به نام خدا

آنالیز ترکیبی، یکی از پیش نیاز های بسیار مهم فصل احتمال است که تقریبا هر ۲ سال یک بار در کنکور به طور مجزا نیز از آن تست می آید و بنابراین شاید امسال نوبتش نباشد. جالب ماجرا این جاست که در سال ۹۲ همان طور که پیش بینی می شد، از خود تمرینات کتاب کنکور تست مطرح شد و این امر، اهمیت تمرینات جدید کتاب درسی را نشان می دهد، تمریناتی که شابد خیلی ها به آن دقت نکرده باشند! به همین خاطر ما تمرینات مهم آنالیز ترکیبی را به خوبی تجزیه و تحلیل کرده و نتیجه ی آن را در قالب چند تست برای شما آماده نموده ایم.

اما در مورد مبحث احتمال باید بگوییم که آمدن ۴ سوال از این قسمت در سال ۹۲ نشان داد که این مبحث چه قدر مهم و جدی است. چهار سوال از ۳۰ سوال کنکور یعنی به تنهایی چیزی حدود ۱۴٪ سوالات!! با توجه به این که سوالات احتمال جزء سوالات متوسط هستند، این درصد بسیار جالب توجه و در مبحث احتمال، قابل تامل است.

به هر حال هر سال حداقل دو تست از احتمال می آید. زدن تست های احتمال خیلی دشوار نیست به شرطی که فن کوزه گری را بلد باشید. این فن یعنی این که بدانید تست داده شده، مربوطه کدام بخش و مبحث احتمال است. در درسنامه های کوتاه و روان این قسمت، می توانید روش های بی نظیر فهمیدن مبحث تست اعم از نشانه های مختلف و حتی نحوه ی استفاده از شماره ی سوال در دفترچه را یاد بگیرید هم چنین به کمک "ورژن های دیگر سوال"، "دید گاه های ویژه" و "ترفند های ویژه" ضمن دیدن نمونه سوال های قابل طرح و پی بردن به بخش های پر اهمیت و کم اهمیت، می توانید ترفند های موجود برای حل تست ها را نیز بیاموزید.

بعد از آزمون های خود تطابق این جزوه را با سوالات آزمون بررسی کنید.

گرد آورنده: مهندس مجتبی لشینی

طراح آزمون های آزمایشی، مدرس آموزشگاه های بزرگ تهران و شهرستانهای بزرگ کشور

زندگی میدانی ست

و ندرین میدان نیکی و بدی رو در رو

ما به هر حال و به هر کار و هر جا باشیم

یا قوی گردد ز ما نیکی

یا بدی گیرد از ما نیرو!

اصل ضرب:

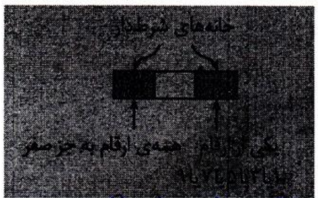
اگر دو عمل مستقل A و B یکی به n طریق و دیگری به m طریق قابل انجام باشد. آن گاه این دو عمل با هم به $m \times n$ طریق مختلف قابل انجام هستند.

مثال: شخصی ۴ کت و ۳ شلوار متفاوت دارد. این شخص به چند طریق می‌تواند یک دست لباس بپوشد؟

۱۲ = ۳ شلوار × ۴ کت

مثال: از شهر A به شهر B، دو راه و از شهر B به شهر C، سه راه وجود دارد. پس طبق اصل ضرب به ۶ = ۳ × ۲ طریق مختلف می توان از شهر A به شهر C رفت (با عبور از شهر B).

روش: در حل مسائل (بالاخص مسائل اعداد) برای استفاده از اصل ضرب ابتدا به سراغ خانه های شرط دار می رویم. مثلا، اگر بخواهیم تعداد فرد سه رقمی را بیابیم. خانه های یکان (به خاطر فرد بودن) و صدگان (صفر نباید در این خانه باشد) شرط دار هستند.



نکته۱: در ساخت اعداد و کلمه بین خانه‌ها ضرب ست.

نکته۲: ۰۲۱، ۰۰۲۱ و ... اعداد دو رقمی هستند.

