خلاصه مباحث و نکات تحقیق در عملیات ۱

تهیه و تنظیم:

امین ناجو

۱ مفاهیم تحقیق در عملیات و مدل‌سازی

۱ـ۱ـ مقدمه

بروز انقلاب صنعتی موجب رشد و تعالی حیرت‌انگیز سازمان‌ها گردید. با افزایش تخصص و گسترش پیچیدگی سازمانها و شرکتها امر تصمیم‌گیری و همچنین تخصیص منابع موجود بین فعالیتهای بخشهای مختلف آن به منظور دستیابی به حداکثر کارایی، مشکل شده و نیاز به سیستماتیک نمودن تصمیمات داشت. از این‌رو به مروز زمان بحث تحقیق در عملیات پایه گذاری گردید. در حین جنگ جهانی دوم متخصصان و دانشمندان انگلیسی و آمریکائی بصورت سازمان یافته استفاده از مباحث علمی تحقیق در عملیات را در ماموریتهای هوایی مورد استفاده قرار دادند.

۱ـ۲ـ مدلسازی مسائل

مدل، نمایش خاصی از یک واقعیت می‌باشد و انواع مختلفی دارد.

۱ـ مدل شماتیک ۲ـ مدل آنالوگ ۳ـ مدل سمبولیک (ریاضی)

۴ـ مدل سینماتیک ۵ـ مدل ژنتیک

- مدل سمبولیک (ریاضی)
  - از نظر پارامترها
    - معین ✓
    - احتمالی
    - نامعین
  - از نظر متغیرها
    - پیوسته ✓
    - گسسته (عدد صحیح)
    - صفر و یک
  - از نظر زمان
    - پویا (دینامیک)
    - ایستا (ثابت) ✓
    - شبه پویا (ترکیبی از پویا و ایستا)

مدلهای ریاضی مورد استفاده در این درس از نظر پارامتری معین بوده و شامل متغیرهای پیوسته می‌باشد و همچنین از نظر زمانی حالت ایستا دارند.

۱ـ۳ـ تعاریف

۱ـ۳ـ۱ـ برنامه‌ریزی خطی Linear Programming (LP)

تخصیص منابع محدود به فعالیتهای تعریف شده جهت افزایش بازدهی و یافتن بهترین راه‌حل بهینه را برنامه‌ریزی خطی می‌گویند. در واقع برنامه‌ریزی خطی نوع ساده‌ای از مدل برنامه‌ریزی ریاضی می‌باشد که بهترین گزینه را از میان روشهای ممکن انتخاب می‌کند. در برنامه‌ریزی خطی تابع هدف و محدودیتها همگی بصورت خطی نمایش داده می‌شود.

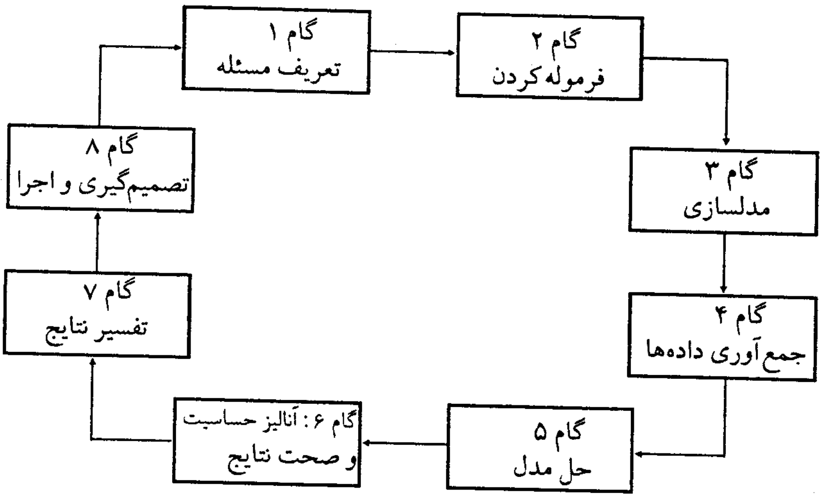
۱ـ۳ـ۲ـ تحقیق در عملیات Operations Research (OR)

مجموعه‌ای از مدلها و تکنیکهای کمی که از طریق روشهای علمی، مدیران را در امر تصمیم‌گیری در شرایط منابع محدود یاری می‌دهد.

ویژگیهای اساسی تحقیق در عملیات
- ۱ـروش سیستماتیک
- ۲ـاستفاده از مدلهای علمی و ریاضی
- ۳ـاستفاده از متخصصان
- ۴ـایجاد و یا بهینه‌سازی جوابهای ممکن

۱ـ۴ـ فرآیند تصمیم‌گیری و حل مسائل تحقیق در عملیات

مطابق تقسیم‌بندی گرین فرایند حل مسائل *OR* در ۸ گام زیر قابل اجرا می‌باشد که گام‌های ۱ و ۲ به فعالیتهای قبل از مدلسازی، گام‌های ۳ تا ۶ به فعالیتهای حین مدلسازی و گام‌های ۷ و ۸ به فعالیتهای بعد از مرحله مدلسازی طبقه‌بندی شده است.



مدل گرین جهت حل مسائل تحقیق در عملیات

۱ـ۵ـ بخش‌های اصلی مدل برنامه‌ریزی خطی

۱ـ تابع هدف (Objective Function)

بیانگر حداکثر کردن *(Max)* یا حداقل نمودن *(Min)* عملکرد مدل می‌باشد.

۲ـ محدودیتهای کارکردی (قیود Functional Constraints)

بیانگر محدودیتهای منابع جهت رسیدن به اهداف مدل می‌باشد که به صورت بزرگتر مساوی ($\geq$) کوچکتر مساوی ($\leq$) و یا مساوی ($=$) نمایش داده می‌شود.

۳ـ محدودیتهای غیر کارکردی یا متغیرهای تصمیم (Decision Variables)

نشان دهنده مقدار عملکرد یا سطح یک فعالیت بوده و با (X_j) نمایش داده می‌شود. این متغیرها می‌توانند به صورت مثبت، به ندرت منفی و یا آزاد در علامت مورد استفاده قرار گیرند.

☜ **نکته:** متغیر آزاد در علامت، متغیری می‌باشد که می‌تواند مقادیر منفی، مثبت و یا صفر را شامل گردد.

☜ **نکته:** به محدودیتهای به شکل $(X_j \geq ۰)$ محدودیتهای غیرمنفی *Non Negative Constraints* گفته می‌شود.

☜ **نکته:** هرچه تعداد محدودیتها کمتر باشد حجم محاسبات جهت حل مسئله کمتر خواهد بود (در مقایسه با تعداد متغیرها)

۱ـ۶ـ مدل کلی یک برنامه‌ریزی خطی

تابع هدف: $Max\ (Min) Z = c_۱ x_۱ + c_۲ x_۲ + \dots + c_n x_n$

محدودیتهای کارکردی:
$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \dots + a_{۱n}x_n\ (\leq\, , =\, , \geq)\ b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \dots + a_{۲n}x_n\ (\leq\, , =\, , \geq)\ b_۲ \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + \dots + a_{mn}x_n\ (\leq\, , =\, , \geq)\ b_m \end{cases}$$

متغیرهای تصمیم: $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ (≥ ۰ یا ≤ ۰ یا آزاد در علامت)

و یا به شکل خلاصه

تابع هدف: $Max\ (Min) Z = \sum_{j=۱}^{n} c_j x_j$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j\ (\leq ۰ , = , \geq) b_i & i = ۱, ۲, \dots, m \\ x_j\ (\geq ۰ \text{ یا } \leq ۰ \text{ یا آزاد در علامت}) & j = ۱, ۲, \dots, n \end{cases}$$

و یا در حالت نماد ماتریسی:

تابع هدف: $Max\ (Min) Z = cx$

$s.t:\ Ax\ (\leq , = , \geq) b$

آزاد در علامت x یا $x \leq 0$ یا $x \geq 0$

که در آن

$$c = [c_1, c_2, \ldots, c_n] \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود.

۱ـ۷ـ تعریف پارامترها و متغیرها

Z : نمایشگر ارزش تابع هدف (تابع معیار) می‌باشد که بصورت معادله خطی نوشته می‌شود و پس از حل معادله مقدار آن مشخص می‌شود.

x_j (متغیر تصمیم): نمایشگر مقدار عملکرد یا سطح یک فعالیت (محصول یا خدمات) می‌باشد که مقادیر آن پس از حل معادله مشخص می‌شود.

c_j (ضرایب بهره‌وری): ارزش هر واحد فعالیت (محصول یا خدمات) در تابع هدف می‌باشد. این ضریب عددی در معادله معلوم می‌باشد.

a_{ij} (ضرایب فنی یا تکنولوژیکی): مقداری از منبع i که برای انجام یک واحد فعالیت j بکار رفته و عددی معلوم در معادله می‌باشد.

b_j : مقادیر معلوم سمت راست محدودیتها که موجودی منابع یا سقف تقاضا را بیان می‌دارد.

۱ـ۸ـ فرضیات برنامه‌ریزی خطی

در یک مدل برنامه‌ریزی از نوع خطی ۴ شرط زیر باید صادق باشد.

۱ـ **تناسب**: یعنی هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیتها عمل نموده و میزان افزایش و یا کاهش متغیرهای تابع هدف و متغیرهای محدودیتها متناسب با تغییرات آن متغیر می‌باشد.

☜ ***نکته:*** نتایج حاصل از فرض تناسب به شرح زیر می‌باشد.

۱ـ تابع هدف و محدودیتها خطی می‌باشند.

۲ـ همه متغیرها توان اول می‌باشند.

۳ـ مقدار مشتق تابع هدف نسبت به هریک از متغیرها همواره مقدار ثابتی بوده و برابر ضریب بهره‌وری آن متغیر خواهد بود.

۴ـ هر فعالیت از فعالیتهای دیگر مستقل است بدین معناکه کالاها مکمل یا جانشین یکدیگر نبوده و تغییر قیمت یک فعالیت بر فعالیتهای دیگر بی‌اثر است.

۲ـ جمع‌پذیری: تابع هدف از مجموع تک تک متغیرها حاصل می‌شود. همچنین محدودیتها نیز از مجموع تک تک مقادیر مصرف شده از منابع حاصل می‌شود.

☜ ***نکته:*** نتایج حاصل از فرض جمع‌پذیری:

۱ـ همه متغیرها هم واحد هستند و یا آنها را هم واحد می‌نمائیم.

۲ـ عدم وجود روابط متقابل بین متغیرها (مانند x_1x_2)

۳ـ راندمان کلی از جمع تک تک راندمانها حاصل می‌شود.

۴ـ مصرف کلی هریک از منابع برابر حجم تک تک مصارف متغیرها می‌باشد.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

☜ ***نکته:*** فرض تناسب و جمع‌پذیری به همراه یکدیگر باعث استقلال متغیرها می‌شوند و هیچ‌کدام به تنهایی قادر به این عمل نمی‌باشند.

۳ـ فرض بخش‌پذیری (قابلیت تقسیم):

هر فعالیت به هر عدد دلخواهی قابل تقسیم بوده، فلذا متغیرهای تصمیم‌گیری، هر مقدار غیرصحیح را نیز می‌توانند شامل گردند.

☜ ***نکته:*** نتایج حاصل از فرض بخش‌پذیری:

۱ـ متغیرهای تصمیم، متغیرهای پیوسته می‌باشند.

۲ـ فرض بخش‌پذیری وجه تمایز برنامه‌ریزی پیوسته و عدد صحیح می‌باشد.

☜ ***نکته:*** هرسه فرض تناسب، جمع‌پذیری و بخش‌پذیری به همراه یکدیگر باعث محدودیت فضای جواب و خطی بودن مسئله می‌شود.

۴ـ فرض معین بودن (قطعیت):

همهٔ پارامترهای مسئله (c_j, a_{ij}, b_i) مقادیری ثابت و معلوم می‌باشند.

☜ ***نکته:*** نتایج حاصل از فرض معین بودن:

۱ـ مقادیر احتمال یا تصادفی در برنامه‌ریزی خطی نقشی ندارند.

۲ـ فرض معین بودن وجه تمایز برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی پارامتریک می‌باشد. زیرا در

برنامه‌ریزی پارامتریک خود پارامترهای نیز متغیر می‌باشند.

۱ـ۹ـ تبدیلات مدل برنامه‌ریزی خطی

یک برنامه‌ریزی خطی با تبدیلات و تغییرات مناسب می‌تواند به اشکال متفاوت و معادل تبدیل شود. در حالت کلی دو فرم برای برنامه‌ریزی خطی وجود دارد.

۱ـ فرم متعارفی　　　۲ـ فرم استاندارد

در حالت متعارفی مسئله بیشینه سازی، متغیرها غیرمنفی و همه محدودیتها از نوع $\leq$ (ک.م) و در حالت کمینه سازی ، متغیرها غیرمنفی و همه محدودیتها باید به‌صورت $\geq$ (ب.م) باشند.

همچنین در حالت استاندارد همه محدودیتها به صورت مساوی و متغیرها نیز غیرمنفی می‌باشند.

جدول زیر فرمهای متعارفی و استاندارد را نمایش می‌دهد.

	مسأله بیشینه سازی	مسئله کمینه سازی
فرم متعارفی	$Max\ Z = Cx$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$	$Min\ Z = Cx$ $Ax \geq b$ $x \geq 0$
فرم استاندارد	$Max\ Z = Cx$ $Ax = b$ $x \geq 0$	$Min\ Z = Cx$ $Ax = b$ $x \geq 0$

☜ **نکته:** فرمهای استاندارد در روشهای حل به کمک سیمپلکس و فرمهای متعارفی در روشهای حل به کمک دوگان استفاده می‌شود. بنابراین می‌توان به کمک تبدیلاتی مسائل برنامه‌ریزی خطی را به مدلهای استاندارد یا متعارفی معادل نمود.

۱ـ۹ـ۱ـ تبدیل Max به Min و برعکس

با ضرب ضرایب تابع هدف در عدد (-1) بدست می‌آید.

$$Max \sum_{j=1}^{n} C_j x_j = -Min \sum_{j=1}^{n} -C_j x_j$$

و یا

$$Min \sum_{j=1}^{n} C_j x_j = -Max \sum_{j=1}^{n} -C_j x_j$$

به عبارت دیگر

$$Max\ Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

که معادل است با:

$$Min(-Z) = -C_1x_1 - C_2x_2 - \dots - C_nx_n$$

۱ـ۹ـ۲ـ تغییر جهت در محدودیتها

هر نامعادله را می‌توان با ضرب نمودن طرفین در عدد (۱−) تغییر جهت داد.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \xLeftrightarrow{\text{ضرب طرفین در } (-1)} \sum -a_{ij}x_j \leq -b_i$$

۱ـ۹ـ۳ـ بکار بردن دو نامعادله به جای یک معادله و برعکس

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \end{cases}$$

۱ـ۹ـ۴ـ تبدیلات کانونیک

هر نامعادله می‌تواند به یک معادله تبدیل شود. اگر چنانچه نامعادله به شکل ($\geq$) باشد با کمک متغیر غیرمنفی مازاد *(surplus)* و اگر نامعادله به شکل ($\leq$) باشد با کمک متغیر غیرمنفی کمبود *(slack)* تبدیلات انجام می‌شود.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \approx \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - S_i = b_i$$ متغیر غیرمنفی مازاد : $S_i \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \approx \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + S_i = b_i$$ متغیر غیرمنفی کمبود : $S_i \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \approx \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i = b_i$$ متغیر مصنوعی : $R_i \geq 0$

☜ **نکته:** R_i متغیری می‌باشد که هیچ‌گونه ارزش عددی یا اقتصادی نداشته و جهت انجام محاسبات بکار می‌رود و فضای جواب را به نحوی گسترش می‌دهد که مبدأ مختصات جزو فضای جواب گردد چون سیمپلکس از (۰ , ۰) شروع به حل می‌شود.

۱ـ۹ـ۵ـ تبدیل قدرمطلق محدودیتها

محدودیتی که سمت چپ آن قدرمطلق باشد می‌توان به دو نامعادله تبدیل نمود.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le b_i \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge -b_i \end{cases}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \ge b_i \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le -b_i \end{cases}$$

۱ـ۹ـ۶ـ تبدیل متغیرهای آزاد

از آنجائی که در روش حل مسائل برنامه‌ریزی خطی از طریق سیمپلکس متغیرها همیشه غیرمنفی می‌باشند لذا ضروری می‌باشد تا متغیرهای فاقد علامت رابه متغیرهای غیرمنفی تبدیل نمود یعنی:

$x_j = x'_j - x''_j$ که در آن $x'_j \ge 0$, $x''_j \ge 0$

☜ **نکته:** حداکثر یکی از متغیرهای x'_j یا x''_j دارای مقداری مثبت است (هردو با هم می‌توانند صفر باشند)

☜ **نکته:** حاصلضرب x'_j در x''_j همیشه صفر است (یکی از این دو همیشه صفراند)

☜ **نکته:** هردو با هم نمی‌توانند مقداری مثبت داشته باشند.

☜ **نکته:** همواره به دلیل وابستگی خطی بین x'_j و x''_j (دو ستون موازی ضرایب) هیچگاه این دو متغیر نمی‌توانند با هم در یک پایه باشند.

اگر $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ متغیرهای آزاد در علامت باشند می‌توان با معرفی یک متغیر اضافی x''، متغیرهای غیرمنفی ایجاد نمود.

$$x_j = x'_j - x'' \qquad j = 1, 2, \dots, n$$
$$x'_j \ge 0 \;,\; x'' \ge 0$$

که در آن $(-x'')$ نقش منفی‌ترین متغیر را دارد در حالی‌که سایر متغیرهای x_j به اندازه x_j' بیش از آن هستند.

☜ **نکته:** اگر مسئله‌ای دارای n متغیر آزاد در علامت باشد این مسئله حداقل با $n+1$ متغیر غیرمنفی قابل حل می‌باشد.

$$\text{اگر}: \begin{cases} x_j \le 0 \Rightarrow -x_j = x_j' & , \quad x_j' \ge 0 \\ x_j \le u_j \Rightarrow u_j - x_j = x_j' & , \quad x_j' \ge 0 \\ x_j \ge l_j \Rightarrow x_j - l_j = x_j' & , \quad x_j' \ge 0 \end{cases}$$

۱-۹-۷- تبدیل تابع هدف مرکب

با تغییر متغیر می‌توان تابع هدف مرکب را تبدیل به تابع هدف ساده نمود.

$$Max\ \{Min\ [g_1(x), g_2(x), g_3(x)]\}$$

$$\text{تغییر متغیر}\quad Z = Min\ [g_1(x), g_2(x), g_3(x)] \quad \Rightarrow \quad Max\ Z$$

$$s.t: \begin{cases} g_1(x) \ge Z \\ g_2(x) \ge Z \\ g_3(x) \ge Z \end{cases}$$

در صورتی‌که تابع هدف $Min\ (Max)$ باشد جهت محدودیتها برعکس خواهد شد. (مثلاً $(g_1(x) \le Z$

۱-۹-۸- تبدیل قدرمطلق تابع هدف

در این شرایط با تغییر متغیر، عبارت قدر مطلق از تابع هدف حذف می‌گردد.

$$Max\ |g(x)|$$

$$\text{تغییر متغیر}\ Z = |g(x)| \Rightarrow Max\ Z$$

$$s.t:\ |g(x)| = Z$$

۲ روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی

مسائل برنامه‌ریزی را می‌توان با ۱ـ روش ترسیمی (هندسی)، ۲ـ آنالیز روش ترسیمی، ۳ـ روش سیمپلکس، ۴ـ آنالیز روش سیمپلکس، ۵ـ روش جبری (ماتریسی) حل نمود که به تدریج مطرح خواهد شد ولی قبل از آن نیاز است تا مفاهیم موردنظر تعریف گردد.

۲ـ۱ـ تعاریف

۱ـ **جواب** *(solution)*: به هر مقدار اختصاص داده شده، به متغیرهای تصمیم، جواب نامیده می‌شود. (مثل هر دو نقطه در داخل صفحه محور دوبعدی مختصات x_2 و x_1)

۲ـ **جواب موجه (شدنی)** *(feasible solution)*: جوابی که در تمامی محدودیت‌ها صدق کند.

۳ـ **جواب غیرموجه (نشدنی)** *(infeasible solution)*: جوابی که حداقل در یک محدودیت صدق نکند.

۴ـ **منطقه جواب**: به مجموعه جواب‌ها، منطقه جواب می‌گویند (مثل ربع اول صفحه مختصات دوبعدی x_2 و x_1)

۵ـ **منطقه موجه (ناحیه شدنی)** *(feasible Region)*: مجموعه جواب‌های موجه (شدنی)، منطقه موجه را بوجود می‌آورد.

۶ـ **معادله حدّی** *(Boundry equation)*: به ازاء هر محدودیت با جایگزینی علامت = بجای (≥ یا ≤) معادله حدی حاصل می‌شود.

۷ـ **جواب گوشه (پایه ـ اساسی)** *(Corner Point Solution)*: مقادیر تخصیص داده شده به متغیرهای

تصمیم ناشی از تقاطع معادلات حدی جواب گوشه حاصل می‌گردد.

۸ـ **جواب گوشه موجه:** جواب گوشه‌ای که در محدودهٔ منطقه موجه بوده و در تمام محدودیت‌ها صدق کند.

۹ـ **جواب بهینه:** جوابی موجه که به ازاء آن تابع هدف به بهترین وضعیت درآید.

۱۰ـ **معادله معرّف** *(Indicating equation)*: معادلات حدی تشکیل‌دهندهٔ هر جواب گوشه یا پایه را گویند.

