

گزینه ۳: تابع در $x = 1$ باید پیوستگی راست داشته باشد که ندارد. زیرا:

$$f(1) = 1, f(1^+) = \left[\frac{1}{1^+}\right] = [1^-] = 0$$

گزینه ۴: درست است، زیرا:

$$-\infty < x < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{x}\right] = -1 \Rightarrow f'(x) = 0$$

تذکر: از رسم نمودار تابع $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ هم می توان برای حل تست کمک گرفت.

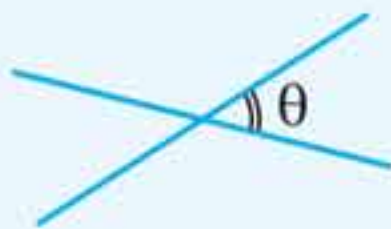


۲ تابع f در نقطه a پیوسته باشد ولی مشتق‌های چپ و راست در a اعداد حقیقی نابرابر باشند (نقطه گوشه یا زاویه‌دار)، به شکل‌های زیر دقت کنید:



یادداشت: در تابع $y = |f(x)|$ به ازای ریشه‌های ساده (مرتبه اول) $f(x)$ مشتق‌پذیر نیست و این نقاط طول نقاط گوشه‌اند ولی تابع در ریشه‌های مرتبه‌های بالاتر مشتق‌پذیر است و مشتق آن صفر است، ضمناً اگر ریشه داخل قدرمطلق از بیرون هم در قدرمطلق ضرب شود تابع در آن نقاط نیز مشتق‌پذیر و مشتق آن صفر است.
برای نمونه تابع $y = (x-1) | (x-1)(x+1)x^2 |$ فقط در $x = -1$ مشتق‌پذیر نیست.

نکته: اگر زاویه حاده بین دو خط با شیب‌های m و m' برابر با θ باشد، آن‌گاه داریم:



$$\tan \theta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

از رابطه بالا می‌توان برای یافتن زاویه بین نیم‌مماس‌های چپ و راست در نقاط گوشه استفاده کرد.

تست: اگر مماس چپ و راست تابع با ضابطه $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطه زاویه‌دار آن، عمود بر هم باشند مجموعه مقادیر a کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{-1, 1\}$ (۴) \emptyset

پاسخ گزینه «۳»

نقطه زاویه دار تابع، همان ریشه ساده داخل قدرمطلق، یعنی $x = 0$ است. اکنون با تعریف مشتق شیب نیم مماس های چپ و راست را به دست می آوریم:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|(x+a) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+a)}{x} = a$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|(x+a) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)(x+a)}{x} = -a$$

چون دو نیم مماس بر هم عمودند، پس:

$$f'_+(0) \times f'_-(0) = -1 \Rightarrow a(-a) = -1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۳ مشتق های چپ و راست یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد:



تست: نیم مماس های چپ و راست در مبدأ مختصات برای

تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$ چه زاویه ای با هم می سازند؟

$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۴)

$\frac{\pi}{6}$ (۱)

$\frac{\pi}{4}$ (۳)

پاسخ گزینه «۳»