۴۵۰ = ۵×۱۰×۹ = تعداد اعداد فرد ۳ رقمی

Email : mojtaba.lashini@gmail.com

نکته: در حل مسائل اگر بین دو یا چند عمل انتخاب، "و" به کار رود، تعداد حالات انجام آن ها را در هم ضرب می کنیم و اگر "یا" به کار رود، تعداد حالات انجام آن ها را با هم جمع می کنیم.

مثال: علی در شهر تهران قرار دارد او به چند طریق می تواند به یک سفر زیارتی برود به شرطی که مسیرهای آن به صورت روبه رو باشد.

جواب: (مشهد ← تهران) یا (قم ← تهران)

۲ + ۳ = ۵

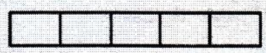
مثال: با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت به طوری که:

الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم. ۵ × ۵ × ۵ = ۱۲۵

ب) اعداد تکراری مجاز نباشد. ۵ × ۴ × ۳ = ۶۰

ج) عدد زوج باشد و بدون تکرار. ۴ × ۳ × ۲ {۲و۴}

۱. با استفاده از رنگ های آبی، قرمز و سبز به چند روش می توان خانه های شکل زیر را رنگ کرد به طوری که خانه های مجاور رنگشان متفاوت باشند؟



۱) ۱۲۰   ۲) ۳۶

۳) ۴۸   ۴) ۲۴۳

✍ گزینه۳ .... ۳ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۴۸

از سمت چپ شروع به رنگ کردن می کنیم خانه اول ۳ رنگ مجاز است و خانه های بعدی ۲ رنگ.

۲. چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز بزرگ تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

۱) ۷۲   ۲) ۸۴ ← عدد بزرگتر از ۳۰۰۰ حتماً سمت چپ ترین عددش از ۳ بزرگتر است.

۳) ۹۶   ۴) ۱۰۸

✍ گزینه۳ .... ۴ × ۴ × ۳ × ۲ = ۹۶ {۳و۵و۷و۹}

ارقام فرد {۱و۳و۵و۷و۹} تعداد = ۵

۳. یک عدد سه رقمی را متقارن گوییم، هر گاه رقم یکان و صدگان آن برابر باشند (مانند ۱۶۱). تعداد اعداد سه رقمی متقارن فرد کدام است؟

۱) ۴۵
۲) ۵۰
۳) ۲۵۰
۴) ۴۵۰

تعداد حالات هر خانه

✍ گزینه۲ $\underset{\{1,3,5,7,9\}}{\boxed{5}} \times \underset{\{0,1,\ldots,9\}}{\boxed{10}} \times \underset{\text{به پیروی از یکان}}{\boxed{1}} = 50$

نکات:

۱: **تعریف فاکتوریل:** اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه فاکتوریل به صورت رو به رو تعریف می شود:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

فاکتوریل ساده تر جهت خلاصه کردن $10! = 10 \times 9! = 10 \times 9 \times 8! = \ldots$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$ $\quad \frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}$

$\boxed{0! = 1}$ $\boxed{1! = 1}$ $\boxed{2! = 2}$ $\boxed{3! = 6}$ $\boxed{4! = 24}$ $\boxed{5! = 120}$ $\boxed{6! = 720}$

۲: $0! = 1! = 1$

۳: تست هایی که درباره ی حروف است بدون تکرار در نظر گرفته می شوند مگر آنکه در صورت تست شرطی گذاشته شود و همچنین تست هایی که درباره ی اعداد می باشد با تکرار در نظر گرفته می شود مگر آنکه در صورت تست گذاشته شود.

٤: اعدادی که زوج هستند دارای یکان ۸، ٦، ٤، ۲ و صفر هستند و اعدادی که مضرب ۵ هستند دارای یکان ۵ و ۰ هستند.

۵: تعداد اعداد صحیح بین دو عدد $a < x < b$ برابر است با $n(x) = b - a - 1$

۴. چند عدد شش رقمی با ارقام ۰ و ۱ وجود دارد؟

۱) ۲۴
۲) ۳۲
۳) ۴۸
۴) ۶۴

✍ گزینه۲ $\underset{\{1\}\ \text{عدد}}{1} \times \underset{\{0,1\}}{2} \times \underset{\{0,1\}}{2} \times \underset{\{0,1\}}{2} \times \underset{\{0,1\}}{2} = 2^5 = 32$

جایگشت و ترتیب

جایگشت(ترتیب قرار گرفتن): اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت قرار گرفتن آن ها در کنار هم یک جایگشت می گویند.