۱۱ـ **دو گوشه مجاور:** دو گوشه‌ای که یک معادله معرف مشترک داشته باشند.

☜ ***نکته:*** اگر مدلی n متغیر تصمیم و m محدودیت کارکردی داشته باشد در این صورت تعداد معادلات حدی $m+n$ می‌باشد.

☜ ***نکته:*** هر گوشه n معادله معرف دارد.

☜ ***نکته:*** هر دو گوشه مجاور $(n-1)$ معادله معرف مشترک دارد.

☜ ***نکته:*** تعداد کل گوشه‌ها = تعداد جواب‌های پایه (اساسی) = تعداد مراحل سیمپلکس = $\binom{n+s}{m}$

که در آن:

$n=$ تعداد متغیرهای اصلی

$s=$ تعداد متغیرهای کمکی

$m=$ تعداد محدودیت‌ها

☜ ***نکته:*** اگر A یک ناحیه امکان‌پذیر مربوط به مسئله برنامه‌ریزی ریاضی باشد و $Max\ f(x)$ و $Max\ g(x)$ در ناحیه A تعریف شده باشد در این صورت با تعریف $Max\,(f+g)(x)$ در ناحیه A داریم:

$$Max\,(f+g)(x) \le Max\, f(x) + Max\, g(x)$$

☜ ***نکته:*** مجموعه نقاط رأسی (نقطه گوشه‌ای)، متناظر با مجموعه جواب‌های شدنی اساسی می‌باشند.

قضیه: اگر یک جواب بهینه وجود داشته باشد آن وقت یک نقطه رأسی بهینه (جواب شدنی پایه بهینه) وجود دارد.

قضیه: به ازاء هر نقطهٔ رأسی (جواب شدنی پایه)، یک پایه (نه لزوماً منحصر به فرد) وجود دارد و برعکس به ازای هر پایه، یک نقطه رأسی یا جواب شدنی پایه (منحصر به فرد) وجود دارد.

☜ ***نکته:*** اگر یک نقطهٔ رأس، بیش از یک پایه داشته باشد آن نقطه تباهیده (تبهگن) است ولی عکس آن درست نیست.

۲ـ۲ـ روش ترسیمی (هندسی)

روش ترسیمی جهت حل مسائل برنامه‌ریزی فقط در حالتی که تعداد متغیرها دو یا حداکثر ۳ باشد کاربرد دارد و برای تعداد متغیرهای بیش از آن، روش سیمپلکس مناسب‌تر می‌باشد.

گام ۱: تعیین ناحیه مختصاتی (با توجه به علامت متغیرهای تصمیم)

↓

گام ۲: رسم معادلات حدی هر محدودیت (با تبدیل نامساوی‌ها به مساوی)

↓

گام ۳: مشخص نمودن سطح موردقبول هر معادله حدی (یک نقطه دلخواه معمولاً (۰ و ۰) انتخاب و در نامعادله قرار دهید اگر در نامعادله صدق کرد منطقه مورد قبول همان سمت نقطه دلخواه است در غیر این صورت سمت دیگر منطقه مورد قبول است.)

↓

گام ۴: تعیین منطقه موجه (فصل مشترک محدودیت‌ها)

↓

گام ۵: رسم تابع هدف با یک مقدار دلخواه برای z

↓

گام ۶: حرکت خط تابع هدف به موازات خود در جهت افزایش z (اگر تابع هدف Max باشد) یا کاهش z (اگر تابع هدف Min باشد.)

↓

گام ۷: آن نقطهٔ گوشه‌ای که آخرین تماس خط تابع هدف حرکت داده شده در جهت موردنظر و منطقه موردنظر را نشان می‌دهد، نقطهٔ بهینه است.

↓

گام ۸: از تقاطع معادلات حدی مربوط به نقطه بهینه مختصات آن نقطه تعیین و با قراردادن در تابع هدف مقدار بهینه z حاصل می‌شود.

☜ **نکته:** در صورتی که متغیرهای تصمیم غیرمنفی باشند منطقه موجه در ربع اول قرار دارد.

☜ **نکته:** جواب بهینه حداقل بر روی یک نقطهٔ گوشهٔ موجه قرار دارد.

☜ **نکته:** هرگاه یک نقطه گوشهٔ موجه از نقاط گوشه موجه مجاورش بهتر باشد آن نقطه، نقطه بهینه است.

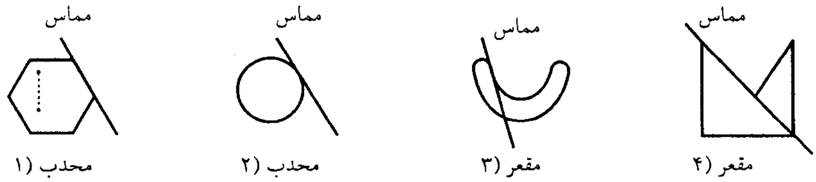
☜ **نکته:** تعداد جوابهای پایه قابل قبول بهینه (گوشه موجه) در هر مسئله برنامه‌ریزی خطی همواره محدود است.

۲-۲-۱- تحدب فضای جواب و خواص آن

تعریف اول: هرگاه خطی از فضای جواب عبور کند آن را حداکثر در دو نقطه ورود و خروج قطع می‌نماید.

تعریف دوم: همهٔ خط واصل بین دو نقطه متمایز داخل فضا می‌باشد.

تعریف سوم: هر خطی که بر فضا مماس شود همهٔ فضا در یک طرف آن قرار می‌گیرد.



۲-۲-۲- خاصیت فضای جواب محدّب

در مسائل برنامه‌ریزی خطی در صورت وجود جواب، فضای مسئله حتماً **محدب** می‌باشد و این امر باعث می‌شود که نقطه فقط روی مرزها (بویژه گوشه‌ها) قرار داشته باشد و نیازی به بررسی سایر نقاط فضای جواب برای بدست آوردن جواب بهینه نداشته باشیم.

۲-۲-۳- طبقه‌بندی محدودیت‌های برنامه‌ریزی خطی

۱- از نظر فعال‌بودن
- محدودیت فعال (الزام‌آور = ارضاء‌شده) *Binding Constraint*
- محدودیت غیرفعال (غیرالزام‌آور = غیر ارضاء‌شده) *Nonbinding Constraint*

۲- از نظر استقلال
- محدودیت مستقل (مؤثر)
- محدودیت وابسته (زاید) *Redundant Constraint*

۳- از نظر کارکردی
- محدودیت کارکردی
- محدودیت غیرکارکردی

در محدودیت فعال (الزام‌آور)، نقطه بهینه بر روی معادله حدی آن قرار دارد در غیر این صورت

محدویت غیرفعال است. همچنین محدودیت مؤثر (مستقل)، محدودیت‌هایی می‌باشد که برای تشکیل منطقه موجه جواب ضروری می‌باشد ولی حذف آنها ممکن است جواب بهینه را تغییر ندهد ولی منطقه موجه را حتماً تغییر می‌دهد. محدودیت زاید (وابسته) تأثیری در ایجاد منطقه موجه ندارد و به وسیله سایر محدودیت‌ها برآورده می‌شود. محدودیت کارکردی از شرایط مساله ایجاد شده و محدودیت‌های غیرکارکردی، متغیرهای غیرمنفی را شامل می‌شود.

☜ ***نکته:*** اضافه‌کردن هر محدودیت مؤثر جدید موجب کاهش منطقه موجه می‌شود و برعکس.

☜ ***نکته:*** محدودیت مؤثر محدودیتی است که آن را نمی‌توان به صورت ترکیبی خطی (جمعی موزون) از سایر محدودیت‌ها نوشت.

☜ ***نکته:*** هر محدودیت فعالی، مؤثر (مستقل) است ولی هر محدودیت مؤثری معلوم نیست فعال باشد.

۲ـ۲ـ۴ـ حالات خاص روش ترسیمی

به‌طور کلی هر مسئله برنامه‌ریزی خطی می‌تواند دارای یکی از حالات زیر بوده و یا این که ترکیبی از آنها باشد.

۱ـ جواب یگانه (منحصر بفرد)، ۲ـ تعدد جواب (جواب متعدد، جواب دگرین، جواب چندگانه)، ۳ـ جواب تبهگن (منحط، انحطاط، دژنره)، ۴ـ جواب بیکران (جواب بی‌نهایت، جواب نامحدود)، ۵ـ بدون جواب بودن (تهی‌بودن فضای جواب)

تذکر: در هر مسئله برنامه‌ریزی خطی به احتمال قوی می‌توان حالات ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را به کمک صورت مسئله تشخیص داد در صورتی که هیچ کدام از حالات چهارگانه رخ ندهد حالت اول رخ داده است.

۲ـ۲ـ۵ـ مطالب کلیدی حل ترسیمی

شیب محدودیت الزام‌آور II ≤ شیب تابع هدف ≤ شیب محدودیت الزام‌آور I

☜ ***نکته مهم:***

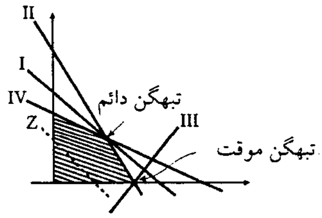
قسمت اول: تعدد جواب (جواب چندگانه): هرگاه حداقل یکی از محدودیت‌های فعال مسئله موازی تابع هدف باشد مسئله می‌تواند دارای جواب چندگانه باشد. به عبارت بهتر حداقل یکی از محدویت‌های فعال مسئله با تابع هدف دارای رابطهٔ $\frac{c_1}{a_{i1}} = \frac{c_2}{a_{i2}} = \ldots\ldots \frac{c_n}{a_{in}} = cte$ باشد.

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \ z = 5x_1 + x_2 \\ 10x_1 + 2x_2 \leq 11 \end{array}\right\} \ \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

☜ **نکته:** در صورت موازی‌بودن یک محدودیت غیرفعال یا زائد با تابع هدف، ممکن است جواب چندگانه نباشد.

قسمت دوم: جواب تبهگن (منحط): هرگاه در مسائل nبعدی از یکی از گوشه‌های جواب بیشتر از nخط (محدودیت) عبور کند مسئله در آن نقطه تبهگن است. حال اگر این نقطه، نقطهٔ بهینه باشد تبهگن دائم و اگر نقطه غیربهینه باشد تبهگن موقت است.



☜ ***نکته اساسی:*** هرگاه بردار ستونی حداقل یکی از متغیرهایی که دارای شرط ورود به پایه می‌باشد موازی بردار ستونی مقادیر ثابت سمت راست باشد در این صورت، مسئله می‌تواند دارای جواب تبهگن باشد یعنی رابطه $\frac{b_i}{a_{ij}} = cte$ صادق باشد.

$$\left.\begin{array}{l} Max\ z = 4x_1 + 5x_2 \\ \qquad x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ \qquad 2x_1 + 6x_2 \leq 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{20}{10} = \frac{12}{6} = cte = 2$$

☜ **نکته:** اگر تابع هدف Min باشد هر متغیری که دارای ضریب منفی است می‌تواند وارد پایه شود.

☜ **نکته:** اگر تابع هدف Max باشد هر متغیری که دارای ضریب مثبت است می‌تواند وارد پایه شود.

☜ **نکته:** هرگاه بردار ستونی حداقل یکی از متغیرها که دارای شرط ورود به پایه می‌باشد به‌طور موضعی موازی بردار سمت راست باشد $\left(\frac{b_1}{a_{ij}} = \frac{b_2}{a_{2j}} \neq \frac{b_3}{a_{3j}}\right)$ مسئله می‌تواند تبهگن موقت باشد.

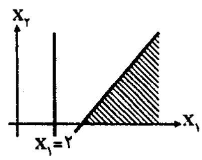
تبهگن $\frac{14}{5} \neq \frac{12}{6} = \frac{8}{4}$

$$Max\ z = 6x_1 + x_2$$

$$۵x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۴$$
$$۶x_۱ + x_۲ \leq ۱۲$$
$$۴x_۱ - x_۲ \leq ۸$$

قسمت سوم: جواب بیکران (نامحدود): هرگاه بردار ستونی یکی از متغیرها دارای ضرایب تماماً صفر یا منفی باشد در این صورت فضای جواب مسئله حداقل در جهت آن متغیر بیکران (نامحدود) می‌باشد. بنابراین جواب بیکران به وضعیتی گفته می‌شود که منطقه جواب بسته نباشد و مدل دارای بی‌نهایت جواب باشد.

$$Max\, z = ۴x_۱ + ۲x_۲$$
$$x_۱ \geq ۲$$
$$x_۱ - x_۲ \geq ۳$$
$$x_i \geq ۰$$

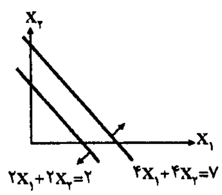


☜ **نکته:** هرگاه متغیر مربوطه که باعث بیکران‌شدن فضای جواب شده است دارای شرایط ورود به پایه باشد، در این صورت مسئله می‌تواند دارای جواب بیکران باشد و در صورتی که دارای شرایط ورود به پایه نباشد مسئله دارای جواب محدود خواهد بود.

قسمت چهارم: مسئله بدون جواب: هرگاه در مسائل برنامه‌ریزی خطی در بین فضای جواب محدودیت‌ها، فضای مشترکی وجود نداشته باشد، در این صورت مسئله بدون جواب بوده و محدودیت‌ها با هم در تناقض خواهند بود.

☜ **نکته:** هرگاه دو محدودیت موازی و مختلف‌الجهت وجود داشته باشد به گونه‌ای که مقدار سمت راست محدودیت با علامت بزرگ‌تر مساوی ($\geq$)، بیشتر از مقدار سمت راست محدودیت با علامت کوچک‌تر مساوی ($\leq$) باشد در این‌صورت مسئله می‌تواند بدون جواب باشد.

$$Max\, z = ۵x_۱ - ۳x_۲$$
$$۲x_۱ + ۲x_۲ \leq ۲$$
$$۴x_۱ + ۴x_۲ \geq ۷$$
$$x_i \geq ۰$$



۲ـ۳ـ آنالیز روش ترسیمی

اصل ۱ـ اگر فضای جواب قابل قبول کاهش یابد جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود).

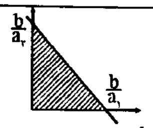
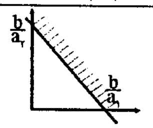
اصل ۲ـ اگر فضای جواب قابل قبول افزایش یابد جواب بهینه نمی‌تواند بدتر شود (می‌تواند بهتر شود).

اصل ۳ـ دو اصل فوق در هر مسئله برنامه‌ریزی خطی با هر شرایطی صادق است و اصلاً به نوع تابع هدف، علامت و محدودیت‌ها و متغیرها بستگی ندارد.

تغییرات ممکن در روش ترسیمی

نوع تغییرات			اثرات
تغییر تعداد محدودیت‌ها		افزایش تعداد محدودیت	احتمال کاهش فضای جواب ـ جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)
		حذف محدودیت (مؤثر)	افزایش فضای جواب ـ جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)
تغییر تعداد متغیرها (xj)		افزایش تعداد متغیرها	افزایش یک بعد به فضای جواب ـ افزایش فضای جواب ـ جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)
		حذف متغیرها	کاهش یک بعد از فضای جواب ـ جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)
تغییر در ضرایب تابع هدف (Cj)	تابع هدف Max	افزایش ضریب تابع هدف	جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)
		کاهش ضریب تابع هدف	جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)
	تابع هدف Min	افزایش ضریب تابع هدف	جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)
		کاهش ضریب تابع هدف	جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود.)

ادامه جدول تغییرات ممکن در روش ترسیمی

نوع تغییرات			اثرات	
تغییر ضرایب تکنولوژیکی (aij)	محدودیت به شکل ≤	افزایش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	احتمال کاهش فضای جواب ـ جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	 $a_1x_1+a_2x_2\leq b$
		کاهش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	احتمال افزایش فضای جواب ـ جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	
	محدودیت به شکل ≥	افزایش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	احتمال افزایش فضای جواب ـ جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	 $a_1x_1+a_2x_2\geq b$
		کاهش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	احتمال کاهش فضای جواب ـ جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	
	محدودیت به شکل =	کاهش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	نمی‌توان قضاوت خاصی داشت.	
		افزایش حداقل یکی از ضرایب تکنولوژیکی	نمی‌توان قضاوت خاصی داشت.	
تغییر مقادیر سمت راست (bj) یا RHS	محدودیت به شکل ≤	افزایش bj	احتمال افزایش فضای جواب ـ جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	
		کاهش bj	احتمال کاهش فضای جواب ـ جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	
	محدودیت به شکل ≥	افزایش bj	احتمال کاهش فضای جواب ـ جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	
		کاهش bj	احتمال افزایش فضای جواب ـ جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود)	
	محدودیت به شکل =	افزایش یا کاهش bj	نمی‌توان قضاوت خاصی داشت.	
تغییر علامت محدودیت‌ها		اگر محدودیت ≤ یا ≥ تبدیل به حالت = شود	احتمال کاهش فضای جواب ـ جواب بهینه نمی‌تواند بهتر شود (می‌تواند بدتر شود)	
		اگر محدودیت = به حالت ≤ یا ≥ تبدیل شود	احتمال افزایش فضای جواب ـ جواب بهینه می‌تواند بهتر شود (نمی‌تواند بدتر شود.)	
		سایر حالات	نمی‌توان قضاوت خاصی نمود.	

۲-۴- روش سیمپلکس

روش سیمپلکس فرآیندی الگوریتمیک برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با n متغیر می‌باشد که عمدتاً عملیات خود را از یک گوشه موجه ابتدایی (مبدأ مختصات) شروع و به یک گوشه موجه مجاور که مقدار تابع هدف را بهبود می‌بخشد حرکت می‌نماید. این تکرار تا رسیدن به نقطه‌ای موجه که از نقاط موجه اطرافش بهتر باشد ادامه می‌یابد. این نقطه، نقطهٔ بهینه می‌باشد.

۲-۴-۱- تعاریف و مفاهیم سیمپلکس

☜ ***نکته:*** در یک فرم استاندارد سیمپلکس n متغیر تصمیم و m محدودیت وجود دارد.

متغیرهای اساسی (پایه یا گوشه) *Basic Varibles*: متغیرهایی که دارای مقدار غیرصفر باشد و در هر مسئله تعداد آن برابر m (تعداد محدودیت‌ها) خواهد بود.

☜ ***نکته:*** متغیرهای اساسی در جدول سیمپلکس دارای بردار ماتریسی واحد (یکه) می‌باشد.

☜ ***نکته:*** متغیرهای اساسی مستقل خطی می‌باشند.

☜ ***نکته:*** متغیرهای x_k^+ , x_k^- ناشی از متغیر آزاد در علامت x_k وابسته خطی بوده و فقط یکی از آن‌ها در هر تکرار سیمپلکس متغیر پایه‌ای خواهد بود.

متغیرهای غیراساسی (غیرپایه) *Non-Basic Varibles*: متغیرهایی که دارای مقادیر صفر باشند و تعداد آن $(n\text{-}m)$ می‌باشد.

جواب اساسی: هر جواب بدست‌آمده در حل معادله که دارای n متغیر باشد را جواب اساسی می‌گویند.

جواب اساسی موجه: اگر تمام متغیرهای اساسی یک معادله غیرمنفی باشد جواب اساسی موجه می‌باشد.

☜ ***نکته:*** هر جواب قابل قبولی که در محدودیت‌ها صدق کند (جواب شدنی)، پایه یا گوشه یا اساس یا متناظر یک رأس مجموعه جواب نمی‌باشد.

☜ ***نکته:*** هر جواب اساسی شدنی متناظر یک رأس یا گوشه می‌باشد ولی لزوماً جواب بهینه نخواهد بود.

قضیه: هر نقطه گوشه موجه که از نقاط گوشه موجه مجاورش بهتر باشد، نقطه بهینه است.

روش سیمپلکس:
- **معمولی ساده:** برای حالتی که همه محدودیت‌ها به‌صورت $\leq$ باشند.
- **دو مرحله‌ای (دوفازی)** / **m بزرگ (جریمه)**: برای حالتی که حداقل یکی از محدودیت‌ها $\geq$ یا $=$ باشد.

جدول سیمپلکس

حداکثرها	اعداد سمت راست RHS	اسامی کلیه متغیرها (چه متغیری ورودی است) $Z \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_m$	شماره سطر	متغیرهای اساسی (پایه)
-	مقدار سمت راست تابع هدف	ضرایب متغیرها در تابع هدف C_j ۱ .... ۰ ۰ .... ۰	۰	Z
چه متغیری خروجی است	جواب مسئله b_i	۰ ۰ ... ۰ ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها a_{ij}	۱ ۲ ⋮ m	m متغیر اساسی

۲-۴-۲- گام‌های حل مسائل به فرم استاندارد به روش سیمپلکس معمولی

گام ۱: متغیرهای تابع هدف را به سمت چپ تساوی منتقل نموده تا طرف دوم تابع هدف صفر گردد. در صورت Min بودن تابع هدف با ضرب طرفین در عدد (۱-) تبدیل به Max می‌شود.

گام ۲: محدودیت‌ها را با اضافه کردن متغیر کمکی از نوع کمبود $(Slack)$ به سمت چپ به تساوی تبدیل می‌شود.

گام ۳: جدول سیمپلکس ترسیم‌شده و متغیرها و ضرایب وارد جدول می‌شود. متغیرهای اساسی در شروع جدول معمولاً متغیرهای کمکی S_i می‌باشد.