فصل ۱۲

کاربرد مشتق

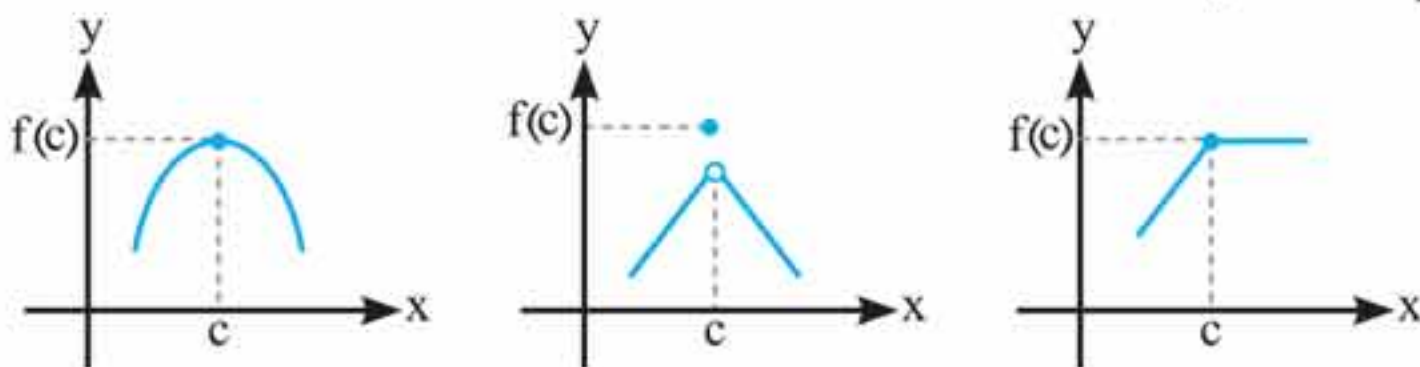
وعدۀ ۱

اکسترم‌های نسبی و مطلق

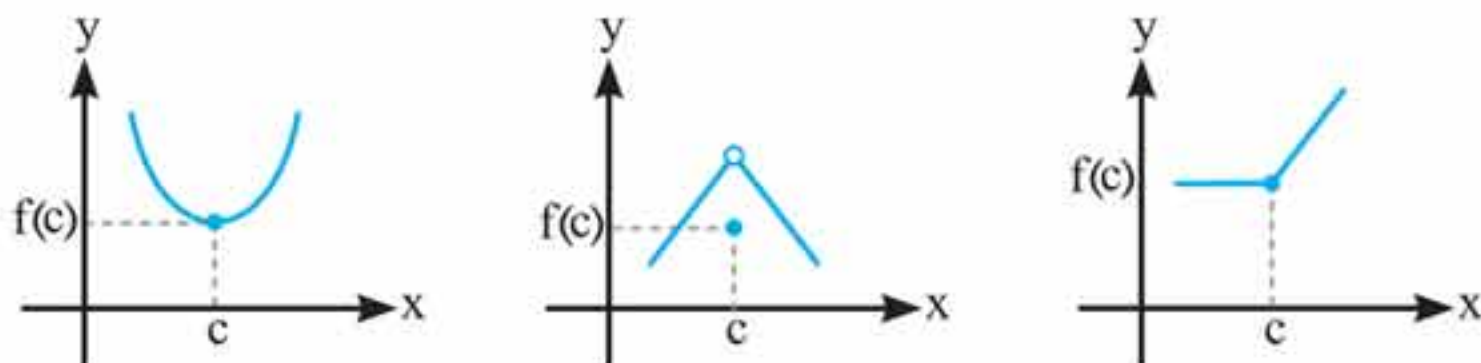


اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c (بازه باز شامل نقطه c) باشد که:

الف به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک **ماکزیمم نسبی** تابع f می‌نامیم، به نمودارهای زیر دقت کنید:

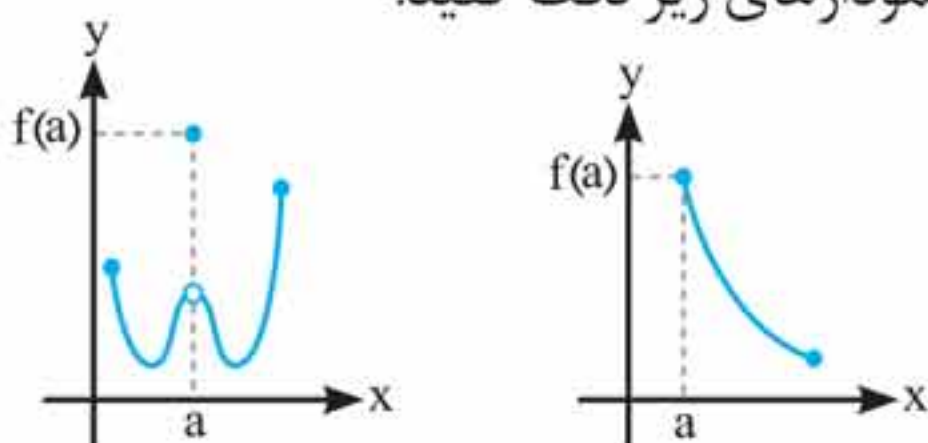


ب به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک **مینیمم نسبی** تابع f می‌نامیم. به نمودارهای زیر دقت کنید:



