مرور مفاهیم و تعاریف :

کنترل می‌تواند در زمینه‌های گوناگون کاربرد داشته باشد:

- ساخت و تولید و ماشین‌کاری (تراش، فرز و ...)

- ترابری و جابجایی (هواپیما، ماشین و ...)

- حرارت و سیالات (نیروگاه، تاسیسات و ...)

- ارتباطات (آنتن مخابراتی، کابل برق و ...)

- بیومکانیک (ربات توانبخشی، شیمی درمانی و ...)

نیوتن، اویلر، لاگرانژ

قوانین ۱ و ۲ ترمودینامیک

قوانین انتقال حرارت

جریان در گره، ولتاژ در حلقه (برق)

معادلات حاکم

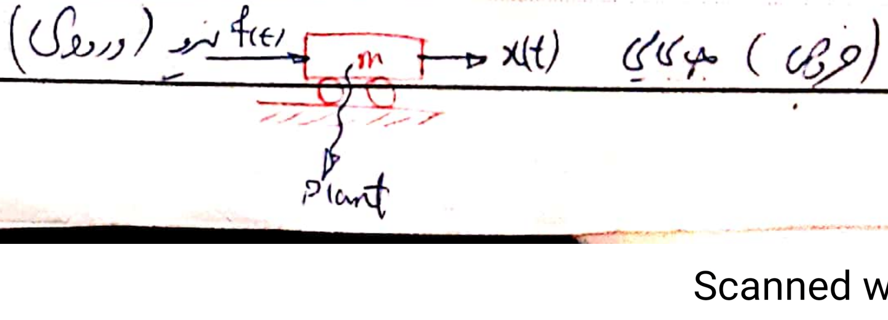
دیفرانسیل

جبری

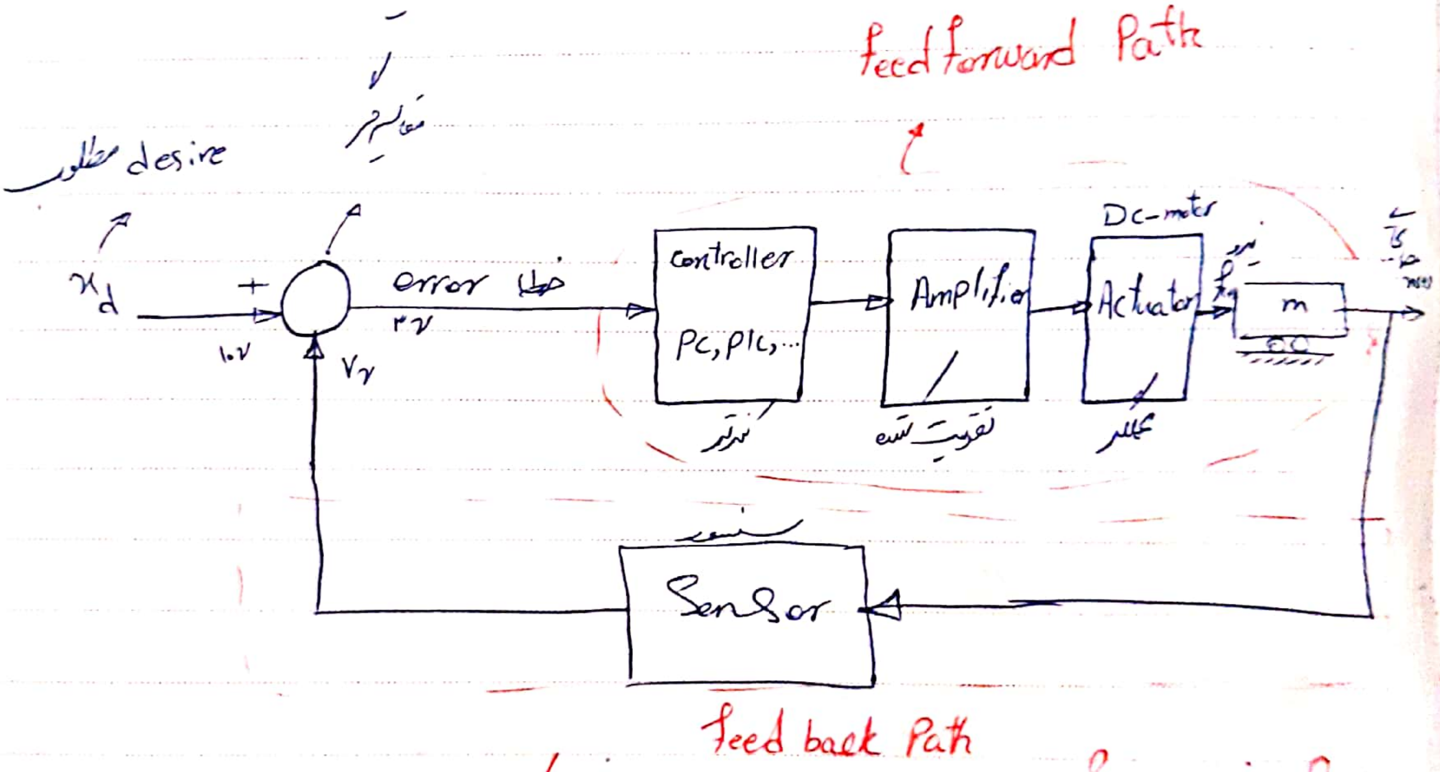
نکته : (Plant) : سیستم مورد مطالعه در کنترل (ربات، مخزن حرارتی، بدن انسان، ابزار ماشینکاری، ...)

سیستم حلقه باز کنترل (open-loop control) . در اثر اعمال ورودی یک خروجی به ما می‌دهد که کنترلی روی آن نداریم

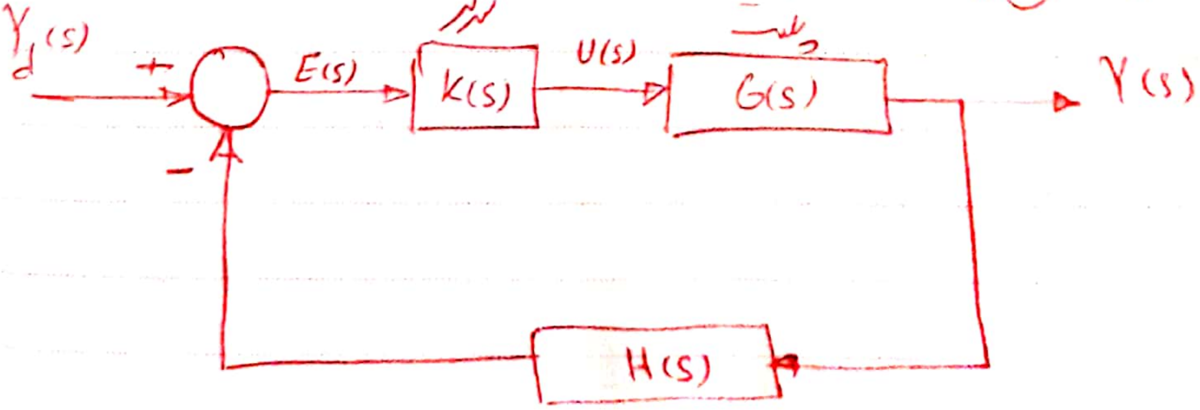
مثلا ماشین را بکشیم که روی تغییرات آن هیچ کنترلی نداریم .



سیستم حلقه بسته کنترل (close loop control) : ابتدا مقدار خروجی را یک سنسور اندازه گیری و سپس آن را (با مقایسه گر) با مقدار مطلوب ورودی خطا تعیین می شود. سپس کنترلر بر اساس سیگنال خطا تصمیم می گیرد ورودی چگونه اعمال شود. قبل از اعمال ورودی به پلنت، سیگنال خروجی (ضعیف) از کنترلر تقویت می شود.

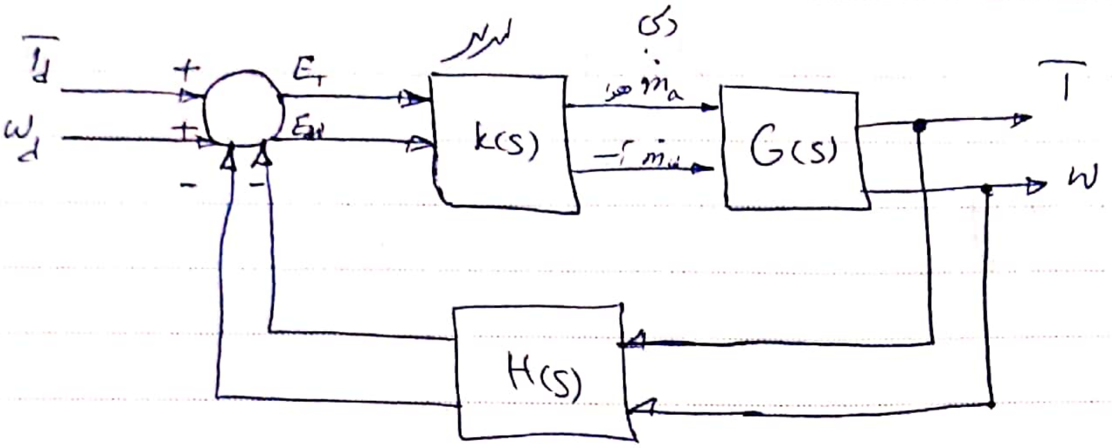


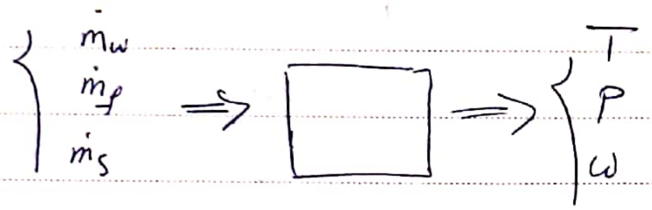
نمایش مختصر از سیستم!



Subject:
Date:

مثال ۲ :



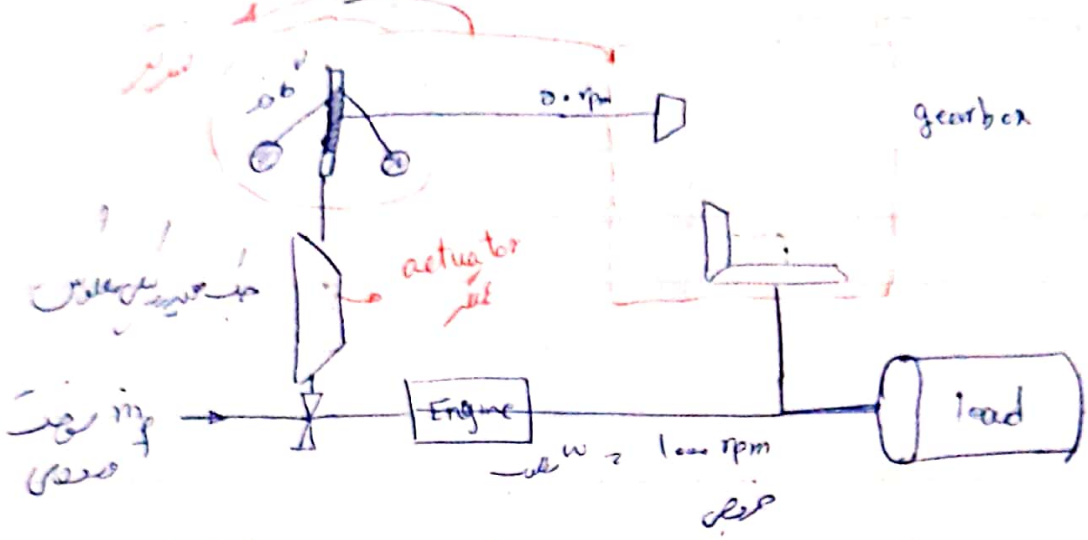


SISO	→	Single	input	– Single	output	Square
MIMO	→	multi	..	– multi	..	
MISO	→	..	..	– Single	..	over actuated sys.
SIMO	→	Single	..	– multi	..	under actuated sys

اگر تعداد ورودی { r و تعداد خروجی { m باشد داریم،

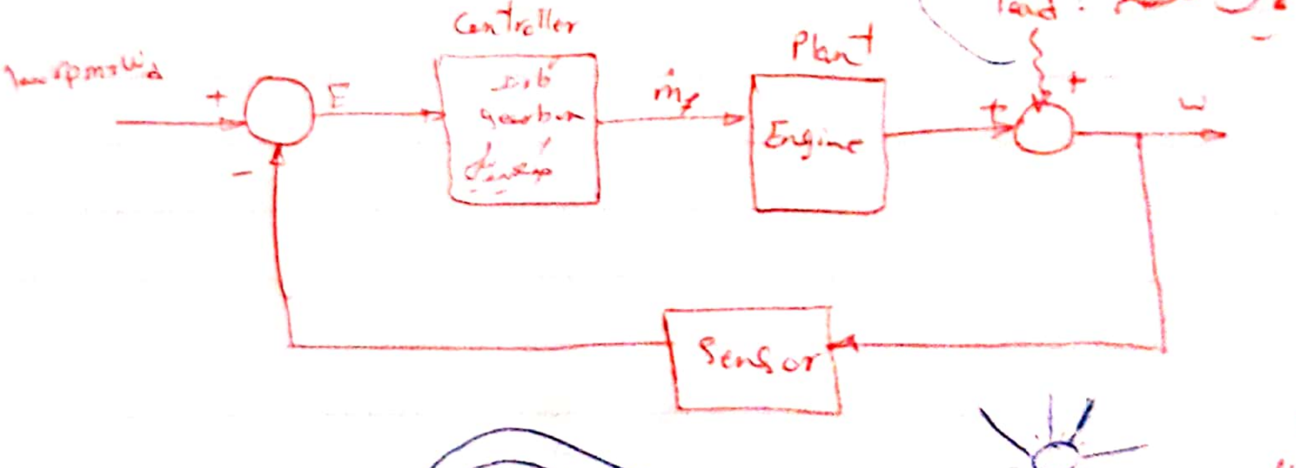
- $m = r$ square
- $r > m$ over act.
- $r < m$ under act.

یادآوری مثال : یک نمونه سیستم کنترل ماشین‌ها : موتور کاروات

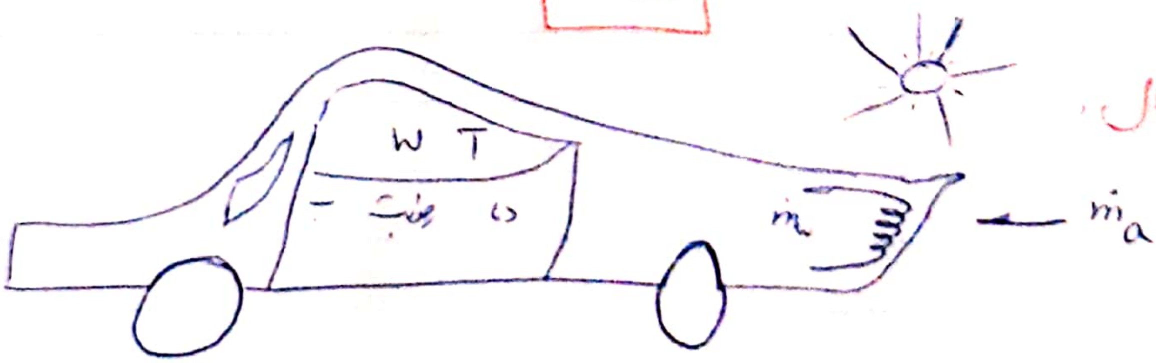


کنترل
- رگولاسیون Regulation : نگهداری سیستم حول یک نقطه مطلوب
- ردیابی Tracking : از یک نقطه کاری A به B بردن

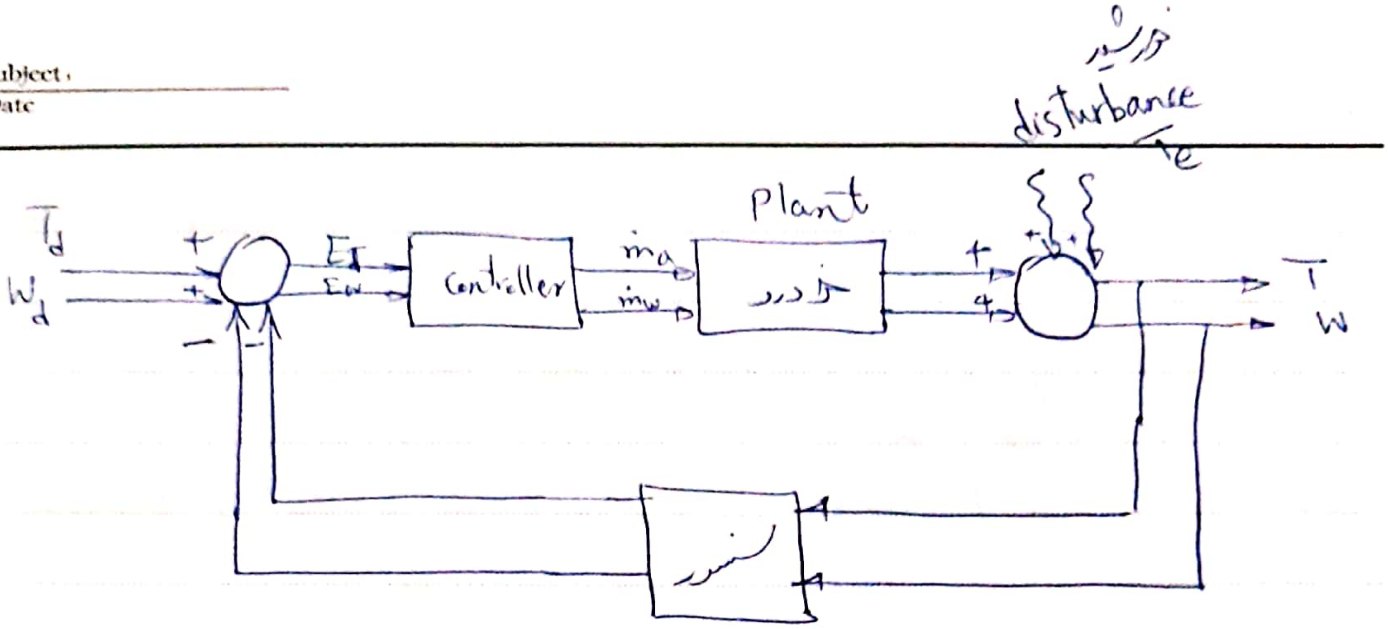
اغتشاش



مثال



Subject:
Date



مقایسه مدار حلقه باز و حلقه بسته :

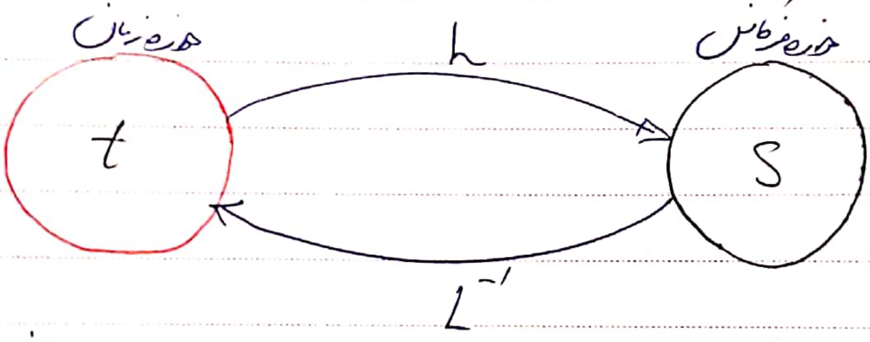
مدار حلقه باز	مدار حلقه بسته
+ ساده و ارزان	− پیچیده و گران
− نگرانی کم درباره پایداری	− نگرانی بیشتر درباره پایداری
+ تعمیر آسان	− تعمیرکاری دشوار
− هزینه مصرف انرژی بالا	+ هزینه مصرف انرژی کم

فصل ۲ : لاپلاس

در این درس فقط به مجموعه ای از تعاریف و روابط مورد نیاز لاپلاس در مدلسازی و یافتن پاسخ ها می پردازیم.

مزایای تبدیل لاپلاس: ۱) کلیه دسته معادلات دیفرانسیل را به معادله جبری تبدیل می کند (کار کردن را آسانتر)

۲) به کمک L و سپس L^{-1} می توان حل پاسخ معادلات دیفرانسیل را به صورت جبری یافت



متغیر مستقل S : $S = \sigma + j\omega$

(σ: قسمت حقیقی ، $j\omega$: قسمت موهومی)

$$G(s) = G_x + jG_y$$

شرط تحلیلی بودن تابع:

$$\sigma\text{-Path:}\quad \frac{\partial G(s)}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = G_{x\sigma} + jG_{y\sigma}$$

$$j\omega\text{-Path:}\quad \frac{\partial G(s)}{\partial j\omega} = \frac{\partial G_x}{\partial j\omega} + j\frac{\partial G_y}{\partial j\omega} = -jG_{x\omega} + G_{y\omega}$$

$(=)$

شرط تحلیلی بودن (مشتق پذیری) :
$$\begin{cases} G_{x\sigma} = G_{y\omega} \\ G_{y\sigma} = -G_{x\omega} \end{cases}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

تبدیل لاپلاس:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

مثال: $f(t) = e^{-at} \rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty}$

$$\rightarrow F(s) = 0 - \left(-\frac{1}{s+a}\right) = \boxed{\frac{1}{s+a}}$$

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
ضربه $\delta(t)$	1	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
پله واحد $u(t)=1$	$\frac{1}{s}$		
پله غیرواحد A	$\frac{A}{s}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
شیب (ramp) αt	$\frac{\alpha}{s^2}$	$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
		e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

مرور مفاهیم ریاضیات :

$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$

۱) $\mathcal{L}(f(t)\,e^{-at}) = F(s+a)$

۲) $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}(\ddot{f}(t)) = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$

(معمولا صفر)

۳) $\mathcal{L}\left(\int f(t)dt\right) = \frac{1}{s}F(s) + \frac{f^{-1}(0)}{s}$

۴) $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

۵) $\mathcal{L}\left(\underbrace{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau}_{\text{انتگرال کانولوشن}}\right) = F(s)\,G(s)$

تعریف :

تابع تبدیل $\rightarrow G(s) = \dfrac{(s+z_1)\cdot(s+z_2)\cdots\cdots(s+z_m)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{n-N})}$

n: مرتبه sys

N: نوع sys

$n-m$: مرتبه نسبی sys

صفرها (Zeros): عواملی که باعث صفر شدن تابع تبدیل می‌شوند.

$$S@: \{-z_1, -z_2, \dots, -z_m\}$$ m تا صفر محدود

قطب‌ها (Poles): عواملی که باعث بی‌نهایت شدن تابع می‌گردند.

$$S@: \{\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{\text{تا } n}, \underbrace{-P_1, -P_2, \dots, -P_{n-N}}_{\text{تا } n-N}\}$$

* به تعداد $n-m$ (مرتبه نسبی)، صفرهای در بی‌نهایت داریم. علت:

$$G(s) = \frac{s^m + \dots}{s^n + \dots} \rightarrow \lim_{s \to \infty} G(s) = \frac{1}{s^{n-m}} \rightarrow$$ $(n-m)$ تا $\frac{1}{s}$ داریم؛

که اگر $s \to \infty$، باعث صفر شدن تابع می‌شوند.