گام ۴: با انتخاب منفی‌ترین مقدار در سطر z (سطر صفر)، متغیر ورودی به پایه (متغیر اساسی شونده) را انتخاب کرده و ستون مربوطه ستون لولا نامیده می‌شود.

☜ **نکته:** اگر منفی‌ترین مقدار در z پیدا نشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

گام ۵: متغیر اساسی که باید غیراساسی شود را تعیین می‌کنیم. جهت این کار θ را محاسبه می‌کنیم.

$$\theta = Min\left\{\frac{(b_i)\ \text{مقادیر سمت راست}}{(a_{ij})\ \text{عناصر مثبت ستون لولا}} ; a_{ij} > 0\right\}$$

(حداکثر مقداری که متغیر غیراساسی برای واردشدن به پایه به خود می‌گیرد.)

متغیری که کمترین مقدار در ستون حداکثر نسبت‌ها (θ) را دارد به عنوان متغیر خروجی انتخاب نموده

و سطر مربوطه آن به آن را سطر لولا نامیده و محل برخورد سطر و ستون لولا را عدد لولا معرفی می‌کنیم.

گام ۶: جدول بعدی را رسم نموده متغیرهای اساسی آن را نوشته و متغیر اساسی جدید وارد نموده و به کمک سطر لولا ستون لولا را در محل عدد لولا یکه (واحد) می‌نامیم و مجدداً به گام چهارم برمی‌گردیم.

☜ **نکته:** متغیرهای اساسی در معادله خود ضریب ۱+ و در بقیه معادلات ضریب صفر خواهند داشت (بردار یکّه)

گام ۷: گام‌های فوق آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا تمام مقادیر سطر صفر مقادیر غیرمنفی داشته باشند. در این صورت جواب اساسی موجه بدست آمده بهینه می‌باشد.

نکات مربوط به گام‌های هفتگانه فوق:

☜ **نکته:** کم و یا اضافه‌نمودن متغیرهای کمکی یا مازاد تأثیری در فضای شدنی مسئله و نقاط گوشه‌های آن ندارد.

☜ **نکته:** به چه دلیل در انتخاب θ از Min استفاده می‌شود؟

۱ـ مقدار انتخابی در همهٔ محدودیت‌ها صدق می‌کند و به عبارت بهتر از ناحیه جواب خارج نمی‌شویم.

۲ـ در مراحل بعدی مقادیر سمت راست منفی نشود به عبارت بهتر، شدنی‌بودن مسئله تضمین می‌شود.

۳ـ خود آن متغیر زودتر از سایر متغیرها به صفر می‌رسد. (رسیدن به نقطه گوشه)

☜ **نکته:** چرا فقط بر نسبت‌ها تقسیم می‌کنیم؟

۱ـ بر ضرایب صفر تقسیم نمی‌کنیم زیرا حاصل بی‌نهایت است و به عنوان حداقل انتخاب نخواهد شد.

۲ـ بر ضرایب منفی تقسیم نمی‌کنیم زیرا در این صورت تا بی‌نهایت قابل افزایش خواهد بود و باز به عنوان حداقل انتخاب نخواهد شد.

۳ـ بر ضرایب منفی تقسیم نمی‌کنیم زیرا در مرحله بعد سمت راست منفی خواهد شد.

☜ **نکته:** شرط انتخاب متغیر ورودی، تضمین‌کنندهٔ بهینه‌بودن جواب است. یعنی اگر در سطر z جدول، منفی‌ترین مقدار پیدا نشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

☜ **نکته:** شرط انتخاب متغیر خروجی، تضمین‌کنندهٔ شرط امکان‌پذیر بودن ادامه حل مسئله می‌باشد. یعنی اگر متغیر خروجی اشتباه انتخاب شود مقادیر متغیرهای پایه در جدول بعدی (RHS) منفی خواهند شد.

☜ **نکته:** مقدار تابع هدف در جداول پی‌درپی سیمپلکس هیچ‌گاه بدتر نمی‌شود. یا ثابت مانده و یا بهبود می‌یابد.

$Max\ z = 5x_1 + 2x_2$	$Max\ z - 5x_1 - 2x_2 = 0$	⓪
$x_1 + x_2 \le 1$	$x_1 + x_2 + s_1 = 0$	①
$x_1 \le 5$	$x_1 + s_2 = 5$	②
$x_1, x_2 \ge 0$	$x_1, x_2, s_1 s_2 \ge 0$	

متغیر اساسی	شماره سطر	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	$R.H.S$	حداکثرها
Z	۰	۱	۵-	۲-	۰	۰	۰	
s_1	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱۰	۱۰
s_2	۲	۰	۱	۰	۰	۱	۵	۵
z	۰	۱	۰	۲-	۰	۵	۲۵	
s_1	۱	۰	۰	۱	۱	۱-	۵	۵
x_1	۲	۰	۱	۰	۰	۱	۵	∞
z	۰	۱	۰	۰	۲	۳	۳۵	
x_2	۱	۰	۰	۱	۱	۱-	۵	
x_1	۲	۰	۱	۰	۰	۱	۵	

Min

۲ـ۵ـ حالت‌های غیراستاندارد سیمپلکس

۱ـ تابع هدف به‌صورت Min

به طرفین تابع هدف عدد (۱−) ضرب نموده و مانند سیمپلکس معمولی حل می‌شود.

$$Min\ z = x_1 - 2x_2 \rightarrow Max\ (-z) = -x_1 + 2x_2$$

۲ـ متغیرهای آزاد در علامت

در این حالت متغیر آزاد در علامت را تبدیل به تفاضل دو متغیر مثبت می‌کنیم و در تابع هدف و همه محدودیت‌ها تغییرات ایجاد شده و مانند سیمپلکس معمولی حل می‌شود.

x_j : متغیر آزاد در علامت

$$x_j = x_j' - x_j'' \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x_j > 0 \Rightarrow x_j' > 0,\ x_j'' = 0 \\ \text{اگر } x_j = 0 \Rightarrow x_j' = x_j'' = 0 \\ \text{اگر } x_j < 0 \Rightarrow x_j' = 0,\ x_j'' > 0 \end{cases}$$

☜ **نکته:** در جدول سیمپلکس حداقل یکی از x_j' و x_j'' صفر خواهد بود. یعنی اگر یکی از آن‌ها متغیر اساسی باشد دیگری حتماً متغیر غیراساسی (مقدار صفر) خواهد بود.

مثال:

$$Max\ z = x_1 + 2x_2 \qquad \xrightarrow[x_2', x_2'' \geq 0]{x_2 = x_2' - x_2''} \qquad Max\ z = x_1 + 2x_2' - 2x_2''$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0 ,\ x_2 \text{ آزاد در علامت} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' \leq 10 \\ x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \leq 15 \\ x_1, x_2', x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

۳ـ متغیرهای منفی $(x_j \leq 0)$

در این حالت متغیر منفی را با منفی یک متغیر مثبت عوض نموده و پس از تغییر در تابع هدف و محدودیت‌ها مثل سیمپلکس معمولی حل می‌کنیم.

مثال:

$$Max\ z = x_1 - 2x_2 \qquad \xrightarrow[x_2' \geq 0]{x_2 = -x_2'} \qquad Max\ z = x_1 + 2x_2'$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 ,\ x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 - x_2' \leq 10 \\ x_1, x_2' \geq 0 \end{array}$$

۴ـ اگر حداقل یکی از محدودیت‌ها به صورت بزرگ‌تر مساوی (≥) باشد.

در این حالت ابتدا یک متغیر مازاد S_i از محدودیت‌های (≥) کم کرده و سپس یک متغیر مصنوعی R_i به محدودیت‌ها (≥) اضافه می‌کنیم تا نامساوی تبدیل به مساوی شود. سپس با یکی از روش‌های دومرحله‌ای یا m بزرگ، سیمپلکس حل می‌شود.

۵ـ اگر حداقل یکی از محدودیت‌ها به صورت مساوی باشد.

در این حالت یک متغیر مصنوعی R_i به محدودیت‌های مساوی اضافه کرده و با یکی از روش‌های دومرحله‌ای یا M بزرگ، سیمپلکس حل می‌شود.

۶ـ ضرایب سمت راست (RHS) منفی

در این حالت ضریب‌های طرفین در عدد (۱−) ضرب شده و جهت علامت‌ها عوض می‌شود.

۷ـ حالتی که x_j دارای حد پایین منفی بوده و متغیر دارای تعریف غیرمنفی نباشد. (مثل $X_1 \geq -10$)

این حالت دو وضعیت دارد:

۱ـ متغیر موردنظر را آزاد در علامت فرض نموده و مانند روش ۲ عمل می‌کنیم.

۲ـ تغییر متغیر جدیدی بر روی محدودیت موردنظر اعمال می‌کنیم تا بتوانیم متغیر غیرمنفی لازم را برای مدل استاندارد بدست آوریم.

$$Max\ z = ۲x_۱ + x_۲ \qquad\qquad Max\ z = ۲x'_۱ + x_۲ - ۱۶$$

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۵ \\ x_۱ \ge -۸ \\ x_۲ \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x_۱ + ۸}_{x'_۱} \ge ۰ \ , \ x_۱ = x'_۱ - ۸ \Rightarrow \begin{cases} x'_۱ + x_۲ \le ۱۳ \\ x_۲, x'_۱ \ge ۰ \end{cases}$$

$$x'_۱ \ge ۰ \qquad x'_۱ \ge ۰$$

۸ـ حالتی که x_j دارای حد پایین منفی بوده و متغیر دارای تعریف غیرمنفی باشد.

اگر در مدل محدودیت غیرمنفی ذکر شده باشد در این حالت طرفین در عدد (۱−) ضرب شده و نامعادله تغییر جهت می‌دهد.

$$Max\ z = ۲x_۱ + x_۲ \qquad\qquad Max\ z = ۲x_۱ + x_۲$$

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۵ \\ x_۱ \ge -۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ \le ۵ \\ -x_۱ \le ۸ \end{cases}$$

$$x_۱, x_۲ \ge ۰ \qquad\qquad x_۱, x_۲ \ge ۰$$

☜ ***نکته:*** اگر در مسئله‌ای متغیر آزاد وجود داشته باشد و آنرا تبدیل به دو متغیر نماییم این مسئله حتماً دارای جواب متعدد است.

☜ ***نکته:*** روش سیمپلکس فقط جواب‌های پایه قابل قبول را مشخص می‌کند و به هیچ عنوان جواب غیرپایه‌ای را مشخص نمی‌کند.

۲ـ۶ـ سیمپلکس دومرحله‌ای (دوفازی)

مرحله اول

گام ۱ـ مسئله به شکل استاندارد تبدیل می‌شود و متغیرهای مصنوعی (R_i) به محدودیت‌های = یا ≥ اضافه می‌شود. و متغیرهای مازاد (S_i) از محدودیت‌های (≥) کم و متغیر کمبود (S_i) به محدودیت (≤) اضافه می‌شود.

گام ۲ـ تابع هدف جدید را به کمک متغیرهای مصنوعی (R_i) تعریف می‌کنیم.

$$MinR = \sum R_i \Rightarrow Max\,(-R) + \sum R_i = ۰$$

گام ۳ـ جدول سیمپلکس را تشکیل داده و تابع هدف فوق و محدودیت‌های مسئله را وارد جدول می‌نماییم.

☜ ***نکته:*** در شروع مسئله، متغیرهای اساسی R_i ناشی از محدودیت (≥ و =) و S_i ناشی از محدودیت (≤) می‌باشد.

گام ۴ـ تمام متغیرهای اساسی جدول ابتدایی باید یکه باشند به همین خاطر در سطر تابع هدف (سطر

صفر) ضرایب متغیرهای مصنوعی را با مضاربی از سطرهای دیگر صفر می‌کنیم و حل جدول ادامه می‌یابد.

گام ۵ـ هرگاه مقدار همه متغیرهای مصنوعی صفر شود به جواب قابل قبول رسیده‌ایم. در این حالت مقدار R صفر گردیده و مرحله اول به پایان می‌رسد.

☜ **نکته:** اگر مقدار R در انتهای مرحله اول مخالف صفر باشد در این صورت منطقه جواب قابل قبول وجود ندارد.

مرحله دوم

گام ۶ـ تابع هدف z را جایگزین تابع R در آخرین جدول سیمپلکس می‌نماییم.

گام ۷ـ در این جدول ستون‌های مربوط به متغیرهای مصنوعی حذف می‌گردد.

گام ۸ـ تمام متغیرهای اساسی را تبدیل به بردار واحد نموده و سطر تابع هدف جدید (سطر صفر) را بهنگام می‌نماییم و حل جدول را ادامه می‌دهیم.

☜ **نکته:** در جدول سیمپلکس مرحله دوم هیچ اثری از متغیرهای مصنوعی نباید وجود داشته باشد.

۲ـ۶ـ۱ـ موارد استفاده از سیمپکلس دومرحله‌ای

۱ـ هیچ جواب اولیه قابل قبولی در دسترس نمی‌باشد.

۲ـ حداقل یکی از محدودیت‌ها به شکل = یا $\geq$ باشد.

۳ـ مبدأ مختصات جزو فضای جواب نباشد.

☜ **نکته:** پس از دستیابی به جواب قابل قبول، در مرحله دوم، مسئله یا جواب بهینه محدود دارد و یا این‌که جواب بهینه نامحدود دارد و حالت بدون جواب بودن به هیچ عنوان رخ نخواهد داد. زیرا حداقل یک نقطه قابل قبول وجود داشته که در مرحله اول آن را پیدا نموده‌ایم.

☜ **نکته:** هر مسئله برنامه‌ریزی خطی در پایان مرحله اول حتماً جواب محدود دارد بنابراین مسئله و جواب آن هیچ‌گاه نامحدود نخواهد شد.

۲ـ۶ـ۲ـ تجزیه و تحلیل جواب روش دومرحله‌ای (دوفازی)

مرحله اول	مرحله دوم
۱ـ در جدول بهینه • $R\neq$	۱ـ در این حالت مسئله اصلی جواب قابل قبول ندارد ⇐ ختم مسئله
۲ـ در جدول بهینه • $R=$ و تمامی متغیرهای مصنوعی (R_i) غیرپایه‌اند.	۲ـ در این‌صورت یک جواب پایه قابل قبول برای مسئله اصلی بدست آمده و مسئله با تابع هدف جدید ادامه می‌یابد (جواب محدود یا نامحدود)
۳ـ در جدول بهینه • $R=$ ولی حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی با مقدار صفر جزو پایه می‌باشد و در سطری که متغیر مصنوعی برابر صفر می‌باشد تمامی مقادیر a_{ij} بغیر از ستون‌های مصنوعی برابر صفر می‌باشد.	۳ـ در این صورت محدودیت مربوطه زائد بوده و در شروع مرحله دوم متغیر مصنوعی از جدول سیمپکلس حذف می‌شود. نکته: در این حالت جواب غیرتبهگن بود و تنها حالتی می‌باشد که تعداد جواب‌های پایه مثبت غیرتبهگن از تعداد محدودیت‌ها کمتر است.
۴ـ در جدول بهینه • $R=$ ولی حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی با مقدار صفر جزو پایه می‌باشد و در سطری که متغیر مصنوعی برابر صفر می‌باشد تمامی مقادیر a_{ij} بغیر از ستون‌های مصنوعی برابر صفر نمی‌باشد.	۴ـ در این حالت یکی از متغیرهای غیرپایه را که در سطر مذکور صفر نیستند با کمک پاشنه‌گردی (عدد لولا) وارد پایه نموده و حل مسئله را ادامه می‌دهیم. نکته: در این حالت جواب تبهگن بوده و محدودیت زائدی وجود ندارد. و تنها حالتی می‌باشد که سیمپلکس اولیه روی عدد منفی پاشنه‌گردی می‌کند.

۲ـ۷ـ روش M بزرگ

در روش M بزرگ پس از معرفی متغیرهای کمبود، مازاد و مصنوعی در محدودیت‌های موردنظر، کلیه متغیرهای مصنوعی موجود در مدل را با ضریب M (عدد بسیار بزرگ) و با علامت مناسب به تابع هدف اضافه می‌نماییم. یعنی اگر تابع هدف Max باشد متغیر مصنوعی با ضریب M- و اگر تابع هدف Min باشد با ضریب M+ به تابع هدف اصلی اضافه می‌شود. سپس مسئله را استاندارد نموده و بعد از یکه‌نمودن (بردار واحد) متغیرهای مصنوعی، مانند سیمپلکس معمولی جدول را حل می‌کنیم.

۲ـ۷ـ۱ـ تجزیه و تحلیل روش M بزرگ

روش M بزرگ ممکن است به یکی از موارد زیر ختم شود.

۱ـ جواب بهینه بدست آمده و در جدول بهینه هیچ متغیر مصنوعی در بردار پایه نمی‌باشد در این حالت مسئله به جواب بهینه رسیده است.

☜ **نکته:** شرط بهینگی: ۱ـ همه ضرایب سطر صفر (سطر z) در حالت Max غیرمنفی و در حالت Min (غیرمثبت) باشد، ۲ـ ستون‌های سمت راست مثبت باشد.

۲ـ جواب بهینه بدست آمده و در جدول بهینه حداقل یک بردار مصنوعی، بردار پایه می‌باشد ولی مقدار متغیر مصنوعی همگی صفر می‌باشد. در این حالت نیز جواب بهینه مسئله اصلی بدست می‌آید.

		R.H.S
Maxz	+ + ۰ +	C
x_1		b_1
R_1		۰

جواب بهینه (x_1 , R_1)

۳ـ جواب بهینه حاصل شده و حداقل یک بردار مصنوعی در پایه با مقدار مثبت (حداقل برای یکی از آن‌ها) قرار دارد. در این حالت منطقه موجه نداشته و جواب قابل قبول وجود ندارد.

		b
Maxz	+ + ۰ +	C
x_1		b_1
R_1		۰
R_2		۳

۴ـ جدول بهینه بدست آمده ولی علامت نامحدودبودن دیده می‌شود. (یعنی ورودی داریم ولی خروجی نداریم) در این حالت:

	y_1	y_2			
Maxz	+	−	+	۰	
R_2		−			۲
R_3		۰			۳
x_1		−			۲

۴ـ۱) علامت نامحدودبودن در مسئله دیده می‌شود ولی هیچ بردار مصنوعی در پایه وجود ندارد در این صورت مسئله اصلی نامحدود می‌باشد.

۴ـ۲) علامت نامحدودبودن در مسئله دیده می‌شود و حداقل یک بردار مصنوعی در پایه وجود دارد ولی مقادیر متغیرهای مصنوعی همگی صفر است در این صورت نیز مسئله اصلی نامحدود می‌باشد.

۴ـ۳) علامت نامحدودبودن در مسئله دیده می‌شود و حداقل یک بردار مصنوعی با مقدار مثبت در پایه وجود دارد در این صورت برای مسئله اصلی جواب قابل قبول وجود نداشته و منطقه موجه نداریم.

☜ **نکته:** وقتی متغیری مصنوعی با مقدار مثبت در پایه وجود داشته باشد به آن جواب بهین‌نما می‌گویند.

☜ **نکته:** تعداد مراحل یک مسئله در روش دومرحله‌ای و M بزرگ دقیقاً با هم برابر می‌باشد.

☜ **نکته:** متغیرهای مصنوعی در مسائلی قابل استفاده است که گوشه شروع اولیه مثل (۰ و ۰) وجود نداشته باشد در این صورت متغیرهای مصنوعی باعث افزایش منطقه موجه جواب می‌شوند.

☜ **نکته:** وقتی که متغیر مصنوعی R_i صفر شود در این حالت وارد منطقه موجه واقعی محدودیت i می‌شویم، و وقتی تمام متغیرهای مصنوعی مسئله برابر صفر شود در این حالت وارد منطقه موجه واقعی مسئله می‌شویم.

☜ **نکته:** اگر بیشتر از یک متغیر داوطلب ورودی به پایه وجود داشته باشد که یکی از آن‌ها غیرمصنوعی باشد متغیر غیرمصنوعی را وارد پایه می‌کنیم و اگر بیشتر از یک متغیر داوطلب خروجی از پایه وجود داشته باشد که یکی از آن‌ها متغیر مصنوعی باشد متغیر مصنوعی را از پایه خارج می‌کنیم.

۲ـ۸ـ بررسی حالات خاص روش سیمپلکس

۲ـ۸ـ۱ـ جواب بهینه چندگانه (متعدد)

هرگاه در جدول نهایی سیمپلکس ضریب یکی از متغیرهای غیرپایه در سطر تابع هدف (سطر Z) صفر باشد مسئله می‌تواند جواب بهینه چندگانه داشته باشد (شرط لازم). به عبارت دیگر هرگاه تعداد صفرهای موجود سطر تابع هدف از تعداد محدودیت‌ها بیشتر باشد مسئله می‌تواند دارای جواب چندگانه باشد.

	x_j (غیرپایه)
Z	۰

☜ **نکته:** اگر چنانچه یکی از محدودیت‌های فعال موازی تابع هدف باشد مسئله می‌تواند جواب بهینه چندگانه داشته باشد.

☜ **نکته:** اگر مسئله‌ای علاوه بر شرایط فوق پایه بهین غیرتباهیده (غیرتبهگن) داشته باشد و یا این که عنصر نظیر سطر تباهیده و ستون متعدد، عدد صفر یا منفی باشد جواب حتماً متعدد است.