نکته: تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر $n!$ است. **مثلا:** ۳ حرف a، b و c به ۶ = !۳ حالت می تواند کنار هم قرار بگیرند.

مثال: ده نفر دانش آموز به چند طریق می توانند بر روی ۱۰ صندلی بنشینند؟

$\underset{\text{تعداد انتخاب نفر اول}}{10} \times \underset{\text{تعداد انتخاب نفر دوم}}{9} \times \cdots = 10!$

جایگشت های با تکرار: اگر در میان n شیء موجود، r شیء شبیه هم وجود داشته باشد، تعداد جایگشت های اشیا برابر $\frac{n!}{r!}$ است.

مثلا: تعداد جایگشت های حروف a,a,b,c,c برابر $\frac{5!}{2!2!}$ است.
۲ تا a تکراری ۲ تا c تکراری

مثال: تعداد جایگشت های اعداد {۴و۴و۴و۲و۲و۱و۱} کدام است؟ $\frac{7!}{2!3!}$

مثال: تعداد جایگشت اعداد {۱و۱و۱} کدام است؟ $\frac{3!}{3!}=1$

مثال: با جایگشت اعداد ۲،۴،۶،۸ چند عدد زوج چهار رقمی می توان نوشت؟
$4!$

تبدیل r تایی از n تایی ($r \leq n$) (ترتیب): هر گاه جابه جایی عضـو ها شـکل جدیدی ایجاد می کند یعنی ترتیب قرار گرفتن آنها مهم باشد آن را تبدیل می گویند مثال ساختن عدد یا کلمه تبدیل است.

$$p_r^n = P(n,r) = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

****** توصیه می شود مسائل این بخش به کمک اصل ضرب حل شود.**

مثال: با ارقام ۷، ۹ و ۴ چند عدد دو رقمی می توان ساخت به طوری که:

الف) تکرار مجاز نباشد.

روش اول: ترتیب $P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

روش دوم: اصل ضرب $\underline{3} \times \underline{2} = 6$

ب) تکرار مجاز باشد.

روش اول: ترتیب ← نمی شود!!!

روش دوم: اصل ضرب $\underline{3} \times \underline{3} = 9$

چند شیء کنار هم باشند یا نباشند.

روش: اگر در محاسبه ی جایگشت اشیاء بخواهیم چند شیء خاص کنار هم باشند، آن ها را در داخل یک بسته قرار داده و یک شیء در نظر می گیریم. سپس جایگشت شیء حاصل را با اشیای دیگر محاسبه می کنیم.

مثال: ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ به چند طریق می توانند کنار هم قرار بگیرند، به طوری که:

الف) ۲ و ۴ کنار هم باشند. اول جایگشت درون هر بسته را حساب کرده و بعد جایگشت کل بسته ها.

جابه جایی داخل بسته

$\underbrace{۱,۳,(۲,۴)}_{\text{۳ شیء}} \Rightarrow$ تعداد حالات مطلوب = ۳! × ۲!

ب) ۲ بلافاصله بعد از ۴ بیاید.

$\underbrace{۱,۳,(۴,۲)}_{\text{۳ شیء}} \Rightarrow$ تعداد حالات مطلوب = ۳! × ۱

تذکر: این قسمت را طراحان کنکور بیشتر از بقیه ی قسمت ها دوست داشته اند! جدیدا باب شده که از فعل منفی در صورت تست استفاده می شود و می گویند مثلا a و b کنار هم نباشند! دراین صورت تعداد جایگشت هایی که a و b کنار هم هستند را به دست می اوریم و از تعداد کل جایگشت ها کم می کنیم.

۵. ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی های حاصل کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

گزینه ۳ $\boxed{1,3,5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\Rightarrow 3! \times 3! = 36$

بسته ۱ بسته ۲ بسته ۳

جایگشت درون بسته ۱ جایگشت هر ۳ بسته

۶. حروف کلمه ی LAGRANGE را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم ، در چند حالت، حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

گزینه ۳ $\boxed{A,A}$ $\boxed{G,G}$ $\boxed{L}$ $\boxed{R}$ $\boxed{N}$ $\boxed{E}$ $\Rightarrow \frac{2!}{2!} \times \frac{2!}{2!} \times 6! = 720$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

بسته ۱ بسته ۲ کل ۶ بسته

۷. تعداد جایگشت های حروف کلمه ی computer که در آن سه حرف o , m , c به صورت com قرار گرفته باشند ، چند است؟