مثال:

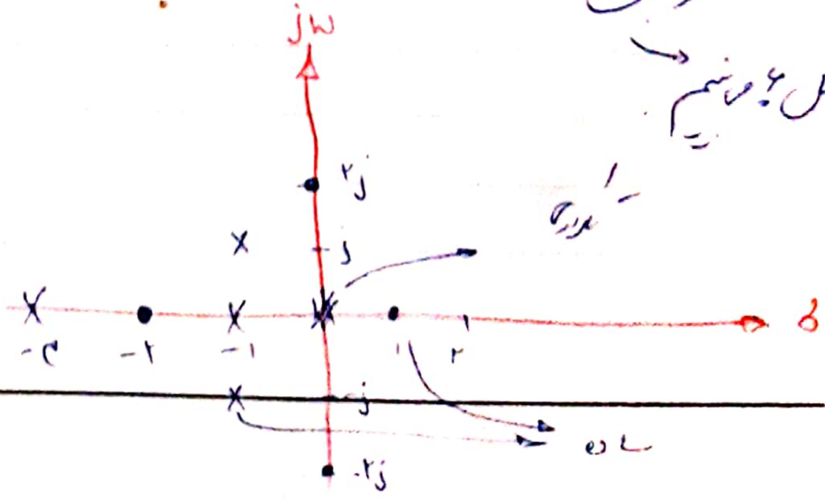
$$G(s) = \frac{(s+2)(s^2+4)(s-1)}{s^2(s+3)(s^2+2s+2)(s+1)}$$

$n = 6 \quad , \quad m = 4 \rightarrow n - m = 6 - 4 = 2$ صفرهای در بی‌نهایت

$N = 2 \rightarrow$ sys نوع ۲ → فصل ۶ می‌خوانیم

Zeros: $\{-2, \pm 2j, 1\}$

Poles: $\{0, 0, -3, -1 \pm j, -1\}$



معکوس لاپلاس :

تحلیل کسری : در این درس و در ادامه از آنجا که با توابع تبدیل سروکار داریم و آن هم به صورت یک کسر است ، روش تحلیل کسری را در قالب ۳ مثال دنبال می‌کنیم .

مثال :

$$F(s) = \frac{s+3}{\underbrace{(s+1)(s+2)}_{\text{قطب‌های ساده}}} \qquad f(t) = ?$$

$$\to F(s) = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

$$a = \lim_{s \to -1} (s+1) F(s) = \frac{s+3}{s+2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$b = \lim_{s \to -2} (s+2) F(s) = \frac{s+3}{s+1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \xrightarrow{L^{-1}} f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

مثال :

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{\underbrace{(s+1)^3}_{\text{قطب‌های تکراری}}}$$

$$F(s) = \frac{a}{(s+1)^3} + \frac{b}{(s+1)^2} + \frac{c}{(s+1)}$$

$$a = \lim_{s \to -1} (s+1)^3 F(s) = s^2+2s+3 = \underline{\underline{2}}$$

$$b = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds}\left\{(s+1)^3 F(s)\right\} = \frac{d}{ds}(s^2+2s+3) = 2s+2 = \underline{\underline{0}}$$

$$c = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left\{(s+1)^3 F(s)\right\} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}(s^2+2s+3) = \frac{1}{2} \times 2 = \underline{\underline{1}}$$

Subject:
Date

$$\Rightarrow F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = e^{-t}t^2 + e^{-t}$$

مثال:

$$F(s) = \frac{s+4}{s^2+2s+5}$$

$$F(s) = \frac{s+1+3}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \underbrace{\left(\frac{3}{(s+1)^2+4}\right) \times \frac{2}{2}}_{\frac{3\times 2}{2\times\left[(s+1)^2+4\right]}}$$

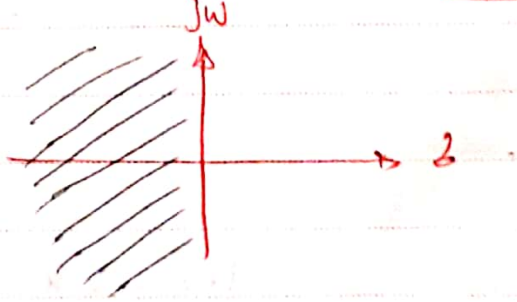
$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right)$$

قضیه مقدار نهایی:

$$f_{ss} = f_\infty = f(t_\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

SS: steady state

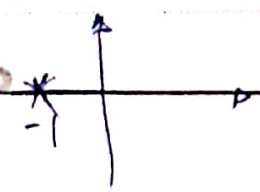
به شرطی که تمام قطب‌های $sF(s)$ سمت چپ محور باشند. (قطب روی محور موهومی نباشند)



مثال:

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = 0$$

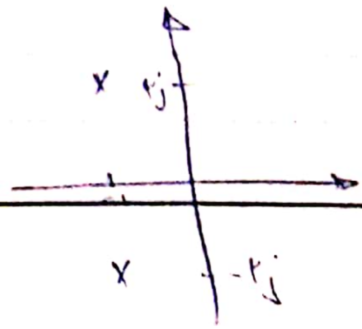
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$



مثال:

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = 0$$

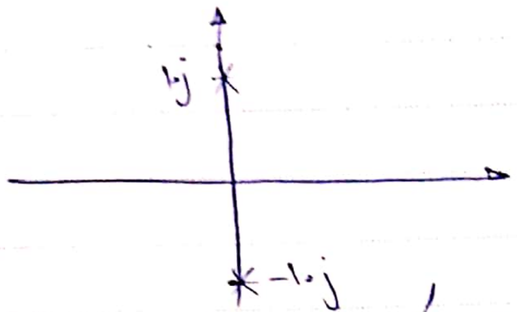
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$



PAPCO

$$f(t) = \sin 10t \longrightarrow F(s) = \frac{10}{s^2+100}$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \frac{10s}{s^2+100} = 0$$ اما $$\lim_{t\to\infty} f(t) =$$ نامعین

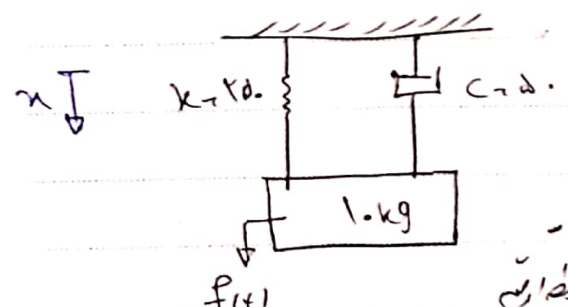


کاربرد قضیه: در مدلسازی سیستم های دینامیکی پس از انجام تابع تبدیل، پاسخ های خروجی مانند جابجایی، سرعت، دما، دبی، فشار و ... بصورت یک تابع $F(s)$ بیان می‌شود.

$$F(s) \xrightarrow[\text{گاهی دشوار}]{L^{-1}} f(t)$$ پاسخ خروجی

گاهی L^{-1} دشوار است و بیشتر تنها به مقدار ماندگار خروجی (جابجایی، سرعت و ...) نیاز داریم؛ نیازی به L^{-1} نیست و مقدار $f(t)$ هم از قضیه بدست می‌آید. (به شرط پایداری)

مثال: هدف: پاسخ $x(t) = ?$



$$10\ddot{x} + 50\dot{x} + 250x = 100$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} x(0) = 0.1\,m \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Subject:
Date

$$10\left(s^2X(s)-sX(0)-\dot{X}(0)\right)+50\left(sX(s)-X(0)\right)+150X(s)=\frac{100}{s}$$

$$X(s)\left[10s^2+50s+250\right]-s-5=\frac{100}{s}$$

$$\longrightarrow X(s)=\frac{s^2+5s+100}{s(10s^2+50s+250)}=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{10s^2+50s+250}$$

$$a=\lim_{s\to 0} sX(s)=0.4$$

$$\longrightarrow a(10s^2+50s+250)+s(bs+c)=\boxed{}$$

$$s^2:\quad 10a+b=1\longrightarrow b=-3$$

$$s^1:\quad 50a+c=5\longrightarrow c=-15$$

$$s^0:\quad 250a=100\longrightarrow a=0.4$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{0.4}{s}-\frac{3s-15}{10s^2+50s+250}=\frac{0.4}{s}-0.3\,\frac{s+2.5+2.5}{(s+2.5)^2+18.75}\times\frac{\sqrt{18.75}}{\sqrt{18.75}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t)=0.4-0.3\,e^{-2.5t}\left(\cos\sqrt{18.75}\,t+\frac{2.5}{\sqrt{18.75}}\sin\sqrt{18.75}\,t\right)$$

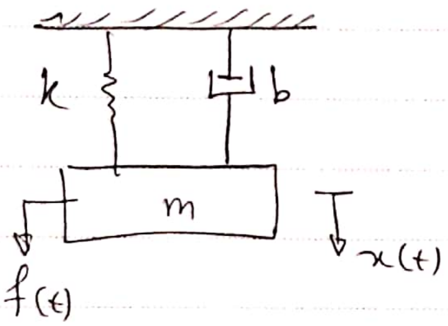
Subject:
Date

فصل ۳:

معادلات حاکم بر سیستم { دیفرانسیلی / جبری $\xrightarrow{L}$ تابع تبدیل Transfer function

$$G(s) = \frac{L\ \text{output}}{L\ \text{input}} \Bigg|_{\text{شرایط اولیه}=0} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

مثال: هدف: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = ?$



حل: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$

$$\to m(s^2 X(s) - sX(0) - \dot{X}(0)) + b(sX(s) - X(0)) + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)(ms^2 + bs + k) = F(s) \to G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

پلنت

$$F(s) \longrightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{ms^2+bs+k}} \longrightarrow X(s)$$

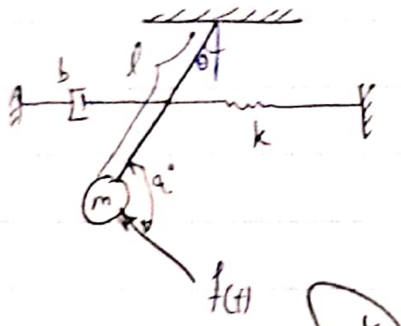
اگر خروجی: $\dot{x} = v \longrightarrow L\dot{x} = Lv = sX(s) = V(s)$

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{s}{ms^2+bs+k}$$

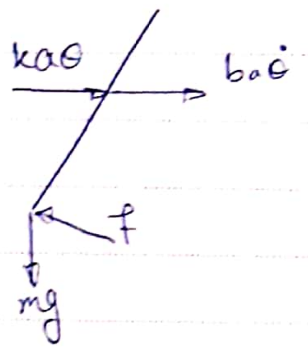
شتاب: $\frac{A(s)}{F(s)} = \frac{s^2}{ms^2+bs+k}$

مثال، هدف: $G(s) = \dfrac{\Theta(s)}{F(s)}$

(آونگ ساده)



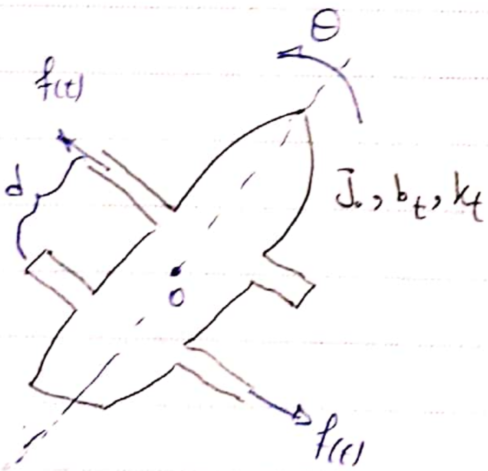
$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta}$$



$$l f(t) - mgl\theta - ka\theta(a) - ba\dot{\theta}(a) = I_o \ddot{\theta}$$

$$\xrightarrow{L} \Theta(s)\left(I_o s^2 + ba^2 s + ka^2 + mgl\right) = l F(s)$$

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{l}{I_o s^2 + ba^2 s + ka^2 + mgl} \; ; (I_o = ml^2)$$



مثال، هدف: $G(s) = \dfrac{\Theta(s)}{F(s)}$

(مدل زاویه جسم فضایی با استفاده از فرض‌ها)

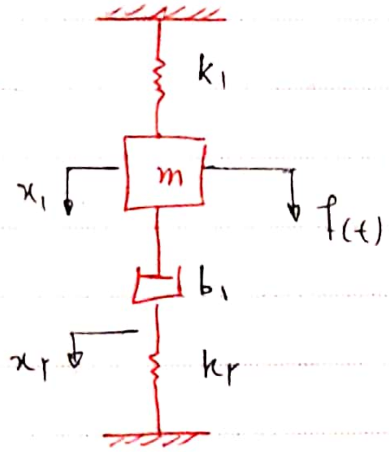
$$\Sigma M_o = J_o \ddot{\theta} \longrightarrow d f(t) - b_t \dot{\theta} - k_t \theta = J_o \ddot{\theta}$$

$$\xrightarrow{L} \frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{d}{J_o s^2 + b_t s + k_t} \; ;$$

تمرین!

مثال:

تحریک $f(t)$



هدف، $G_1(s) = \dfrac{X_1(s)}{F(s)}$

$G_2(s) = \dfrac{X_2(s)}{F(s)} = ?$

on X_1: $\quad m\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 = f$

on X_2: $\quad b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

L از ۱،۲

۱) $X_1(s)\,[ms^2 + bs + k_1] - bs\,X_2(s) = F(s)$

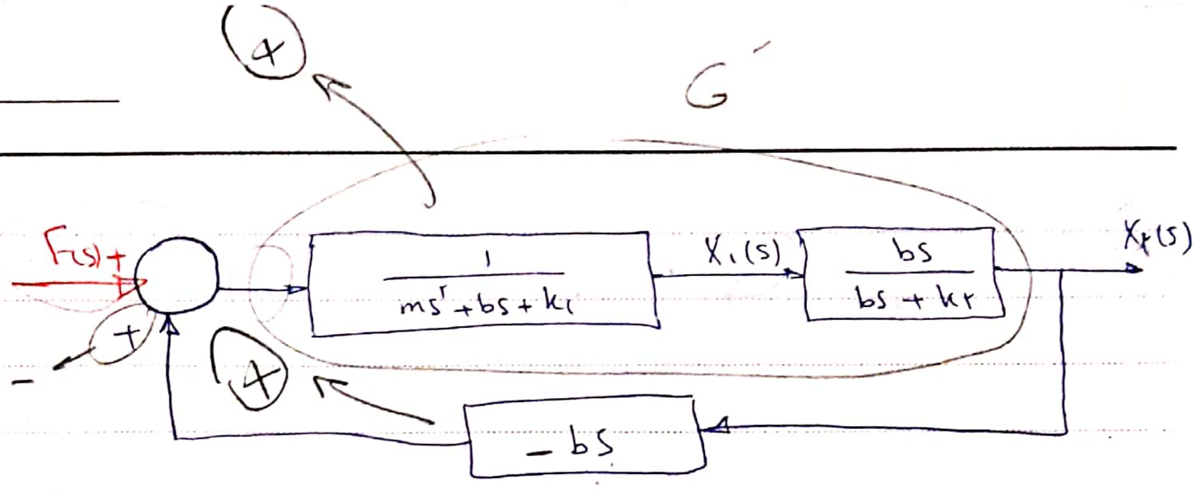
۲) $X_2(s)\,[bs + k_2] - bs\,X_1(s) = 0$

میتوان X_1 را برحسب X_2 از (۲) نوشت و در (۱) قرار داد $\Rightarrow$ $\dfrac{X_2(s)}{F(s)}$ را در sys های MDOF

که $M \geq 3$ است، سر وقت دشوار بوده و احتمال اشتباه نیز زیاد است.

پس، ترسیم بلوک دیاگرام و ساده‌سازی آن:
۱) جبر بلوک دیاگرام (Block Diagram)
۲) روش Mason

Subject:
Date

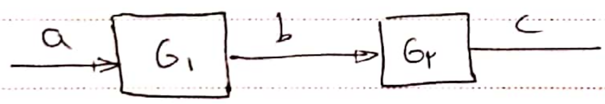


$$\frac{Y_2}{F(s)} = \frac{G'}{1+G'(-bs)}$$

ضرب ـ جمع و تفریق ، مستقل ، ضرب

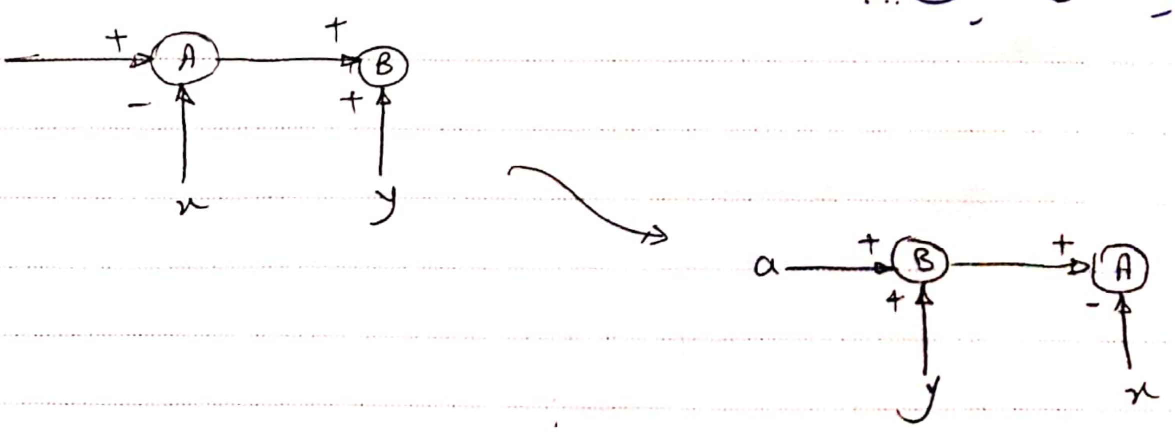
قوانین ساده سازی بلوک دیاگرام:

① درصورتیکه (gain ها) متوالی که بین آنها هیچ انشعابی نباشد ، در هم ضرب می‌شوند.



$$\left.\begin{array}{l} aG_1 = b \\ bG_2 = c \end{array}\right\} \Longrightarrow a(G_1G_2) = c$$

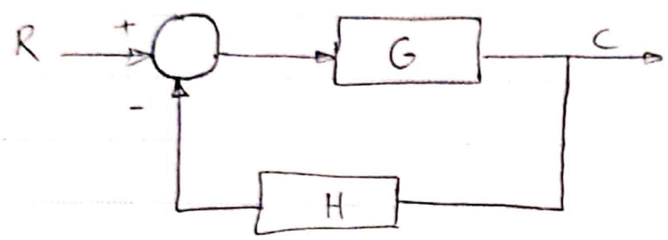
② ترتیب جمع متوالی را میتوان جابجا کرد



Subject :

Subject :
Date

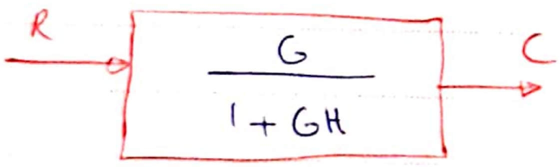
۳ قانون فیدبک :



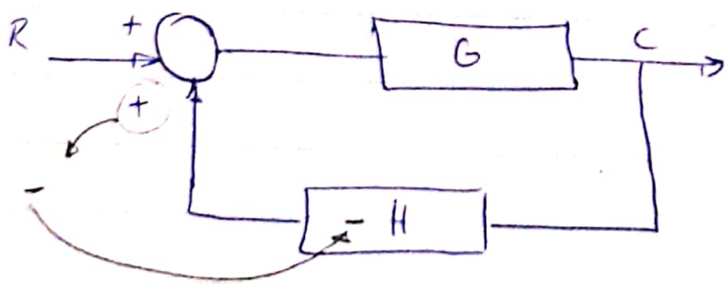
اگر جمع استاندارد  باشد :

$$(R - CH)\,G = C$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$



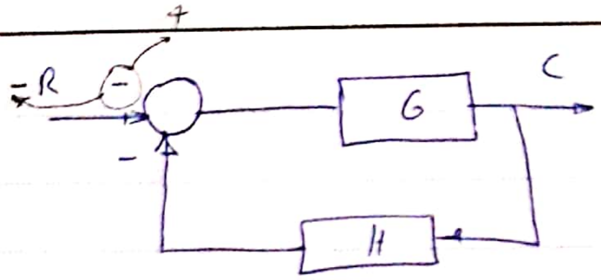
۲ مثال :



$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 - GH}$$

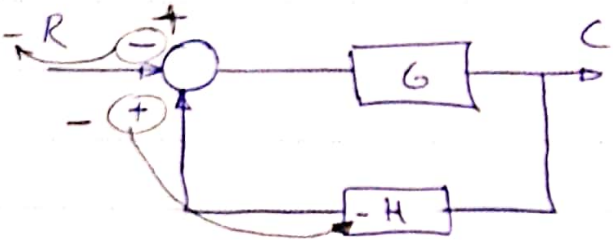
PaPCO

مثال:



$$\frac{C}{-R} = \frac{G}{1+GH} \rightarrow \frac{C}{R} = -\frac{G}{1+GH}$$

مثال ۲:

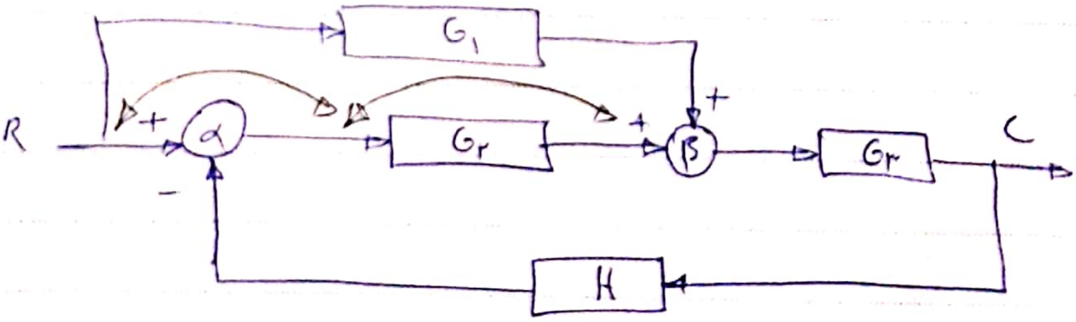


$$\frac{C}{-R} = \frac{G}{1-GH} \longrightarrow \frac{C}{R} = -\frac{G}{1-GH}$$

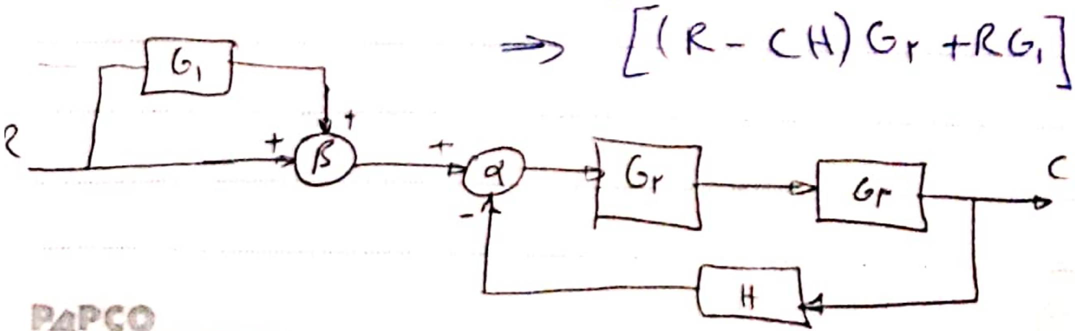
④ اگر تقاطع گیری از پشت G_i به جلوی ضریب G_j رود، باید G_i را در G_j ضرب کنیم

$$G_i \longrightarrow G_i G_j$$

مثال ۲: (ادامه)