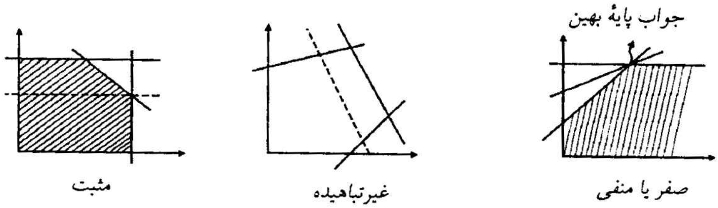
	x_j (غیرپایه)	RHS
Z	۰	
	⋮	
	... صفر یا منفی	۰

جواب چندگانه

	x_j (غیرپایه)	RHS
Z	۰	
	⋮	
	... مثبت	۰

جواب یگانه

$$\theta = Min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \mid a_{ij} > \cdot \right\}$$



☜ **نکته:** به‌طور عادی مقدار تابع هدف سیمپلکس در هر مرحله از جدول تغییر می‌کند مگر در حالت جواب چندگانه و تبهگن.

☜ **نکته:** هرگاه مسئله‌ای دارای جواب بهینه چندگانه باشد حداقل یک جواب قابل قبول اساسی دارد و مابقی جوابهای قابل قبول بهینهٔ غیرپایه می‌باشند.

☜ **نکته:** هرگاه متغیری از متغیرهای مسئله آزاد در علامت باشد (نه همهٔ متغیرها) و آن را به کمک تغییر متغیر $\left\{ x_j = x_j' - x_j'' \mid (x_j', x_j'') = \cdot \right\}$ مقید نماییم در این صورت جواب بهینه حتماً متعدد است.

۲ـ۸ـ۲ـ حالت تبهگن (انحطاط، تباهیدگی، منحط، دژنره *Degeneracy*)

حالت تبهگن معمولاً در سه حالت زیر نمایان می‌شود.

۱ـ در سمت راست یکی از مراحل سیمپلکس حداقل یک عدد صفر ظاهر گردد.

۲ـ در انتخاب متغیر خروجی حالت یکسان برای دو یا چند متغیر وجود داشته باشد که در مرحلهٔ بعد جواب حتماً تبهگن خواهد بود.

۳ـ متغیر واجد شرایط ورود دارای بردار ستونی موازی سمت راست باشد در این صورت در مرحلهٔ بعد جواب حتماً منحط می‌باشد. (یعنی $\left[\frac{b_i}{a_{ij}} = cte \right]$ در صورتی‌که a_{ij} ضرایب ستون متغیر واجد شرایط ورود به پایه باشد.) اگر حالت انحطاط در یکی از مراحل میانی ایجاد شود و سپس رفع گردد مسئله تبهگن موقت می‌باشد و مقدار تابع هدف بهبود می‌یابد و اگر چنانچه در جدول بهینه نهایی در سمت راست صفر وجود داشته باشد و یا در تکرارهای بعدی رفع نگردد مسئله تبهگن دائم دارد.

☜ **نکته:** به‌طور کلی در روش سیمپلکس در هر مرحله، از یک گوشهٔ قابل قبول به گوشه‌ای دیگر حرکت می‌نماییم (غیر از حالت تبهگن)

نکته: به‌طور عادی هر گوشه از فضای جواب معادل یک حل اساسی و هر حل اساسی معادل یک نقطهٔ گوشهٔ فضای جواب است مگر در حالت انحطاط (تبهگن) که هر گوشه می‌تواند معادل دو یا چند حل اساسی باشد.

نکته: به‌طور عادی روش سیمپلکس برای همهٔ مسائل ، غیر از حالت تبهگن همگرا می‌باشد. یعنی این که همیشه سیمپلکس به سمت جواب بهینه حرکت می‌نماید، بجز حالت تبهگن که ممکن است در حلقهٔ تکرار قرار گیرد.

نکته: یک جواب پایه‌ای را هنگامی تباهیده گویند که اولاً قابل قبول باشد و ثانیاً تعداد عناصر مثبت آن کمتر از تعداد محدودیت‌های مستقل باشد.

نکته: اگر در یک مسئله n بعدی $n+1$ محدودیت از یک گوشه عبور نماید مسئله تبهگن خواهد بود.

۲ـ۸ـ۳ـ منطقه موجه بیکران (نامحدود)

هرگاه متغیری که شرایط ورود به پایه را دارد دارای ضرایب ستونی تماماً صفر یا منفی در محدودیت‌ها باشد و متغیر خروجی نداشته باشیم، مسئله دارای منطقه موجه نامحدود در راستای آن متغیر بوده و جواب بهینه نیز نامحدود (بیکران) می‌باشد. یعنی متغیر ورودی داریم ولی نمی‌توان خروجی را تعیین کرد. همچنین هرگاه تمام ضرایب یک متغیر غیراساسی در جدول بهینه همگی صفر یا منفی باشد مسئله در راستای آن متغیر منطقه موجه نامحدود دارد ولی جواب بهینه ممکن است محدود باشد.

نکته: در شرایط بیکران (نامحدود) بودن، محدودیت‌ها قادر به کنترل تابع هدف نمی‌باشند و تابع هدف به‌طور نامحدود افزایش می‌یابد.

تذکر: برای تشخیص حالت بیکران مسئله ، حتماً باید سطرها و ستون‌ها بهنگام شده باشد و مسئله نیز متغیر آزاد نداشته باشد ، به عبارت دیگر مسئله در شکل استاندارد باشد.

نکته: اگر مسئله‌ای نامتناهی باشد با تغییرات مقدار سمت راست نمی‌توان آن‌را متناهی کرد و اگر مسئله متناهی باشد با تغییرات مقدار سمت راست (b) نمی‌توان آن را نامتناهی کرد.

نکته: هرگاه فضای جواب مسئله‌ای بیکران باشد مسئله همگن متناظر با آن جواب غیرصفر دارد و بالعکس.

نکته: هرگاه مسئله‌ای دارای جواب بیکران باشد برای خود مسئله و مسئله همگن آن می‌توان جواب موجه غیرپایه‌ای با $(m+1)$ متغیر مثبت بوجود آورد.

۲ـ۸ـ۴ـ بودن جواب بودن مسئله

هرگاه متغیر مصنوعی با مقدار مثبت در پایه نهایی باشد و با تابع هدف مرحله اول متغیرهای مصنوعی (R) مخالف صفر باشد، آن مسئله دارای جواب قابل قبول نخواهد بود. دلایل تهی‌بودن فضای جواب عبارتند از:

۱ـ محدودیت‌ها با هم در تناقض هستند.

۲ـ ناحیهٔ جواب در غیر ناحیه اول می‌باشد.

۳ـ نیاز ما از منابع موجود بیشتر است.

تذکر: اگر مسئله‌ای نقطه فرین نداشته باشد معادل این است که بگوییم فضای جواب تهی است.

۳ جبر ماتریسی و سیمپلکس اصلاح شده

۳ـ۱ـ بردار و فضای برداری

فضای برداری: اگر مجموعه‌ای از بردارها را داشته باشیم به طوری که حاصل جمع هر دو بردار دلخواه و هر ضربی دلخواه از هر بردار، در آن مجموعه باشد آن مجموعه را فضای برداری می‌گویند.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = c \\ d = \lambda a \end{array}\right\} \Rightarrow c\,,\, d \in \text{فضای برداری}$$

تذکر: هر فضای برداری حتماً شامل بردار صفر خواهد بود وگرنه فضای برداری حاصل نخواهد شد.

۳ـ۲ـ استقلال بردارها

در یک فضای n بعدی، بردارهای $(a_1 , \dots , a_k)$ مستقل خطی هستند اگر:

الف) دترمینان ضرایب آنها مخالف صفر باشد. $|A| \neq 0$

ب) در رابطه $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$ همه λ_i ها صفر باشد.

ج) آنها را نتوان بصورت ترکیب خطی از بردار صفر نوشت.

۳ـ۳ـ وابستگی بردارها

در یک فضای n بعدی، بردارهای $(a_1, \dots, a_k)$ دارای وابستگی خطی هستند اگر:

الف) دترمینان ضرایب آنها مساوی صفر باشد. $|A| = 0$

ب) در رابطه $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$ همه λ_i ها مساوی صفر نباشد (حداقل یکی از λ_i ها مخالف صفر باشد)

ج) آنها را بتوان بصورت ترکیب خطی از بردار صفر نوشت.

☜ **نکته:** هرگاه بردار b داخل فضای برداری بردارهای ستونی ماتریس ضرایب قرار گیرد در اینصورت مسئله جواب دارد و در غیر اینصورت مسئله جواب نخواهد داشت.

۳ـ۴ـ ماتریس‌ها

یک ماتریس $m \times n$ بصورت زیر نمایش داده می‌شود که در آن:

$$A = \| a_{ij} \|_{m \times n}$$

سطر ستون تعداد سطرها تعداد ستون‌ها

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

☜ **نکته:** هر بردار یک ماتریس است ولی هر ماتریس یک بردار نیست.

مجموع دو ماتریس: دو ماتریس وقتی جمع می‌شوند که تعداد سطرها و ستونهای مساوی با هم داشته باشند در اینصورت درایه‌های نظیر یکدیگر با هم جمع می‌شوند.

$$A + B = C \Rightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$
$$i = j = 1, 2, \dots, n$$

۳ـ۴ـ۱ـ ضرب عدد اسکالر λ در ماتریس

عدد λ در کلیه درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود.

۳ـ۴ـ۲ـ ضرب ماتریس

دو ماتریس در صورتی با یکدیگر ضرب می‌شوند که تعداد ستونهای ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. اگر A ماتریس $m \times n$ و B ماتریس $n \times p$ باشد آن‌وقت داریم:

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

که در آن C یک ماتریس $m\times p$ می‌باشد و تعریف می‌شود:

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{اگر} \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p \end{array}$$

۳ـ۵ـ ماتریس‌های خاص

ماتریس مربع : ماتریسی که تعداد سطر و ستونهایش مساوی باشد $m=n$

ماتریس سطری : ماتریسی که فقط یک سطر دارد.

ماتریس ستونی : ماتریسی که فقط یک ستون دارد.

ماتریس واحد : ماتریس مربعی که تمام قطرهایش یک و بقیه عناصر آن صفر باشد و با I نمایش می‌دهند.

ماتریس قطری : ماتریس مربعی که عناصر غیرقطری آن صفر باشد.

ماتریس اسکالر : ماتریس قطری که عناصر قطر اصلی آن یکسان باشد.

ماتریس ترانسپوز (ترانهاده) : ماتریسی که جای سطر و ستونهای آن عوض شده باشد. اگر ماتریس $A_{m\times n}$ با a_{ij} عنصر مفروض باشد ترانسپوز ماتریس A بصورت یک ماتریس $A^T_{n\times m}$ با عناصر a_{ji} تعریف می‌شود.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس متعامد : ماتریسی که اگر در ترانسپوزش ضرب شود برابر ماتریس واحد شود.

$$A\,.\,A^T=A^T A=I_n$$

ماتریس متقارن : ماتریسی که مساوی با ترانسپوزش گردد. $A=A^T$

ماتریس شبه متقارن : ماتریسی که مساوی قرینه ترانسپوزش گردد. $A=-A^T$

ماتریس مثلثی : یک ماتریس مربع $m\times n$ یک ماتریس بالا مثلثی است اگر تمام عناصر بالای قطر اصلی آن به همراه خود قطر اصلی مخالف صفر باشد، و پائین مثلثی است اگر تمام عناصر زیر قطر اصلی آن به همراه خود قطر اصلی مخالف صفر باشد.

۳ـ۶ـ اعمال سطر و ستونی ماتریس

ماتریس $A_{m\times n}$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان بعضی از اعمال سطری یا ستونی مقدماتی را روی ماتریس A انجام داد که در حل معادلات خطی مفید باشد.

یک عمل سطری مقدماتی ماتریس A به سه حالت زیر انجام می‌پذیرد :

۱ـ تعویض سطر i با سطر j

۲ـ ضرب سطر i در یک اسکالر غیرصفر λ

۳ـ اضافه نمودن λ برابر سطر j به سطر i

یک عمل ستونی مقدماتی ماتریس A نیز به سه حالت زیر انجام می‌گیرد :

۱ـ تعویض ستون k با ستون l

۲ـ ضرب ستون k در یک اسکالر غیرصفر λ

۳ـ اضافه نمودن λ برابر ستون l به ستون k

۳ـ۷ـ دترمینان (det یا $|\ |$)

تابعی است که به هر ماتریس مربعی یک عدد منحصر به فرد را نسبت می‌دهد. در صورتی‌که این عدد صفر باشد حداقل یک بردار وابسته سطری یا ستونی در این دترمینان وجود دارد. و اگر مخالف صفر باشد تمام بردارهای سطری و ستونی آن مستقل خطی از یکدیگر می‌باشند.

دترمینان ماتریس $A_{n\times n}$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}|$$

که در آن $|A_{i1}|$ از حذف سطر i و ستون اول بدست می‌آید. دترمینان یک ماتریس ۱×۱ خود همان عنصر می‌باشد.

۳ـ۷ـ۱ـ مینور (Minor)

مینور هر عنصر عبارتست از دترمینان حاصل از حذف سطر و ستون آن عنصر از ماتریس اصلی

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2) - 5(1) = -7$$

۳ـ۷ـ۲ـ خواص دترمینان

۱ـ اگر ماتریس B از جابجایی دو سطر یا دو ستون ماتریس A بدست آید در اینصورت:

$$|A| = -|B|$$

۲ـ دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانسپوز آن برابر است:

$$|A| = |A^T|$$

۳ـ اگر تمام عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریس A صفر باشد در اینصورت: $|A| = 0$

۴ـ دترمینان یک ماتریس که دارای دو سطر یا ستون مساوی باشد، صفر است.

۵ـ حاصل ضرب هریک از عناصر یک سطر یا یک ستون از ماتریس مربع A در عدد اسکالر λ، دترمینان A را در λ ضرب خواهد کرد.

۶ـ دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مربع هم مرتبه برابر حاصلضرب دترمینانهای آنها است:

$$|AB| = |A| \, . \, |B|$$

ماتریس منفرد : ماتریسی که دترمینان آن برابر صفر باشد.

ماتریس غیر منفرد : ماتریسی که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

۳ـ۸ـ رتبه ماتریس (Rank)

اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد دراینصورت همیشه $Rank\ A \le Min(m, n)$ که اگر $Rank\ A = Min(m, n)$ باشد A را رتبه کامل گویند. بنابراین رتبه ماتریس عبارتست از مرتبه یا بعد بزرگترین زیر ماتریس که دترمینان آن صفر نباشد.

نکته: سیستم معادلات $Ax=b$ و ماتریس افزوده $(A|b)$ با m سطر و $n+1$ ستون در نظر بگیرید. حالتهای ممکن برای جوابهای سیستم عبارتست از:

۱) اگر $Rank\ (A|b) > Rank\ (A)$ در اینصورت سیستم $Ax=b$ جواب ندارد چون b را نمی‌توان به‌صورت ترکیب خطی از A نوشت.

۲) $Rank\ (A|b) = Rank\ (A) = n$ آنگاه، $Ax=b$ جواب منحصر به فرد دارد.

۳) $n < m$, $Rank\ (A|b) = Rank\ (A) < n$ آنگاه، $Ax=b$ بی‌نهایت جواب دارد.

۴) اگر $R(A|b) = R(A)$, $m < n$ آنگاه سیستم بی‌نهایت جواب دارد.

۵) اگر $R(A|b) = R(A)$, $|A| = 0$ آنگاه سیستم بی‌نهایت جواب دارد.

۶) اگر $R(A|b) = R(A)$, $|A| \neq 0$ آنگاه سیستم بی‌نهایت جواب منحصر به فرد دارد.

۳ـ۹ـ ماتریس وارون (معکوس)

هرگاه ماتریس مربع A در رابطه $AB = BA = I$ صدق کند، در اینصورت B را ماتریس معکوس A می‌گویند و به صورت $B = A^{-1}$ نمایش می‌دهند.

۳ـ۹ـ۱ـ خواص ماتریس معکوس

۱ـ شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس معکوس داشته باشد این است که دترمینان آن مخالف صفر باشد به عبارت بهتر تمام سطرها و ستونهای آن برداری مستقل از هم باشند.

۲ـ اگر ماتریس A دارای معکوس باشد این معکوس منحصر به فرد است.

۳ـ اگر A و B دو ماتریس غیرمنفرد همرتبه باشد، معکوس حاصلضرب، برابر معکوس دومی و معکوس اولی می‌باشد.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

۴ـ اگر A یک ماتریس غیرمنفرد باشد معکوس ترانسپوز آن برابر ترانسپوز معکوس آن است.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

۵ـ اگر A یک ماتریس غیرمنفرد باشد در اینصورت :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

۳ـ۹ـ۲ـ قضیه ماتریس معکوس

اگر ماتریس A یک ماتریس مربعی غیرمنفرد باشد ($|A| \neq 0$) و ماتریس $[A|I]$ توسط عملیات ابتدائی سطری به ماتریس $[I|A^{-1}]$ تبدیل شود در اینصورت A و A^{-1} معکوس یکدیگر می‌باشند.

مثال: معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ چه ماتریسی می‌باشد؟

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_1 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{5}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

۳ـ۱۰ـ سیمپلکس اصلاح شده (ماتریسی)

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$L.P : Max\ Z = Cx$$

$$S.t \quad Ax=b$$
$$x \geq ۰$$

A یک ماتریس $m \times n$ می‌باشد؛

در اینصورت X_B را متغیرهای اساسی (پایه) جدول سیمپلکس و X_N را متغیرهای غیراساسی (غیرپایه) در جدول در نظر گرفته و تعریف می‌کنیم:

X_B: متغیرهای اساسی (پایه) $\quad X_B = (x_۱, x_۲, ..., x_n) = B^{-۱}.b - B^{-۱}.N.X_N$

☜ **نکته:** جهت حل مسئله در حالت Max اگر X_B نامعلوم باشد، متغیرهایی را اساسی در نظر می‌گیریم که بیشترین ضریب را در تابع هدف داشته باشد.

☜ **نکته:** میزان تغییر متغیرهای پایه X_B نسبت متغیر غیر پایه‌ای X_j به صورت $\frac{\partial x_B}{\partial x_j} = -B^{-۱}.a_j$ تعریف می‌شود یعنی اگر x_j به اندازه یک واحد افزایش یابد آنوقت i امین متغیر پایه X_{B_i} به اندازه $B^{-۱}.a_{ij}$ کاهش می‌یابد.

X_N: متغیرهای غیر اساسی (غیرپایه) $\quad X_N = (x_۱, ..., x_p, s_۱, s_m, R_۱, ..., R_k)$

☜ **نکته:** جهت حل مسئله در حالت max اگر X_N نامعلوم باشد متغیرهایی را غیراساسی در نظر می‌گیریم که کمترین ضریب را در تابع هدف داشته باشد.

B: عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در محدودیتهای صورت مسئله.

N: عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه جدول دلخواه در محدودیتهای صورت مسئله.

$B^{-۱}$: ماتریس معکوس که همیشه در زیر متغیرهای پایه اولیه در جدول دلخواه قرار می‌گیرد.

$\overline{N}$: عبارتست از ماتریس ضرایب متغیرهای غیرپایه در جدول دلخواه

$$\overline{N} = B^{-۱}.N$$

C_B: عبارتست از ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در تابع هدف صورت مسئله

$\overline{C}_B$: عبارتست از ضرایب متغیرهای پایه جدول دلخواه در سطر تابع هدف، که حتماً صفر است.

C_N: عبارتست از ضرایب متغیرهای غیرپایه تابع هدف صورت مسئله

$\overline{C}_N$: عبارتست از ضرایب متغیرهای غیرپایه در سطر هدف جدول دلخواه

$$\overline{C}_N = C_B.B^{-۱}.N - C_N$$

b: عبارتست از بردار ستونی مقادیر سمت راست در صورت مسئله

$\bar{b}$: عبارتست از بردار ستونی مقادیر سمت راست در جدول دلخواه

$$\bar{b} = B^{-1}.b$$

a_j: عبارتست از بردار ستونی متغیر jام در محدودیتهای صورت مسئله

$\bar{a}_j$: عبارتست از بردار ستونی متغیر jام در محدودیتهای جدول دلخواه

$$\bar{a}_j = B^{-1}.a_j$$

c_j: عبارتست از ضریب متغیر jام در سطر هدف صورت مسئله

$\bar{c}_j$: عبارتست از ضریب متغیر jام در سطر هدف جدول دلخواه

$$\bar{c}_j = c_B.B^{-1}.a_j - c_j = z_j - c_j$$

Z: تابع هدف:

$$Z = \underbrace{C_B.B^{-1}.b}_{Z_B} - \underbrace{(C_B.B^{-1}.N - C_N)}_{\bar{C}_N}X_N = Z_B - (Z_N - C_N)X_N$$

نکته: اگر تابع هدف Max باشد و تمام مقادیر $(Z_N - C_N)$ ها مثبت باشد، در اینصورت جواب بهینه می‌باشد و اگر تابع هدف Min باشد و تمام مقادیر $(Z_N - C_N)$ ها منفی باشد، در اینصورت جواب بهینه می‌باشد.

نکته: عبارت $\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(z_j - c_j)$ میزان تغییرات (افزایش یا کاهش) تابع هدف z نسبت به تغییرات (افزایش یا کاهش) متغیر غیرپایه‌ای x_j را نمایش می‌دهد که به هزینه تقلیل یافته متغیر غیرپایه‌ای x_j تعبیر می‌شود.

نکته: میزان تغییرات تابع هدف و مقدار متغیرهای پایه در اثر تغییر موجودی منابع از رابطه

$\frac{\partial z}{\partial b} = C_B B^{-1}$ حاصل می‌شود.

ماتریسها و بردارهای فوق بصورت زیر در جدول سیمپلکس جایگیری می‌نمایند. در این جدول، I ماتریس واحد ناشی از متغیرهای پایه می‌باشد.

