بسمه تعالی

« مقادیر ویژه، بردارهای ویژه »

رشته‌های مدیریت دولتی و بازرگانی

گردآوری: گروه ریاضی

دانشگاه پیام نور

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

یک ماتریس مربعی باشد. در این صورت ماتریس A، برداری مانند

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

را به بردار دیگری مانند

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

تبدیل می‌کند. یعنی

$$AX = U.$$

درکاربرد، معمولاً این سئوال پیش می‌آید که آیا با مفروض بودن ماتریس A، برداری مانند X وجود دارد که A آن را به خودش یا به مضربی (حقیقی) از خودش تبدیل کند. به عبارت دیگر آیا برداری مانند X و عددی حقیقی λ وجود دارند که

$$AX = \lambda X. \qquad (۱)$$

بنابراین مطلوب، حل معادلهٔ (۱) است. باید مقدار λ و بردار X چنان تعیین شوند که در (۱) صدق کنند. معادلهٔ (۱) صورتِ فشردهٔ دستگاه دو معادله‌ی جبری

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda x \end{cases} \qquad (۲)$$

است. هر مقدار مناسب λ را که در (۲) صدق کند یک مقدار ویژهٔ ماتریس A و بردار $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ متناظر با این مقدار ویژه را، به شرط $X \neq 0$ یک بردار ویژه ماتریس A می‌نامند. (توجه کنید $X \neq 0$ معادل

ست یا اینکه $x \neq ۰$ یا $y \neq ۰$.

مثال زیر مفاهیم فوق را روشن می‌کند.

مثال ۱. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۲ \end{pmatrix}$$

مفروض است. معادلهٔ (۱) را حل کنید.

باتوجه به توضیحی که داده شد، حل معادلهٔ (۱) به حل دستگاه معادلات (۲) برمی‌گردد. بنابراین باید معادلهٔ

$$\begin{cases} ۳x - ۲y = \lambda x \\ ۲x - ۲y = \lambda y \end{cases}$$

را حل کنیم. برای این منظور، این دستگاه معادلات را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (۳-\lambda)x - ۲y = ۰ \\ ۲x - (۲+\lambda)y = ۰ \end{cases} \qquad (۳)$$

این دو معادله برحسب x و y همگن‌اند. معلوم است که جواب بدیهی این معادله $x=۰$ و $y=۰$ است. ولی می‌دانیم این دستگاه معادلات فقط وقتی جواب غیربدیهی دارد که دترمینان ضرایب صفر باشد. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} ۳-\lambda & -۲ \\ ۲ & -(۲+\lambda) \end{vmatrix} = ۰$$

یا $\lambda^۲ - \lambda - ۲ = ۰$، که آن را <u>معادلهٔ مشخصه</u> می‌گویند. جوابهای این معادله عبارتند از:

$$\lambda_۱ = -۱ \quad \text{و} \quad \lambda_۲ = ۲.$$

بدین ترتیب، دو مقدار ویژه متمایز به دست آوردیم. با هریک از این دو مقدار ویژه، مجدداً به دستگاه معادلات (۳) برمی‌گردیم. با $\lambda_۱ = -۱$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 4x-2y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

یکی از معادلات این دستگاه زاید است زیرا از ضرب دیگری در عدد مناسبی به دست می‌آید. بنابراین یکی از این دو معادله، مثلاً معادلهٔ

$$2x-y=0$$

را در نظر گرفته و آن را حل کنیم. این معادله بینهایت جواب دارد. با دلخواه فرض کردن x، مجهول y چنین می‌شود.

$$y = 2x.$$

اگر $x=1$ آنگاه $y=2$. بنابراین $X_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ یک بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ $\lambda_1=-1$ است. بدیهی است که هر مضرب ناصفر X_1، مانند $\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}$ نیز یک بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ $\lambda_1=-1$ است $(a\neq 0)$.
به ازای مقدار ویژهٔ $\lambda_2=2$، معادلهٔ

$$x-2y=0$$

حاصل می‌شود که با بحث مشابه، یک بردار ویژهٔ متناظر با این مقدار ویژه عبارت است از $X_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. باز هم واضح است که هر مضرب ناصفر X_2، مانند $\begin{pmatrix}b\\2b\end{pmatrix}$ نیز یک بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ $\lambda_2=2$ است.

مثال فوق راه‌حل کلی مسأله را به دست می‌دهد. در حالت کلی، برای حل دستگاه معادلات (۲)، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (a-\lambda)x+by=0, \\ cx+(d-\lambda)y=0. \end{cases} \qquad (2)$$

این یک دستگاه از معادلات همگن برحسب x و y است. یک جواب غیربدیهی فقط وقتی موجود است که دترمینان ضرایب صفر باشد، یعنی، وقتی که

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

این معادله، در واقع، عبارت است از معادلهٔ درجهٔ دوم

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$

که آن را معادلهٔ مشخصه می‌نامند، و جوابهای λ_1 و λ_2ی این معادله را مقادیر ویژه می‌گویند. با مشخص

ستون ناصفر $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ متناظر با این مقادیر ویژه که در (۲) صدق کنند یک بردار ویژه می‌گویند
(مشروط بر اینکه $x \neq 0$ یا $y \neq 0$).

تمرین
مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ متناظر با آنها را برای هر یک از ماتریسهای زیر به دست آورید:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$