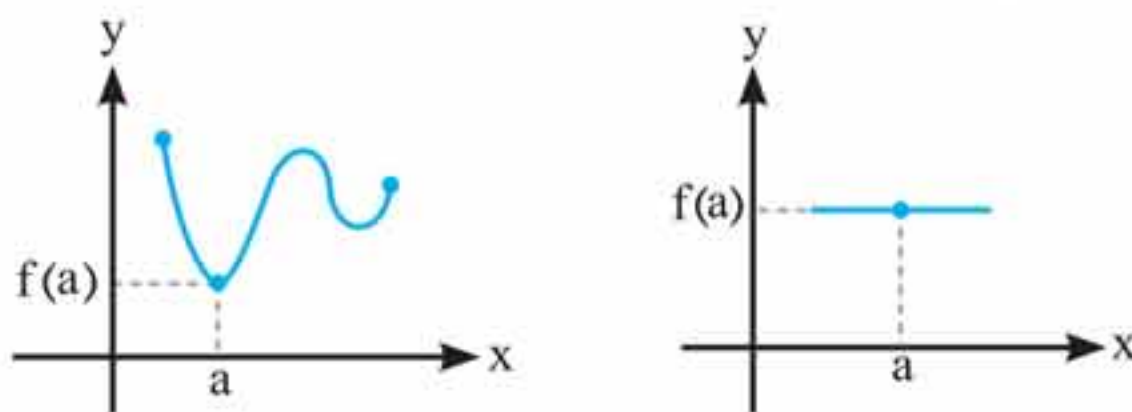
به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در بازه I «**ماکزیمم مطلق**» تابع در این بازه می‌گوییم، یعنی: $\forall x \in I; f(x) \leq f(a)$ به $f(a)$ ماکزیمم مطلق و به نقطه $(a, f(a))$ نقطه ماکزیمم مطلق تابع در بازه I

می‌گوییم، به نمودارهای زیر دقت کنید:



- نکته: ۱** ماکزیمم مطلق تابع بالاترین نقطه تابع در بازه I است.
- ۲** ماکزیمم مطلق تابع منحصر به فرد است هر چند ممکن است در چندین نقطه رخ دهد.

به کوچک‌ترین مقدار تابع f در بازه I «مینیمم مطلق» تابع در این بازه می‌گوییم، یعنی: $\forall x \in I; f(a) \leq f(x)$ ، به مقدار $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و به نقطه $(a, f(a))$ نقطه مینیمم مطلق تابع در بازه I می‌گوییم. به نمودارهای زیر دقت کنید:



- نکته: ۱** «مینیمم مطلق» تابع «پایین‌ترین نقطه» تابع در بازه I است.
- ۲** مینیمم مطلق تابع منحصر به فرد است هر چند ممکن است در چندین نقطه رخ دهد.

به نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی نقطه اکسترمم نسبی می‌گوییم
به نقطه ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق نقطه اکسترمم مطلق می‌گوییم.



تست: نمودار تابع، ضابطه $y = \sin^2 x - 2 \sin x$; $x \in [0, 2\pi]$

(ریاضی خارج ۹۶ با تغییر)

در کدام بازه صعودی نیست؟

(۲) $(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6})$

(۱) $(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$


(۴) $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6})$

(۳) $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$

پاسخ گزینه «۲»

تابع پیوسته در بازه‌ای صعودی است که $y' \geq 0$ ، پس y' را محاسبه می‌کنیم.

$$y' = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 2 \cos x (\underbrace{\sin x - 1}_{\leq 0}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos x \leq 0 \Rightarrow$$


در تمام گزینه‌ها به جز گزینه «۲» زوایا در ناحیه رنگی قرار دارند.