متغیرهای پایه	z	x_B	x_N	RHS
سطر هدف z	۱	o	$C_B . B^{-1} . N - C_N$	$C_B . B^{-1} . b$
x_B	o	I	$B^{-1} . N$	$B^{-1} . b$

بنابراین مسئله LP بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$Max\ Z = C_B . X_B + C_N . X_N = (C_N , C_B) \begin{pmatrix} X_N \\ X_B \end{pmatrix}$$

$$S.t \qquad B X_B + N X_N = b$$

$$X_B . X_N \geq 0$$

☜ **نکته:** بردار X_B وقتی بردار اساسی (پایه) می‌باشد که ماتریس ضرایب تشکیل دهندهٔ پایه ، معکوس‌پذیر بوده و دترمینان این ماتریس مخالف صفر گردد.

☜ **نکته:** اگر در یکی از تکرارهای جدول سیمپلکس ، x_j متغیر وارده به پایه باشد در اینصورت مقدارتابع هدف بصورت زیر تغییرمی کند.

$$Z_{\text{جدید}} = C_B . B^{-1} . b - (Z_j - C_j) x_j = Z_{\text{قدیم}} - [(Z_j - C_j) \times (\theta)]$$

که در آن x_j از حداقل نسبتها (θ) بدست می‌آید و $(Z_j - C_j)$ نیز ضریب متغیر وارده به پایه در سطر z می‌باشد.

☜ **نکته:** اگر ماتریس ۲×۲ باشد معکوس ماتریس B را داریم:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال: مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید در صورتی‌که پایه بهینه شامل متغیرهای x_1 و x_2 باشد جدول بهینه را کامل کنید.

$$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad X_B^* = (x_1 , x_2)$$

$$\frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 \leq 1$$

$$\frac{1}{3} x_1 + \frac{4}{3} x_2 + \frac{7}{3} x_3 = 3$$

$(x_۱, x_۲, x_۳) \geq ۰$

$X_B = (x_۱, x_۲)$

$X_N = (x_۳, S_۱, R_۲)$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ \frac{۷}{۳} & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

ماتریس معکوس B را بدست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$B^{-۱} = \frac{۱}{(\frac{۱}{۳})(\frac{۴}{۳}) - (\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۳})} \begin{bmatrix} \frac{۴}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = ۳ \begin{bmatrix} \frac{۴}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-۱} b = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$a_۳ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۷}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{a}_۳ = B^{-۱} a_۳ = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۷}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\overline{N} = B^{-۱} . N = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ \frac{۷}{۳} & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

ضریب متغیرهای پایه در سطر صفر جدول دلخواه حتماً صفر است.

$$C_B = [۲, ۳] \rightarrow \overline{C}_B = [۰, ۰]$$

$$C_N = [۱, ۰, \overset{R}{-M}] \begin{cases} Max \rightarrow -M \\ Min \rightarrow M \\ ۰ \rightarrow \text{روش دو مرحله} \end{cases}$$

$$\overline{C}_N = C_B.B^{-۱}.N - C_N = [۲,۳] \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ \frac{۷}{۳} & ۰ & ۱ \end{bmatrix} - [۱, ۰, -M] = [۳, ۵, ۱+m]$$

$$\overline{C}_j = C_B B^{-۱}.N - C_j \rightarrow \overline{C}_۳ = [۲,۳] \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۷}{۳} \end{bmatrix} - ۱ = ۳$$

$$Z = C_B.B^{-۱}b - (\overline{C}_N)X_N$$

چون جواب بهینه بوده پس جوابهای غیرپایه صفر خواهند بود. $X_N = ۰$

$$Z = C_B.B^{-۱}b = [۲,۳] \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = ۸$$

پس جدول بهینه مسئله فوق بصورت زیر حاصل می‌شود.

Max	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$S_۱$	$R_۲$	RHS
z	۰	۰	۳	۵	۱+M	۸
$x_۱$	۱	۰	−۱	۴	−۱	۱
$x_۲$	۰	۱	۲	−۱	۱	۲

۴ دوگان (ثانویه) مسایل برنامه‌ریزی خطی

۴ـ۱ـ تعاریف و مفاهیم

در ارتباط با هر مسئله برنامه‌ریزی خطی اولیه *(primal)* معادل آن به نام مسئله مزدوج (دوگان ـ همتا ـ همزاد، *Dual* یا ثانویه) وجود دارد به‌طوری که این مسئله از ترانهاده کردن کل ماتریس ضرایب با تغییرات جزئی دیگر حاصل می‌شود.

۴ـ۱ـ۱ـ خواص مسئله ثانویه

۱ـ اعداد سمت راست می‌توانند منفی باشند.

۲ـ جواب اولیه و ثانویه بطور همزمان در جدول نهایی وجود دارد.

۳ـ در این روش بجای استفاده از متغیر مصنوعی می‌توان از محدودیت مصنوعی استفاده نمود.

۴ـ۱ـ۲ـ دلایل استفاده از مسئله ثانویه

۱ـ کمتر شدن مقدار محاسبات (تعداد مراحل عملیات بستگی به تعداد محدودیتها دارد نه تعداد متغیرها)

۲ـ جلوگیری از به کار بردن متغیرهای مصنوعی

۳ـ تعبیر اقتصادی مسئله ثانویه در مسئله اولیه b_i نشان دهنده مقدار منابع در دسترس، و متغیرهای

مزدوج (y_i ها) نشان دهنده ارزش منبع iام و سهم قابل وصول فعالیتها از منابع iام می‌باشد.

۴ـ تجزیه و تحلیل حساسیت

۵ـ نقطه مبدأ مختصات، جزء ناحیهٔ جواب نباشد.

۴ـ۲ـ روابط متقابل مسئله اولیه و ثانویه

یک مسئله ثانویه را به راحتی می‌توان با اطلاعات مسئله اولیه نمایش داد.

مسئله اولیه (ثانویه)		مسئله ثانویه (اولیه)	
تابع هدف	Max	Min	تابع هدف
ضریب تابع	مقادیر ضرایب تابع هدف	مقادیر سمت راست	سمت راست
سمت راست	مقادیر سمت راست	مقادیر ضرایب تابع هدف	ضریب تابع هدف
محدودیت	تعداد محدودیت (m) $\le$ $\ge$ $=$	تعداد متغیر (n) $\ge$ $\le$ آزاد در علامت	متغیر
متغیر	تعداد متغیرها (n) $\ge$ $\le$ آزاد در علامت	تعداد محدودیتها (m) $\ge$ $\le$ $=$	محدودیت
ضرایب محدودیتها	ترانسپوز ماتریس ضرایب	ماتریس ضرایب	ضرایب محدودیتها
متغیرهای پایه	n متغیر اساسی m متغیر غیراساسی	m متغیر اساسی n متغیر غیراساسی	متغیرهای پایه

بنابراین مسائل اولیه و ثانویه به صورت مدل‌های زیر نمایش داده می‌شوند:

مسئله ثانویه	مسئله اولیه
$min\ Y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$	$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$
$st: \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \geq C_j \\ y_i \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \end{cases}$	$st: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_j \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m \end{cases}$

تذکر: علامت متغیرها از روی محدودیتها و علامت محدودیتها از روی متغیرها تعیین می‌شود.

نکته: مزدوج مزدوج هر برنامه‌ریزی خطی خود آن مسئله می‌باشد.

تذکر: تعداد محدودیتهای مسئله اولیه برابر تعداد متغیرهای مسئله ثانویه و برعکس می‌باشد.

نکته: مقادیر متغیرهای پایه در هر مرحله از جدول مسئله اولیه در تمام محدودیتها صدق می‌کند، ولی در مسئله ثانویه این چنین نبوده و فقط در جدول نهایی به این حالت می‌رسیم. در سایر موارد متغیرها در محدودیتها صدق نمی‌کند. به عبارت دیگر ثانویه اولین جواب قابل قبولی که حاصل می‌شود جواب بهینه است.

نکته: در طی مراحل سیمپلکس مسئله اولیه مقدار تابع هدف با تابع هدف هم جهت است ولی در مسئله ثانویه در خلاف جهت تابع هدف حرکت می‌کنیم. (در واقع در حالت Max تابع هدف از مقدارکم شروع نموده و به بهینه می‌رسد ولی در حالت Min تابع هدف از مقدار زیاد شروع و به حالت بهینه می‌رسد.)

نکته: در سیمپلکس مسئله اولیه عنصر لولا همواره مثبت می‌باشد ولی در سیمپلکس مسئله ثانویه عنصر لولا منفی است.

نکته: در سیمپلکس مسئله اولیه ابتدا متغیر ورودی و سپس خروجی تعیین می‌شود، در صورتی که در سیمپلکس ثانویه دقیقاً برعکس این عمل اتفاق می‌افتد.

نکته: در مسئله اولیه زمانی که مسئله، جواب اولیه قابل قبول ندارد از متغیر مصنوعی استفاده می‌شود، در صورتی که در مسئله ثانویه زمانی‌که مسئله جواب ثانویه قابل قبول ندارد از محدودیت مصنوعی استفاده می‌شود تا به جواب قابل قبول مطلوب دست یابیم.

نکته: بکارگیری متغیرهای مصنوعی در مسئله اولیه معادل بکارگیری محدودیت مصنوعی در

مسئله ثانویه است.

☜ **نکته:** تعداد گوشه‌های هر دو مسئله با هم برابراست (زیرا m و n فقط جایشان عوض شده است)

یعنی $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

☜ **نکته:** هر جواب اساسی (گوشه) بهینه در مسئله اولیه متناظر با یک جواب اساسی (گوشه) بهینه در مسئله ثانویه است و مشخصه آن داشتن مقادیر تابع هدف برابر است.

☜ **نکته:** هر دوگوشه متناظر نمی‌توانند در دو مسئله اولیه و ثانویه موجه باشند مگر اینکه آن جواب اساسی یاگوشه بهینه باشد.

☜ **نکته:** مقدار تابع هدف بهینه در هر دو مسئله اولیه و ثانویه برابر می‌باشد.

☜ **نکته:** باتوجه به جداول سیمپلکس اولیه، برای مسئله ثانویه مقدار متغیرهای اصلی ، در سطر صفر در زیر متغیرهای کمکی جدول سیمپلکس اولیه، و مقدار متغیرهای کمکی ، در سطر صفر در زیر متغیرهای اصلی جدول سیمپلکس اولیه قرار دارد.

۴ـ۳ـ قضایای مسئله دوگان

قضیه ۱ : ثانویه مسئله ثانویه، مسئله اولیه می‌باشد.

قضیه ۲ (قضیه ضعیف دوگان) : اگر x^* جواب قابل قبول برای مسئله اولیه با تابع هدف *Max* و y^* جواب قابل قبول برای مسئله ثانویه با تابع هدف *Min* باشد، رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\left\{\begin{matrix} Cx^* \le by^* \\ x^* \le y^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ *(Max)* مقدار تابع هدف اولیه ≥ *(Min)* مقدار تابع هدف ثانویه

حال اگر مسئله اولیه *Min* و مسئله ثانویه *Max* باشد علامتها عوض خواهد شد.

نتایج قضیه ضعیف دوگان

۱ـ مقدار تابع هدف مسئله *Min* به ازای هر جواب قابل قبول این مسئله، حد بالایی برای بیشترین مقدار تابع هدف مسئله بیشینه سازی می‌باشد.

۲ـ مقدار تابع هدف مسئله *Max* به ازای هر جواب قابل قبول این مسئله ، حد پایینی برای کمترین مقدار تابع هدف مسئله کمینه سازی می‌باشد.

۳ـ اگر مسئله اولیه *(Max)* جواب قابل قبول داشته باشد و به ازای این جواب مقدار تابع هدف نامحدود باشد ($Z \to \infty$) در این صورت مسئله ثانویه نمی‌تواند جواب قابل قبولی داشته باشد.

۴ـ اگر مسئله ثانویه *(Min)* دارای جواب قابل قبول باشد و به ازای این جواب، مقدار تابع هدف نامحدود باشد ($Y \to \infty$) در اینصورت مسئله اولیه نمی‌تواند جواب قابل قبول داشته باشد.

۵ـ اگر یکی از مسائل اولیه یا ثانویه جواب بهینه نامحدود داشته باشد در این‌صورت مسئله دیگر جواب قابل قبول نخواهد داشت.

۶ـ اگر مسئله اولیه یا ثانویه جواب قابل قبول نداشته باشد، مسئله دیگر ممکن است جواب قابل نداشته باشد و یا اینکه مقدار تابع هدف نامحدود داشته باشد.

۷ـ اگر مسئله اولیه جواب قابل قبول داشته باشد ولی ثانویه جواب قابل قبول نداشته باشد آنگاه مسئله اولیه نامحدود می‌باشد.

۸ـ اگر مسئله ثانویه جواب قابل قبول داشته باشد ولی اولیه جواب قابل قبول نداشته باشد آنگاه مسئله ثانویه نامحدود می‌باشد.

قضیه ۳ (قضیه معیار بهینگی) : اگر x^* و y^* جوابهای قابل قبول مسئله اولیه و ثانویه باشند به گونه‌ای که مقادیر تابع هدف این دو مسئله به ازای این جوابها با یکدیگر مساوی باشند ($cx^* = by^*$) در اینصورت x^* , y^* جوابهای بهینه این دو مسئله می‌باشند.

نتیجه قضیه معیار بهینگی: شرط لازم و کافی جهت بهینه بودن جواب مسئله اولیه و ثانویه اینست که این جوابها قابل قبول بوده و به ازای آنها مقادیر تابع هدف هر دو مسئله برابر گردد.

قضیه ۴ (قضیه قوی دوگان): هرگاه x^* , y^* جوابهای قابل قبول دو مسئله اولیه و ثانویه باشند آنگاه هردو مسئله دارای جواب بهینه بوده و رابطه $cx^* = by^*$ برقرار است.

نتیجه قضیه قوی دوگان: هرگاه هریک از مسائل اولیه یا ثانویه جواب بهینه داشته باشد، دیگری نیز جواب بهینه خواهد داشت.

قضیه ۵ (قضیه اساسی دوگان): در مسائل برنامه‌ریزی خطی اولیه و ثانویه، یکی از سه حالت زیر بطورکلی رخ می‌دهد:

۱ـ هر دو مسئله جواب بهینه محدود دارند، به‌طوری که $cx^* = by^*$ برقرار است و در آن x^* , y^*

به ترتیب جوابهای بهینه مسائل اولیه و ثانویه می‌باشند.

۲ـ هرگاه مقدار تابع هدف یکی از مسائل نامحدود باشد، در اینصورت مسئله دیگر جواب قابل قبول نخواهد داشت ولی عکس این قضیه همواره برقرار نمی‌باشد.

۳ـ هر دو مسئله جواب قابل قبول ندارند.

قضیه ۶ (قضیه تعدّد و انحطاط): اگر هرکدام از مسائل اولیه یا ثانویه برنامه‌ریزی خطی جواب بهینه چندگانه داشته باشد، در اینصورت مسائل دیگر دارای جواب بهینه تباهیده (منحط) خواهد بود و برعکس.

قضیه ۷ (قضیه مکمل زاید):

مسئله اولیه و ثانویه را بصورت زیر در نظر بگیرید:

مسئله ثانویه	مسئله اولیه
$Min\ Y = yb$	$Max\ Z = cx$
$S.t:\ yA \ge c$	$S.t:\ Ax \le b$
$y \ge 0$	$x \ge 0$

فرض کنید x^* , y^* به ترتیب جوابهای قابل قبول برای مسئله اولیه و ثانویه باشند، آنگاه x^* , y^* جواب بهینه می‌باشند اگر و فقط اگر:

$$(y^*A - c)x^* + y^*(b - Ax^*) = 0$$

و در حالت بسط یافته داریم:

$$(y^*a_j - c_j)x_j^* + y_i^*(b_i - a^i x^*) = 0 \qquad (I) \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

این قضیه نشان می‌دهد که حداقل یکی از دو جمله در هر بسط باید صفر باشد بنابراین:

$$\text{اگر} \begin{cases} x_j^* > 0 \Rightarrow y^*a_j = c_j \\ y^*a_j < c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \\ y_i^* > 0 \Rightarrow a^i x^* = b_i \\ a^i x^* > b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \end{cases}$$

☜ **نکته:** از قضیه فوق نتیجه می‌شود که اگر متغیری در یک مسئله مثبت باشد آن‌وقت محدودیت

متناظر آن در مسئله دیگر فعال است و اگر یک محدودیت در یک مسئله فعال نباشد آن وقت متغیر متناظر آن در مسئله دیگر باید صفر باشد. حال اگر $s_i = a^i x^* - b_i \geq 0$ و $s_j' = c_j - y^* a_j \geq 0$ به ترتیب متغیرهای کمکی مسئله اولیه و ثانویه باشد از معادله (I) داریم:

$$s_j' \times x_j^* = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

$$y_i^* \times s_i^* = 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

نتایج حاصل از قضیه مکمل زاید

۱ـ در جواب بهینه مقدار $x^* = y^*$ می‌باشد.

۲ـ در صورتی‌که متغیر مسئله اولیه (x_j) مثبت باشد (x_j در پایه باشد) آنگاه محدودیت متناظر در مسئله ثانویه بصورت مساوی (محدودیت فعال) برآورده می‌شود.

۳ـ در صورتی‌که محدودیت مسئله اولیه بصورت نامساوی مطلق برآورده شود ($S_i > 0$ در پایه باشد) آنگاه متغیر متناظر در مسئله ثانویه صفر است $(y_i = 0)$

		s_i	
	z	y_i	
	s_i	۱	

۴ـ در صورتی‌که متغیر مسئله ثانویه (y_i) مثبت باشد (y_i در پایه باشد) آنگاه محدودیت متناظر در مسئله اولیه بصورت مساوی $(S_i = 0)$ برآورده می‌شود.

۵ـ در صورتی‌که محدودیت مسئله ثانویه بصورت نامساوی مطلق برآورده شود ($S_j' > 0$ در پایه) آنگاه متغیر متناظر در مسئله اولیه صفر است $(X_j = 0)$.

۶ـ هر متغیر تصمیم در اولیه با یک متغیر کمکی در ثانویه ارتباط دارد و برعکس هرمتغیر کمکی در اولیه با یک متغیر تصمیم در ثانویه در ارتباط می‌باشد. $X_j \cdot S_j' = 0 \quad , \quad S_i \cdot y_i = 0$

که در آن x_j ، y_i متغیرهای تصمیم اولیه و ثانویه S_i , S_j' متغیرهای کمکی به ترتیب اولیه و ثانویه می‌باشد.

۷ـ هر متغیر اساسی در اولیه با یک متغیر غیراساسی در ثانویه و برعکس هر متغیر غیراساسی در اولیه با یک متغیر اساسی در ثانویه در ارتباط است.

مثال: اگر حل بهینه مسئله‌ای بصورت زیر باشد جواب بهینه مسئله مزدوج آنرا بدون استفاده از جدول سیمپلکس بدست آورید.

$$Max\ Z = ۰/۷۵x_۱ - ۲۰x_۲ + ۰/۵x_۳ - ۶x_۴$$

$$۰/۲۵x_۱ + ۸x_۲ + x_۳ - ۹x_۴ \geq ۰ \qquad x_۱^* = x_۳^* = ۱$$

$$-۰/۵x_۱ + ۱۲x_۲ + ۰/۵x_۳ - ۳x_۴ = ۰ \qquad x_۲^* = x_۴^* = ۰$$

$$x_۳ \leq ۱$$

$$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \geq ۰$$

ابتدا مزدوج مسئله فوق را بدست می‌آوریم:

$$Min\ Y = y_۳$$

$$۰/۲۵y_۱ - ۰/۵y_۲ \geq ۰/۷۵$$

$$۸y_۱ + ۱۲y_۲ \geq -۲۰$$

$$y_۱ + ۰/۵y_۲ + y_۳ \geq ۰/۵$$

$$-۹y_۱ - ۳y_۲ \geq -۶$$

$y_۱ \leq ۰$, $y_۲$ آزاد در علامت , $y_۳ \geq ۰$

$$Max\ Z = ۰/۷۵(۱) - ۲۰(۰) + ۰/۵(۱) - ۶(۰) = ۱/۲۵$$

در حالت بهینه داریم:

$$Max\ Z = Min\ Y = y_۳ = ۱/۲۵ \Rightarrow y_۳ = ۱/۲۵$$

حال محدودیت اول را برآورد می‌کنیم.

$$۰/۲۵x_۱ + ۸x_۲ + x_۳ - ۹x_۴ - s_۱ = ۰ \qquad X = (۱, ۰, ۱, ۰)$$

$$۰/۲۵ + ۱ - s_۱ = ۰ \Rightarrow s_i = ۱/۲۵$$

بنابراین محدودیت اول بصورت نامساوی مطلق می‌باشد که در آن $S_۱ = ۱/۲۵ > ۰$ در پایه قرار دارد. پس متغیر متناظر با آن در مسئله ثانویه صفر می‌باشد $(y_۱ = ۰)$ یعنی:

محدودیت اول بصورت نامساوی $(S_۱ = ۱/۲۵) \Rightarrow y_۱ = ۰$

محدودیت دوم بصورت مساوی $(S_2 = 0) \Rightarrow y_2 \neq 0$

محدودیت سوم بصورت مساوی $(S_3 = 0) \Rightarrow y_3 \neq 0$

از طرفی چون متغیرهای x_1 و x_3 در مسئله اولیه مخالف صفر می‌باشند پس محدودیتهای متناظر در مسئله ثانویه محدودیت اول و سوم بصورت مساوی نوشته می‌شود. و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \neq 0 \Rightarrow 0/25y_1 - 0/5y_2 = 0/75 \\ x_3 \neq 0 \Rightarrow y_1 + 0/5y_2 + y_3 = 0/5 \end{array}\right\} \overset{y_1 = 0}{\Longrightarrow} y_2 = -1/5 \ , \ y_3 = 1/25$$

۴-۴- روابط متقابل جوابهای مسئله اولیه و ثانویه

در مسئله اولیه و ثانویه بطور خلاصه روابط زیر برقرار می‌باشد.