۱) !۶ ۲) !۵ ۳) !۳ × !۶ ۴) !۳ × !۵

گزینه ۱ $\boxed{com}$ $\boxed{p}$ $\boxed{u}$ $\boxed{t}$ $\boxed{e}$ $\boxed{r}$ $\Rightarrow 6! = 720$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

۸. تعداد جایگشت های حروف کلمه ی SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند، کدام است؟ {باشند} - کل

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

گزینه ۳ (SS) (Y) (t) (E) (M) $\Rightarrow \underbrace{5! = 120}_{\text{باشند}} \Rightarrow$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$\text{کل} = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360 = \text{کل}$ $\Rightarrow$ جواب = باشند - کل = $360 - 120 = 240$

نکته: هرگاه سؤالاتی به این صورت که کسی قبل از دیگری وارد جایی شده است پرسیده شود ابتدا کل جایگشت را نوشته و سپس تعداد حالات را به آن تقسیم می کنیم به عنوان مثال از بین ۵ نفر اگر بخواهیم حالاتی که

الف) شخص A قبل B به اتاق می آید را حساب کنیم: $\frac{5!}{2!}$

۲ نفر ← !۲

ب) شخص A قبل B و بعد از C وارد اتاق شود را حساب کنیم: $\frac{5!}{3!}$

۳ نفر ← !۳

جایگشت یکی درمیان

در دو حالت زیر، اعضای تیم های A و B می توانند به صورت یکی در میان قرار بگیرند:

الف) تعداد اعضای A و B با هم مساوی باشند:

(جایگشت اعضای B) × (جایگشت اعضای A) × ۲ = تعداد جایگشت های یکی در میان

ب) تعداد اعضای A و B یکی اختلاف داشته باشند:

(جایگشت اعضای B) × (جایگشت اعضای A) = تعداد جایگشت های یکی در میان

مثال: تعداد جایگشت های اعداد ۲ و ۴ و ۶ و ۱ و ۳ و ۵ را به دست آورید درصورتی که اعداد زوج و فرد یکی در میان قرار بگیرند.

ف × ز × ف × زوج × فرد × زوج

ز × ف × ز × ف × ز × ف

$\Rightarrow 2 \times 3! \times 3!$

جایگشت اعداد زوج　　جایگشت اعداد فرد

مثال۲: تعداد جایگشت های اعداد ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱ و ۳ و ۵ را به دست آورید درصورتی که اعداد زوج و فرد یکی در میان قرار بگیرند.

ز × ف × ز × ف × ز × ف × ز

$\Rightarrow 4! \times 3!$

جایگشت اعداد زوج　　جایگشت اعداد فرد

۹. با جا به جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می توان تشکیل داد به طوری که رقم های ۲ یک در میان باشند؟

۱) ۹   ۲) ۱۲   ۳) ۱۸   ۴) ۲۴

گزینه۲ A = ۱ها۲ = تعداد ۲ها = ۳ ⟹ ۲ × (A جایگشت) × (B جایگشت)

B = ۵,۷,۶ = ۳   ۲ × ۱ × ۳! = ۱۲

خلاصه نکات:

۱: هرگاه n عضو متمایز بدون محدودیت کنار هم قرار بگیرد تعداد حالت ها برابر است با : $n!$ جایگشت

۲: هر گاه در میان n عضو متمایز قرار باشد k عضو به خصوص کنار هم باشند آن k عضو را یک عضو در نظر می گیریم. طناب بپیچ

۳: هر گاه k عضو متمایز و (k+1) عضو متمایز دیگر به طور متناوب کنار هم باشند تعداد حالت ها برابر است با: $k!(k+1)!$

یکی در میان

۴: هر گاه k عضو متمایز و k عضو متمایز دیگر به طور متناوب کنار هم قرار گیرند تعداد حالت ها برابر است با: $2(k!)^2$.