وعدۀ ۶

تشخیص اکستریم‌های نسبی



آزمون مشتق اول

فرض کنید تابع f بر بازه‌ای مانند I ($I \subseteq D_f$) پیوسته باشد و $c \in I$ (در صورت وجود) نقاط بحرانی تابع f باشند. فرض کنید f بر این بازه به جز احتمالاً در c ، مشتق پذیر باشد در این صورت:

الف اگر به‌ازای تمام مقادیر x در بازه (a, c) ، $f'(x) > 0$ ،

(f صعودی) و به‌ازای تمام مقادیر x در بازه (c, b) ، $f'(x) < 0$ ،

(f نزولی) در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a', c) ، $f'(x) < 0$ ، و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c, b') ، $f'(x) > 0$ آن گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی است.

پ اگر $f'(c)$ در نقطه c تغییر علامت ندهد آن گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

یادداشت: برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی در تابع پیوسته f کافی است f' را تعیین علامت کرده و از روی آن جدول اکسترمم‌ها را تشخیص دهیم، (ریشه‌های مضاعف $y' = 0$ ، طول اکسترمم نسبی نمی‌باشند).
به جدول روبه‌رو توجه کنید:

x	c_2	c_1	c_2	
f'	-	+	-	-
f	↘ min ↗		↘ ↗	

تست: طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه

(ریاضی خارج ۹۵) $y = (x-1)^2 \sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ گزینه «۱»

تابع پیوسته است، پس y' را تعیین علامت می‌کنیم:

$$y' = 2(x-1)\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6(x-1)(x) + 2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ریشهٔ مخرج } x = 0 \\ 2(x-1)(3x+x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

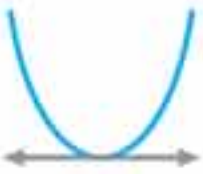
در تعیین علامت y' هم به ریشه‌های صورت و هم به ریشه‌های مخرج y' توجه کنید:

x	0	$\frac{1}{4}$	1
y'	$-$	$+$	$-$
y	\swarrow	\nearrow	\swarrow
	min	max	min

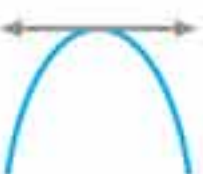
آزمون مشتق دوم

فرض کنید تابع f در نقطه c و در همسایگی آن مشتق پذیر و $f'(c) = 0$ باشد، در این صورت:

الف اگر $f''(c) > 0$ آن گاه $x = c$ طول مینیمم نسبی است. $f'' > 0$



ب اگر $f''(c) < 0$ آن گاه $x = c$ طول ماکزیمم نسبی است. $f'' < 0$



$f'' < 0$

تست: تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(1, -2)$

دارای اکسترمم نسبی است، عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟
(ریاض خارج ۸۹)

(۲) $-\frac{4}{3}$ و ماکزیمم

(۱) $-\frac{4}{3}$ و مینیمم

(۴) $\frac{4}{3}$ و ماکزیمم

(۳) $\frac{4}{3}$ و مینیمم

پاسخ گزینه «۲»

۱ مختصات اکسترمم نسبی در تابع صدق می کند:

$$f(1) = -2 \Rightarrow a + b = -2$$

۲ در اکسترمم‌های نسبی و توابع مشتق پذیر، مشتق برابر صفر است:

$$f'(x) = \frac{-a}{x^2} + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} 2b - a = 0$$

با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ -a + 2b = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}, b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2a}{x^3} + 2b \Rightarrow f''(1) = 2a + 2b = -4 < 0$$

طبق آزمون مشتق دوم $x = 1$ طول ماکزیمم نسبی تابع است.