مسئله اولیه	مسئله ثانویه
جواب بهینه محدود	جواب بهینه محدود
جواب بهینه چندگانه	جواب بهینه منحط
جواب بهینه منحط	جواب بهینه چندگانه
مقدار تابع هدف نامحدود $(Z = \infty)$	بدون جواب موجه
بدون جواب موجه	بدون جواب موجه
	تابع هدف نامحدود $(Z = \infty)$

۴-۵- روابط متقابل جداول مسئله اولیه و ثانویه

جداول نهایی و بهینه سیمپلکس یک مسئله اولیه و ثانویه دارای ارتباط متقابل مفهوم‌دار با یکدیگر می‌باشند.

۱- هر متغیر اصلی در اولیه x_i به ترتیب، متناسب با یک متغیر کمکی در ثانویه s_i' است. و برعکس هر y_j متناسب با یک s_j می‌باشد.

۲- اعداد سمت راست مسئله اولیه، مقدار ضرایب متغیرهای غیراساسی در سطر Y جدول سیمپلکس مسئله ثانویه است و برعکس.

۳- اعداد غیرصفر سطر Z در مسئله اولیه، مقدار متغیرهای اساسی در جدول ثانویه است و برعکس.

۴ـ مقدار متغیرهای تصمیم مسئله ثانویه در زیر سطر Y برابر قرینه و ترانسپوز (ترانهاده) مقدار متغیرهای غیراساسی در زیر سطر Z در مسئله اولیه است.

جدول نهایی مسئله اولیه (Max)	جدول نهایی مسئله ثانویه (Min)
اولیه $-A_N^T$ ⟷	ثانویه A_N
اولیه b_i ⟷	ثانویه C_N
مقدار C_N ⟷	ثانویه b_i
مقدار Z ⟵	مقدار Y

جدول نهایی مسئله اولیه

	ثانویه	s'_1	s'_2	y_1	y_2	
متغیرهای تصمیم	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	۱	۰	۳۰	۰	۴۰	۲۰۰
s_1	۰	۰	−۴	۱	−۲	۲
x_1	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$

جدول نهایی مسئله ثانویه

	اولیه	s_1	s_2	x_1	x_2	
متغیرهای اساسی	z	y_1	y_2	s'_1	s'_2	RHS
Y	۱	۲	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	+۲۰۰
s'_2	۰	۴	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۱	۳۰
y_2	۰	۲	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۴۰

یک مسئله به ۴ روش قابل حل می‌باشد:

۱ـ مسئله اولیه به روش سیمپلکس اولیه
۲ـ مسئله اولیه به روش سیمپلکس ثانویه
۳ـ مسئله ثانویه به روش سیمپلکس اولیه
۴ـ مسئله ثانویه به روش سیمپلکس ثانویه

حال نکات زیر در رابطه با روشهای فوق قابل ذکر می‌باشد.

نکته: تعداد مراحل حل یک مسئله اولیه برنامه‌ریزی خطی به روش سیمپلکس اولیه دقیقاً برابر تعداد مراحل حل ثانویه آن مسئله (دوگان) به روش سیمپلکس ثانویه می‌باشد. یعنی:

ثانویه به روش ثانویه $\longleftrightarrow$ اولیه به روش اولیه

نکته: تعداد مراحل حل یک مسئله اولیه به روش سیمپلکس ثانویه دقیقاً برابر تعداد مراحل حل ثانویه آن مسئله (دوگان) به روش سیمپلکس اولیه می‌باشد. یعنی:

اولیه به روش ثانویه $\longleftrightarrow$ ثانویه به روش اولیه

۴ـ۶ـ روابط متقابل ماتریس مسئله اولیه و ثانویه

اگر مسئله برنامه‌ریزی اولیه بصورت زیر بیان شود.

$Max\ Z = Cx$ (مسئله اولیه)

$Ax \le b$

$x \ge 0$

در اینصورت مسئله ثانویه چنین بیان خواهد شد.

$Min\ Y = b^T.y$ (مسئله اولیه)

$A^T y \ge C^T$

$y \ge 0$

که در آن b^T، A^T، C^T ترانسپوز یا ترانهاده b، A و C می‌باشند بنابراین روابط زیر برقرار می‌باشد.

(۱) $X_B = \bar{b} = B^{-1}.b$

$$(2)\ y = C_B . B^{-1}$$

$$(3)\ \begin{cases} \bar{a}_j = B^{-1} . a_j \\ \bar{N} = B^{-1} . N \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} \bar{C}_j = C_B . B^{-1} . a_j - C_j = y . a_j - C_j = C_B . \bar{a}_j - C_j \\ \bar{C}_N = C_B . B^{-1} . N - C_N = y . N - C_N = C_B . \bar{N} - C_N \end{cases}$$

$$(5)\ Z = C_B . B^{-1} . b = yb = C_B . \bar{b}$$

نکته: $\frac{\partial X_{Bi}}{\partial x_j} = -y_{ij}$ که در آن x_j متغیر غیرپایه‌ای و x_{B_i} متغیر پایه‌ای خواهد بود.

۴ـ۷ـ تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مساله ثانویه، استفاده از مفاهیم اقتصادی حاصل از آن می‌باشد. از آنجائی‌که اعداد هر ستون مفاهیم مرتبط در مورد یک متغیر تصمیم را بیان می‌کند معمولاً تفسیر اقتصادی بصورت ستونی انجام می‌پذیرد.

در جداول سیمپلکس در صورتی‌که اعداد مثبت در سطری قرار گیرند که متغیر اساسی مربوط به آن سطر، متغیر کمکی باشد، به مفهوم میزان استفاده از آن منبع برای تولید یک واحد از محصولی (با افزایش یک واحد متغیر ورودی) است که در بالای ستون این عدد قرار گرفته است. در صورتی که متغیر اساسی مربوط به آن سطر متغیر تصمیم باشد به معنی کاهش آن متغیر اساسی است که در ازاء افزایش یک واحد از متغیر ورودی صورت می‌پذیرد و برعکس، اعداد منفی، افزایش منبع (در مورد متغیرهای کمکی) و یا افزایش تولید (در مورد متغیرهای تصمیم) است.

۴ـ۷ـ۱ـ تعریف شبه قیمت (قیمت سایه، قیمت مجازی، *Dual Price*)

شبه قیمت عبارتست از میزان تغییرات تابع هدف به ازای یک واحد افزایش در یکی از مقادیر سمت راست که برابر مقدار متغیر ثانویه متناظر آن محدودیت است (y_i). قیمت‌های سایه یا قیمت‌های ثانویه بیانگر ارزش اقتصادی هر واحد سمت راست می‌باشد. اگر اعداد سمت راست نشان دهنده میزان منابع موجود باشد، قیمت سایه منعکس‌کننده ارزش اقتصادی هر واحد از منبع می‌باشد.

نکته: در جدول سیمپلکس جوابهای اساسی در اولیه مقدار قیمت سایه برای ثانویه است و برعکس.

☜ **نکته:** جدول سیمپلکس وقتی بهینه است که: هزینه نهایی = درآمد نهایی

☜ **نکته:** از حاصلضرب قیمتهای سایه (y_i) در مقدار منابع، مقدار Z^* حاصل می‌شود. و

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = y_i^*$$

۴ـ۷ـ۲ـ هزینه تقلیل یافته

عبارتست از میزان تغییرات تابع هدف به ازای یک واحد تولید از یکی از متغیرهای غیرپایه بهینه که برابر ضریب آن متغیر در سطر هدف جدول بهینه می‌باشد.
یعنی به ازاء هر واحد باید ۳ واحد ضرر بدهیم.

	x_i	RHS
Z	۳	
	۱	
	۵	
	۷	

☜ **نکته:** متغیرهای کمکی در حالت Min (ثانویه) به معنی میزان هزینه فرصت از دست رفته می‌باشد. در این شرایط بهترین حالت تساوی می‌باشد.

☜ **نکته:** متغیرهای کمکی در حالت Max (اولیه) به معنی میزان منابع باقی مانده است.

☜ **نکته:** y_i^* ها در جدول نهایی سیمپلکس اولیه در سطر Z و در زیر متغیرهای کمکی (متغیرهای اساسی جدول ابتدایی) قرار دارد.

☜ **نکته:** اگر بخواهیم از منابعی افزایش تولید داشته باشیم، آنهایی را افزایش می‌دهیم که دارای قیمت سایه‌ای (y_i های متناظر) بیشتر باشد.

☜ **نکته:** در مسائلی که با روش M بزرگ حل شده‌اند برای بدست آوردن قیمت‌های سایه‌ای (y)، در عناصر سطر صفر زیر متغیرهای شروع مسئله مقدار M را صفر قرار داده که در نتیجه قیمت سایه‌ای حاصل می‌شود.

۴ـ۸ـ روش حل سیمپلکس ثانویه

روش سیمپلکس ثانویه عموماً موقعی بکار می‌رود که همه ضرایب متغیرها در سطر تابع هدف

غیرمنفی باشد (شرط بهین) ولی اعداد سمت راست مقادیر منفی داشته باشد (غیر موجه). جهت این کارگامهای زیر پیموده می‌شود:

۱ـ تابع هدف را بصورت Max تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز، ضرب عدد ۱- در طرفین)

۲ـ محدودیتها را به شکل $\leq$ (ک.م) تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز با ضرب عدد ۱- در طرفین)

۳ـ با اضافه نمودن متغیرهای کمکی S_i به محدودیتها آنها را به شکل مساوی تبدیل می‌کنیم.

۴ـ مسئله را وارد جدول سیمپلکس می‌نمائیم.

۵ـ منفی‌ترین عدد سمت راست (b_i) را بعنوان متغیر خروجی انتخاب می‌کنیم. سطر مذکور سطر لولا نامیده می‌شود.

نکته: اگر تمام اعداد سمت راست دارای مقادیر غیرمنفی باشد جواب اساسی فعلی موجه و بهینه می‌باشد.

نکته: اگر اعداد سمت راست (b_i)، جهت ورود مساوی باشند به دلخواه یکی را انتخاب می‌کنیم.

۶ـ متغیر ورودی با تقسیم اعداد سطر صفر بر اعداد منفی سطر لولا و انتخاب کوچکترین قدرمطلق عدد حاصله بدست می‌آید. ستون حاصله را ستون لولا می‌نامیم. بطور خلاصه داریم:

$$\theta = Min \left\{ \left| \frac{C_j}{a_{ij}} \right| \; ; \; a_{ij} < 0 \right\}$$ (متغیر ورودی)

که در آن c_j اعداد سطر صفر و a_{ij} عناصر سطر لولا می‌باشد.

نکته: اگر تمام عناصر سطر لولا غیرمنفی باشد، در اینصورت مسئله فاقد منطقه موجه بوده و جواب ندارد. در اینصورت مسئله اولیه دارای جواب نامحدود می‌باشد.

نکته: اگر شرایط مساوی جهت انتخاب متغیر ورودی داشته باشیم مسئله دارای جواب چندگانه می‌باشد. در این حالت مسئله اولیه دارای جواب منحط می‌باشد.

نکته: در سیمپلکس ثانویه هدف از آزمون نسبت، حفظ شرط بهینگی در جدول بعدی می‌باشد.

۴ـ۹ـ مقایسه روش سیمپلکس معمولی و سیمپلکس ثانویه

سیمپلکس معمولی	سیمپلکس ثانویه
تابع هدف بصورت Max	تابع هدف بصورت Max
محدودیتها بصورت $\leq$	محدودیتها بصورت $\leq$
$RHS > \circ$	$C_j > \circ$
ابتدا متغیر ورودی (ستون لولا)	ابتدا متغیر خروجی (سطر لولا)
منفی‌ترین ضریب سطر صفر	منفی‌ترین ضریب در RHS
خارج قسمت RHS به ستون مثبت لولا	خارج قسمت ضرایب سطر صفر به سطر منفی لولا
حداقل نسبت	حداقل قدر مطلق نسبت
عدد لولا همیشه بزرگتر از صفر	عدد لولا همیشه کوچکتر از صفر
اگر تمام عناصر ستون لولا غیرمثبت باشد مسئله نامحدود می‌باشد	اگر همه عناصر سطر لولا غیرمنفی باشد مسئله غیرقابل قبول است.

۴ـ۱۰ـ نوع خاص سیمپلکس ثانویه (محدودیت مصنوعی)

اگر چنانچه در جدول سیمپلکس ثانویه شرط بهینگی نقض شده باشد (یعنی در سطر صفر جدول پس از استاندارد نمودن مسئله و تبدیل به Max مقدار منفی وجود داشته باشد)، در این حالت از محدودیت مصنوعی استفاده می‌کنیم.

۴ـ۱۰ـ۱ـ تعریف محدودیت مصنوعی

برای حل هر مسئله از طریق روش سیمپلکس ثانویه که شرایط بهینگی را ندارد (وجود مقدار منفی در سطر تابع هدف) از محدودیت $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq M$ که در آن x_i ها متغیرهای غیرپایه‌ای می‌باشند استفاده می‌شود. به محدودیت فوق محدودیت مصنوعی گفته می‌شود و داریم:

$$x_\circ + x_1 + x_2 + \dots + x_n = M$$

که در آن $x_\circ$ متغیر کمکی می‌باشد.

۴ـ۱۰ـ۲ـ الگوریتم حل

۱ـ مسئله را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم (تابع هدف Max و محدودیتها $\leq$ (ک.م))

۲ـ در صورتی که مسئله شرایط بهینگی را نداشته باشد محدودیت مصنوعی مناسب را به مسئله و جدول اضافه می‌کنیم.

۳ـ متغیر واجد شرایط ورود به پایه را انتخاب نموده و سپس متغیر $x_\circ$ را بدون هیچگونه شرطی از پایه خارج می‌کنیم که در این حالت شرایط بهینگی حاصل می‌شود.

۴ـ بقیه مراحل مثل روشهای قبل حل می‌شود.

۴ـ۱۱ـ قضیه فارکاس

دو مسئله روبرو را در نظر بگیرید. اگر A یک ماتریس $m\times n$ و b یک ماتریس $m\times 1$ باشد آنگاه ثابت کنید که:

الف ـ اگر مدل (I) جواب شدنی داشته باشد مدل (II) جواب ندارد.

ب ـ اگر مدل (I) جواب نداشته باشد مدل (II) حتماً جواب دارد.

(I)	(II)
$Ax=b$	$Ay\geq \circ$
$x\geq \circ$	$by<\circ$

در شکل تغییر یافته قضیه فارکاس نیز فقط و فقط یکی از دو سیستم زیر جواب خواهد داشت.

(I)	(II)
$Ax\leq b$	$Ay\leq \circ$
$x\geq \circ$	$y\leq \circ \ , \ by>\circ$

۴ـ۱۲ـ مسائل معادل در برنامه‌ریزی خطی

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$\{Max\ Z=Cx\ |Ax=b\ , x\geq \circ\}$

محدودیتهای این مسئله همگی بصورت تساوی بوده و یا اینکه بصورت تساوی درآمده‌اند. در اینصورت همواره روابط زیر برقرار خواهد بود.

۱ـ اگر محدودیتی در عدد $\lambda\neq\circ$ ضرب شود در اینصورت جوابهای مسئله اولیه تغییر نمی‌کند و متغیر متناظر آن محدودیت در مسئله ثانویه در $\frac{1}{\lambda}$ ضرب می‌شود و در هر دو مسئله مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند.

۲ـ اگر بردار ستونی یکی از متغیرها در عدد $\lambda\neq\circ$ ضرب شود، آنگاه متغیر مربوطه در $\frac{1}{\lambda}$ ضرب

می‌شود ولی جوابهای مسئله ثانویه تغییری نمی‌کند و تابع هدف در هردو مسئله بدون تغییر باقی خواهد ماند.

۳ـ اگر k برابر یک سطربه سطر دیگر اضافه شود، جوابهای بهینه مسئله اولیه و ثانویه هیچ تغییری نخواهد کرد.

۴ـ اگر k برابر یک ستون به ستون دیگر اضافه شود، جوابهای بهینه مسئله اولیه و ثانویه هیچ تغییری نخواهد کرد.

۵ـ اگر k برابر یک سطربه تابع هدف افزوده شود، جوابهای مسئله اولیه تغییری نخواهد کرد ولی جوابهای مسئله ثانویه بعلاوه k برابر خواهد شد و مقدار تابع هدف هر دو مسئله به اندازه ky_i تغییر می‌نماید.

۶ـ اگر k برابر یک ستون به سمت راست اضافه شوند جوابهای بهینه مسئله اولیه بعلاوه k برابر شده ولی جوابهای ثانویه تغییری نخواهد کرد و مقدار تابع هدف هردو مسئله به اندازه ky_i تغییر می‌نماید.

۷ـ هرگاه مقادیر سمت راست در $\lambda \neq 0$ ضرب شود، مقادیر متغیرهای مسئله اولیه λ برابر شده و متغیرهای مسئله ثانویه تغییری نمی‌کند و مقدار تابع هدف در هر دو مسئله λ برابر می‌شود.

۸ـ هرگاه سطر هدف مسئله‌ای در عدد $\lambda \neq 0$ ضرب شود، جوابهای مسئله اولیه تغییری نکرده ولی جوابهای ثانویه در λ ضرب می‌شود و مقدار هردو تابع هدف λ برابر می‌شود.

۹ـ اگر مقادیر سطر هدف در عدد α و سمت راست در عدد β ضرب شوند، مقادیر متغیرهای مسئله اولیه در β و مقادیر متغیرهای مسئله ثانویه در α ضرب می‌شوند و مقدار تابع هدف در هر دو مسئله در $\alpha\beta$ ضرب می‌شود.

تابع هدف $(\alpha, \beta) > 0$ سمت راست

۱۰ـ هریک از حالات فوق در صورتی‌که با هم ترکیب شوند، نتایج حاصله نیز با هم ترکیب خواهند شد.

۱۱ـ هرگاه همه مقادیر سمت راست مسئله‌ای بعلاوه k شود در اینصورت جواب مسئله تغییر یافتهٔ ثانویه، نسبت به مسئله اولیه دارای حالت زیر می‌باشد:

$$Z_{\text{جدید}} = Z_{\text{قدیم}} + \sum_{i=1}^{k} k_i y_i$$

$$Z = (b_i + k_i)\, y_i$$ هردو بهینه هستند

حال اگر مقدار تابع هدف مسئله اولیه، بهینه بوده و تغییر یافته بهینه نباشد، رابطه به شکل زیر است:

$$Z_{\text{جدید}} \leq Z_{\text{قدیم}} + \sum_{i=1}^{k} k_i y_i$$

و اگر تابع هدف مسئله اولیه بهینه نبوده و تغییر یافته آن، بهینه باشد رابطه بصورت $\geq$ ظاهر می‌شود و در صورتی‌که هردو بهینه باشد رابطه به شکل تساوی در می‌آید و بطور کلی مقدار تغییرات تابع هدف برابر رابطه زیر است:

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^{k} k_i y_i \qquad \text{و یا} \; \Delta Z = y_i^* \,.\, \Delta b_i$$

☜ **نکته:** اگر بخواهیم از چندین منبع موجود یک منبع انتخاب کنیم تا مقدار آن را افزایش دهیم، محدودیتی (منبعی) انتخاب می‌شود که باعث بهینه نمودن مقدار تابع هدف گردد و در حالت Max داریم:

$$\Delta Z = Max \left[y_i^* \,.\, \Delta b_i \right] \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

۵ تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتریک

۵ـ۱ـ تحلیل حساسیت

در مسائل برنامه‌ریزی خطی، پس از رسیدن به جواب بهینه نیاز می‌باشد تا تأثیر تغییرات احتمالی ضرایب و متغیر بر مقدار تابع هدف و جواب بهینه بررسی شود. تحلیل حساسیت شیوه‌ای جهت ارزیابی میزان حساسیت جواب بهینه و تابع هدف در مقابل تغییرات معین در مسئله می‌باشد. این تغییرات معمولاً به سه شکل زیر ظاهر می‌شوند.

۱ـ متغیرهای اساسی و جوابشان تغییر نکرده در نتیجه جواب بهینهٔ مسئله و تابع هدف بدون تغییر باقی می‌ماند.

۲ـ متغیرهای اساسی و جوابشان تغییر کرده و در نتیجه جواب بهینه مسئله و تابع هدف تغییر پیدا می‌کند.

۳ـ متغیرهای اساسی عوض نمی‌شوند ولی مقادیرشان تغییر پیدا می‌نماید.