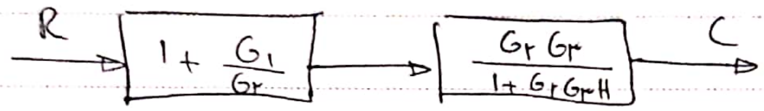


$$\Rightarrow \left[(R - CH)G_2 + RG_1\right] G_3 = C$$



$$\Rightarrow \left[\left(R + R\frac{G_1}{G_2}\right) - CH\right] G_2 G_3 = C$$

ساده سازی شکل پایین :



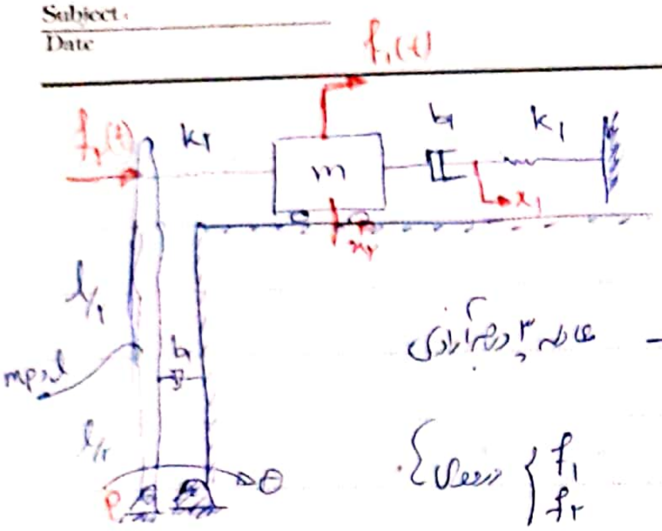
جواب مسئله چند صفحه قبل : ✗

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{G'}{1-G'bs}$$

$$G' = \frac{bs}{(bs+k_2)(ms^2+bs+k_1)} \Rightarrow$$ مخرج سیستم : $(bs+k_2)(ms^2+bs+k_1)-bs^2$

مرتبه ۳ : $bms^3+\dots$

مثال:



{ تعداد تابع تبدیل

معادله ۳ درجه آزادی → TF = ۲×۳ = ۶

{ ورودی: f_1, f_2

{ خروجی: x_1, x_2, θ

الف: تابع تبدیل بین جابجایی جرم m و ورودی f_2 $\left(\frac{X_2(s)}{F_2(s)} = ? \right)$

(معادلات حاکم بر سیستم را تعیین کنید)

$$1)\quad x_1:\quad b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - 0) = 0$$

$$2)\quad x_2:\quad m\ddot{x}_2 + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - l\theta) = f_1$$

$$3)\quad \theta:\quad \Sigma M_p = I_p\ddot{\theta} \rightarrow l f_2 + m_p g \frac{l}{2}\theta - b_2\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)\left(\frac{l}{2}\right) - k_2(l\theta - x_2)(l)$$

$$= I_p\ddot{\theta}$$

$$\xrightarrow{L}\quad 1)\quad X_1(s)(b_1 s + k_1) - b_1 s X_2(s) = 0$$

$$2)\quad -b_1 s X_1(s) + X_2(s)\underbrace{\left[ms^2 + b_1 s + k_2\right]}_{B(s)} - k_2 l\,\theta(s) = F_1(s)$$

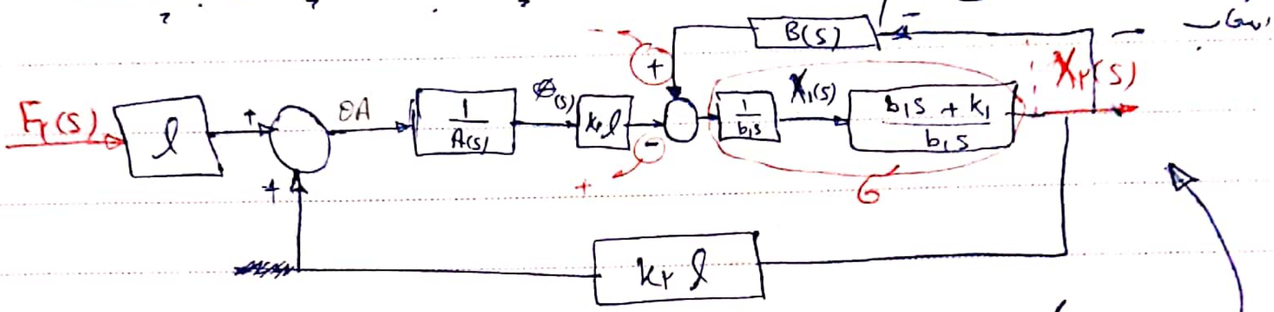
$$3)\quad -k_2 l X_2(s) + \theta(s)\underbrace{\left[I_p s^2 + \frac{b_2 l^2}{4} s + k_2 l^2 - m_p g \frac{l}{2}\right]}_{A(s)} = l F_2(s)$$

بلوک سازی :

(با فرض $F_1(s)=0$)

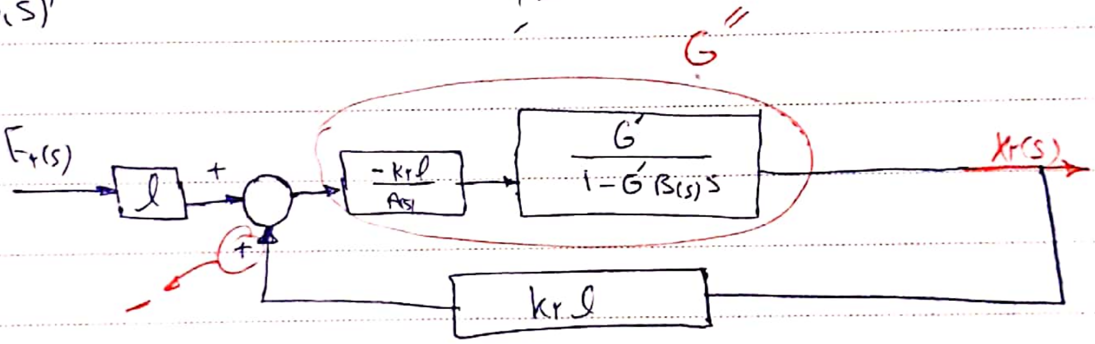
از معادله‌ای شروع می‌کنیم که دو ورودی داشته باشد ← ۳ ← بعد ۱ ← بعد ۲

انتخاب

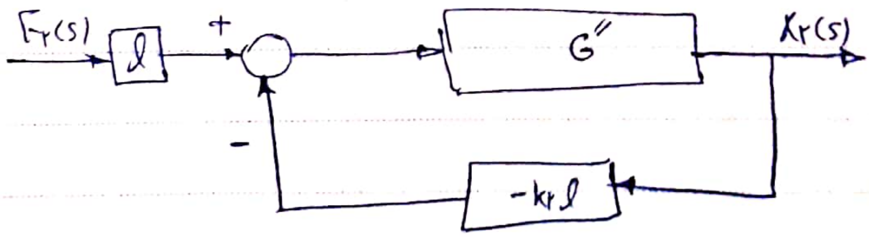


ساده سازی بلوک : (انتقال ... را از عقب‌تر بگیریم + فاز ۳)

$$G' = \frac{b_1 s + k_1}{(b_1 s)^2}$$



$$G'' = \frac{-G' k_2 l}{A(s)(1-G'B(s)s)}$$



$$\frac{X_2(s)}{l F_2(s)} = \frac{G''}{1-G'' k_2 l} \rightarrow \boxed{\frac{X_2(s)}{F_2(s)} = \frac{G'' l}{1-G'' k_2 l}}$$

(عدم تبدیل ...) سیستم مرتبه ۵ ←

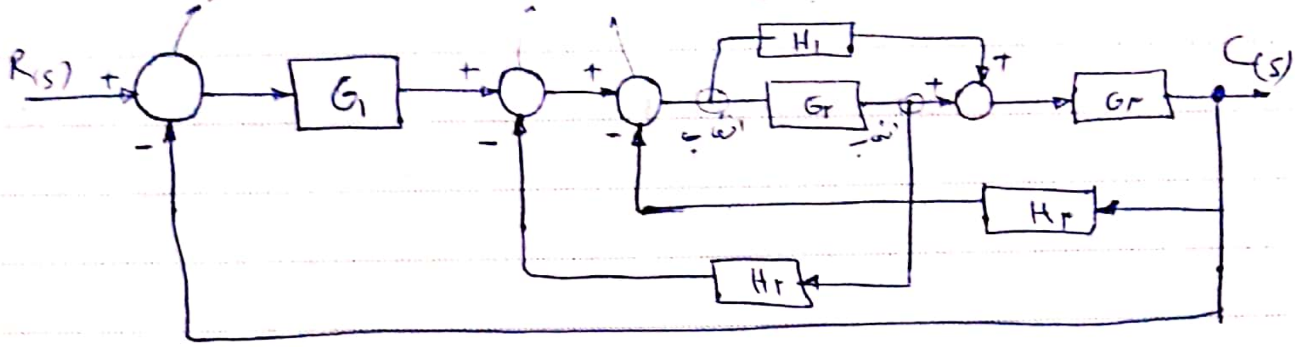
$\theta \quad x_2 \quad x_1$

$2 + 2 + 1 = 5$

Subject:
Date

روش mason : ((در یک مثال))

ادغام دو مقایسه‌گر — ادغام دو مقایسه‌گر — انشعاب

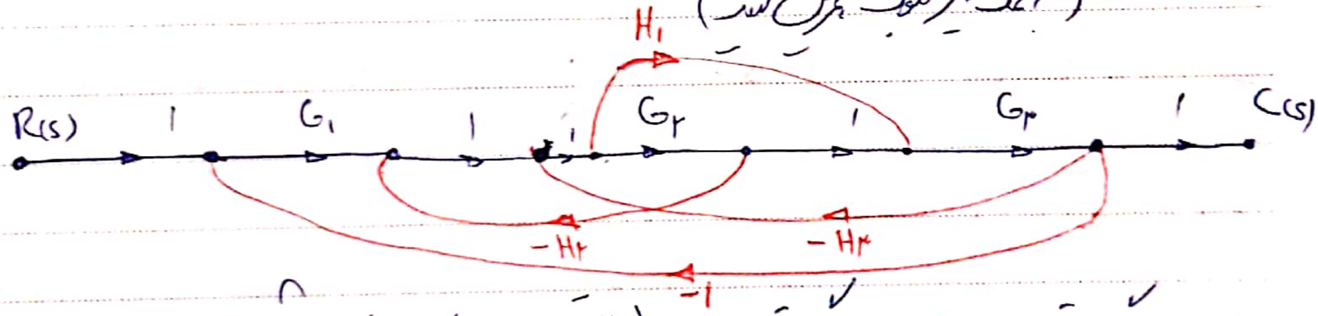


signal graph

گره‌ها (nodes) → انشعاب ، مقایسه‌گر

هدف : $\frac{C(s)}{R(s)} = ?$

(به یک چیز مطلوب برسیم)



H_1 : از قبل G_2 بعد به قبل G_3 (یا بعد G_2) با ضریب مثبت $(+H_1)$

H_2 : از بعد G_2 با H_2 منفی اولیه به بعد از G_1

H_3 : از بعد G_3 برود به بعد G_1 با ضریب منفی

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta}$$

، $*L_i$: مسیر بسته‌ای که از یک نقطه شروع شود و به همان نقطه بازگردد بدون اینکه خود را قطع کند یا از آن عبور کند

$$* \Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \sum \cdots$$

$L_i L_j$: حاصلضرب دو حلقه‌ای که هیچ اشتراکی با هم ندارند (حتی در یک نقطه)

Subject:
Date:

* P_i : این مسیر رو به جلو ؛ مسیری که از ورودی شروع شده و به خروجی ختم میشه بدون تقاطع با خود

* Δ_i : عبارتی از Δ که هیچ اشتراکی با مسیر P_i ندارد (حتی یک نقطه)

پیاده سازی روی مثال قبل :

(حلقه‌ها : رو به جلو و عقب بدون مسیر تکراری بدون تقاطع مسیر)

$L_1 : -G_1 G_2 G_3$

$L_2 : -G_1 H_1 G_2$

$L_3 : -G_2 H_2$

$L_4 : -G_2 G_3 H_3$

$L_5 : -H_1 G_3 H_3$

$$\Delta = 1 - \Sigma\left[(-G_1 G_2 G_3) + (-G_1 G_3 H_1) + (-G_2 H_2) + (-G_2 G_3 H_3) + (-G_3 H_1 H_3)\right]$$

$$\Delta = 1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 H_1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_3 H_1 H_3$$

* به ظاهر رو به رو که نگاه نکنید چون ! که رو در حلقه نوشتیم ← به شکل نگاه کنید

$\sum L_i L_j = 0$ ← همه حلقه‌ها با هم اشتراک دارند (طبق شکل)

$P_1 = G_1 G_2 G_3$

$P_2 = G_1 H_1 G_3$

(مسیر رو به جلو بدون تقاطع و دور خود)

$(-G_1 G_2 H_2 G_2 G_3$ ✗ $)$

$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = 1$

به Δ_2 نگاه نکن، به شکل نگاه کن

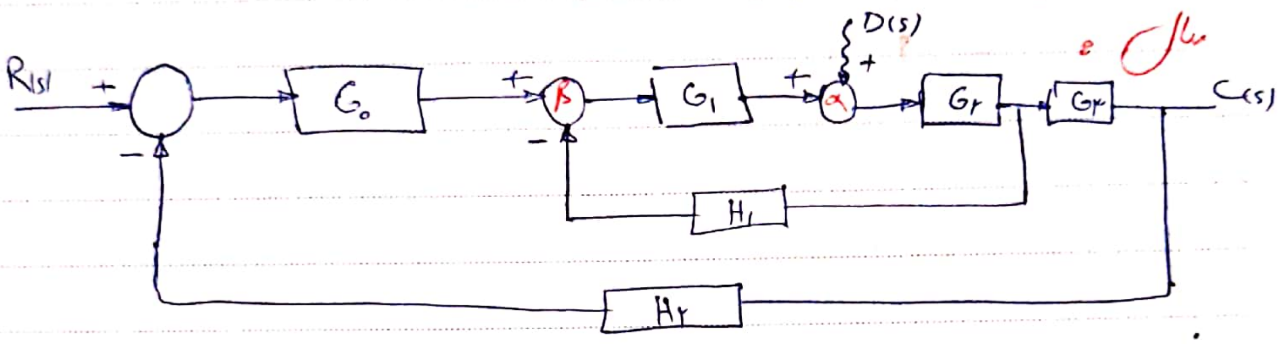
جملاتی از Δ که با P_1, P_2 اشتراکی ندارند حتی یک نقطه

* Δ ها همشون صفر میشه ← هیچ اشتراکی نداشت ! رو داره ۱ .

Subject:
Date

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_3(G_2+H_1)}{\Delta} \checkmark \; (*)$$

مثال

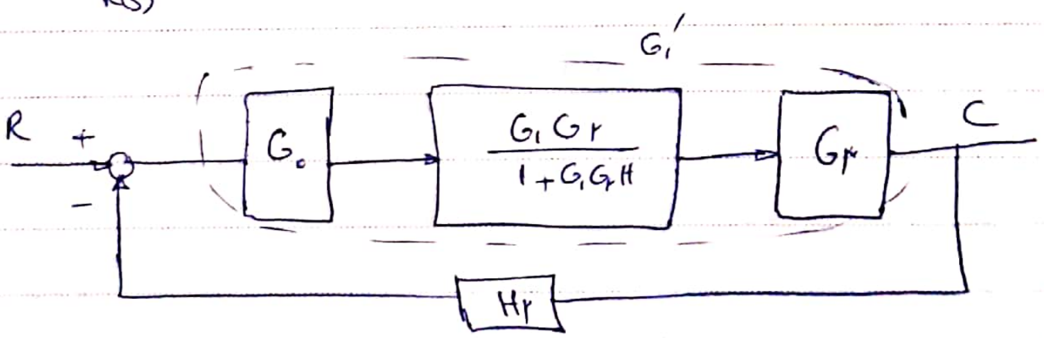


هدف:

الف) $G_1^*(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = ?$ $\quad (D \equiv 0)$

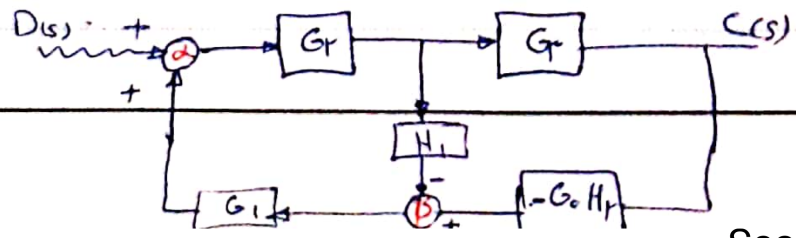
ب) $G_2^*(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = ?$ $\quad (R \equiv 0)$

$G_1^*(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \; ; (D \equiv 0)$ برای الف حل جبر بلوکی راحت تره.

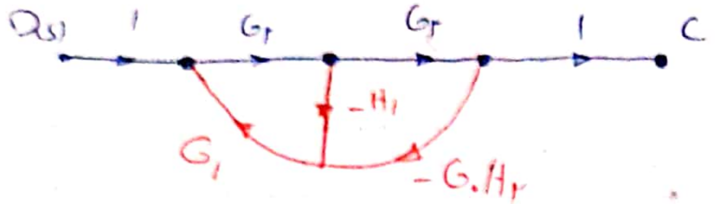


$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1^*(s) = \frac{G'}{1+G'H_2} \checkmark$$

ب) $G_2^*(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = ? \; ; (R \equiv 0)$



۲. روش Mason → signal graph :



$$\begin{cases} L_1 = -G_2 H_1 G_1 \\ L_2 = -G_2 G_4 G_0 H_2 G_1 \end{cases}$$

$$\Delta = 1 + G_1 G_2 (H_1 + G_0 G_4 H_2) \quad (*)$$

$$P_1 = G_2 G_4 \longrightarrow \Delta_1 = 1$$

$$\Longrightarrow G_2^{*}(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2 G_4}{\Delta^{(*)}} \checkmark$$

$$C(s) = \frac{G'}{1 + G' H_2} R(s) + \frac{G_2 G_4}{\Delta} D(s)$$

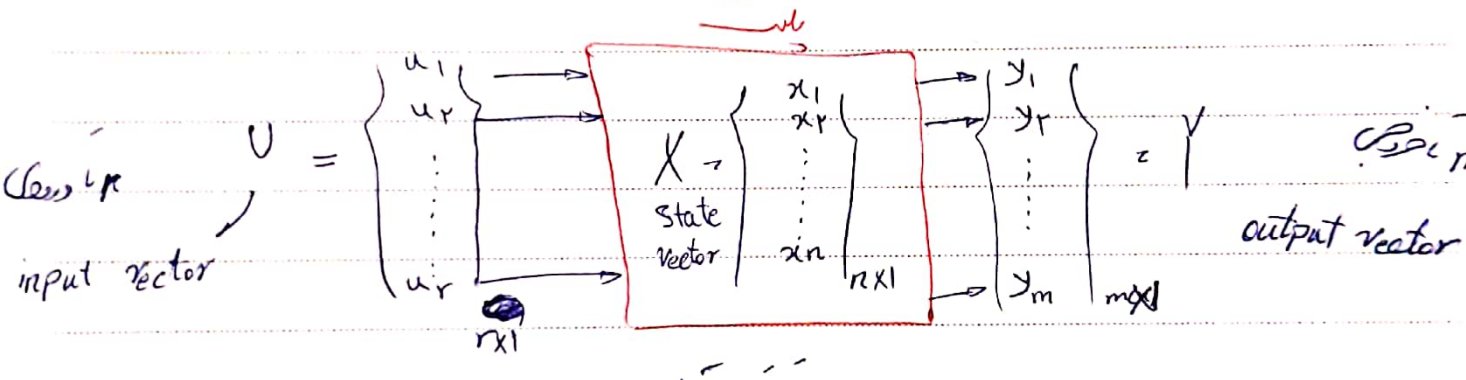
نتیجه: جمع آثار

فضای حالت : (روش دوم مدل سازی)

مدل سازی سیستم:
- تابع تبدیل در حوزه S (فرکانس)
- فضای حالت در حوزه t (زمان)

T.F : معمولا برای سیستم های Siso است اما برای mimo هم می توان به کار برد.

S.S : " " mimo " " " Siso " " " " " .



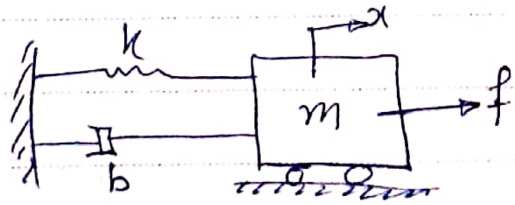
تابع تبدیل $m \times r$ تا

n متغیر حالت

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

⟸ n مرتبه Siso (بالاترین توان S در مخرج T.F)

متغیر حالت : کمترین تعداد متغیر مستقلی که نیاز است تا رفتار یک سیستم به طور کامل توصیف شود.



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

ورودی ما

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}\left[f - kx - b\dot{x}\right]$$

متغیر های حالت x و $\dot{x}$ (معادله دیفرانسیل مرتبه ۲) ⟵ ۲ متغیر حالت داریم

Subject:
Date

* یک معادله دیفرانسیل مرتبه n دارای n متغیر حالت است.

معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{X}_{n\times1} = \underset{n\times n}{A}\, X_{n\times1} + \underset{n\times r}{B}\, U_{r\times1} \\ Y_{m\times1} = \underset{m\times n}{C}\, X_{n\times1} + \underset{m\times r}{D}\, U_{r\times1} \end{cases}$$

A, B, C, D یک سری ماتریس اند با ضرایب ثابت

* فضای حالت یک معادله دیفرانسیل مرتبه n را به n معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ تبدیل میکند.

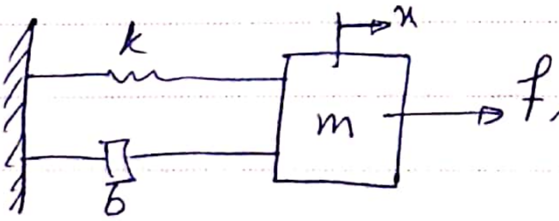
$A \rightarrow$ ماتریس حالت (دینامیک و پاسخ سیستم همه)

$B \rightarrow$ ورودی "

$C \rightarrow$ خروجی "

$D \rightarrow$ انتقال مستقیم " (عموماً در سیستم‌های دینامیکی $D=0$)

مثال: اگر خروجی سرعت m باشد، فضای حالت؟ ($A, B, C, D = ?$)



f ورودی

$$\begin{cases} u_1 = u = f \\ y_1 = y = \dot{x} \end{cases}$$

$\rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \xrightarrow{\text{مرتبه ۲}} n=2$

$x =$ جابجایی $\rightarrow x_1$

$\dot{x} =$ سرعت $\rightarrow x_2$

حالا ۲، x_1 و x_2 داریم.