۵: تعداد حالت هایی که n عضو متمایز به طور دایره وار(جهت دور اهمیت دارد)کنار هم قرار می گیرند برابر است با:

$(n-1)!$. جایگشت دایره ای

۶: تعداد گردنبند هایی (جهت دور اهمیت ندارد) که با n مهره متمایز می توان ساخت برابر است با: $\frac{(n-1)!}{2}$ گردن بند

۷: اگر n عضو که بعضی از آنها تکراری است (جایشت های با تکرار) کنار هم قرار گیرند تعداد حالات برابر است با: جایگشت با تکرار

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,\dots\,n_i!} \quad (n_i \text{ تعداد تکرار})$$

۹. با ارقام ۰ و ۰ و ۰ و ۰ و ۱ و ۱ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ۶

گزینه۲ ۱۰۰۰ و ۱۱۰۰ و ۱۰۱۰ و ۱۰۰۱

نکته: اگر مثلاً ۵ عدد دارند که در آن تعداد صفر بود و ساخت اعداد ۴و۳و۲ رقمی خواسته شد حالات را جدا می کنیم و دستی می نویسیم.

مثال: با اعداد ۰و۰و۰و۲و۲ چند عدد ۴ رقمی می توان نوشت:

۲و۰و۰و۰ ⟶ ۱ حالت

۲و۲و۰و۰ ⟶ ۳ حالت

۱۰. ۱۲ نفر جهت سوار شدن به هواپیما در انتظار نشسته اند.در این پرواز ۳ جای خالی وجود دارد.به ترتیب به چند طریق اسامی آن ها جهت سوار شدن خانواده می شود؟

۱) ۲۲۰ ۲) ۴۴۰ ۳) ۹۹۰ ۴) ۱۳۲۰

گزینه ٤ اصل ضرب: $12 \times 11 \times 10 = 1320$ | ترتیب: $P^{12}_{3} = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

۱۱. با حروف کلمه ی (انتخاب) چند کلمه ی شش حرفی می توان ساخت که حرف ابتدا و انتهای آن تکراری باشند؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

گزینه ۲ الف $\boxed{1} \times \boxed{1} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{4} \times \boxed{1}$ الف $= 24$

خانه شرط

۱۲. از بین ۶ کارمند به چند طریق می توان به ترتیب یک منشی و یک مسابدار و یک رئیس جمهور انتخاب کرد؟

۱) ۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

گزینه٤ اصل ضرب: $6 \times 5 \times 4 = 120$ | ترتیب: روش اول $P^{6}_{3} = 6 \times 5 \times 4 = 120$

نکته: حروف صدادار انگلیسی a-e-u-i-o می باشد.

۱۳. با حروف کلمه ی action چند کلمه ی سه حرفی شامل فقط یک حرف صدا دار واقع در وسط آن می توان ساخت؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

گزینه ۳ $\underset{c,t,n}{\boxed{3}} \times \underset{a,i,o}{\boxed{3}} \times \boxed{2} = 18$

نکته: اکثر سؤالاتی که با ترتیب حل می شوند را می توان با اصل ضرب حل کرد.

۱۴. در همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند، به چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

انتخاب یک نفر بین ۳ تا

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

گزینه ۳ $\quad ۳! \times ۶ = ۳۶$ داخل باکس

باکس: $\boxed{۲ \times ۳ \times ۱}$ $\quad \square \quad \square$

۲ نفر a و b $\quad$ ۳ نفر باقی مانده $\quad$ ۲ نفر + باکس

ترکیب:

ترکیب r تایی از n تایی ($r \le n$): هرگاه در انتخاب عضو ها جابه جایی عضو ها شکل جدیدی ایجاد نکند آن را ترکیب می گویند مثال انتخاب گروه انسانی که ترکیب است.

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

توضیحات: در سؤالاتی که ترتیب انتخاب مهم نیست مثلاً انتخاب ۵ دانش آموز از بین ۱۰۰ نفر برای تیم فوتبال، انتخاب ۳ مهره از ۱۰ مهره داخل یک کیسه و... از ترکیب استفاده می کنیم.

حل چند مثال عددی از فرمول ترکیبات:

۱) $\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!(۷-۳)!} = \frac{۷!}{۴!\,۳!}$

۲) $\binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!\,۵!}$ $\qquad$ ۳) $\binom{۸}{۱} = \frac{۸!}{۱!\,۷!} = \frac{۸ \times ۷!}{۷!} = ۸$

مثال: اگر $\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)} = ۲۶$، مقدار n را به دست آورید.

$$\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)} = \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{4!\,(n-5)!}} = \frac{\frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{(n-4)\,\cancel{(n-5)!}}}{\frac{\cancel{(n-1)!}}{4!\,\cancel{(n-5)!}}} = ۲۶ \Rightarrow \frac{۲۴n}{n-4} = ۲۶ \Rightarrow n = ۵۲$$

نکات:

۱: $P(n,r) = r! \times C(n,r)$

۲: چند رابطه ی مهم:

۱) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$ ۲) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{7}{1} = \binom{7}{6} = 7$

۳) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ ۴) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ فرمول پاسکال *مهم

۳: اگر یک صفحه ی شطرنجی مستطیلی $m \times n$ داشته باشیم، تعداد مستطیل هایی که در آن قابل شمارش است برابر است با: $\binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}$.