۵ـ۲ـ حالات مختلف آنالیز حساسیت

الف) تاثیر تغییرات ضرایب در جواب بهینه
۱ـ تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف
۲ـ تغییرات ضرایب متغیرهای پایه‌ای تابع هدف
۳ـ تغییرات اعداد سمت راست
۴ـ تغییرات ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای
۵ـ تغییرات ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای

ب) تعیین حدود ضرایب به گونه‌ای که جواب بهینه تغییر نکند
۱ـ تعیین حدود ضرایب متغیرهای غیر پایه‌ای در تابع هدف
۲ـ تعیین حدود ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف
۳ـ تعیین حدود اعداد سمت راست
۴ـ تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای
۵ـ تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای

ج) تأثیر تغییرات ساختاری مسائل برنامه‌ریزی بر جواب بهینه
۱ـ اضافه نمودن یک متغیر جدید
۲ـ حذف یک متغیر غیراساسی (غیر پایه‌ای)
۳ـ حذف یک متغیر اساسی (پایه‌ای)
۴ـ اضافه کردن یک محدودیت جدید
۵ـ حذف یک محدودیت

۵ـ۳ـ تأثیر تغییرات ضرایب در جواب بهینه

۵ـ۳ـ۱ـ تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف

روش اول: با کمک فرمول

$$\overline{C}_N = C_B . B^{-1} . N - C_N$$
$$\overline{C}_j = C_B . B^{-1} a_j - C_j = z_j - C_j$$

مسئله حل می‌شود در حالت Max و یا اگر $z_j - C_j \geq 0$ باشد اعداد سطر تابع هدف در جدول سیمپلکس مثبت بوده و تأثیری در جواب ندارد و اگر $z_j - C_j < 0$ باشد در اینصورت آن متغیر شرایط ورود به پایه را داشته و پس از استاندارد نمودن، جدول سیمپلکس را حل می‌کنیم.
روش دوم: در این روش محدودیت مزدوج متناظر با این متغیر را نوشته و مقادیر جواب مسئله ثانویه را

از سطر صفر جدول بهینه اولیه بدست آورده و در محدودیت موردنظر قرار می‌دهیم اگر صدق کرد جواب بهینه فعلی تغییر نکرده در غیراینصورت بهینگی عوض می‌شود.

مثال ۱ : مسئله زیر و جدول نهایی آن را در نظر بگیرید:

$$Max\ z = -۵x_۱ + ۵x_۲ + ۱۳x_۳$$
$$-x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ \le ۳$$
$$۱۳x_۱ + ۴x_۲ + ۱۰x_۳ \le ۹۰$$
$$x_i \ge ۰$$

Max	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$s_۱$	$s_۲$	RHS
z	۰	۰	۲	۵	۰	۱۰۰
$x_۲$	−۱	۱	۳	۱	۰	۲۰
$s_۲$	۱۶	۰	−۲	−۴	۱	۱۰

در مثال ۱ اگر $C_۳ = ۸$ شود چه تاثیری در جواب بهینه دارد.

راه حل اول: $\overline{C}_۳ = C_B . B^{-۱} . a_۳ - C_۳ = (۵ \quad ۰) \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} - ۸ = ۱۵ - ۸ = ۷$

$$\overline{a}_۳ = B^{-۱} a_۳ = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

چون $\overline{C}_۳ = ۷ \ge ۰$ پس جواب تغییر نمی‌کند.

راه حل دوم: $۳y_۱ + ۱۰y_۲ \ge ۸ \Rightarrow ۳(۵) + ۹۰(۰) = ۱۵ > ۸$

در مسئله صدق می‌کند.

۵-۳-۲- تغییرات ضرایب متغیرهای پایه تابع هدف

در مثال ۱ اگر $C_۲$ به عدد ۴ تبدیل شود در جواب بهینه چه تأثیری دارد.

$$C_۲ = ۵ \rightarrow C_۲ = ۴$$

$$\overline{C}_N = C_B . B^{-۱} . N - C_N = [\,۴ \quad ۰\,] \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۱ \\ ۱۶ & -۲ & -۴ \end{bmatrix} - [\,-۵ \quad ۱۳ \quad ۰\,] = [\,۱ \quad -۱ \quad ۴\,]$$

بدلیل منفی شدن مقادیر $\overline{C}_N$ جدول دیگر بهینه نمی‌باشد بنابراین حل جدول سیمپلکس پس از پاشنه گردی ادامه یافته و نتایج زیر حاصل می‌شود.

z'	۱	۰	−۱	۴	۰	۸۰

$$z = \frac{۲۶۰}{۳} , \quad \begin{cases} s_۲ = \frac{۷۰}{۳} \\ x_۲ = \frac{۲۰}{۳} \end{cases}$$

بنابراین در این حالت C_B تغییر کرده و باعث تغییر در $Z_j - C_j$ می‌شود در اینصورت هر متغیری که منفی‌ترین ضریب را داشت وارد پایه شده در غیر اینصورت جواب تغییر نکرده ولی مقدار Z ممکن است تغییر کند.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف می‌تواند بر بهینگی مسئله تأثیر داشته باشد.

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف بر موجه بودن فضای جواب تأثیری ندارد.

☜ **نکته:** هرگونه تغییر در ضرایب تابع هدف اگر مقدار تابع هدف و جواب را تغییر دهد در جهت تابع هدف خواهد بود.

☜ **نکته:** هرگونه تغییرات در جواب با استفاده از سیمپلکس اولیه به جواب نهایی خواهد رسید.

۵-۳-۳- تغییرات اعداد سمت راست

$$\bar{b} = B^{-۱}.b$$

$$Z = C_B.B^{-۱}.b$$

با توجه به روابط فوق تغییرات لازم داده می‌شود اگر جواب $\bar{b}$ مثبت بود جدول مسئله موجه بوده و مقدار تابع هدف $(Z = C_B.B^{-۱}.b)$ تغییر پیدا می‌کند اگر $\bar{b}$ منفی بود با کمک سیمپلکس ثانویه به جواب بهینه می‌رسیم.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر داشته باشد.

☜ **نکته:** هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) بر بهینگی مسئله تاثیری نخواهد داشت.

نکته: هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) می‌تواند بر مقدار تابع هدف تأثیر داشته باشد.

نکته: هرگونه تغییرات در مقادیر سمت راست (b_i) در صورت منفی بودن با سیمپلکس ثانویه به جواب نهایی می‌رسد در اینصورت تغییرات تابع هدف در جهت عکس تابع هدف خواهد بود.

۵-۳-۴- تغییرات ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیر پایه‌ای (غیراساسی)

الف) هرگونه تغییر در بردار ضرایب یک متغیر غیرپایه‌ای $(\overline{a}_j = B^{-1}.a_j)$ مقدار $(\overline{C}_j = Z_j - C_j = C_B.B^{-1}.a_j - C_j)$ را تغییر می‌دهد فلذا اگر در حالت Max مقدار $\overline{C}_j \geq 0$ باشد جواب بهینه تغییر نمی‌کند (در حالت Min بودن تابع هدف باید، $\overline{C}_j \leq 0$) در غیراینصورت بهینگی بهم خورده و بردار a_j وارد پایه می‌شود که در اینصورت ممکن است مقدار Z نیز تغییر کند.

ب) در روش بعدی محدودیت مزدوج متناظر با متغیر موردنظر را می‌نویسیم. جوابهای ثانویه را از سطر صفر جدول بهینه اولیه بدست آورده و در محدودیت موردنظر امتحان می‌کنیم اگر این جوابها صدق کرد جواب بهینه تغییر نمی‌کند در غیر اینصورت بهینگی مسئله از بین خواهد رفت.

نتایج حاصله:

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیرپایه‌ای تأثیری بر موجه بودن مسئله ندارد.

$$\overline{b} = B^{-1}.b$$

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیرپایه‌ای ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد.

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر غیرپایه‌ای ممکن است بر بهینگی مسئله $(Z_j - C_j)$ تأثیر بگذارد.

۵-۳-۵- تغییرات ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای

هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژیکی یک متغیر پایه‌ای باعث بهم خوردن ماتریس پایه B و در نتیجه معکوس آن B^{-1} می‌گردد در این حالت تمام پارامترهای $\overline{b}$ و Z و ... تحت تأثیر قرار گرفته و بهتر است که مسئله از ابتدا حل شود. در این شرایط از محدودیت مزدوج نیز نمی‌توان استفاده نمود و بهترین راه‌حل، استفاده از سیمپلکس اولیه ـ ثانویه (سیمپلکس ضربدری) می‌باشد.

نتایج حاصله:

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر موجه بودن مسئله تأثیر می‌گذارد.
$(\bar{b} = B^{-1}.b)$

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر مقدار تابع هدف می‌تواند تأثیر بگذارد.

$(Z = C_B . B^{-1}.b)$

نکته: هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژی یک متغیر پایه‌ای بر بهینگی مسئله تأثیر می‌گذارد.

$(Z_j - C_j) = C_B . B^{-1}.a_j - C_j$

نکات مهم:

۱ـ اگر مسئله از حالت بهینگی خارج گردد از سیمپلکس اولیه جهت حل استفاده می‌شود.

۲ـ اگر مسئله از حالت موجه خارج گردد از سیمپلکس ثانویه جهت حل استفاده می‌شود.

۳ـ اگر مسئله از حالت بهینگی و موجه خارج گردد از سیمپلکس اولیه ـ ثانویه (ضربدری) جهت حل استفاده می‌شود.

۵ـ۴ـ تعیین حدود ضرایب به گونه‌ای که جواب بهینه تغییر نکند.

قبل از بیان حالتهای مختلف این بخش لازم است یادآوری گردد که می‌توان با کمک حدود ضرایب نیز تأثیر تغییرات ضرایب مطرح شده در بخش الف را بر جواب بهینه بررسی کرد. به این ترتیب اگر مقدار جدید در محدودهٔ مجاز ضریب موردنظر قرار داشت موجه بودن یا بهینگی تغییر نمی‌کند در غیر اینصورت تغییرات مؤثر خواهد بود.

۵ـ۴ـ۱ـ تعیین حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای در تابع هدف

از آنجائی‌که هرگونه تغییر در متغیرهای غیرپایه‌ای تابع هدف باعث تغییر C_j و در نتیجه $\bar{C}_j = Z_j - C_j = C_B . B^{-1}.a_j - C_j$ می‌شود. بنابراین باید حدود را به گونه‌ای تعریف کرد که در حالت Max مقدار $\bar{C}_j = Z_j - C_j \geq 0$ باقی بماند.

نکته: اگر بخواهیم حدود تغییرات ضرایب متغیرهای غیرپایه را محاسبه کنیم این تغییرات فقط برروی ضرایب ستونی خود آن متغیر (a_j) موثر بوده و بر بقیه ستونها تأثیری ندارد. همچنین این تغییرات تأثیر بر C_B نخواهد داشت.

شبه قیمت (قیمت سایه یا قیمت ثانویه): مشتق تابع هدف نسبت به مقادیر سمت راست برابر شبه قیمت می‌باشد در جدول بهینهٔ مسئلهٔ اولیه در حالت Max مقدار شبه قیمت، اعداد موجود در زیر متغیرهای کمکی در سطر صفر تابع هدف می‌باشد ($\overline{C}_j$ مربوط به متغیرهای کمکی) و در جدول بهینهٔ مسئلهٔ ثانویه در حالت Min اعداد سمت راست مربوط به y_i ها می‌باشد پس در حالت بهینگی جداول اولیه (Max) و ثانویه (Min) شبه قیمت بصورت زیر است:

y_j یا $\overline{b}_j$ مسئله ثانویه $(Min) = \overline{C}_j$ متغیرهای کمکی مسئله اولیه (Max)

و یا:

شبه قیمت (قیمت سایه) $\dfrac{\partial z}{\partial b_j} = y_j \qquad Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots$

☜ **نکته:** در حالت بهینه اگر تابع هدف بصورت z- باشد آنگاه شبه قیمت‌ها در منفی ضرب می‌شود.

☜ **نکته:** در جداول غیر از جداول بهینه، به اعداد زیر متغیرهای کمکی در سطر صفر، سهم مشارکت در سود آن منبع می‌گویند.

☜ **نکته:** هرگاه میزان موجودی یک منبع به صفر نرسیده باشد، قیمت سایه آن صفر و برعکس، هنگامی که موجودی یک منبع به صفر رسیده باشد قیمت سایه آن غیر صفر خواهد شد.

☜ **نکته:** اگر قیمت سایه یک منبع از قیمت بازار آن بیشتر باشد آنگاه تا جایی که این رابطه برقرار نباشد باید میزان استفاده از آن منبع را افزایش دهیم.

☜ **نکته:** منبعی که قیمت سایه‌ای بیشتری دارد بهتر است افزایش یابد و برعکس.

☜ **نکته:** در هر مسئله در مراحل مختلف، مشتق تابع هدف نسبت به متغیر jام برابر هزینه تقلیل یافته آن متغیر می‌باشد $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_j} = \overline{C}_j\right)$ هزینه تقلیل یافته برای متغیرهای غیرپایه‌ای تعریف شده و ضریب آن متغیر در سطر صفر جدول نهایی می‌باشد.

نکات اساسی:

۱- اگر تابع هدف بصورت Max باشد حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه x_j (C_j') چنین تعریف می‌شود:

هزینه تقلیل یافته متغیر x_j $(\overline{C}_j)$ + ضریب متغیر x_j در تابع هدف اولیه $(C_j) \geq C_j'$

$\overline{C}_j = C_B . B^{-1} . a_j - C_j \quad , \quad$ میزان تغییر $\theta \leq \overline{C}_j$

۲ـ اگر تابع هدف بصورت Min باشد حدود ضرایب متغیرهای غیرپایه $x_j\,(C_j')$ چنین تعریف می‌شود.

هزینه تقلیل یافته متغیر $x_j\,(\overline{C}_j)$ + ضریب متغیر x_j در تابع هدف اولیه $(C_j) \geq C_j'$

۳ـ مقدار ضریب متغیر x_j در تابع هدف اولیه (C_j) باید در حدودی که برای این متغیر بدست می‌آوریم، صدق نماید.

۵ـ۴ـ۲ـ تعیین حدود ضرایب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف

در این شرایط، پارامتر C_B تغییر کرده و باعث تغییر در ضرایب تمام متغیرهای غیرپایه در تابع هدف $(\overline{C}_j = Z_j - C_j)$ می‌شود بنابراین جهت تعیین حدود تغییرات ضرایب متغیرهای پایه‌ای تابع هدف مقادیر تابع $\overline{C}_j = Z_j - C_j = C_B . B^{-1} . N - C_j$ را با دخالت دادن مقدار پارامتر θ جهت کلیه متغیرهای غیرپایه‌ای محاسبه نموده و اشتراک نواحی حاصله، جواب نهایی خواهد شد.

نکات اساسی

۱ـ اگر تابع هدف بصورت Max باشد حدود ضرایب متغیرهای پایه را با کمک ضرایب متغیرهای غیرپایه‌ای حساب می‌کنیم. در این حالت باید $\overline{C}_N \geq 0$ باشد یعنی:

$$\overline{C}_N = C_B . B^{-1} . N - C_N = C_B . \overline{N} - C_N \geq 0 \quad \text{و یا} \quad \overline{C}_N = (C_{B_j} + \theta_j) B^{-1} . N - C_N \geq 0$$

۲ـ اگر تابع هدف بصورت Min باشد علامت به صورت $\overline{C}_N \leq 0$ خواهد بود.

۳ـ مقدار ضرایب متغیر x_{B_j} در تابع هدف اولیه باید در حدود حاصل شده صدق نماید.

۵ـ۴ـ۳ـ تعیین حدود اعداد سمت راست

برای بدست آوردن حدود تغییرات b باید رابطه $\overline{b} = B^{-1} . b \geq 0$ برقرار باشد این وضعیت چه در حالت Max و چه در حالت Min باید صادق باشد سپس با استفاده از اشتراک مقادیر حاصله از رابطه فوق حدود ضرایب بدست می‌آید. در این وضعیت نیز باید مقدار b در جدول اولیه در حدود تعریف شده جدید صدق نماید.

۵ـ۴ـ۴ـ تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای غیرپایه‌ای

هرگونه تغییر در ضرایب تکنولوژیکی باعث تغییر a_j و در نتیجه تغییر در

$\overline{C}_j = Z_j - C_j = C_B . B^{-1} . a_j - C_j$ شده و ممکن است باعث بهم خوردگی بهینگی مسئله گردد بنابراین حدود به گونه‌ای تعریف می‌شود که بهینگی مسئله حفظ شود.

نکات اساسی:

۱ـ اگر تابع هدف بصورت $Max\ Z$ باشد آنگاه $\overline{C}_j \geq 0$ و اگر $Max\ (-Z)$ باشد آنگاه $\overline{C}_j \leq 0$

۲ـ اگر تابع هدف بصورت $Min\ Z$ باشد آنگاه $\overline{C}_j \leq 0$ و اگر $Min\ (-Z)$ باشد آنگاه $\overline{C}_j \geq 0$

۳ـ حدود تغییرات a_{ij} می‌تواند از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد با این وجود باید مقدار a_{ij} مسئله اولیه در حدود تعریف شده جدید صدق نماید.

۵ـ۴ـ۵ـ تعیین حدود ضرایب تکنولوژیکی (فنی) جهت متغیرهای پایه‌ای

هرگاه بخواهیم حدود تغییرات ضرایب تکنولوژیکی متغیرهای پایه را بررسی نمائیم باتوجه به اینکه در این حالت ماتریس B و B^{-1} تغییر می‌کند بهتر است که مسئله را از ابتدا حل نمود ضمن اینکه می‌توان با تشکیل B و B^{-1} با وجود پارامتر مجهول صحت روابط $\overline{C}_N \geq 0$ و $\bar{b} \geq 0$ را بررسی نموده و حدود مشترک را به گونه‌ای بدست آورد که پایه بهینه فعلی عوض نشود.

بعنوان مثال اگر داشته باشیم $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و بخواهیم حدود $a_{21} = \theta$ را بدست آوریم داریم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\theta} \\ 0 & \dfrac{1}{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} . b \qquad \overline{C}_N = C_B . B^{-1} . N - C_N$$

۵ـ۵ـ تأثیر تغییرات ساختاری مسائل برنامه‌ریزی بر جواب بهینه

۵ـ۵ـ۱ـ اضافه کردن یک متغیر جدید

الف) اگر متغیر جدیدی به مسئله اضافه شود در اینصورت بر $\overline{C}_j = Z_j - C_j = C_B . B^{-1} . a_j - C_j = y . a_j - C_j$ اثر می‌گذارد فلذا متغیر جدید x_j را به ستونهای جدول نهایی اضافه نموده و $\overline{C}_j$ آنرا محاسبه می‌کنیم اگر در حالت Max مقدار $\overline{C}_j \geq 0$ باشد اضافه نمودن متغیر جدید تأثیری در بهینگی مسئله نداشته و اگر $\overline{C}_j \leq 0$ باشد در اینصورت بهینگی

مسئله بهم می‌خورد و متغیر x_j وارد پایه شده و با تست حداقل نسبت، متغیر خروجی را یافته و باکمک سیمپلکس معمولی تا رسیدن به جواب بهینه، حل مسئله را ادامه می‌دهیم. در حالتی‌که تابع هدف بصورت Min باشد اگر $\overline{C}_j \leq 0$ باشد بهینگی مسئله حفظ و در حالت $\overline{C}_j \geq 0$ مسئله دیگر بهینه نخواهد بود.

ب) در روش بعدی محدودیت مزدوج مربوط به متغیر جدید نوشته شده و جوابهای دوگان را از سطر صفر تابع هدف بدست آورده و در داخل محدودیت امتحان می‌کنیم اگر جوابهای دوگان (y) در محدودیت صدق نمود مسئله بهینه باقی‌مانده در غیر اینصورت از بهینگی خارج می‌شود.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید تأثیری بر موجه بودن مسئله ندارد.

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (در صورت ورود به پایه)

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد $(\overline{C}_j = Z_j - C_j)$

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک متغیر جدید می‌تواند باعث بهتر شدن جواب بهینه گردد (نمی‌تواند بدتر کند)

☜ **نکته:** در صورت ورود متغیر جدید به پایه باکمک سیمپلکس اولیه مسئله به جواب بهینه خواهد رسید.

۵-۵-۲- حذف یک متغیر غیراساسی (غیرپایه‌ای)

هرگاه متغیری در پایه (بهینه) نباشد برای حذف آن کافیست فقط ستون آن متغیر را از مسئله و جدول سیمپلکس حذف کنیم این حذف هیچ تأثیری بر مقدار تابع هدف، موجه بودن مسئله و یا بهینگی مسئله نخواهد داشت.

۵-۵-۳- حذف یک متغیر اساسی (پایه‌ای)

هرگاه متغیری در پایه باشد ابتدا باید متغیر را از پایه خارج نمود جهت این کار به‌کمک سیمپلکس ثانویه متغیر موردنظر را بعنوان متغیر خروجی در نظر گرفته و باکمک تست حداقل نسبتها متغیر ورودی را مشخص کرده و وارد پایه می‌نمائیم و جدول را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم. سپس

ستون آن متغیر را از جدول سیمپلکس حذف می‌نمائیم. در طی مراحل حل جهت رسیدن به جواب بهینه نباید متغیر موردنظر وارد پایه گردد.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** حذف یک متغیر اساسی ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تواند بدتر شود).

☜ **نکته:** حذف یک متغیر اساسی ممکن است بر موجه بودن جوابهای اساسی تأثیر داشته باشد.