Scanned with CamScanner

Subject:
Date:

حال این مدل را به فرم فضای حالت با x_1, x_n و u_1, u_2 می‌نویسیم

$$\begin{cases} x_1 = x \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \checkmark \\ x_2 = \dot{x} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x} \underset{=}{\overset{*}{}} \frac{1}{m}\left[u - bx_2 - kx_1\right] \checkmark \end{cases}$$

$$* \quad \ddot{x} = \frac{1}{m}\left[f - b\dot{x} - kx\right]$$

$$y = \dot{x} = x_2$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

a یک ورودی داریم ← B یک ستونه است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$y = C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

چون یک خروجی داریم ← یک ستونه

$$C = [0 \ 1], \quad D = 0$$

Subject:
Date:

* اگر خروجی {

$y_1 = x \longrightarrow y_1 = x_1$ جابجایی

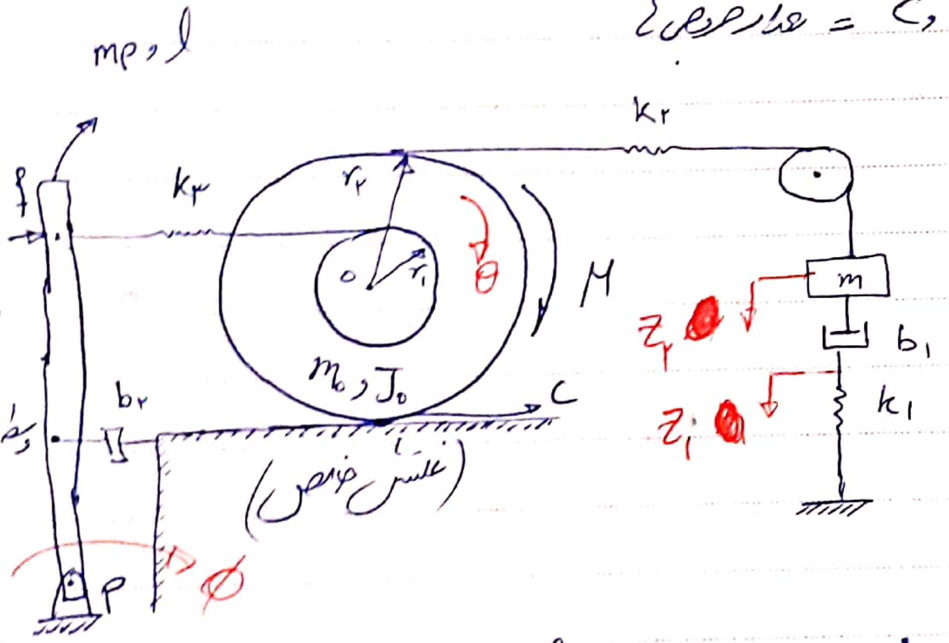
$y_2 = \dot{x} \longrightarrow y_2 = x_2$ سرعت

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} u$$

* تعداد ستون های B و D = تعداد ورودی

* در ردیف های C و D = تعداد خروجی

مثال: (کامل ترین سیستم)



* درجه آزادی ۴

خروجی: جابجایی m و دوران دیسک θ

M, f ← ورودی

$$\begin{cases} u_1 = f \\ u_2 = M \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \dot{z}_2 \\ y_2 = \theta \end{cases}$$

معادلات

1/ z_1: $b_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1(z_1 - 0) = 0$

2/ z_2: $m\ddot{z}_2 + b_1(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_2(z_2 - 2r_2\theta) = 0$

3/ θ: $\underline{(\sum M_c = J_c\ddot{\theta})} \Rightarrow M - k_2(2r_2\theta - z_2)(2r_2) - k_3((r_1+r_2)\theta - l\varphi)(r_1+r_2) = J\ddot{\theta}$

4/ φ: $\underline{(\sum M_p = J_p\ddot{\varphi})} \Rightarrow lf + m_p g\frac{l}{2}\varphi - b_2(\frac{l}{2}\dot{\varphi} - 0)(\frac{l}{2}) - k_3(l\varphi - (r_1+r_2)\theta)(l) = J\ddot{\varphi}$

Subject:
Date:

جمع مرتبه‌های هر معادله ⟶ * اولی درجه ۱ است
بقیه درجه ۲ اند.

تعداد متغیرهای حالت: $n = 1+2+2+2 = \boxed{7}$

۷ متغیر حالت

$$x_1 = z_1 \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{z}_1 \xRightarrow{\text{طبق معادله ۱}} = \frac{1}{b_1}\big(\overbrace{-k_1 x_1}^{-k_1 z_1} + b_1 x_3\big)$$

$$x_2 = z_2 \longrightarrow \dot{x}_2 = \dot{z}_2 = x_3 \checkmark$$

$$x_3 = \dot{z}_2 \longrightarrow \dot{x}_3 = \ddot{z}_2 \xRightarrow{\text{طبق معادله ۲}} = \frac{1}{m}\Big[-k_2(x_2 - 2r_2 x_4) - \underbrace{b_1(x_3 - \ldots)}_{k_1 x_1}\Big]$$

$$x_4 = \theta \longrightarrow \dot{x}_4 = \dot{\theta} = x_5 \checkmark$$

$$x_5 = \dot{\theta} \longrightarrow \dot{x}_5 = \ddot{\theta} \xRightarrow{\text{طبق معادله ۳}} = \frac{1}{J_c}\Big[u_2 - k_2(2r_2 x_4 - x_2)(2r_2) - k_4\big((r_1+r_2)x_4 - l x_6\big)(r_1+r_2)\Big]$$

$$x_6 = \varphi \longrightarrow \dot{x}_6 = \dot{\varphi} = x_7 \checkmark$$

$$x_7 = \dot{\varphi} \longrightarrow \dot{x}_7 = \ddot{\varphi} \xRightarrow{\text{طبق معادله ۴}} = \frac{1}{J_p}\Big[l u_1 + mg\frac{l}{2}x_6 - b_2\frac{l^2}{4}x_7 - k_4\big(l x_6 - (r_1+r_2)x_4\big)l\Big]$$

یعنی ما در این درجه هر معادله چون دیگر تکرار را وارد نمی‌داریم

معادله ۱ ⟶ درجه ۱ ($\dot{z}_1$) $\xrightarrow{\text{متغیر}}$ z_1

معادله ۲ ⟶ ۲ ($\ddot{z}$) ⟶ $\dot{z}, z$ — z_1, z_2

معادله ۳ ⟶ ۲ ($\ddot{\theta}$) ⟶ $\dot{\theta}, \theta$

معادله ۴ ⟶ ۲ ($\ddot{\varphi}$) ⟶ $\dot{\varphi}, \varphi$

$$\begin{cases} y_1 = \dot{z}_2 = x_3 \checkmark \\ y_2 = \theta = x_4 \checkmark \end{cases}$$

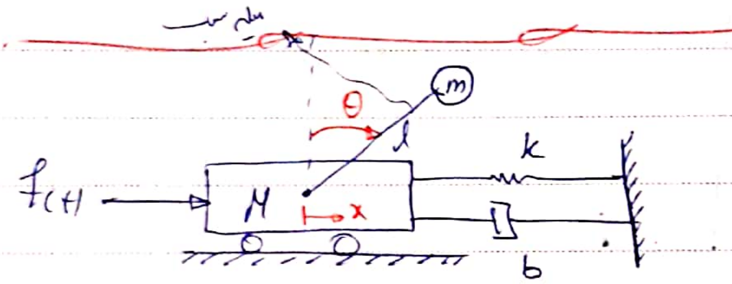
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}_{2\times 7}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{bmatrix}_{7\times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}}_{D} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Subject:
Date

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \dot x_4\\ \dot x_5\\ \dot x_6\\ \dot x_7\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{k_1}{b_1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{k_1}{m} & -\frac{k_2}{m} & 0 & \frac{2r_2k_2}{m} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2r_2k_2}{J_c} & 0 & \left(\frac{-4r_2^2k_2 - \dots}{J_c}\right) & 0 & k_2 l(r_1+r_1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{7\times 7}}_{A} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{J_c}\\ 0 & 0\\ \frac{l}{J_p} & 0\end{bmatrix}_{7\times 2}}_{B} \begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

مثال:

یک مثال لاگرانژ



θ کوچک

انرژی جنبشی: $T = \frac{1}{2} M\dot x^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot x^2 + (l\dot\theta)^2 + 2\dot x(l\dot\theta)\underset{1}{\cos\theta}\right)$

انرژی پتانسیل: $U = \frac{1}{2} k x^2 - mgl(1-\cos\theta)$

رابطه لاگرانژ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \qquad q_i \to x, \theta$

$$\begin{cases} \text{on } x: & (1)\ \frac{d}{dt}\left(M\dot x + m\dot x + ml\dot\theta\right) - 0 + kx = f - b\dot x \\ \text{on } \theta: & (2)\ \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot\theta + ml\dot x\right) - 0 + \left(-mgl\overset{\theta}{\sin\theta}\right) = 0 \end{cases}$$

P4PCO

$$\begin{cases} 1) \quad (m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + b\dot{x} + kx = f \\ 2) \quad ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m+M & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -mgl \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس جرم $[M]$: عمل دینامیکی

ماتریس سختی : عملگر استاتیکی $[K]$

مرتبه : $n = 4 = 2+2$

$x_1 = x \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$

$x_2 = \dot{x} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x} = ?$

$x_3 = \theta \longrightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_4$

$x_4 = \dot{\theta} \longrightarrow \dot{x}_4 = \ddot{\theta} = ?$

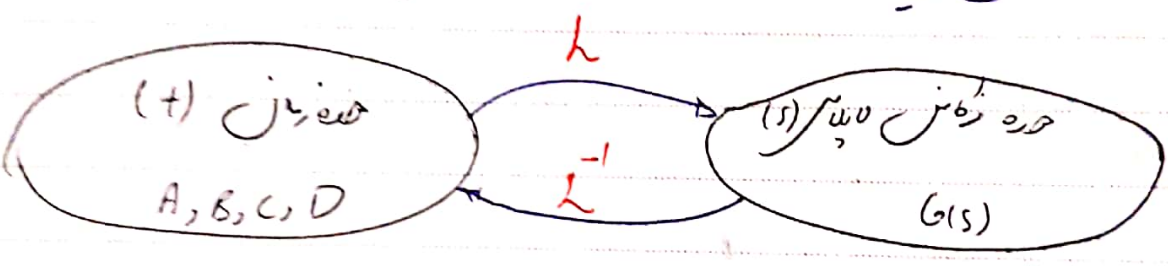
$$\ddot{x} = \frac{\begin{vmatrix} u-kx_1-bx_2 & ml \\ mgl\,x_3 & ml^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m+M & ml \\ ml & ml^2 \end{vmatrix}} , \quad \ddot{\theta} = \frac{\begin{vmatrix} m+M & u-kx_2-bx_2 \\ ml & mgl\,x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m+M & ml \\ ml & ml^2 \end{vmatrix}}$$

$$\ddot{x} = \frac{ml^2(u-kx_1-bx_2) - m^2l^2 g x_3}{mMl^2} , \quad \ddot{\theta} = \frac{\quad}{mMl^2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{M} & \frac{-b}{M} & \frac{-m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{Ml} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

: Relation between T-F (تابع تبدیل) & S-S (فضای حالت)



(I) S.S. $\longrightarrow$ T.F.

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \longrightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = ?$$

(شرایط اولیه = 0)

$$sX(s) - \underbrace{x(0)}_{0} = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \longrightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right) U(s)$$

Subject:
Date

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D}$$ ✱✱

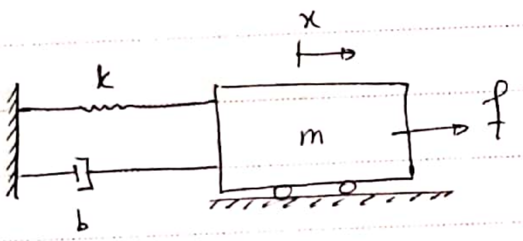
نکات:

۱) با استفاده از رابطه فوق در سیستم های مرتبه بالا (مثلاً $n \geq 4$) بسیار دشوار است. (راه حل: همان روش T.F. سرجلسه)

۲) فضای حالت منحصر به فرد نیست، چرا که به جای درنظر گرفتن تعریف متغیرهای حالت، متغیرهای دیگری که همان رفتار خروجی‌های مشابه را بدست می‌دهد در برای موارد مختلف فضای حالت، از رابطه نامتبدیل

$G(s)$ منحصر به فرد استخراج می‌شود. (راه‌ها یکی است) ✱✱

مثال:



T.F. : $\frac{X(s)}{F(s)} = G(s) = \frac{1}{ms^2+bs+k}$

S.S. : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 0$

اثبات $\rightarrow$ $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} s & -1 \\ -\frac{k}{m} & s+\frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1}}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + [0]$

$|sI-A| = s(s+\frac{b}{m}) + \frac{k}{m}$

$$= \frac{\begin{bmatrix} s & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}{s(s+b/m) + k/m} = \frac{-1/m}{s^2 + \frac{sb}{m} + \frac{k}{m}} \xrightarrow{a \cdot m} = \frac{+1}{+ms^2+bs+k}$$ ✓

P4PCO

حالت ۲ : $(G(s))$ T.F $\longrightarrow$ (A,B,C,D) S.S.

* در این روش فقط در حالت SISO یعنی $G(s)$ اسکالر است، ماتریس نیست در حالت ۳ مثال

مثال:

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{5}{s^3+4s^2+7s+6}$$

$$\begin{cases} y=C=x_1 \\ u=r \end{cases}$$

هدف: $A, B, C, D = ?$

$$(s^3+4s^2+7s+6)\,C(s)=5R(s)$$

$$\xrightarrow{(IC=0 \;\to\; \mathcal{L}^{-1})} \quad \dddot{c}+4\ddot{c}+7\dot{c}+6c=5r$$

$$\xrightarrow{n=3} \quad \begin{aligned} x_1&=c \longrightarrow \dot{x}_1=\dot{c}=x_2 \ \checkmark \\ x_2&=\dot{c} \longrightarrow \dot{x}_2=\ddot{c}=x_3 \ \checkmark \\ x_3&=\ddot{c} \longrightarrow \dot{x}_3=\dddot{c} \xrightarrow{\text{طبق معادله}} =5u-6x_1-7x_2-4x_3 \ \checkmark \end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -7 & -4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D=[0]$$

مثال:

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{s+5}{s^3+4s^2+7s+6}$$

$$\longrightarrow (s^3+4s^2+7s+6)\,C(s)=(s+5)R(s)$$

$$\xrightarrow{IC=0 \;\to\; \mathcal{L}^{-1}} \quad \dddot{c}+4\ddot{c}+7\dot{c}+6c=\dot{r}+5r \longrightarrow (n=3)$$

Subject:
Date

$x_1 = c \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{c} = x_2$ ✓

$x_2 = \dot{c} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{c} = x_3$ ✓

$x_3 = \ddot{c} \longrightarrow \dot{x}_3 = \dddot{c} = ? \xrightarrow{\text{طبق معادله}} = \dot{u} + 5u - 6x_1 - 7x_2 - 4x_3$

X fail!

تعریف جدید ⇒

$x_1 = c \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{c} = x_2$ ✓

$x_2 = \dot{c} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{c} = x_3 + u$ ✓

$x_3 = \ddot{c} - u \longrightarrow \dot{x}_3 = \dddot{c} - \dot{u} = 5u - 6x_1 - 7x_2 - 4(x_3 + u)$ ✓

روش ۲: بالاترین مشتق در معادله خروجی یک مرحله ادامه :

$\dddot{c} - \dot{r} = 5r - 6c - 7\dot{c} - 4\ddot{c}$

$x_1 = \ddot{c} - r \longrightarrow \dot{x}_1 = \dddot{c} - \dot{r} = 5u - 6x_3 - 7x_2 - 4(x_1 + u)$

$x_2 = \dot{c} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{c} = x_1 + r = x_1 + u$

$x_3 = c \longrightarrow \dot{x}_3 = \dot{c} = x_2$

مثال ۲ :

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 5}{s^3 + 4s^2 + 7s + 6}$$

$$\longrightarrow (s^3 + 4s^2 + 7s + 6)\,C(s) = (s^2 + 5)\,R(s)$$

$$\dddot{c} + 4\ddot{c} + 7\dot{c} + 6c = \ddot{r} + 5r$$

Subject :
Date :

حل !

$$\dddot{c} - \ddot{r} = 5r - 6c - 7\dot{c} - 4\ddot{c}$$

$$x_1 = \ddot{c} - \dot{r} \longrightarrow \dot{x}_1 = \dddot{c} - \ddot{r} = 5u - 6x_3 - 7(x_2 + u) - 4(x_1 + u)$$

$$x_2 = \dot{c} - r$$

$$x_3 = c$$

fail ✗

روش ۲ : همه مشتقات سمت چپ باشند

$$\dddot{c} + 4\ddot{c} + 7\dot{c} - \ddot{r} = 5r - 6c$$

$$x_1 = \ddot{c} + 4\dot{c} + 7c - \dot{r} \longrightarrow \dot{x}_1 = \dddot{c} + 4\ddot{c} + 7\dot{c} - \ddot{r} = 5u - 6c$$

$$x_2 = \dot{c} + 4c - r \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{c} + 4\dot{c} - \dot{r} = x_1 - 7c = x_1 - 7x_3$$

$$x_3 = c$$

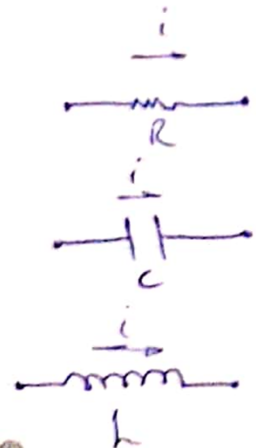
$$\dot{x}_1 = 5u - 6x_3$$

$$\dot{x}_3 = \dot{c} = x_2 - 4c + r = x_2 - 4x_3 + u$$

سیستم های الکتریکی :

در مدارهای برقی که مدارهای قدرتی حساب می‌شوند، المان های R، C، L وجود دارند

امپدانس

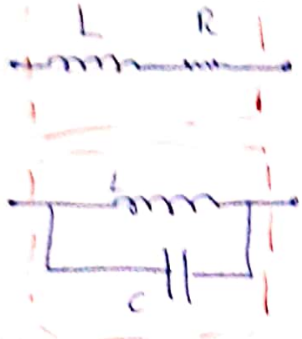


$$v_R = R\,i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_R(s) = R\, I(s)$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt \xrightarrow{\mathcal{L}} V_C(s) = \frac{1}{Cs}\, I(s)$$

$$v_L = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} V_L(s) = Ls\, I(s)$$

امپدانس معادل

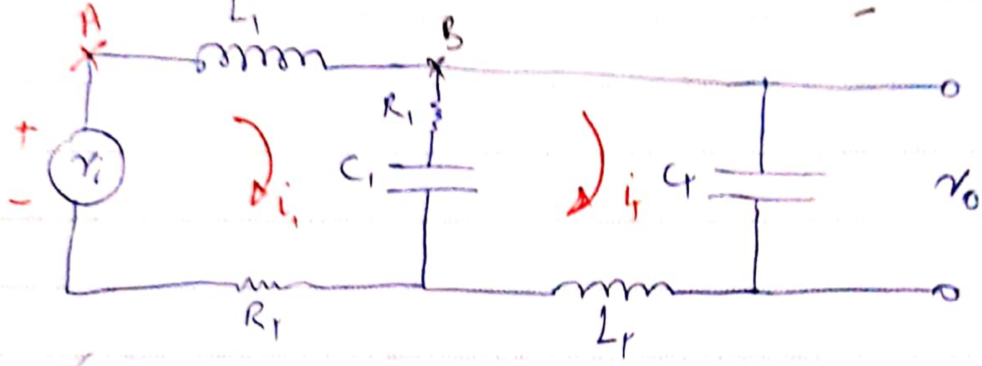


امپدانس معادل

$$Z(s) = R + LS$$

$$Z(s) = \frac{\frac{1}{CS}(LS)}{\frac{1}{CS} + LS}$$

مثال: هدف تابع تبدیل



$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = ?$$

۱, $\cancel{v_A} - L_1 S I_1(s) - R_1(I_1(s) - I_2(s)) - \frac{1}{C_1 S}(I_1(s) - I_2(s)) -$

$- R_2 I_1(s) + v_i(S) = \cancel{v_A}$

۲, $\cancel{v_B(s)} - \frac{1}{C_2 S} I_2(s) - L_2 S I_2(s) - R_1(I_2(s) - I_1(s)) - \frac{1}{C_1 S}(I_2(s) - I_1(s))$

$= \cancel{v_B(s)}$

۳, $v_o(s) = \frac{1}{C_2 S} I_2(s)$

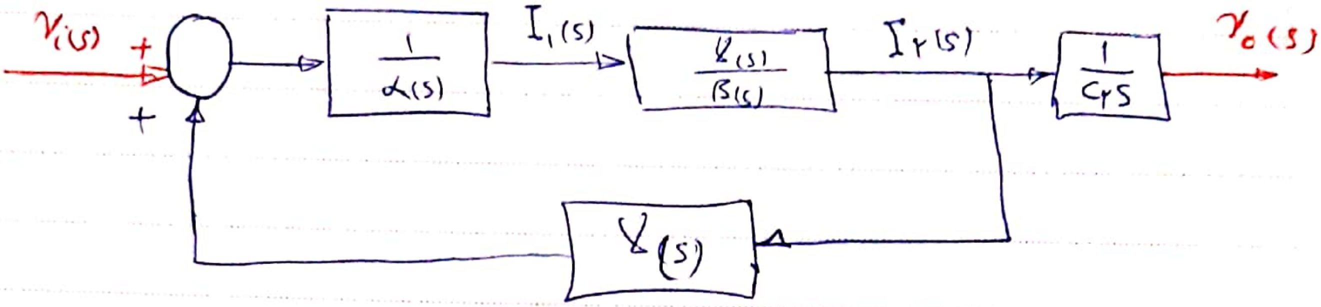
ساده سازی:

۱, $v_i(s) - I_1(s)\left(\underbrace{L_1 S + R_1 + \frac{1}{C_1 S} + R_2}_{\alpha}\right) + I_2(s)\left(\underbrace{R_1 + \frac{1}{C_1 S}}_{\gamma}\right) = 0$

۲, $I_1(s)\left(\underbrace{R_1 + \frac{1}{C_1 S}}_{\gamma}\right) - I_2(s)\left(\underbrace{L_2 S + \frac{1}{C_1 S} + R_1}_{\beta}\right) = 0$

۳, $v_o(s) = \frac{1}{C_2 S} I_2(s)$

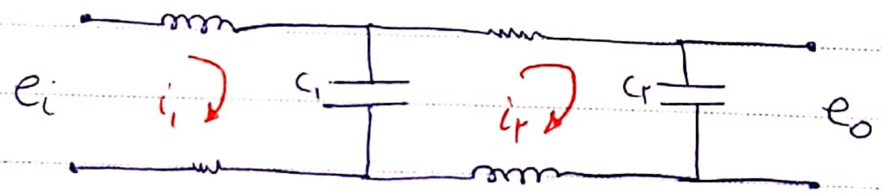
از معادله‌ای شروع می‌کنیم که ورودی داشته باشیم (v_i) ← معادله ۱ ✓



$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{\gamma(s)}{\alpha(s)\,\beta(s)}}{1 - \frac{\gamma^2(s)}{\alpha(s)\,\beta(s)}} \left(\frac{1}{C_2 s}\right) = \frac{\gamma(s)}{C_2 s\left(\alpha(s)\beta(s) - \gamma^2(s)\right)}$$

$n = 4$ ← مرتبه ۴

— مدارهای مسائل ۶ را در نظر بگیرید (بعداً خواهیم دید که معادل برقی خیلی از مسائل ترمو و فلوئیدند)



اگر دقیقاً مراحل مثال ۱ را دنبال کنید:

۱) $E_i - \left(L_1 s + \frac{1}{C_1 s} + R_1\right) I_1 + \frac{1}{C_1 s} I_2 = 0$

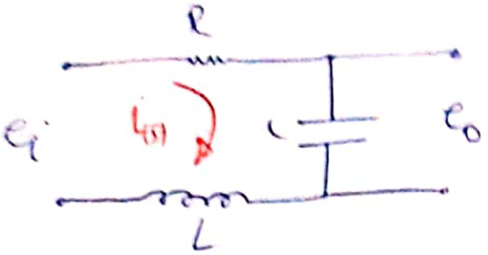
۲) $-I_2 \left(R_2 - \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_1 s} + L_2 s\right) + \frac{1}{C_1 s} I_1 = 0$

۳) $V_o = \frac{1}{C_2 s} I_2$

$\frac{E_o}{E_i} =$ تمرین ✓

Subject:
Date

مثال ۴ : هدف $\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$ ؟



$$1)\quad E_i(s) = \left(R + \frac{1}{Cs} + Ls\right) I(s)$$

$$2)\quad E_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

$$\rightarrow \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs + LCs^2 + 1}$$

* فضای حالت : $e_i = u$ ، $e_o = y$

$$\left(LC\ddot{e}_o + RC\dot{e}_o + e_o\right) = e_i \quad (*)$$

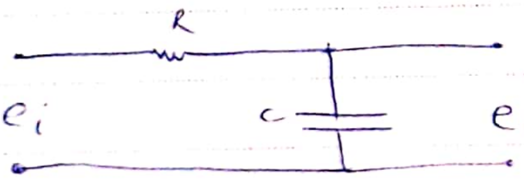
$x_1 = e_o \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{e}_o = x_2$

$x_2 = \dot{e}_o \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{e}_o \xrightarrow{\text{طبق معادله}} \ddot{e}_o = \frac{1}{LC}\left[u - x_1 - RCx_2\right]$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\quad D = [0]$$

در حالت خاص $(L=0)$:

مثال ۵ :

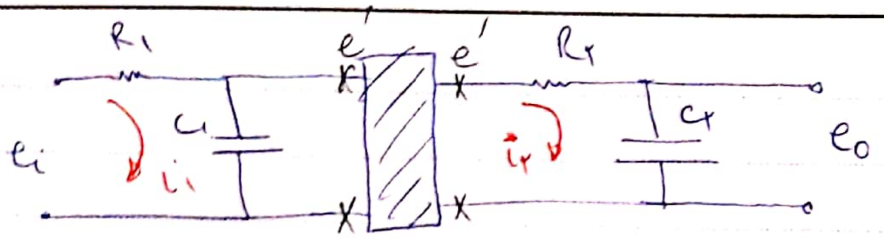


$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

$RC = \tau$

ثابت زمانی . خواهیم دید که در فصل ۶ به معادل مخزن سیال است .