۴:

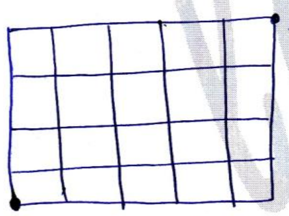
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ تعداد مربعات یک صفحه شطرنجی $(n \times n)$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

۵: مساله مسیر: اگر بخواهیم از نقطه A به B برویم و فقط مجاز به رفتن به سمت ↑ و راست → باشیم تعداد کل راه های متفاوت برابر است با:

$m = 4$



A $5 = n$ B

$$\rightarrow \binom{5+4}{4} = \binom{5+4}{5} \xrightarrow{\text{حالت کلی}} \binom{m+n}{n}$$

مسائل هندسی ترکیب:

فرض کنید n نقطه روی محیط دایره باشد. تعداد k ضلعی هایی که با استفاده از این n نقطه می توان ساخت از فرمول $\binom{n}{k}$ به دست می آید. مثلا: اگر ۵ نقطه روی یک دایره باشد. تعداد ۳ ضلعی های ساخته شده با این نقاط برابر $\binom{5}{3} = 10$ است.

۱۵. بر روی یک دایره، ۸ نقطه ی متمایز وجود دارد. تعداد چهار ضلعی های محدب که هر راس آن واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

۱) ۵۶   ۲) ۶۸   ۳) ۷۰   ۴) ۷۲

گزینه ۳ ....

$$\binom{8}{4} = \frac{8\times7\times6\times5\times\cancel{4!}}{4\times3\times2\times1\times\cancel{4!}} = 70$$

حداقل، حداکثر و روش متمم:

در مسائل ترکیب و خصوصا بعدا در احتمال مسائلی را خواهید دید که با لفظ حداقل یا حداکثر همراهند. بهتر است همین جا با این مفاهیم آشنا شویم:

۱. حداکثر k نفر، یعنی k نفر یا کم تر از k نفر، به عبارت دیگر یعنی: k نفر با (k-1) نفر یا ... یا ۲ نفر یا ۰ نفر.

۲. حداقل k نفر، یعنی k نفر یا بیشتر از k نفر، به عبارت دیگر یعنی: k نفر یا (k+1) نفر یا (k+2) نفر یا ... .

روش متمم: بعضی وقت ها محاسبه ی تعداد حالات مطلوب مساله خیلی وقت گیر و طولانی است. در این مسائل بهتر است تعداد حالات نا مطلوب که محاسبه اش راحت تر می باشد را به دست آورده و این حالات نامطلوب را از کل حالات کم کنیم.

[redacted]

تذکر: اگر در صورت تست " حداقل یکی" را دیدید سریعا بفهمید که باید از روش متمم سوال را حل کنید.

مثلا، متمم آن که " حداقل یکی از ۳ نفر دکتر باشد" می شود " هیچ کدام از ۳ نفر دکتر نباشد!"

۱۶. از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد؛ به طوری که لااقل دو نفر از آن ها دانش آموز تجربی باشند؟

۱) ۲۵	۲) ۳۰	۳) ۳۵	۴) ۴۰

گزینه۴ ((دو تجربی)و(یک ریاضی)) یا ((سه تجربی)و(۰ ریاضی))

$$\binom{5}{2}\times\binom{3}{1}+\binom{5}{3}\times\binom{3}{0}=30+10=40$$

۱۷. از میان ۷ کشتی گیر و ۵ وزنه بردار به چند روش می توان ۳ نفر را انتخاب کرد، به طوری که حداقل یک نفر کشتی گیر باشد؟