آزمون مقایسه

در این حالت لازم نیست تابع پیوسته و مشتق پذیر باشد. با محاسبه $f(c)$ و $f(c^+)$ و $f(c^-)$ وضعیت f را در نقطه c در همسایگی آن مشخص می کنیم اگر $f(c)$ از حد چپ و راست تابع در c بزرگ تر باشد $x = c$ طول ماکزیمم نسبی و اگر کوچک تر باشد طول مینیمم نسبی f خواهد بود.

برای نمونه، $x = 0$ برای تابع $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}$ طول ماکزیمم نسبی است، زیرا:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0^+) = \frac{0^+}{1} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0^-) = \frac{(0^-)^2}{1} = \frac{0^+}{1} = 0^+$$



مقدار تابع در $x = 0$ کمتر از مقدار تابع در همسایگی صفر است، پس مبدأ مینیمم نسبی تابع است.

چاشنی: تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ را در نظر بگیرید اگر توابع f و g در

$x = a$ (طول اکستریم نسبی y) مشتق پذیر باشند و $g'(a) \neq 0$ ، آن گاه مختصات اکستریم نسبی تابع y علاوه بر خود تابع، در

هوپیتال تابع یعنی $y_H = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ نیز صدق می کند. ($y_H \neq 1$)

تست: اگر $x = 2$ طول اکستریم نسبی تابع $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + b}{2x - 3}$

باشد، b کدام است؟

(۱) -۷ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) -۹

پاسخ گزینه «۴»

می توان از رابطه $f'(2) = 0$ استفاده کرد و b را محاسبه نمود، ولی بهتر است از چاشنی گفته شده استفاده کنیم. نقطه $(2, y_H)$ در y_H صدق می کند:

$$y_H = \frac{6x + 2}{2} \Rightarrow y_H = \frac{6 \times 2 + 2}{2} = 7$$

پس نقطه اکستریم نسبی، $(2, 7)$ است که باید در خود تابع

نیز صدق کند:

$$7 = \frac{3 \times 2^2 + 2 \times 2 + b}{2 \times 2 - 3} \Rightarrow b = -9$$

پیوست فرمول‌نامه

فصل ۱

۱ اتحادها

الف مربع دو جمله‌ای $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

ب مزدوج $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

پ جمله مشترک $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

ت مکعب دو جمله‌ای $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

ث چاق و لاغر $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

۲ قوانین رادیکال‌ها ($n > 1, m, n \in \mathbb{N}$)

الف $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a > 0)$ **ب** $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

پ $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} (b \neq 0)$ **ت** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

ث $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

۳ قوانین توان

الف $a^0 = 1$ **ب** $a^m \times a^n = a^{m+n}$

پ $a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0)$ **ت** $a^m \times b^m = (ab)^m$

ث $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m (b \neq 0)$



فصل ۲

۱ مجموع n جمله اول دنباله حسابی

$$S_n = \frac{n}{2} (2 \underbrace{a_1}_{\text{جمله اول}} + (n-1)d) = \frac{n}{2} (\underbrace{a_1}_{\text{جمله اول}} + \underbrace{a_n}_{\text{جمله آخر}})$$

۲ مجموع n جمله اول دنباله هندسی

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

۳ قانون اندیس‌ها

دنباله حسابی: $m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$

دنباله هندسی: $m + n = h + k \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_h \cdot a_k$

فصل ۳

۱ حل معادلات گویا

الف دو طرف معادله را در مخرج مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.
ب عبارت به دست آمده را حل می‌کنیم. جواب‌ها باید مخرج هیچ کسری را صفر نکند و با عالم واقعیت مطابقت داشته باشد.

۲ حل معادلات گنگ

الف دو طرف معادله را به توان فرجه مشترک رادیکال‌ها می‌رسانیم.
ب با حل عبارت به دست آمده، جواب‌ها را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم، زیرا ممکن است که ریشه اضافی تولید شود.