مثال :



یک ایزولیتور با مقاومت زیاد که ولتاژ دو طرفش را یکسان نگه می‌دارد

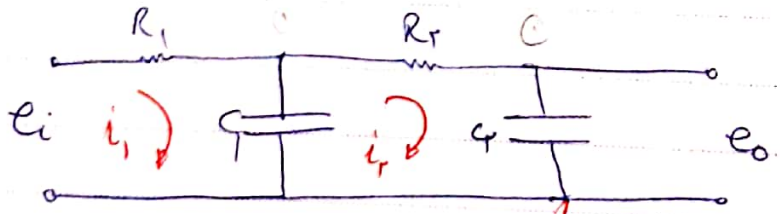
و جریانی به داخل نمی‌کشد .

$$\tau_i = R_i C_i \qquad i = 1, 2$$

طبق مثال قبل $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{E'}{E_i} = \dfrac{1}{\tau_1 s + 1} \\[2ex] \dfrac{E_o}{E'} = \dfrac{1}{\tau_2 s + 1} \end{cases} \rightarrow \frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}$$

مثال :

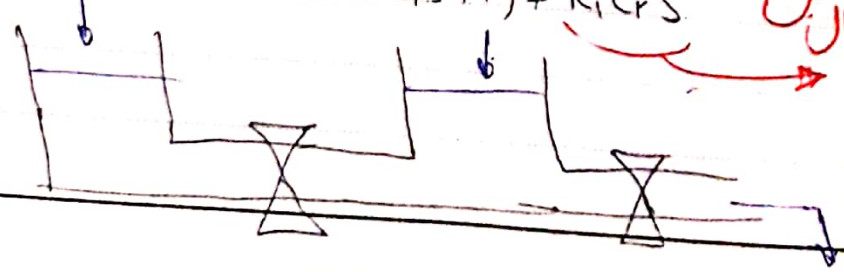


دقیقاً مشابه مثال اول فصل حل شد .

$E_i \rightarrow$ سیستم ساده‌سازی $\rightarrow E_o$

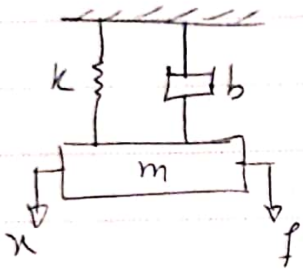
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1) + R_1C_2s}$$

یک جمله اضافه نسبت به مثال قبل

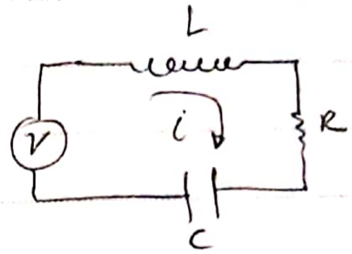


سیستم‌های معادل مشابه الکتریکی :

(f-v) Force - voltage Analogy (I)



$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=f$$



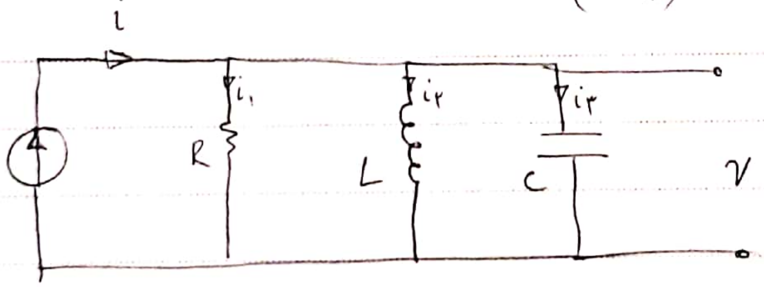
q بار الکتریکی

$(i=\dot{q})$

$$v=L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$v=L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}$$

(F-I) Force - current Analogy (II)



$$i=i_1+i_2+i_3$$

$$i=\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int v\,dt+C\frac{dv}{dt}$$

شار الکتریکی $=\phi$ $\quad (v=\dot{\phi})$

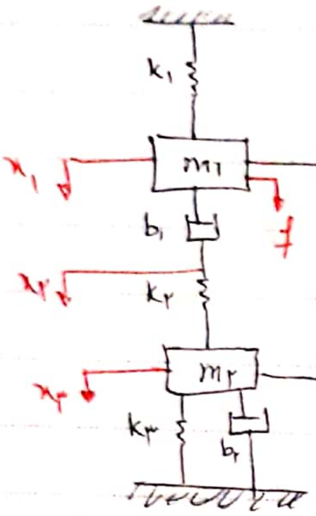
$$C\ddot{\phi}+\frac{\dot{\phi}}{R}+\frac{\phi}{L}=i$$

mech	elec F-V	elec F-I
F	V	I
m	L	C
b	R	$\frac{1}{R}$
k	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{L}$
x	q	ϕ
$\dot{x}$	i	v
$\ddot{x}$	$\dot{i}$	$\dot{v}$

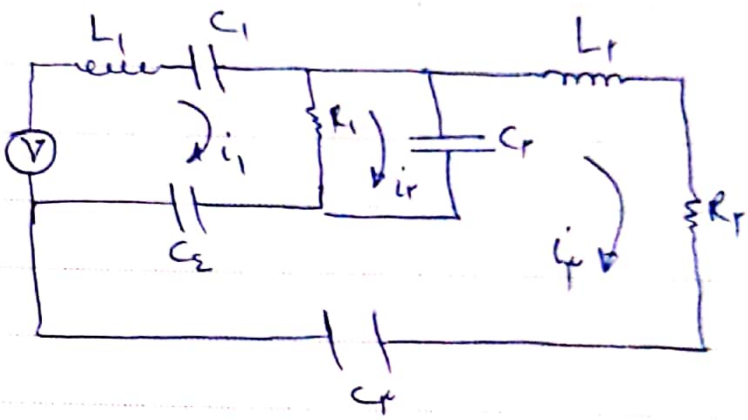
مثال ۱

معادل برقی سیستم مکانیکی زیر (F-V) ؟

mech $\xrightarrow{F-V}$ elect



* به تعداد درجات آزادی حلقه جریان داریم.

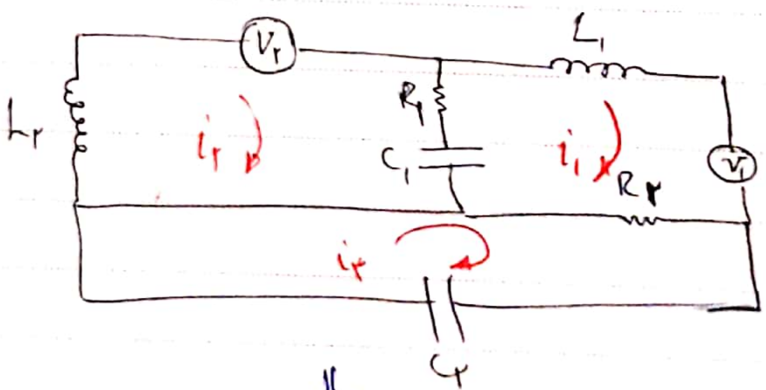


* KC (معادل سری از تیپ در برق) ≡ شاخه خازنی

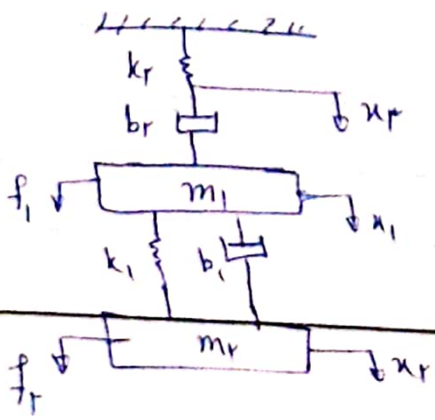
مثال ۲

معادل مکانیکی مدار برقی زیر (F-V) ؟

elect $\xrightarrow{F-V}$ mech



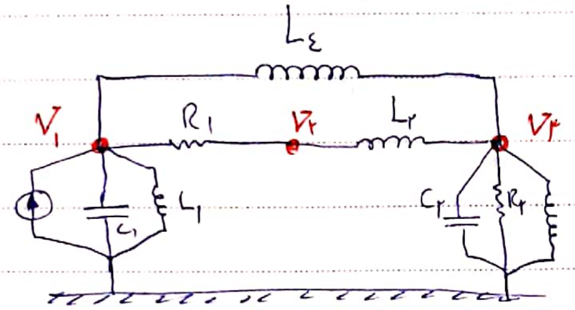
۳ حلقه ← ۳ درجه آزادی



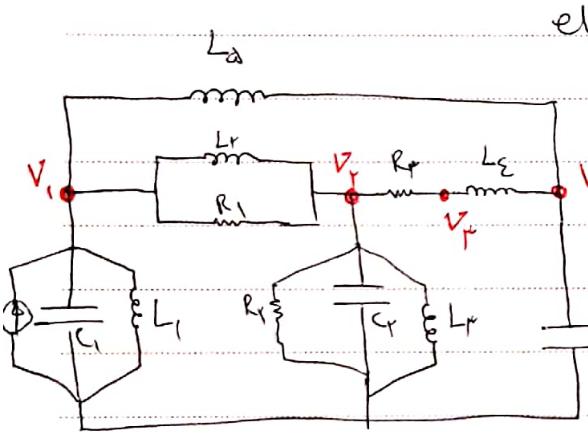
مثال ۳ : mech $\xrightarrow{F-I}$ elect (برای همان شکل مثال ۱)

* به تعداد درجات آزادی، گره ولتاژ داریم.

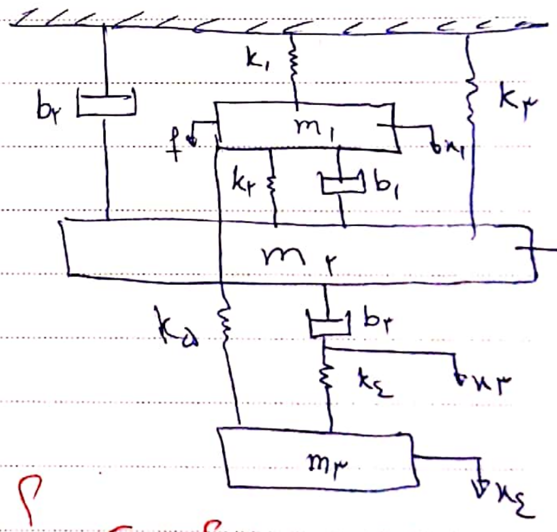
⇒



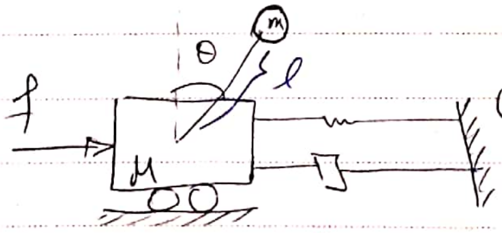
مثال ۴ : elect $\xrightarrow{F-I}$ mech



۴ درجه آزادی ⇐



نکات جانبی کتاب در حالت مثال :



۲ درجه آزادی

مثال : هدف: معادل مداری

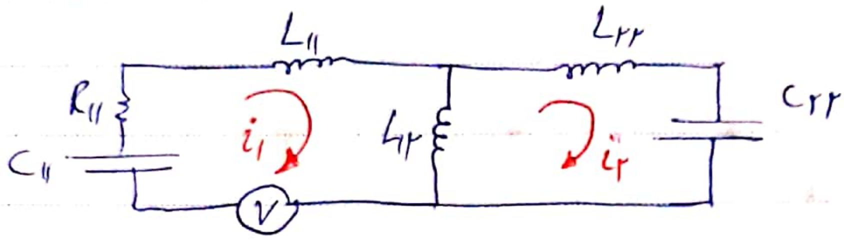
F-V , ?

F-I , ?

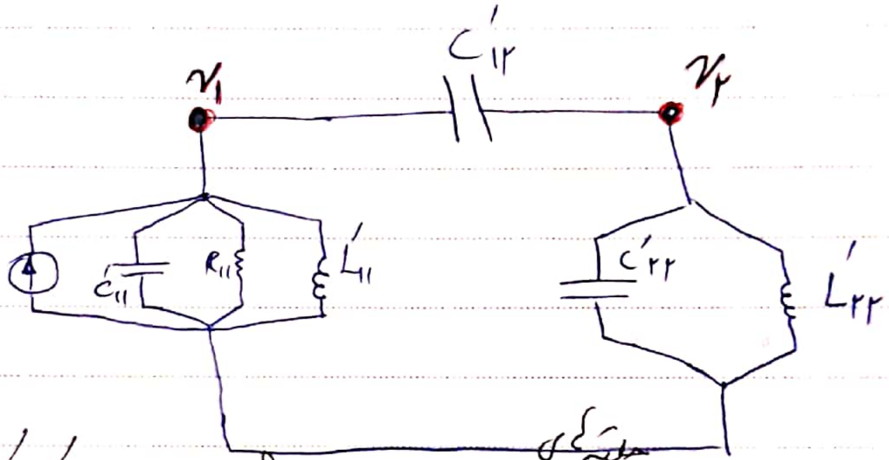
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overset{C'_{11} \text{ یا } L_{11}}{m+M} & \overset{C'_{12}}{ml} \\ ml & \underset{L_{22}}{ml^2} \end{bmatrix}}_{[M]}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{R_{11}}{b} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{[B]}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{C_{11} \text{ یا } L'_{11}}{k} & 0\\ 0 & -mgl\end{bmatrix}}_{[K]}\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f\\ 0\end{bmatrix}$$

** در مثال‌هایی که در شکل مکانیکی آنها حرکت دورانی داریم، به طور مستقیم نمی‌توان مدار برقی آنها را کشید و باید ابتدا ماتریس جرم و دمپر و فنر آن را بدست آورید و سپس مدار را بکشید.

F-V:

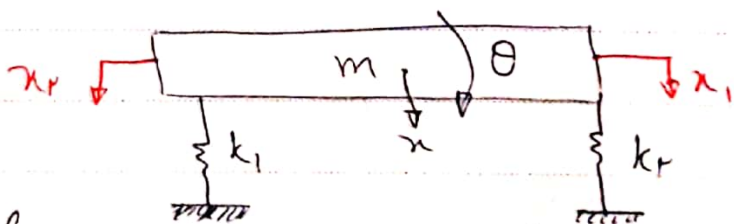


F-I:



* اگر در مسأله‌ای داریم ، { L بین جرم‌ها (F-V) / C بین گره‌های ولتاژ (F-I) } باشد ، معادل مکانیکی زیرا نمی‌توان متصور کرد

⇓



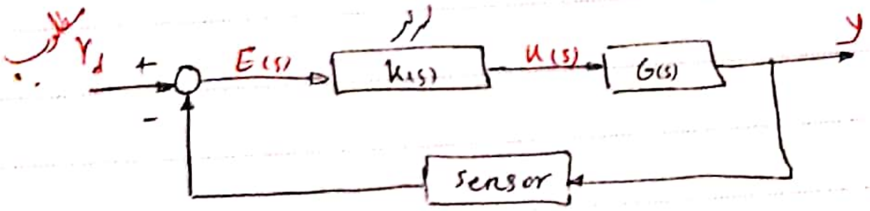
* از آن جا که بهینه‌سازی مدل قطعات یک مسأله واقعی مکانیکی ، معمولاً دشوار و هزینه‌بر است ، ابتدا مدار معادل می‌سازیم و بعد از آن با تغییر دادن پارامترهای مدار برقی جهت رسیدن به هدف مطلوب ، معادل مکانیکی آن با پارامترهای بدست آمده را می‌سازیم.

Subject:
Date

آپ امپ:

سیستم‌های الکتریکی از المان‌های مقاومتی نظیر R-C

مدارهای آپ امپ می‌توانند در ساخت انواع کنترلر استفاده شوند.



ورودی پلنت

$$K(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

خطا

انواع کنترلرها:

۱) one-off controller:

مزایا (+): ساده و ساختار ساده و ارزان قیمت

معایب (-): هزینه مصرف انرژی بالا + خستگی عملگرها

ارور

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ; e < 0 \\ 0 & ; e \geq 0 \end{cases}$$

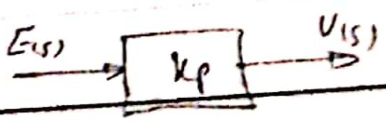
$$u(t) = \begin{cases} u_1 & ; 0 < e < e_1 \\ u_2 & ; e_1 < e < e_2 \\ u_3 & ; e_2 < e < e_3 \end{cases}$$

۲) کنترلر تناسبی (propotional):

ارور

$$u(t) = K_p \, e(t) \longrightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = K(s) = K_p$$

gain ثابت



نتیجه: ← افزایش پایداری

۳) PI (propotional + Integral control): (انتگرال‌گیر)

$$u(t) = k_p e(t) + k_p' \int e(t)\,dt$$

ثابت زمانی انتگرال‌گیر

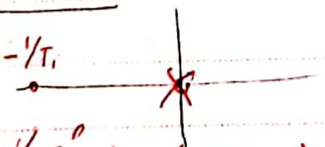
$$\boxed{\frac{U(s)}{E(s)} = k(s) = k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)} \qquad \left(T_i = \frac{k_p}{k_p'}\right)$$

PI - control

$$E(s) \longrightarrow \boxed{k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)} \longrightarrow U(s)$$

نتیجه: افزایش پایداری + کاهش خطای ماندگار (آخر فصل ۵)

* اضافه کردن PI مانند اضافه کردن یک قطب در مبدا و یک صفر در $-\frac{1}{T_i}$ است



۴) PD (proptional + Derivative controll): (مشتق‌گیر)

$$u(t) = k_p e(t) + k_p' \dot{e}(t)$$

ثابت زمانی مشتق‌گیر

$$\left(T_d = \frac{k_p'}{k_p}\right)$$

$L \downarrow$

$$\boxed{\frac{U(s)}{E(s)} = k(s) = k_p(1+T_d s)}$$

$$E(s) \longrightarrow \boxed{k_p(1+T_d s)} \longrightarrow U(s)$$

Subject:
Date

مزایا: + افزایش پایداری، افزایش سرعت پاسخ

- در صنعت خیلی استفاده نمی‌شود (مشتق‌گیر نویز را به شدت تقویت می‌کند)

* اضافه کردن PD مانند اضافه کردن یک صفر است در $-\frac{1}{T_d}$

۵) PID :

$$u(t) = k_p e(t) + k_p' \int e(t)\,dt + k_p'' e'(t)$$

$$\mathcal{L}\{\ \}$$

$$\boxed{\frac{U(s)}{E(s)} = k(s) = k_p\left(\underbrace{1}_{P} + \underbrace{\frac{1}{T_i s}}_{I} + \underbrace{T_d s}_{D}\right)}$$

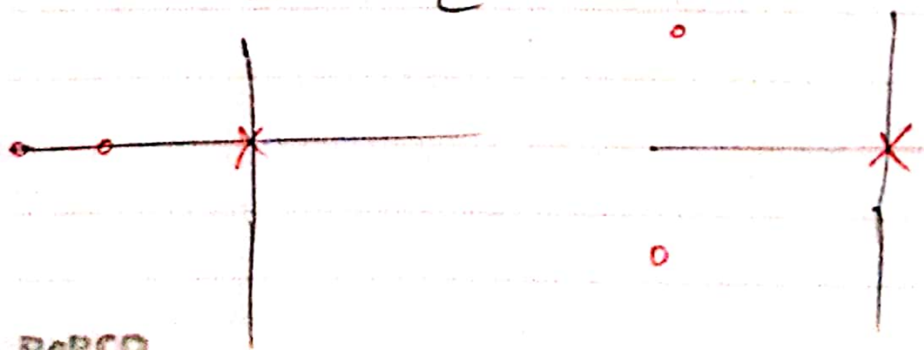
$$\left(\frac{k_p'}{k_p} = \frac{1}{T_i}\right) \qquad \left(\frac{k_p''}{k_p} = T_d\right)$$

مزایا: + افزایش پایداری، افزایش سرعت پاسخ، کاهش خطای ماندگار

- هزینه ساخت بالا

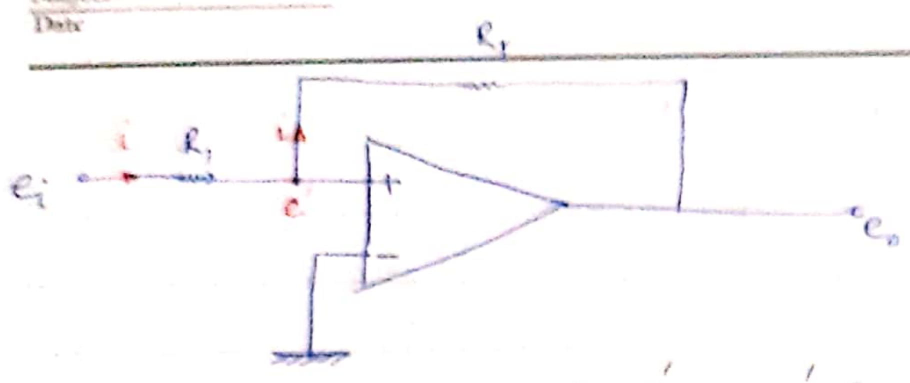
* اضافه کردن PID مانند اضافه کردن یک قطب در مبدا و دو صفر است.