کل - {هیچ نفر

۱) ۲۲۰	۲) ۶۰	۳) ۲۱۰	۴) ۱۶۰

گزینه۳ کل $=\binom{12}{3}$ هیچ کشتی گیر $=\binom{5}{3}$

جواب = کل − هیچ نفر $=\binom{12}{3}-\binom{5}{3}=220-10=210$

۱۸. از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می توان ۸ پرسش را جهت پاسخ گویی انتخاب کرد، به شرط آن که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

۱) ۲۵	۲) ۳۰	۳) ۳۲	۴) ۳۵

گزینه۴ ((۴ پرسش از ۵ تای اول) و (۴ پرسش از ۵ تای بعدی)) یا ((۵ پرسش اول) و (۳ تا از ۵ تای بعدی))

$$\binom{5}{4}\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\binom{5}{3}=25+10=35$$

تست بیشتر

۱۹. به چند طریق می توان یک گروه ۵ نفری از میان ۵ دانش آموز و ۴ دانشـــجو انتخاب کرد به طوری که در هر گروه فقط ۳ دانشجو عضویت داشته باشند؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

گزینه۴ $\left(\text{سه دانشجو}\right)$ و $\left(\text{دو دانش آموز}\right) = 4 \times \left(\frac{5 \times 4}{2 \times 1}\right) = 40$

۲۰. اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و هر ردیف ۱۰ صندلی باشد، مشخص کنید به چند طریق ۶ دانش آموز اول دبیرستان، ۳ دانش آموز دوم و ۴ دانش آموز سوم دبیرستان می توانند روی آنها بنشینند به طوری که اولی ها در ردیف اول و دومی ها در ردیف دوم باشند؟

۱) $\binom{10}{6}\binom{10}{3}\binom{11}{4}$ ۲) $\binom{20}{13}$ ۳) $\frac{(10!)^2 \times 11!}{(7!)^2 \times 4!}$ ۴) $\frac{(10!)^3}{4! \times 7! \times 6!}$

گزینه۳

$$\underbrace{\binom{10}{6} \times 6!}_{\text{اول}} \times \underbrace{\binom{10}{3} \times 3!}_{\text{دوم}} \times \underbrace{\binom{11}{4} \times 4!}_{\text{سوم}} = \frac{(10!)^2 \times 11!}{(7!)^2 \times 4!}$$

زیرمجموعه

تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه ی n عضوی از فرمول $\binom{n}{k}$ به دست می آید. از طرفی می دانیم تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه ی n عضوی برابر 2^n است. پس داریم:

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{زیر مجموعه ۰ عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{زیر مجموعه ۱ عضوی}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{زیر مجموعه ۲ عضوی}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{زیر مجموعه } n \text{ عضوی}} = 2^n$$

@Maharate_Konkur

نکته: اگر A یک مجموعه ی n عضوی باشد، داریم:

2^{n-1} = تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی = تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی

۲۱. تعداد زیر مجموعه های سه عضوی از مجموعه ی {a, b, c, d, e, f} شامل عضو a، کدام است؟

۱) ۸		۲) ۱۰		۳) ۱۲		۴) ۱۵

چون هر کدام یک عضو a داریم ← $\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{زیرمجموعه دوعضوی } b,c,d,e,f \text{ با}} = \frac{5\times4}{2} = 10$

نکته:

۱. اگر بخواهیم از بین n شی k شی انتخاب کنیم به طوریکه فاقد m عضو به خصوص باشد تعداد حالات انتخاب برابر است با $\binom{n-m}{k}$

۲. اگر بخواهیم از بین n شی k شی انتخاب کنیم به طوریکه شامل m عضو به خصوص باشد تعداد حالات انتخاب برابر است با: $\binom{n-m}{k-m}$

۲۲. تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی مجموعه ی {۱, ۲, ..., ۱۰} کدام است؟

۱) ۱۰۲۴		۲) ۲۵۶		۳) ۵۱۱		۴) ۵۱۲

گزینه ۴ طبق درسنامه $2^{10-1} = 2^9 = 512$

۲۳. حاصل $\overbrace{\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{7}}^{x}$ کدام است؟

۱) ۱۲۸		۲) ۱۲۶

۳) ۲۵۶		۴) ۲۵۴

گزینه ۴ $\underbrace{\binom{8}{0}}_{1} + \underbrace{\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{7}}_{x} + \underbrace{\binom{8}{8}}_{1} = 2^8 = 256$

$1 + x + 1 = 256$

$\longrightarrow x = 254$

جزوه های بعدی به زودی قرار داده می شود.