حقیقی / مختلط مزدوج



* آپ امپ ها ایده آل باشند.

مثال: $\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$ ؟



$$i = i \rightarrow \begin{cases} \frac{e_i - e'}{R_1} = \frac{e' - e_o}{R_2} \\ e' = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

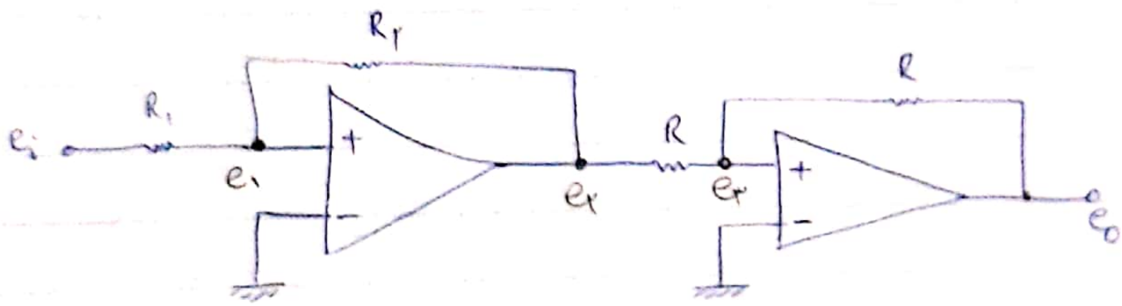
مهم

کنترلر تناسبی

$E \rightarrow e_i$

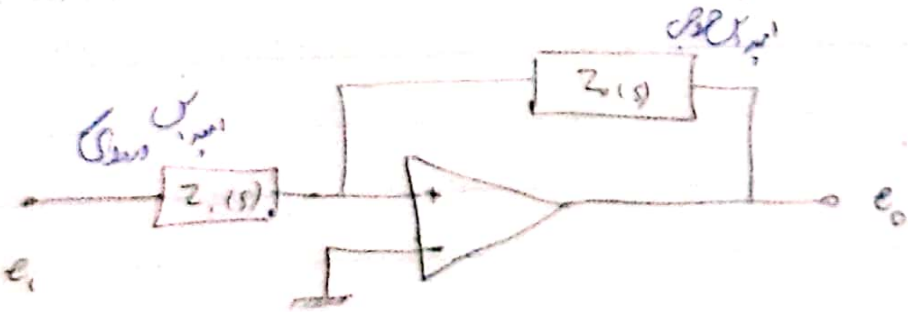
$U \rightarrow e_o$

مثال:



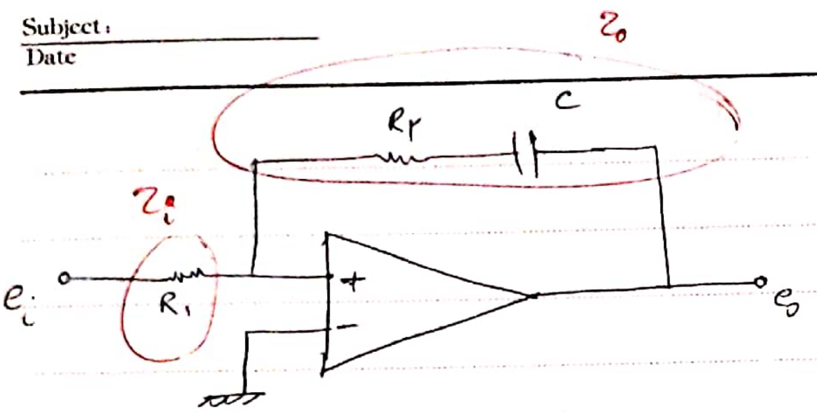
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(-\frac{R_2}{R_1}\right)\left(-\frac{R}{R}\right) = \frac{R_2}{R_1}$$

صورت کلی:



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)}$$

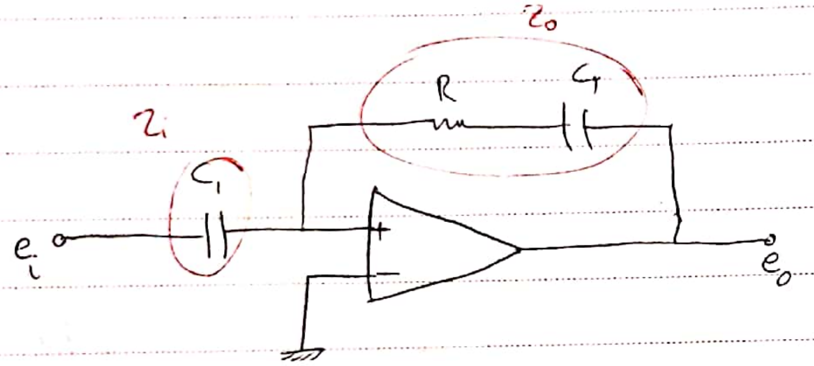
Subject:
Date



(PI) : کنترلر

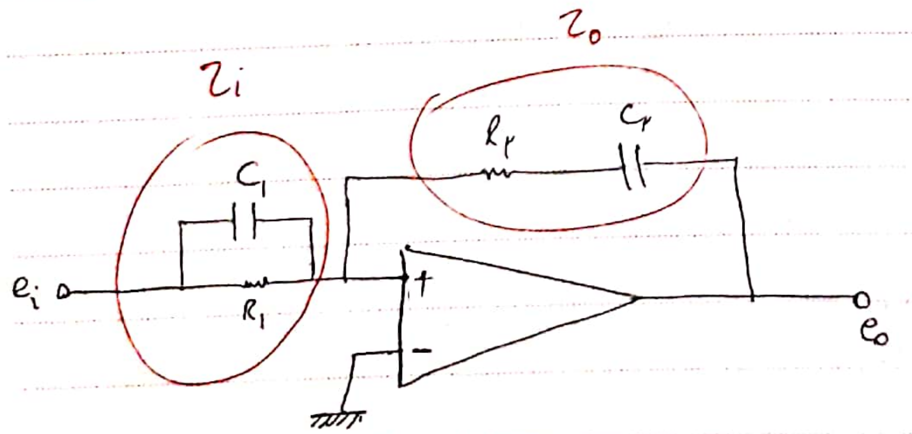
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = ?$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1} = -\underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_{k_p}\Big(\underbrace{1}_{P} + \overbrace{\frac{1}{\underbrace{R_2 C}_{T_i} s}}^{I}\Big)$$



(PD) کنترلر

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R + \frac{1}{C_2 s}}{\frac{1}{C_1 s}} = -\left(RC_1 s + \frac{C_1}{C_2}\right) = -\underbrace{\frac{C_1}{C_2}}_{k_p}\Big[\underbrace{1}_{P} + \underbrace{RC_2}_{T_d}\underbrace{s}_{D}\Big]$$



(PID) : کنترلر

$$-\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{\tau_r s} = -\frac{\alpha s^2 + \beta s + 1}{\tau_r s}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{\frac{R_1 \times \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} = -\frac{\frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}}{\frac{\frac{R_1}{C_1 s}}{\frac{R_1 C_1 s + 1}{C_1 s}}} = -\frac{(R_2 C_2 s + 1)(R_1 C_1 s + 1)}{R_1 C_2 s}$$

$\tau_1 = R_1 C_1$

$\tau_2 = R_2 C_2$

$\tau_r = R_1 C_2$

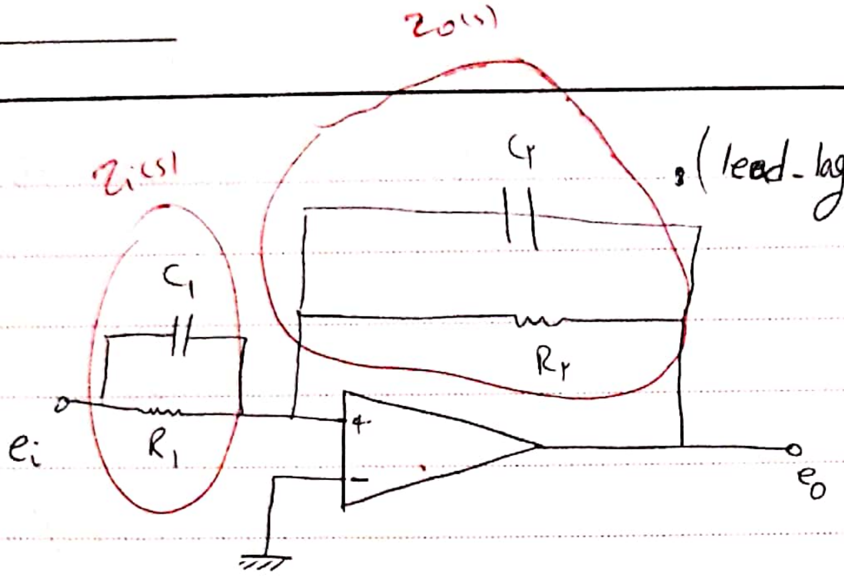
$\alpha = \tau_1 \tau_2$

$\beta = \tau_1 + \tau_2$

$$\Longrightarrow \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\underbrace{\frac{\beta}{\tau_r}}_{k_p}\Big[\underbrace{1}_{P} + \overbrace{\frac{1}{\beta s}}^{I} + \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{T_d}\underbrace{s}_{D}\Big]$$

Scanned with CamScanner

Subject:
Date

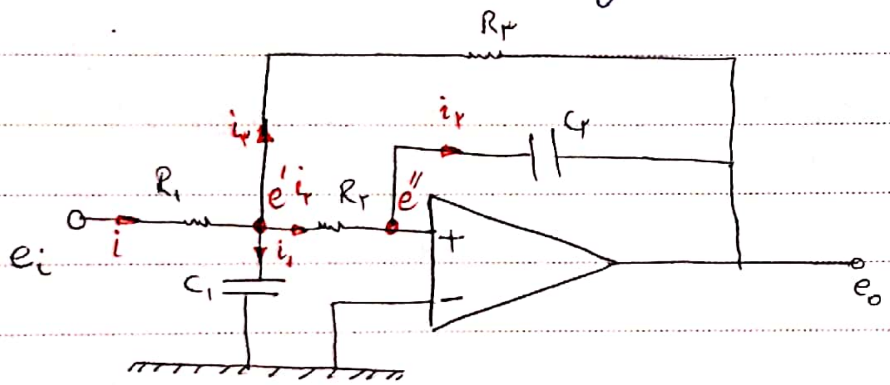


۶ مثال: (جبران‌ساز lead-lag)

$$\frac{E_o}{E_s} = -\frac{\dfrac{\frac{1}{C_2 s}\times R_2}{\frac{1}{C_2 s}+R_2}}{\dfrac{\frac{1}{C_1 s}\times R_1}{\frac{1}{C_1 s}+R_1}}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -k_p\,\frac{s+\beta}{s+\alpha}$$

$R_1C_1 > R_2C_2$, $< ?$ } Lead or lag



۷ مثال: (دلخواه)

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = ?$$

نکته: ولتاژهای ورودی آپ‌امپ با هم برابرند. (۱)

آپ‌امپ جریان به داخل نمی‌کشد. (۲)

$i = i_1 + i_2 + i_3$

$\underbrace{i_3 = i_2}_{(2)}$, $\underbrace{e'' = 0}_{(1)}$

گره e'

$$(1)\quad \frac{E_i - E'}{R_1} = \frac{E' - 0}{\frac{1}{C_1 s}} + \frac{E' - E''}{R_2} + \frac{E' - E_o}{R_3}$$

$$(2)\quad \frac{E' - E''}{R_2} = \frac{E'' - E_o}{\frac{1}{C_2 s}}$$

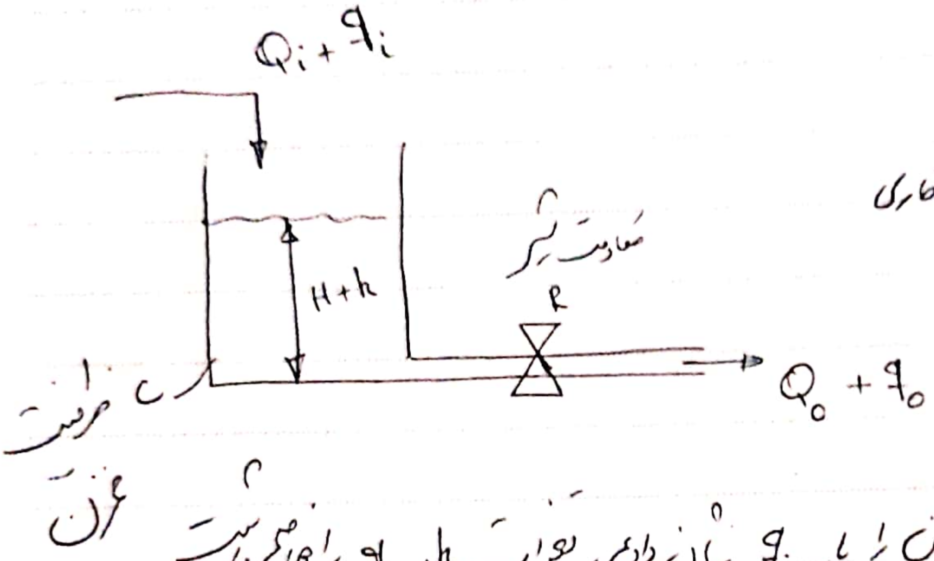
$$(3)\quad E'' = 0$$

E_o, E_i, E', E''

تابع تبدیل T.F ← ۳ معادله، ۴ Variables

فصل ۴: مدلسازی سیستم های ترموفلوئید:

مدلسازی مخزن سیال:



مخزن سیال در حال کار حول نقطه کاری $\left|\begin{matrix} Q_i \\ Q_o \\ H \end{matrix}\right.$ (operating point) است.

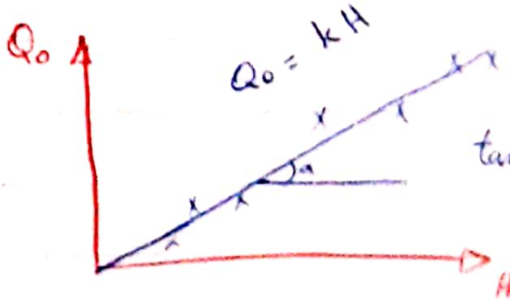
حال اگر تغییری در Q_i دهیم که آن را با q_i نشان دادیم، تغییرات h و q_o را خواهیم داشت.

در کنترل، با تغییرات سیگنال ها سروکار داریم.

تعاریف (C, R):

R: Resistance: مقاومت شیر

$$R = \frac{dH}{dQ_o} = \frac{h}{q_o}$$



$$\tan\alpha = \frac{dQ_o}{dH} = \frac{1}{R}$$

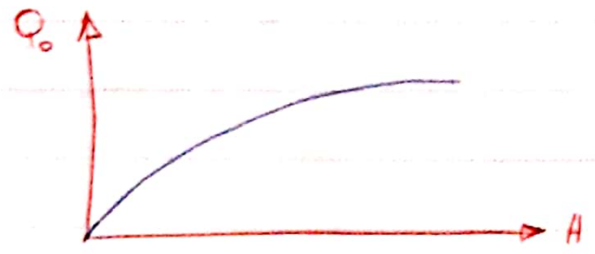
* در جریان های laminar ($Re < 2300$)، Q_o نسبت به H خطی تغییر می کند ($Q_o = kH$)

ما در این درس با همین جریان آرام و نسبت خطی کار داریم.

جریان آرام $\rightarrow$ $R = \frac{dH}{dQ_o} = \frac{1}{k}$ ، (خطی ثابت)

Subject:
Date

جریان آشفته (tourbolance) . $Q_0 = k\sqrt{H}$



$$R = \frac{dH}{dQ_0} = \frac{dH}{d(k\sqrt{H})}$$

$$= \frac{dH}{\frac{k\,dH}{2\sqrt{H}}} = \frac{2\sqrt{H}}{k} = \frac{2\sqrt{H}}{\frac{Q_0}{\sqrt{H}}} = \frac{2H}{Q_0}$$

* ولی ما معمولا جریان آرام کار می‌کنیم . چون در صنعت هم بیشتر جریان ها آرام است

$$\Rightarrow R = \frac{\Delta h}{q_0} = \frac{\text{تغییر ارتفاع سیال}}{\text{تغییر دبی عبوری از شیر}}$$

دبی حجمی جابجا شده در واحد زمان

C : ظرفیت خازن (Capacitance) $C = \frac{q_{net}\,dt}{dh}$ $\left(\frac{m^3/s \cdot s}{m}\right) = (m^2)$

$$C = \frac{\text{تغییر حجم}}{\text{تغییر ارتفاع}} = \text{سطح مقطع مخزن}$$

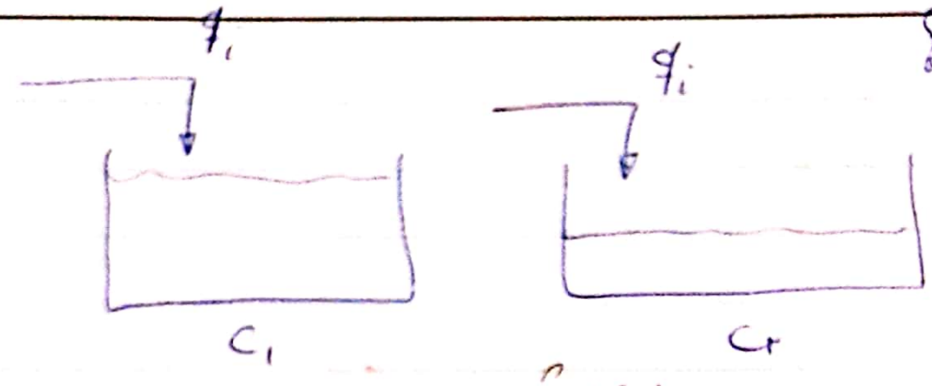
تفسیر فیزیکی در مورد مقادیر R و C :

اگر شیر کاملا بسته باشد ← $R \cong \infty$ ← $q_0 = 0$

" " " باز " ← $R \cong 0$ ← $q_0 \to \infty$ / پیشرو مهار

Subject:
Date

- ظرفیت کدام بیشتره؟



ظرفیت C_2 بیشتره ← چون سطح مقطع بیشتری داره

علت فیزیکی، حساسیت به تغییر حجم در اولی بیشتره (سریع دچار طغیان میشه) ولی دومی نه.

← به ازای دبی وارد شده، تغییرات ارتفاع دومی C_2 از C_1 کمتر است؛ یعنی حساسیت کمتری دارد

(ظرفیت بیشتری دارد)

مثال، هدف: $\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = ?$ (در ارتباط با شکل قبل)

$$\begin{cases} R = \dfrac{h-0}{q_o} = \dfrac{h}{q_o} \xrightarrow{\mathcal{L}} R\,Q_o(s) = H(s) \quad (1) \\[2ex] C = \dfrac{(q_i - q_o)dt}{dh} \rightarrow C\dfrac{dh}{dt} = q_i - q_o \xrightarrow{\mathcal{L}} CS\,H(s) = Q_i(s) - Q_o(s) \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow (2) \Rightarrow CSR\,Q_o(s) = Q_i(s) - Q_o(s) \rightarrow Q_o(s)(1 + CSR) = Q_i(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCS + 1}}$$

$\{ RC = \tau =$ ثابت زمانی $\}$ *

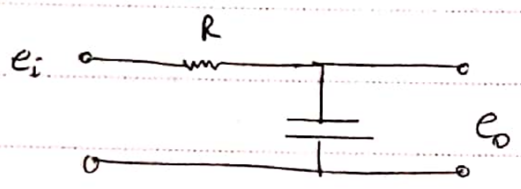
۶ ~~مثال~~

معروف‌ترین sys های مرتبه اول : حرارت، سیالات

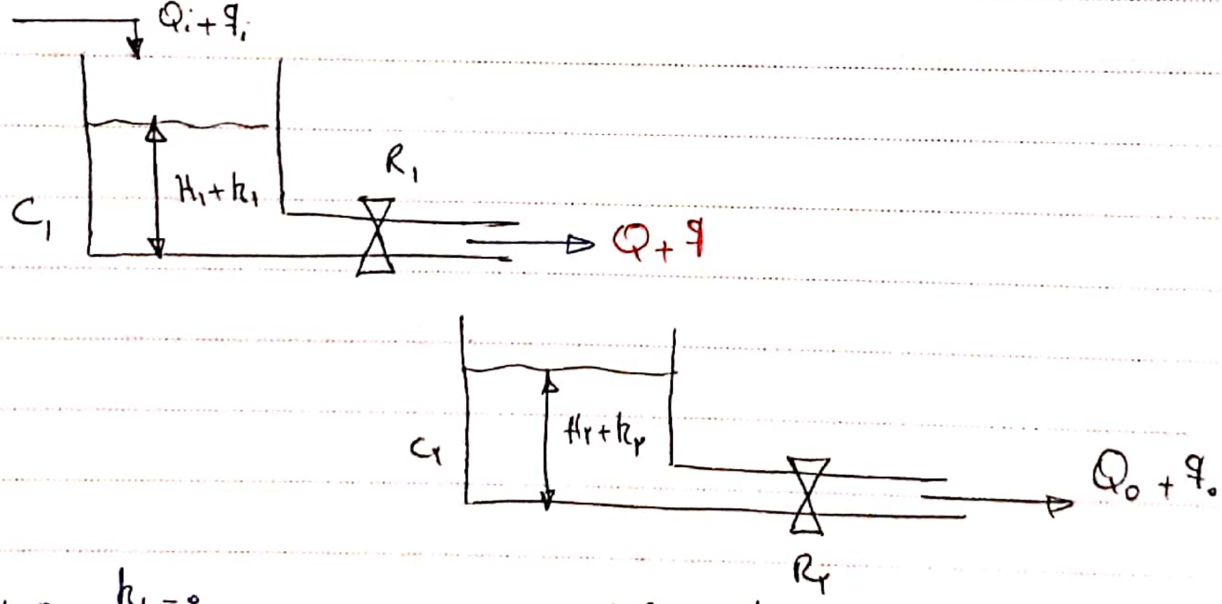
دوم : جرم، فنر، دمپر / مدار RLC

سوم : موتور DC

مثال : (معادل برقی مثال قبل)



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$



مخزن ۱
$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{h_1 - 0}{q} \\ C_1 = \dfrac{(q_i - q)dt}{dh_1} \end{cases}$$

مخزن ۲
$$\begin{cases} R_2 = \dfrac{h_2 - 0}{q_o} \\ C_2 = \dfrac{(q - q_o)dt}{dh_2} \end{cases}$$

مشابه مثال قبل : $\tau_1 = R_1C_1 \leftarrow \dfrac{Q(s)}{Q_i(s)} = \dfrac{1}{\tau_1 s + 1}$

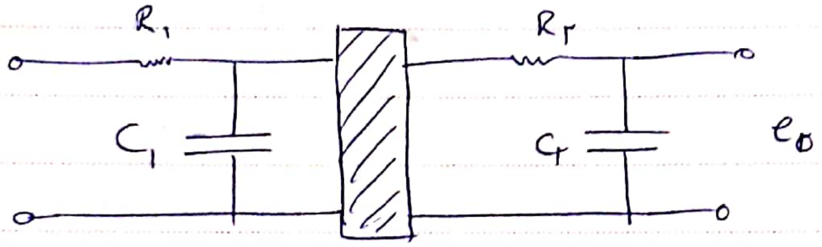
Date

$$\tau_2 = R_2 C_2 \rightsquigarrow \frac{Q_o(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\tau_2 s+1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}}$$

معمولا همچنا از این معادله نتیجه می‌گیریم که دو سیستم مرتبه اول بدون اندرکنش با هم ضرب می‌شوند.

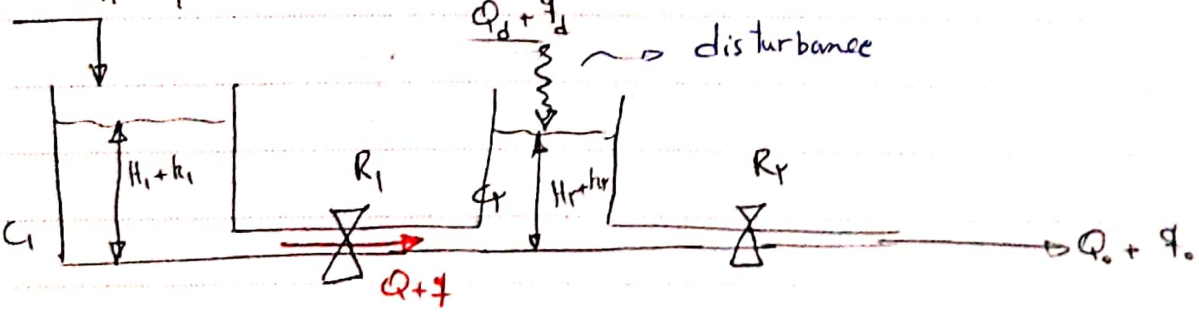
معادل برقی ⟹



ما همانطور که در سیستم‌های مکانیکی برای کاهش هزینه و آزمایش ساده‌تر از معادل برقی استفاده می‌کردیم

در اینجا هم به همین دلیل از معادل برقی استفاده می‌کنیم.

مثال: (جریان دو مخزن سیال با اندرکنش):



۶ تا تابع تبدیل می‌توانیم داشته باشیم: $\frac{H_1(s)}{Q_d(s)}$ ، $\frac{H_1(s)}{Q_i(s)}$ ، $\frac{H_2}{Q_i(s)}$ ، $\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)}$ ، $\frac{Q_o(s)}{Q_d(s)}$

۲ و ۱ و ...

سوال ۱۴

Date

۱) $R_1 = \dfrac{h_1 - h_2}{q} \xrightarrow{\mathcal{L}} R_1 Q_{(s)} = H_{1(s)} - H_{2(s)}$

۲) $C_1 = \dfrac{(q_i - q)\,dt}{dh_1} \xrightarrow{\mathcal{L}} C_1 S H_{1(s)} = Q_{i(s)} - Q_{(s)}$

۳) $R_2 = \dfrac{h_2 - 0}{q_o} \xrightarrow{\mathcal{L}} R_2 Q_o(s) = H_2(s)$

۴) $C_2 = \dfrac{(q + q_d - q_o)\,dt}{dh_2} \xrightarrow{\mathcal{L}} C_2 S H_2(s) = Q_{(s)} + Q_d(s) - Q_o(s)$

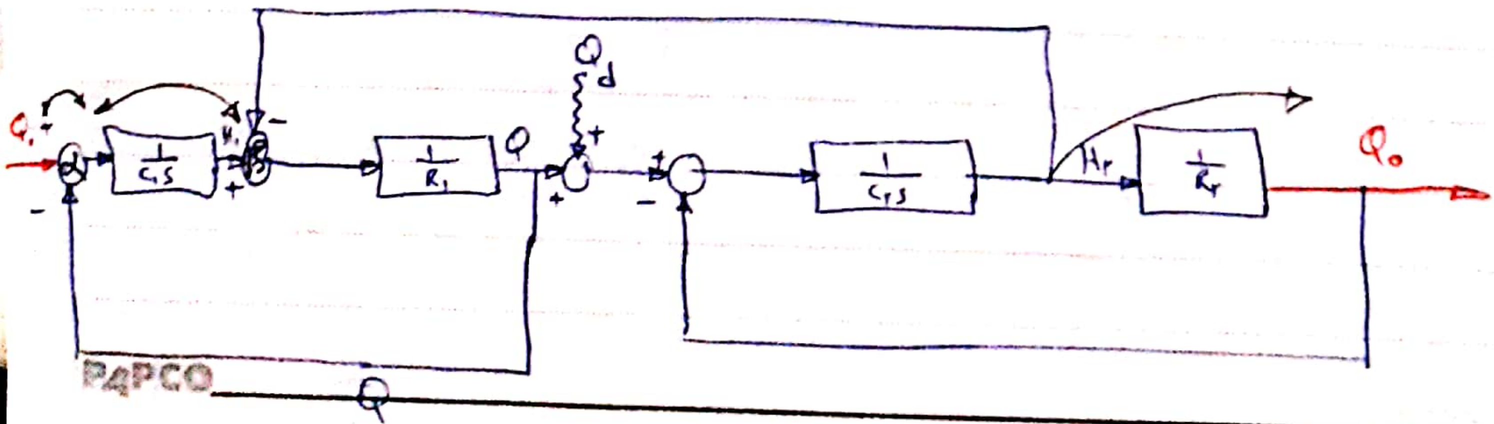
* ۴ معادله و ۶ مجهول داریم.

هدف ما $\dfrac{Q_o}{Q_i}$ هست. بلوک سازی می‌کنیم: از معادله ۴ شروع می‌کنیم که Q_o رو داره -

از معادله ۳ می‌توانیم قبل Q_o رو بسازیم ($H_2 = \frac{1}{R_2} Q_o$) بعد فرض می‌کنیم Q ساخته شده است و بعد سراغ Q می‌ریم.

با معادله ۲ رو تکمیل بدیم. حالا H_1 رو باید بسازیم که با معادله ۱ رو درست کنیم تا H_2 درست شه. بعد اول ...

disturbance هم اضافه کن، معادله ۴ درست شد.



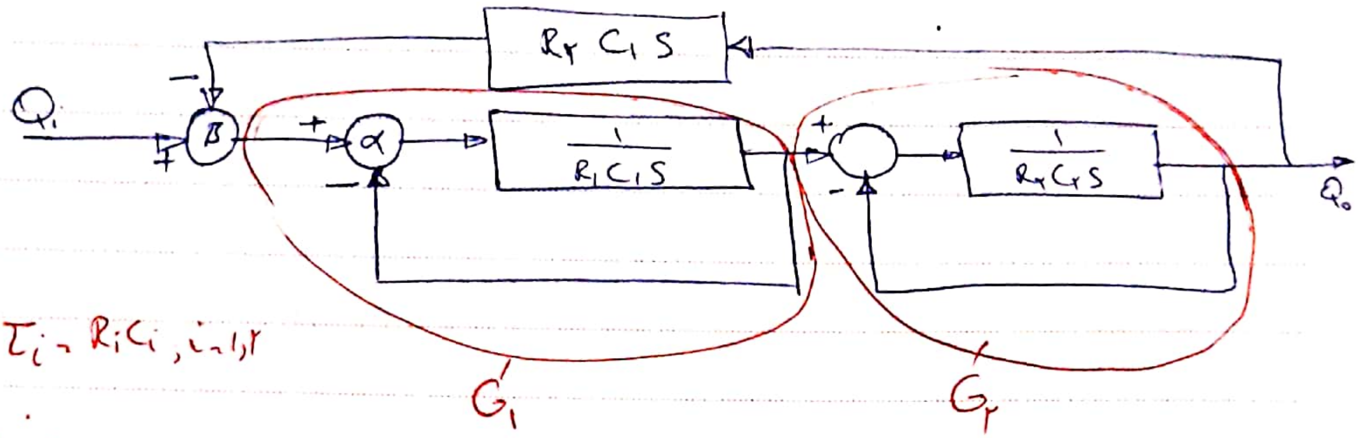
Scanned with CamScanner

Subject:
Date

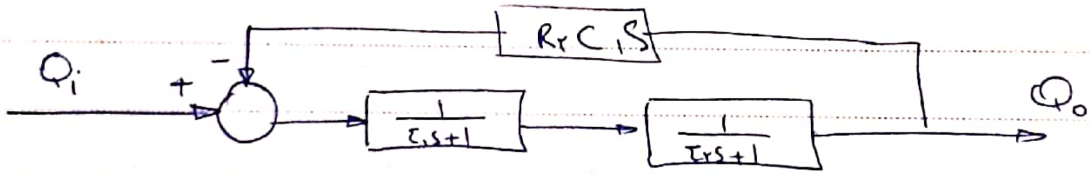
$$1 \longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{C_1 s}} = C_1 s$$

$$C_1 s \xrightarrow{\times R_2} R_2 C_1 s$$

ساده سازی شود.



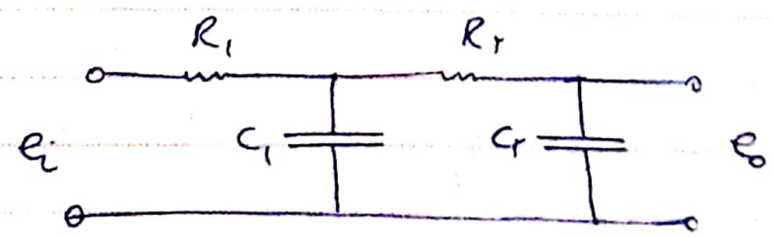
قانون ۳ $\longrightarrow$ $G_1 = \dfrac{\frac{1}{\tau_1 s}}{1+\frac{1}{\tau_1 s}} = \dfrac{1}{\tau_1 s+1}$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1) + R_2 C_1 s}}$$

نسبت به شکل قبل این پارامتر اضافه شده است.

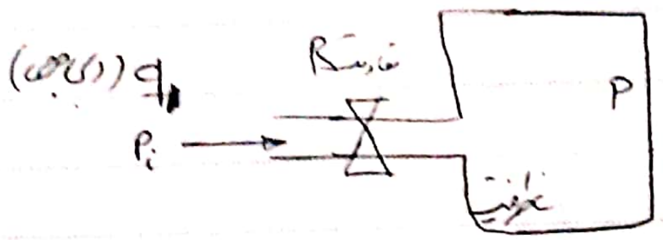
معادل مداری. $\Longrightarrow$



C: اختلاف $P_i - P$

سیستم‌های نیوماتیکی :

مثال :



$$\begin{cases} R = \dfrac{\Delta P}{q} \\[2ex] C = \dfrac{q_{net}\,dt}{dP} \end{cases}$$

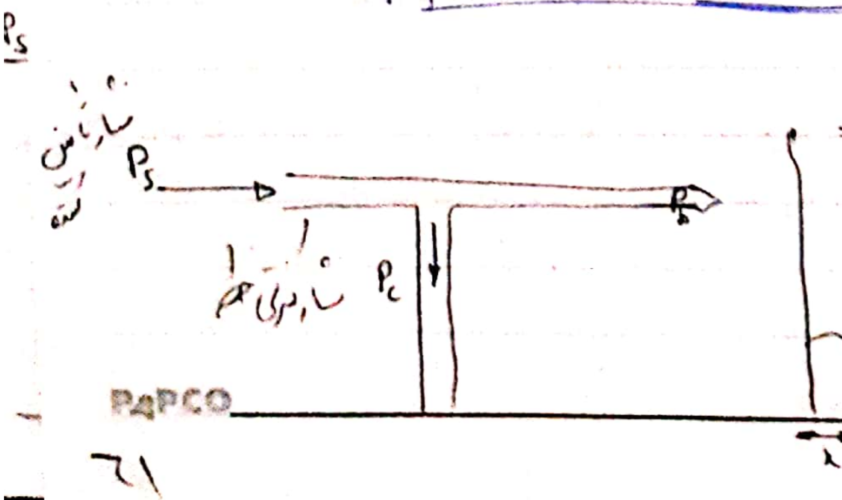
هدف : $\dfrac{P(s)}{P_i(s)} = ?$

$$\begin{cases} R = \dfrac{P_i - P}{q} \xrightarrow{L} RQ(s) = P_i(s) - P(s) \qquad (1) \\[2ex] C = \dfrac{(q - 0)\,dt}{dP} \xrightarrow{} C\dfrac{dP}{dt} = q \xrightarrow{L} CSP(s) = Q(s) \qquad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \boxed{\dfrac{P(s)}{P_i(s)} = \dfrac{1}{RCS+1}}$$

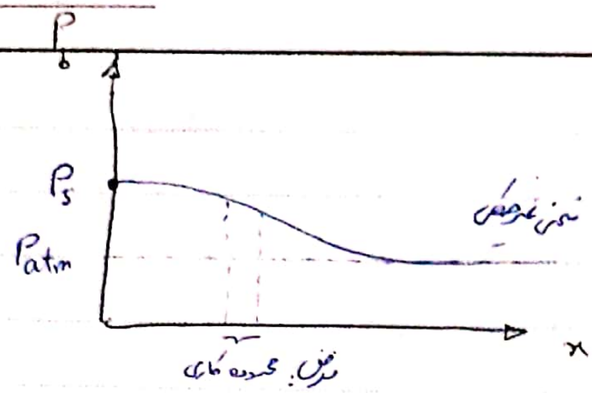
$\tau = RC$ ، ثابت زمانی

— حل تابع تبدیل سیستم نیوماتیکی زیر :



Scanned with CamScanner

Subject :
Date



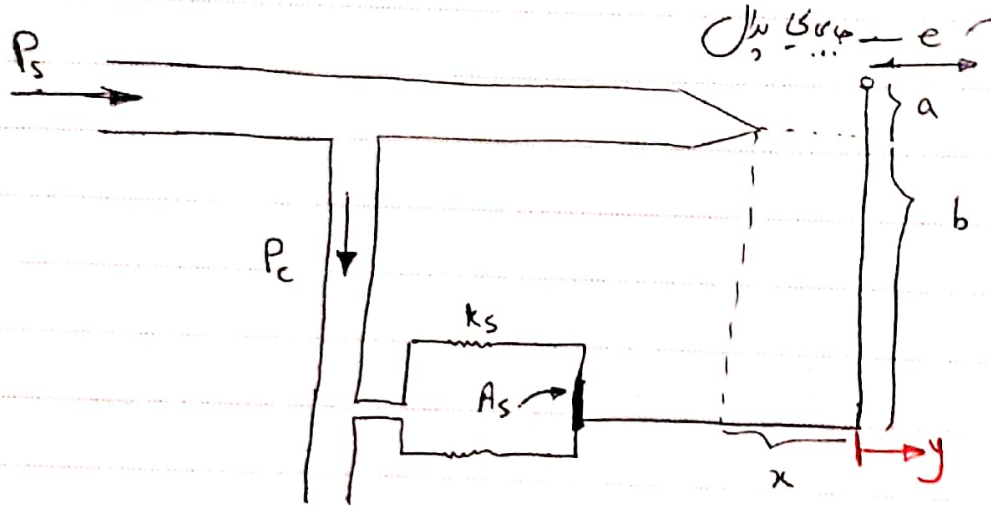
مرتون شان دار

$$\left\{\begin{array}{l} P_b \cong k_1 x \\ P_C \cong k_2 P_b \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{P_c = kx}$$

۳ رابطه اول و مهم در سازی نیوماتیک (k رو به ما میدهند)

مثال: ۳

(error Signal) e — جابجایی پدال

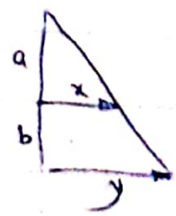


هدف: $\frac{P_c(s)}{E(s)} = ?$

۱) $P_c = kx$

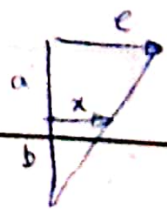
۲) (هندسی)

$e = 0$;



$\frac{x}{y} = \frac{a}{a+b}$

$y = 0$;



$\frac{x}{e} = \frac{b}{a+b}$

جمع آثار

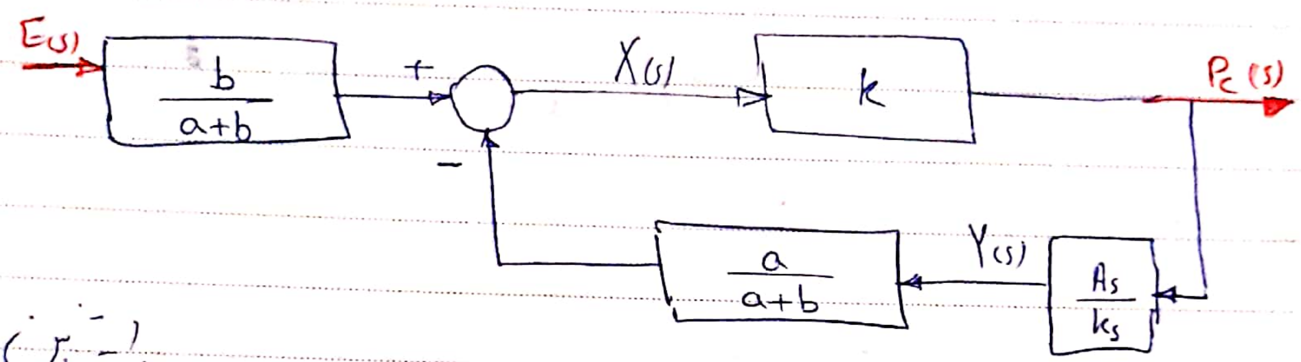
$x = e\frac{b}{a+b} - y\frac{a}{a+b}$

P4PCO

۳/ $P_c A_s = k_s y$

۳ معادله ۴ مجهول P_c, y, e, x

مدلسازی :



[illegible] طبق قوانین

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{k}{1 + \underbrace{k\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{A_s}{k_s}\right)}_{\text{فرض } k \gg 1}}\left(\frac{b}{a+b}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_c(s)}{E(s)} = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{k_s}{A_s}\right)}$$

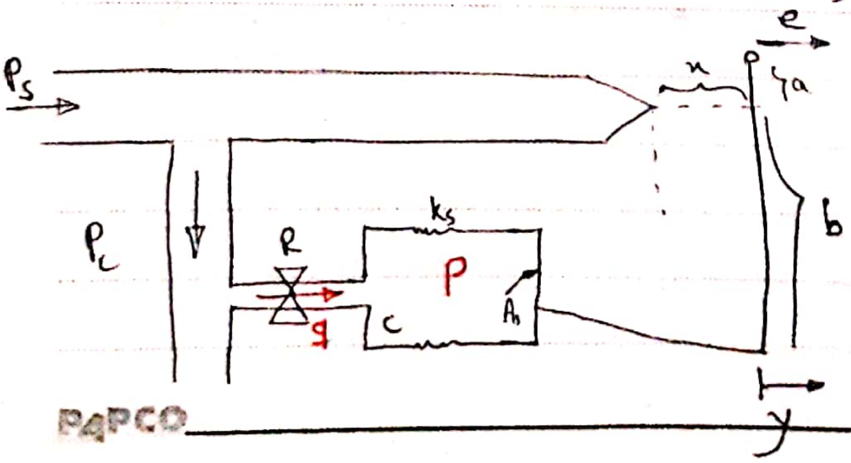
نوع مدل → P-controller / Actuator

کنترلر / عملگر

هرچی $f\left(\frac{b}{a}\right)$ بیشتر باشد $\Rightarrow k_p \uparrow$

← بیشتر بودن بهتری! اما محدودیت فضا هم داریم.

سوال: هدف: $\frac{P_c(s)}{E(s)} = ?$



Subject: (این رابطه گفته شده دارم)
Date

(x, y, e, P, q, P_c)

پنج معادله ۶ مجهول

(دیفرانسیل) ۱, $P_c = kx$ ①

(اهرمی)(اهرم) ۲, $x = e\dfrac{b}{a+b} - y\dfrac{a}{a+b}$ ②

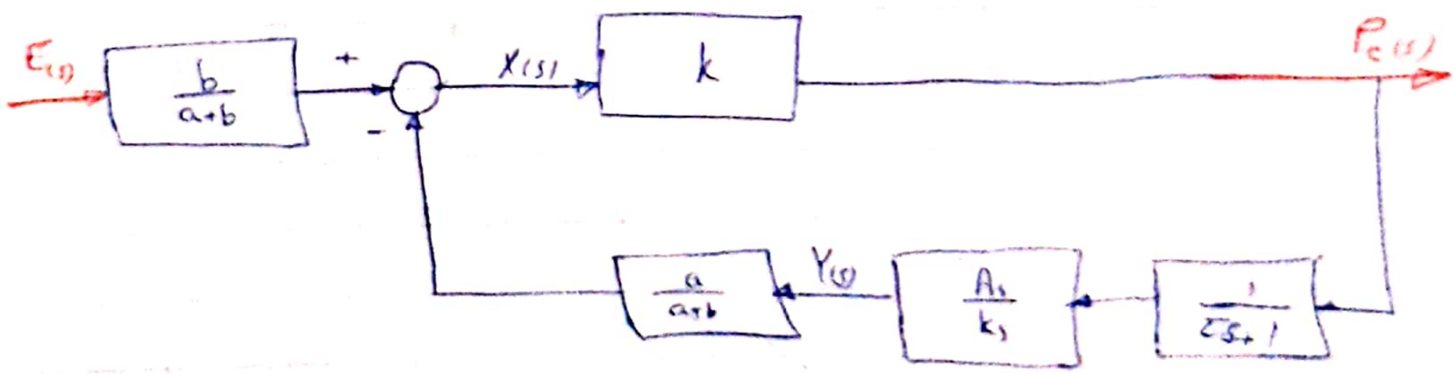
(مقاومت) ۳, $R = \dfrac{P_c - P}{q} \longrightarrow R\,Q_{(s)} = P_{c(s)} - P_{(s)}$

(ظرفیت) ٤, $C = \dfrac{q\,dt}{dP} \longrightarrow C\dfrac{dP}{dt} = q \xrightarrow{L} CS\,P_{(s)} = Q_{(s)}$

(صوشتن) ۵, $PA_s = k_s y$ ③

چون ما دیگر (q) نیازی نداریم ــــ از معادله ۳ و ۴ $Q_{(s)}$ را حذف می‌کنیم

$\xrightarrow[\text{۳, ٤}]{Q_{(s)}\ \text{حذف}} \dfrac{P_{(s)}}{P_{c(s)}} = \dfrac{1}{\underbrace{RC}_{\tau}S + 1}$ ④



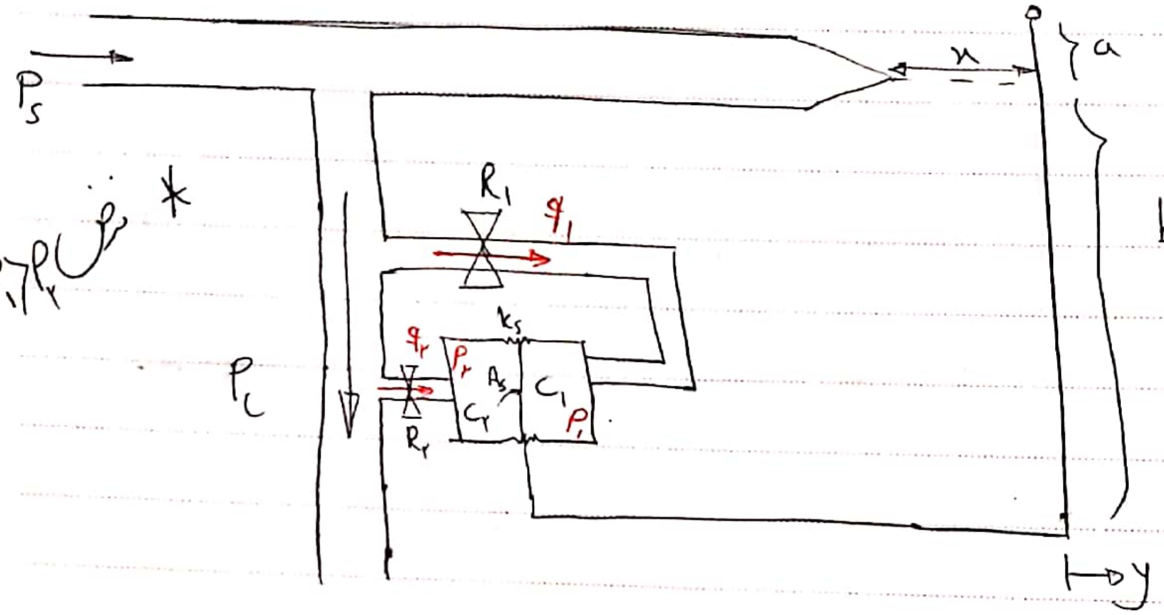
$$\frac{P_{c(s)}}{E_{(s)}} = \frac{k}{1 + \underbrace{k\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{A_s}{k_s}\right)\left(\frac{1}{\tau S+1}\right)}_{\text{ص ۱۳۲}}}\left(\frac{b}{a+b}\right)$$

Subject:
Date

$$k_p$$

$$\frac{P_{c(s)}}{E_{(s)}} = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{k_s}{A_s}\right)(\tau s + 1) \Rightarrow \boxed{\text{PD\_Controller / Act}}$$

D ↑ , P ↑ ; $\tau = T_d$



مثال :

هدف ، $\frac{P_{c(s)}}{E_{(s)}}$

فرض $P_1 > P_2$ *

$\tau_i = R_i C_i \; ; \; i = 1, 2$

[illegible] ۱) $P_c = kx$

هندسی ۲) $x = e\frac{b}{a+b} - y\frac{a}{a+b}$

مقاومت ۱ ۳) $R_1 = \frac{P_c - P_1}{q_1}$

ظرفیت ۱ ۴) $C_1 = \frac{q_1\, dt}{dP_1}$

$\xrightarrow{Q_{1(s)}\ \text{حذف}}$ $\frac{P_{1(s)}}{P_{c(s)}} = \frac{1}{\tau_1 s + 1}$

مقاومت ۲ ۵) $R_2 = \frac{P_c - P_2}{q_2}$

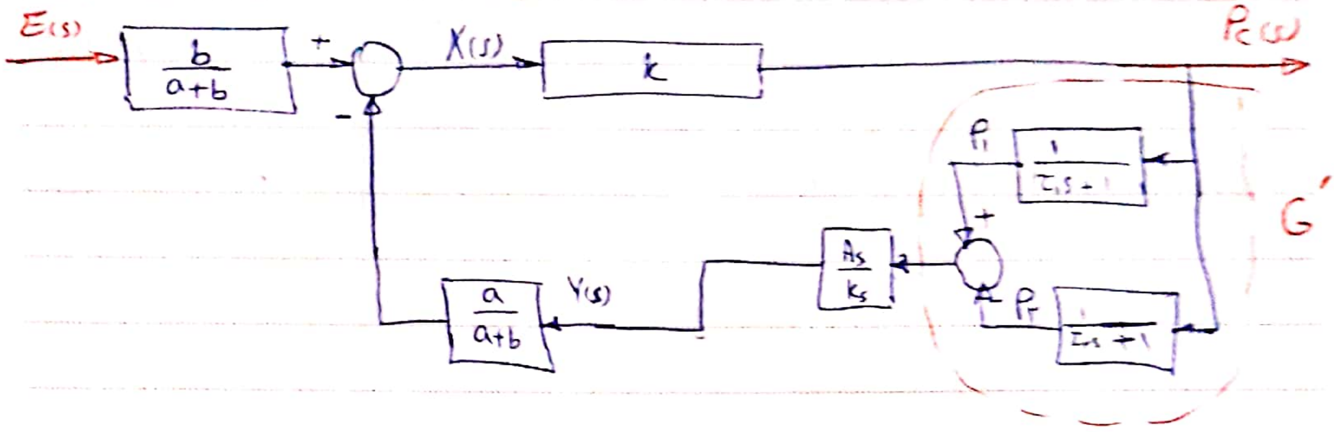
ظرفیت ۲ ۶) $C_2 = \frac{q_2\, dt}{dP_2}$

$\xrightarrow{Q_{2(s)}\ \text{حذف}}$ $\frac{P_{2(s)}}{P_{c(s)}} = \frac{1}{\tau_2 s + 1}$

[illegible] ۷) $(P_1 - P_2) A_s = k_s y$

$(P_1 > P_2)$ * → 8

مثال



$$G' = \frac{1}{\tau_1 s+1} - \frac{1}{\tau_2 s+1} = \frac{(\tau_2-\tau_1)s}{(\;)(\;)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{k}{1+\underbrace{kG'\left(\frac{A_s}{k_s}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right)}_{\text{ص ۲۳}}}\left(\frac{b}{a+b}\right)$$

نمره ۲۰

$$\begin{cases}\tau_1\tau_2 = \lambda\\ \tau_1+\tau_2 = \gamma\\ \tau_2-\tau_1 = \gamma'\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P_c(s)}{E(s)} = \overbrace{\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{k_s}{A_s}\right)}^{\hat{k}}\underbrace{\left(\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{(\tau_2-\tau_1)s}\right)}_{G'}$$

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \hat{k}\left(\frac{\lambda s^2+\gamma s+1}{\gamma' s}\right)$$

PID controller / Act

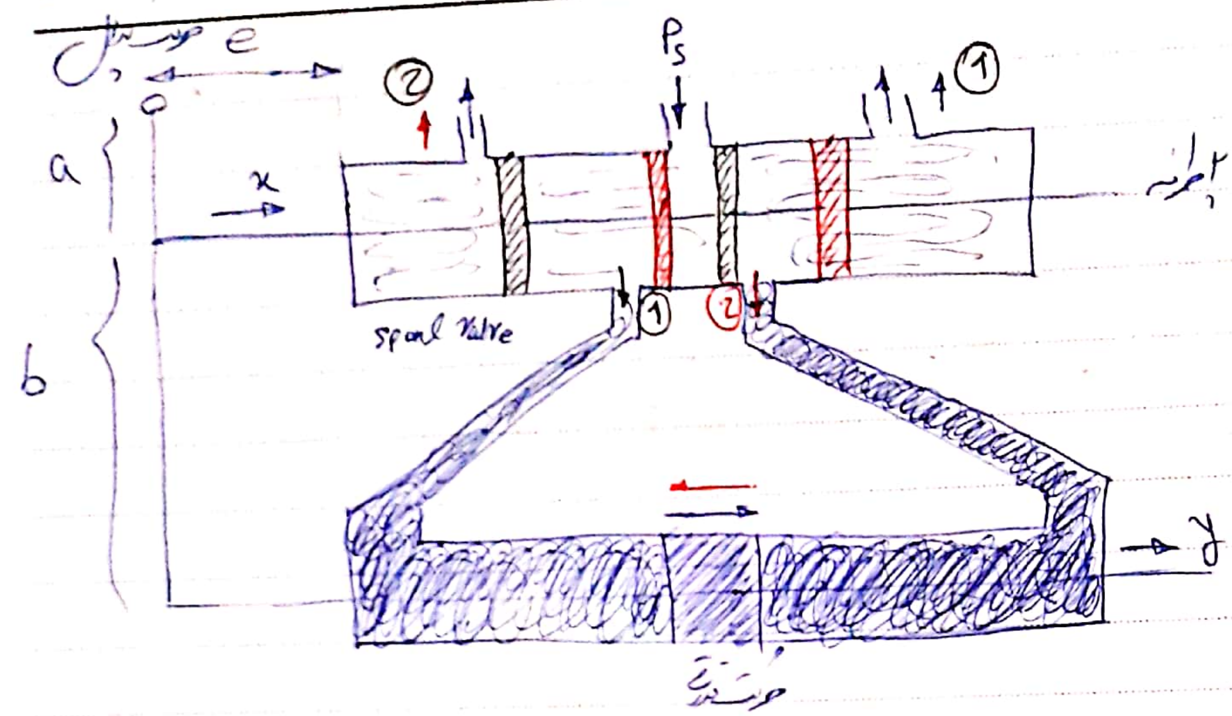
$$= \underbrace{\hat{k}\frac{\gamma}{\gamma'}}_{K_p}\left[\underbrace{1}_{P} + \underbrace{\frac{1}{\gamma s}}_{I} + \underbrace{\frac{\lambda}{\gamma}}_{T_d} \underbrace{s}_{D}\right]$$

* $R_{22} \ll R_{11}$ ... باشد $(\tau_{22} \ll \tau_{11})$ ... $\Leftarrow$ کنترلر PI میشه

۷/۱ ص

هیدرولیک :

مثال : سرو هیدرولیکی ۲ مرحله



بدین ترتیب می‌توان نشان داد :

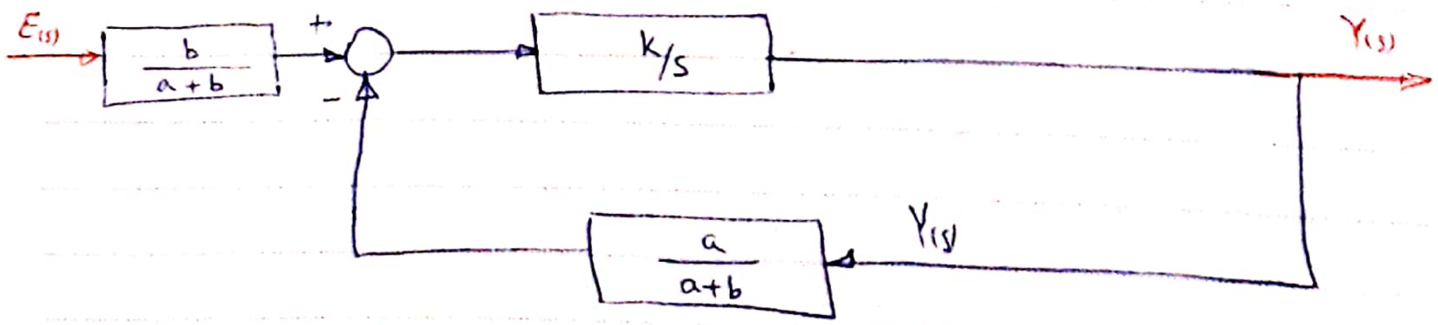
$$1)\quad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

K : ثابت

$$y(t) = k\int x(t)\,dt$$

$$2)\quad x = e\,\frac{b}{a+b} - y\,\frac{a}{a+b}$$ فرض

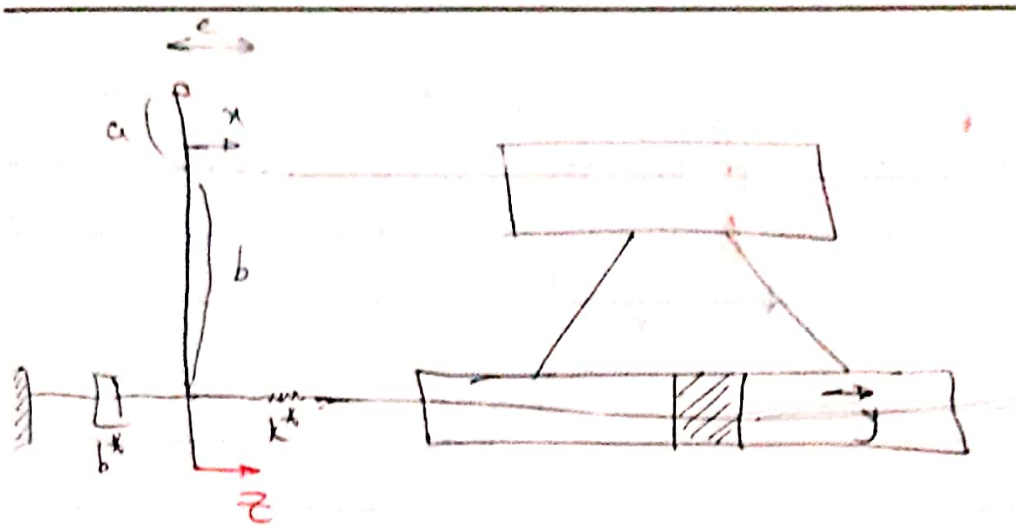
x و e و y ۳ مجهول و ۲ معادله داریم



$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{k/s}{\underbrace{1+(k/s)\left(\frac{a}{a+b}\right)}_{\gg 1 \text{ فرض}}}\cdot\frac{b}{a+b} \Rightarrow \frac{Y(s)}{E(s)} = \underbrace{\frac{b}{a}}_{K_p} \Rightarrow \boxed{\text{P-Controller/Act}}$$

Subject:
Date

مثال ۵) مطلوبست ؟ $\frac{Y(s)}{E(s)}$

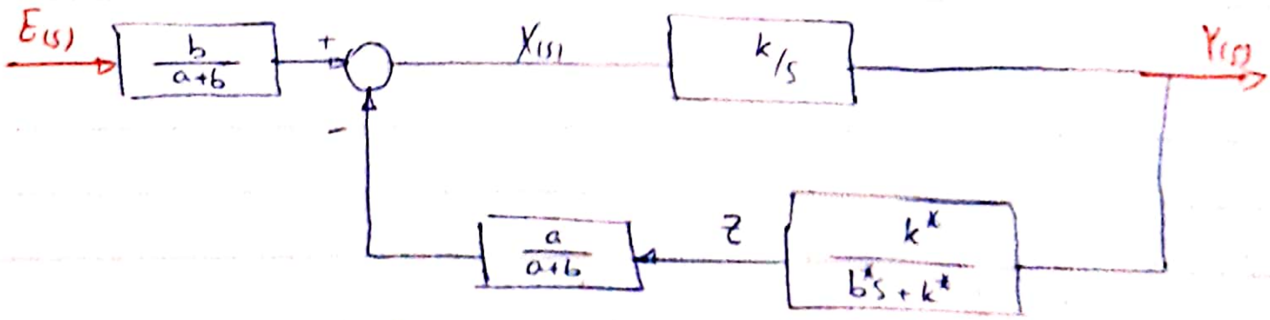


معادله ۱) $\frac{Y(s)}{X(s)} = k/s$

هندسی ۲) $x = e\frac{b}{a+b} - z\frac{a}{a+b}$

جرم ناچیز ۳) $b^*(\dot z - 0) + k^*(z - y) = 0 \longrightarrow (b^* s + k^*)Z_{(s)} = k^* Y_{(s)}$

تحلیل x, y, z، معادله ۳



$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{k/s}{1+(k/s)\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{k^*}{b^*s+k^*}\right)}\left(\frac{b}{a+b}\right)$$

فرض ۱ ≫

PAPCO

$$\frac{Y(s)}{E(s)} \to \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{b^*s+k^*}{k^*}\right) = \frac{b}{a}\left(1+\frac{b^*s}{k^*}\right)$$

k_p P T_d D

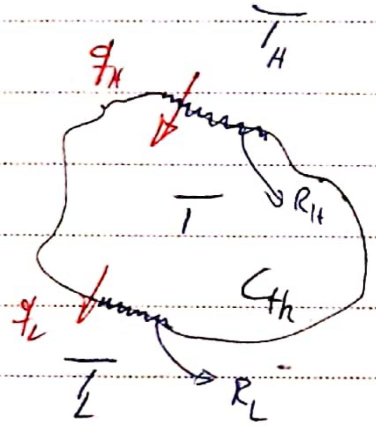
→ PD controller

* برای ساخت جبران‌سازهای PI ، مقاومت در شکل مثال قبل بجای فنر دمپر قرار داده شود

* " " " " PID ← $\xrightarrow{\text{با المان}}$ dashput در ترمینال‌ها قرار می‌دهیم.

سیستم‌های Thermal :

در نظر بگیرید



T_H : High temp

T_L : Low "

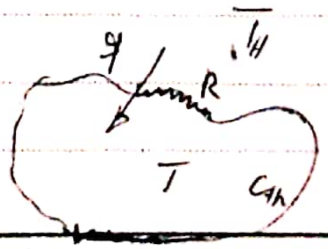
فرض: $T_H > T > T_L$

مقاومت حرارتی بالادست ← $R_H = \dfrac{\Delta T}{q_H} = \dfrac{T_H - T}{q_H}$

" " پایین‌دست ← $R_L = \dfrac{\Delta T}{q_L} = \dfrac{T - T_L}{q_L}$

ظرفیت حرارتی ← $C_{th} = \dfrac{q_{net}\, dt}{dT} = \dfrac{(q_H - q_L)\, dt}{dT}$

* در حالتی دیواره پایین دست عایق شود ، $q_L = 0 \quad , \quad R_L \longrightarrow \infty$



$$\frac{T(s)}{T_H(s)} = ?$$

مقاومت $\rightarrow R = \dfrac{T_H - T}{q} \xrightarrow{\mathcal{L}} R\,Q_{(s)} = T_{H(s)} - T_{(s)}$

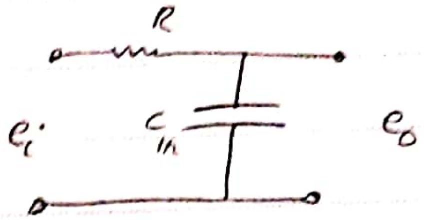
ثابت زمانی $RC = \tau$

$C_{th} = \dfrac{(q - 0)\,dt}{dT} \longrightarrow C_{th}\dfrac{dT}{dt} = q \longrightarrow C_{th}\,s\,T_{(s)} = Q_{(s)}$

$$\boxed{\dfrac{T_{(s)}}{T_{H(s)}} = \dfrac{1}{RC_{th}s + 1}}$$

مرتبه ۱

معادل با $\xrightarrow{Q = i}$



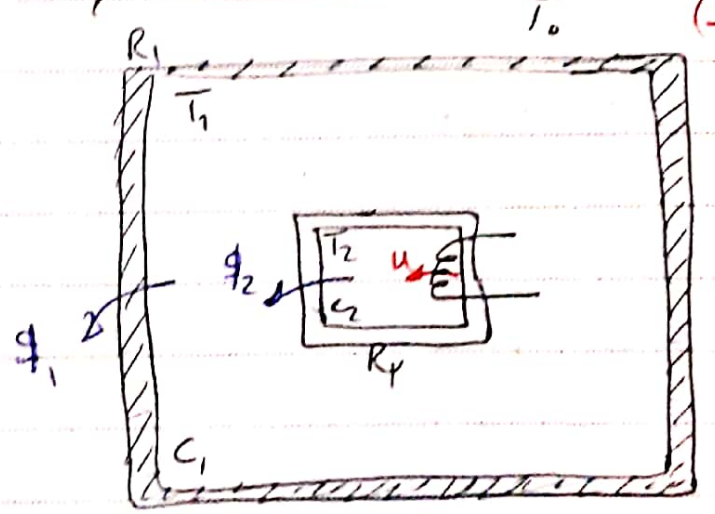
هدایت conduction : $q = -kA\dfrac{\Delta T}{\Delta x} \longrightarrow \left|\dfrac{\Delta T}{q}\right| = R_{th} = \dfrac{\Delta x}{kA}$

جابجایی convection : $q = hA(T - T_\infty) \longrightarrow \left|\dfrac{\Delta T}{q}\right| = R_{th} = \dfrac{1}{hA}$

تشعشع radiation : $q = \varepsilon A \delta (T^4 - T_\infty^4) \rightarrow \left|\dfrac{\Delta T}{q}\right| = R_{th} = \dfrac{1}{\varepsilon A \delta (T^2 - T_\infty^2)(T + T_\infty)}$

(انتشار)

مثال . $T_2 > T_1 > T_0$



* شار حرارتی u توسط هیتر تامین می‌شود

هدف ، $P = \dfrac{T_{2(s)}}{U_{(s)}}$

[illegible]

$\dfrac{T_{1(s)}}{T_{0(s)}}$, $\dfrac{T_{2(s)}}{T_{0(s)}}$, $\dfrac{T_{1(s)}}{U_{(s)}}$

Subject:
Date

1, $R_1 = \dfrac{T_1 - T_0}{q_1}$ ۴ معادله و ۶ مجهول ($T_0, T_1, T_2, q_1, q_2, u$)

2, $C_1 = \dfrac{(q_2 - q_1)\,dt}{dT_1} \longrightarrow C_1 \dfrac{dT_1}{dt} = q_2 - q_1 \xrightarrow{L} C_1 s T_1(s) = Q_2(s) - Q_1(s)$

3, $R_2 = \dfrac{T_2 - T_1}{q_2}$

4, $C_2 = \dfrac{(u - q_2)\,dt}{dT_2} \longrightarrow C_2 \dfrac{dT_2}{dt} = u - q_2 \xrightarrow{L} C_2 s T_2(s) = U(s) - Q_2(s)$

در ادامه بلوک دیاگرام سیستم را رسم و ساده سازی شده (شبیه مخازن متوالی است) سپس به هم می‌پیوندیم.

فصل ۵: پاسخ زمانی سیستم‌های مرتبه ۱ و مرتبه ۲ با ورودی پله و ضربه

— تا کنون در ۴ فصل قبل با مدلسازی سیستم‌های ارتعاشات، برق، الکترونیکی و ترمودینامیک آشنا شدیم.

حال پاسخ سیستم‌های مرتبه ۱ و مرتبه ۲ به سیگنال در صفحه [illegible] چند ورودی پرکاربرد پله، شیب، هارمونیک پیدا می‌کنیم (هارمونیک فصل ۸)

اگر پاسخ مسئله مطلوب بود نیازی به طراحی کنترلر نیست — اگر پاسخ نامطلوب بود:

تعیین پایداری / ۱

طراحی کامل (کنترلر مشترک باشد)

— در این مبحث از ابزارهای Ruth، Bode، ... می‌پردازیم.