☜ **نکته:** حذف یک متغیر اساسی ممکن است بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد $(\overline{C}_j = Z_j - C_j)$

۵-۵-۴-اضافه کردن یک محدودیت جدید

در صورت اضافه نمودن یک محدودیت جدید به مسئله، جوابهای بهینه فعلی را در محدودیت جدید قرار می‌دهیم اگر صدق نمود و رابطه برقرار بوده محدودیت جدید تأثیری در مسئله و جواب بهینه نخواهد داشت. در صورتی که جواب بهینه فعلی در محدودیت جدید صدق ننماید آنگاه محدودیت جدید را به شکل کوچکتر مساوی $(\leq)$ تبدیل نموده و با کمک متغیر کمکی محدودیت را به تساوی تبدیل می‌نمائیم. حال متغیر کمکی متناظر با محدودیت جدید را به آخر سطر مربوط به متغیرهای اساسی و ستون مربوط به متغیرهای کمکی اضافه کرده، ضرایب محدودیت جدید را وارد جدول نموده و با کمک روش سیمپلکس ثانویه تا رسیدن به جواب بهینه مسئله را ادامه می‌دهیم:

مثال: مسئله زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید:

$$Max\ Z = -۵x_۱ + ۵x_۲ + ۱۳x_۳$$
$$-x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ \leq ۳$$
$$۱۳x_۱ + ۴x_۲ + ۱۰x_۳ \leq ۹۰$$
$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

Max	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$s_۱$	$s_۲$	RHS
z	۰	۰	۲	۵	۰	۱۰۰
$x_۲$	−۱	۱	۳	۱	۰	۲۰
$s_۲$	۱۶	۰	−۲	−۴	۱	۱۰

اگر محدودیتی به صورت $۲x_۱ + ۳x_۲ + ۵x_۳ \leq ۵۰$ به مسئله اضافه شود چه تأثیری در جواب بهینه خواهد داشت؟

$$۲(۰) + ۳(۲۰) + ۵(۰) = ۶۰ \not\leq ۵۰ \Rightarrow ۲x_۱ + ۳x_۲ + s_۳ = ۵۰$$

I) اضافه نمودن محدودیت جدید

	Max	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	RHS
	z	۰	۰	۲	۵	۰	۰	۱۰۰
	$x_۲$	-۱	۱	۳	۱	۰	۰	۲۰
(I)	$s_۲$	۱۶	۰	-۲	-۴	۱	۰	۱۰
	$s_۳$	۲	۳	۵	۰	۰	۱	۵۰
	z	۰	۰	۲	۵	۰	۰	۱۰۰
	$x_۲$	-۱	۱	۳	۱	۰	۰	۲۰
(II)	$s_۲$	۱۶	۰	-۲	-۴	۱	۰	۱۰
	$s_۳$	۵	۰	-۴	-۳	۰	۱	-۱۰

II) یکه نمودن ستون $x_۲$ و ادامه دادن حل جدول با روش سیمپلکس ثانویه که در آن $s_۳$ از پایه خارج می‌شود.

جواب بهینه: $x_۲ = \frac{۲۵}{۲}$, $x_۳ = \frac{۵}{۲}$, $z = ۹۵$

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید تاثیری بر شرط بهینگی مسئله ندارد.

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید می‌تواند بر موجه بودن مسئله تاثیر داشته باشد.

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تواند بدترشود)

☜ **نکته:** اضافه نمودن یک محدودیت جدید می‌تواند جواب پایه اساسی را تغییر دهد.

اگر محدودیت بصورت مساوی (=) باشد ممکن است جواب داشته یا نداشته باشیم.

۵-۵-۵- حذف یک محدودیت

در این شرایط دو حالت اتفاق خواهد افتاد:

۱ـ در حالت اول متغیر کمکی متناظر با آن محدودیت در پایه قرار ندارد و در نتیجه مقدار آن صفر است. در این‌صورت آن محدودیت فعال می‌باشد. بنابراین متغیر کمکی متناظر را با روش سیمپلکس معمولی وارد پایه نموده و باکمک تست حداقل نسبتها متغیر دارای شرایط خروج را از پایه خارج می‌کنیم سپس سطر و ستون متغیر کمکی متناظر آن محدودیت را از جدول حذف نموده و جدول را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم.

۲ـ در حالت دوم متغیر کمکی متناظر با آن محدودیت در پایه قرار دارد و در نتیجه مقدار آن صفر نمی‌باشد در این صورت آن محدودیت فعال نبوده و به راحتی می‌توان سطر و ستون متغیر کمکی متناظر آن محدودیت را بدون تغییر در جواب بهینه از جدول سیمپلکس حذف نمود.

نتایج حاصله:

☜ **نکته:** حذف یک محدودیت بر موجه بودن مسئله تأثیری نخواهد داشت.

☜ **نکته:** حذف یک محدودیت ممکن است مقدار تابع هدف را تغییر دهد (جواب بهینه می‌تواند بهتر شود)

☜ **نکته:** حذف یک محدودیت ممکن است جواب پایه اساسی را تغییر دهد.

۵ـ۶ـ قانون صد در صد

چنانچه بخواهیم تأثیر تغییرات همزمان چند پارامتر را در مسئله بدانیم می‌توان از قانون ۱۰۰٪ و فرمولهای زیر استفاده نمود.

$$\text{تغییرات همزمان ضرایب تابع هدف} = \sum_{C_i} \left(\frac{\text{مقدار تغییرات حاصله}}{\text{حداکثر تغییرات مجاز}} \right)$$

$$\text{تغییرات همزمان مقادیر سمت راست} = \sum_{b_i} \left(\frac{\text{مقدار تغییرات حاصله}}{\text{حداکثر تغییرات مجاز}} \right)$$

اگر مقدار عبارات فوق کمتر از یک (یا ۱۰۰٪) باشد آنگاه تغییرات همزمان فوق تاثیری بر جواب بهینه نداشته و در غیر اینصورت باکمک سیمپلکس مسئله را تا رسیدن به حل بهینه ادامه می‌دهیم.

۵ـ۷ـ برنامه‌ریزی پارامتریک

در برنامه‌ریزی پارامتری، مدل علاوه براینکه تحت تأثیر پارامترها و متغیرهایی است که در

برنامه‌ریزی خطی تعریف می‌شود، تحت تاثیر پارامتر دیگر که معمولاً با θ نمایش داده می‌شود نیز واقع می‌شود. برنامه‌ریزی پارامتری از نظر عملیاتی و محاسباتی بسیار شبیه آنالیز حساسیت می‌باشد با این تفاوت که در تحلیل حساسیت تغییرات پارامترها را بطور مستقل از یکدیگر مورد بررسی قرارمی دهیم ولی در برنامه‌ریزی پارامتری تغییر پارامترها بطور همزمان محاسبه شده و تغییرات پیوستهٔ پارامترها در فواصل مشخصی بررسی می‌شود در برنامه‌ریزی خطی پارامتری ۴ حالت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱ـ برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف (C_j)

۲ـ برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست (b_i)

۳ـ برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب فنی (a_{ij})

۴ـ برنامه‌ریزی پارامتری همزمان ضرایب تابع هدف، اعداد سمت راست و ضرایب فنی

۵ـ۷ـ۱ـ برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف (C_j)

مدل کلی برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$Max \text{ یا } (Min)\ Z(\theta) = \sum_{j=۱}^{n} (c_j + \alpha_j \theta) x_j$$

$$S.t: \begin{cases} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \le (\text{یا } \ge \text{ یا } =)\ b_i & i = ۱, ۲, \dots, m \\ x_j \ge ۰ \quad , \quad \theta > ۰ \end{cases}$$

که در آن:

θ: متغیری است مثبت که برای نشان دادن اثر تغییرات ناشی از عوامل تولید روی میزان سود فعالیتها بکار می‌رود.

α_j: مقدار ثابتی است که معرف آهنگ نسبی تغییرات تابع هدف می‌باشد و در واقع میزان افزایش یا کاهش فعالیتها را نمایش می‌دهد.

☜ **نکته:** در برنامه‌ریزی پارامتری α_j تغییرات را نمایش می‌دهد و θ اثر این تغییرات را بر موجه بودن یا بهینه بودن جواب نشان می‌دهد.

الگوریتم حل تغییرات پارامتری C_j

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء $\theta = 0$ حل کرده تا به جواب بهینه برسیم.
گام دوم: با استفاده از روش تحلیل حساسیت، تغییر ضرایب تابع هدف $\Delta C_j = \alpha_j \theta$ را در سطر صفر وارد می‌کنیم.
گام سوم: مقدار θ را آنقدر افزایش می‌دهیم تا ضریب یکی از متغیرهای غیراساسی در سطر صفر منفی شود (و یا θ تا حداکثر مقدار مجاز تعیین شده افزایش یابد) اگر چنین متغیری وجود نداشت به جواب بهینه رسیده‌ایم.
گام چهارم: متغیری که ضریب آن منفی شده بعنوان متغیر ورودی انتخاب و جواب جدید را محاسبه نموده و به گام سوم برمی‌گردیم.

نکته: هر نمودار ترسیمی θ و $Z(\theta)$ به ازای θهای محاسبه شده در برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب تابع هدف در صورتی که تابع هدف *Max* باشد بصورت یک خط شکسته محدب $(\vee)$ بوده و در حالت *Min* بصورت یک خط شکسته مقعر $(\wedge)$ می‌باشد.

نکته: تغییرات پارامتری (C_j) می‌تواند بر بهینگی مسئله تأثیر بگذارد ولی بر موجه بودن مسئله تأثیری نخواهد داشت.

۵-۷-۲- برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست (b_i)

فرم عمومی این مدل بصورت زیر است:

$$Max \text{ یا } (Min)\ Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$S.t: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\text{یا } \ge \text{ یا } =) b_i + \alpha_i \theta & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \ge 0 \quad , \quad \theta > 0 \end{cases}$$

الگوریتم حل تغییرات پارامتری b_i:

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء $\theta = 0$ حل نموده و جواب بهینه را بدست می آوریم.
گام دوم: با استفاده از تحلیل حساسیت اثر تغییرات در مقادیر سمت راست محدودیتها $(\Delta b_i = \alpha_i \theta)$ را در ستون سمت راست جدول محاسبه می‌کنیم.
گام سوم: مقدار θ را آنقدر افزایش می‌دهیم (یا به اندازه حداکثر مقدار مجاز تعیین شده) تا مقدار یکی از متغیرهای اساسی در ستون سمت راست منفی شود. اگر چنین متغیری یافت نشد به جواب بهینه

رسیده‌ایم.
گام چهارم: متغیر منفی را بعنوان متغیر خروجی انتخاب و با روش سیمپلکس ثانویه جواب جدید را بدست آورده و به گام سوم باز می‌گردیم.

نکته: نمودار ترسیمی θ و $Z(\theta)$ به ازاء θهای محاسبه شده در برنامه‌ریزی پارامتری اعداد سمت راست وقتی که تابع هدف بصورت Max باشد یک خط شکسته مقعر $(\vee)$ بوده و در حالت Min بصورت یک خط شکسته محدب $(\wedge)$ می‌باشد.

نکته: اعمال تغییرات پارامتری b_i می‌تواند بر موجه بودن مسئله تأثیر بگذارد ولی تأثیری بر بهینگی نخواهد داشت.

۵-۷-۳-برنامه‌ریزی پارامتری ضرایب فنی (a_{ij})

فرم عمومی این مدل چنین است.

$$Max \text{ یا } (Min)\, Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$$S.t: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \alpha_i \theta) \leq (\text{یا } \geq \text{ یا } =)\, b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j \geq 0 \quad , \quad \theta > 0 \end{cases}$$

در این حالت ابتدا مسئله با $\theta=0$ حل نموده تا جواب بهینه بدست آید سپس با استفاده از روش تحلیل حساسیت a_{ij} های جدید و S_j' های جدید را بدست می‌آوریم. برای متغیرهای غیراساسی مسئله وقتی بهینه می‌باشد که S_j' های مثبت باشد. برای متغیرهای اساسی بعد از بدست آوردن a_{ij} و S_j' های جدید ابتدا بردارهای مربوط به متغیرهای اساسی را یکه کرده و سپس بهینگی یا موجه بودن مسئله را بررسی نموده و باکمک سیمپلکس ثانویه (غیرموجه بودن مقادیر سمت راست) یا سیمپلکس اولیه (غیربهینه بودن سطر صفر) مسئله را حل می‌کنیم.

نکته: اعمال تغییرات پارامتری ضرایب فنی (a_{ij}) می‌تواند بر موجه بودن یا بهینگی مسئله تأثیرگذار باشد.

۵-۷-۴-برنامه‌ریزی پارامتری همزمان ضرایب تابع هدف، اعداد سمت راست و ضرایب فنی

فرم عمومی این مدل بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$(Min)\, Z(\theta) = \sum_{j=1}^{n} (C_j + \alpha_j \theta)\, x_j$$

$$S.t:\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}(a_i+\alpha_i\theta)x_j \le (\text{یا} \ge \text{یا} =) b_i+\alpha_i\theta \\ x_j \ge 0 \quad , \quad \theta > 0\end{cases}$$

الگوریتم حل بصورت زیر می‌باشد:

گام اول: مسئله را با روش سیمپلکس به ازاء $\theta = 0$ حل نموده تا جواب بهینه حاصل شود.

با استفاده از تحلیل حساسیت اثر تغییرات Δb_i , Δc_j , Δa_{ij} را محاسبه نموده و در جدول نهایی اعمال می‌کنیم.

مقدار θ را آنقدر افزایش می‌دهیم (یا به اندازه حداکثر مقدار مجاز تعیین‌شده) تا مقدار یکی از متغیرهای اساسی در ستون سمت راست و یا ضریب یک متغیر غیراساسی در سطر صفر منفی گردد.

اگر چنین متغیری پیدا نشد به جواب بهینه رسیده‌ایم.

از این متغیر بعنوان متغیر اساسی خروجی (در صورتی‌که یکی از اعداد سمت راست منفی گردد) یا متغیر اساسی ورودی (در صورتی‌که مقدار یکی از متغیرهای غیراساسی در سطر صفر منفی گردد) استفاده نموده و به ترتیب با روش سیمپلکس ثانویه یا اولیه جواب جدید را بدست آورده و به گام سوم باز می‌گردیم.

☜ **نکته:** اعمال تغییرات پارامتری همزمان C_j و b_i و a_{ij} می‌تواند بر موجه بودن یا بهینگی مسئله تاثیرگذار باشد

۶ مدلهای حمل و نقل و تخصیص

۶ـ۱ـ برنامه‌ریزی حمل و نقل

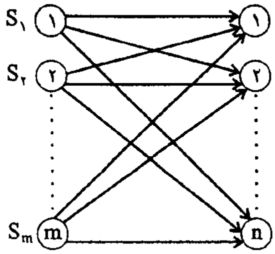
مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌تواند به کمک سیمپلکس حل شود، وقتی که مسئله حمل و نقل به فرم یک مسئله برنامه‌ریزی خطی نوشته می‌شود ، قابل حل با روش سیمپلکس خواهد بود. ولی باتوجه به اینکه مسئله حمل و نقل دارای ساختار خاصی می‌باشد آن را می‌توان به کمک تکنیک‌های کاراتری مثل برنامه‌ریزی حمل و نقل حل نمود.

۶ـ۱ـ۱ـ دلایل استفاده از مسئله حمل و نقل

۱ـ بسیاری از مسائل واقعی که در طبیعت وجود دارد بدین روش فرموله می‌شود.
۲ـ بدلیل ساختار خاص مسائل حمل و نقل با الگوریتم‌های کاراتر از روش سیمپلکس قابل حل می‌باشد.
۳ـ این الگوریتم‌ها در صورتی که اطلاعات اولیه عدد صحیح باشد جواب صحیح را حاصل می‌سازد.

مدل حمل و نقل به شکل شبکه‌ای در نظر گرفته می‌شود که گره‌های آن نمایانگر مقاصد و مبادی می‌باشد.

حال هرگاه در مدل برنامه‌ریزی حمل و نقل گره‌های واسطه وجود نداشته باشد و حمل و نقل از مبدأها به مقاصد بطور مستقیم انجام پذیرد، مدل حمل و نقل ساده حاصل شده است در غیراینصورت



۶-۱-۲-مدل مسئله حمل و نقل

$$Min\ Z = \sum_{i=۱}^{m} \sum_{j=۱}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{j=۱}^{m} x_{ij} = s_i \qquad (i = ۱, ۲, \dots, m$$ (محدودیتهای عرضه از مبدأ

$$\sum_{i=۱}^{n} x_{ij} = d_j \qquad (j = ۱, ۲, \dots, n$$ (محدودیتهای تقاضا در مقصد

$$x_{ij} \geq ۰$$

Z: تابع هدف مدل که عبارت است از تعیین مقدار کالایی که باید از مبدأ i به مقصد j حمل شود تا کل هزینه حمل و نقل حداقل گردد.

مبدا \ مقصد	۱	۲	....	n	عرضه Si
۱	$C_{۱۱}$ $x_{۱۱}$	$C_{۱۲}$ $x_{۱۲}$		$C_{۱n}$ $x_{۱n}$	$S_۱$
۲	$C_{۲۱}$ $x_{۲۱}$	$C_{۲۲}$ $x_{۲۲}$		$C_{۲n}$ $x_{۲n}$	$S_۲$
⋮					⋮
m	$C_{m۱}$ $x_{m۱}$	$C_{m۲}$ $x_{m۲}$		C_{mn} x_{mn}	S_m
تقاضا dj	$d_۱$	$d_۲$	....	d_n	

x_{ij}: مقدار کالایی که از مبدأ i به مقصد j حمل می‌شود.

C_{ij}: هزینه حمل هر واحد کالا از مبدأ i به مقصد j

s_i: مقدار عرضه مبدأ iام

d_j: مقدار تقاضای مقصد jام

m: تعداد مبدأها (عرضه)

n: تعداد مقصدها (تقاضا)

۶-۱-۳-فرضیات مدل حمل و نقل

۱- هزینه حمل هر واحد کالا معین است.

۲- تقاضای مقاصد از طریق عرضه مستقیم کالا از مبدأها تامین می‌شود.

۳- امکان ارسال کالا بین دو مبدأ یا بین دو مقصد وجود ندارد.

مبدأهایی و از چه مسیری انجام شود.

نکته: هرگاه در مسئله حمل و نقل، بهره‌وری حمل کالا مورد بررسی قرار گیرد، تابع هدف از نوع حداکثر کردن (Max) می‌شود ولی غالباً مسائل در حالت حداقل نمودن (Min) مطرح خواهد شد.

۶ـ۱ـ۴ـ خواص مدل حمل و نقل

۱ـ تمام ضرایب فنی در تمام محدودیتها برای متغیرهای تعریف شده (مسیرهایی که در شبکه موجودند) برابر ۱ می‌باشد و برای سایر متغیرها برابر صفر است.

۲ـ در هر ستون از ماتریس ضرایب دقیقاً دو عدد ۱ و مابقی صفر می‌باشند یعنی هر متغیر تصمیم‌گیری فقط در ۲ محدودیت تکرار شده است. (یکبار در محدودیتهای عرضه و یکبار در محدودیتهای تقاضا)

۳ـ معمولاً مقادیر عرضه و تقاضا (سمت راست) عدد صحیح می‌باشند.

نکته: هر مسئله حمل و نقل همواره دارای جواب موجه و عدد صحیح خواهد بود و هیچگاه حالات بدون جواب بودن یا نامحدود بودن رخ نمی‌دهد.

دلایل اینکه جواب مسئله حمل و نقل همواره عدد صحیح است:

۱ـ عدد صحیح بودن مقادیر سمت راست.

۲ـ در روش حمل و نقل از عملیات جمع و تفریق استفاده شده و اصلاً حالت ضرب و تقسیم وجود ندارد. زیرا تمامی ضرایب تکنولوژی صفر یا یک می‌باشند.

۳ـ مقدار عنصر پاشنه گردی در مقایسه با روش سیمپلکس همواره عدد ۱ می‌باشد. بعبارت بهتر دترمینان ماتریس ضرایب همواره صفر یا ۱± می‌باشد.

۶ـ۱ـ۵ـ نکات اساسی مدل حمل و نقل

۱ـ در هر مسئله حمل و نقل (که در آن m تعداد محدودیتهای عرضه و n تعداد محدودیتهای تقاضا باشد) در مجموع دارای $m+n$ محدودیت می‌باشد.

۲ـ تعداد متغیرهای تصمیم مدل حمل و نقل برابر $m.n$ متغیر می‌باشد.

۳ـ تعداد ضرایب تکنولوژی مساوی با عدد یک $2mn$ می‌باشد.

۴ـ تعداد ضرایب تکنولوژی مساوی با عدد صفر، $mn(m+n) - 2mn$ می‌باشد.

۵ـ اگر جمع کل عرضه و تقاضا برابر باشد $(\sum^m s_i = \sum^n d_j)$، آنگاه مسئله متوازن می‌باشد.

۶ـ اگر کل عرضه از کل تقاضا کمتر باشد $(\sum^m s_i < \sum^n d_j)$ مسئله نامتوازن است که در این حالت با

معرفی عرضهٔ مجازی جدید، به اندازه $(\sum^{n} d_j - \sum^{m} s_i)$ به سطر جدول اضافه می‌کنیم. در اینصورت هزینه‌های حمل و نقل آن سطر $(C_{ij} = ۰)$ مساوی صفر خواهد شد.

۷ـ اگر کل عرضه از کل تقاضا بیشتر باشد $(\sum^{m} s_i > \sum^{n} d_j)$ مسئله نامتوازن بوده که در اینصورت با معرفی یک تقاضای مجازی جدید به اندازه $(\sum^{m} s_i - \sum^{n} d_j)$ به ستون جدول اضافه می‌شود که در این حالت هزینه حمل و نقل تقاضای مجازی $(C_{ij} = ۰)$ خواهد بود.

۸ـ در حالت حمل و نقل نامتوازن تعداد کل محدودیت‌ها $(m+n+۱)$ و تعداد متغیرها $m \times (n+۱)$ یا $(m+۱) \times n$ خواهد بود.

۹ـ هرگاه مسئله حمل و نقل متوازنی دارای m مبدأ عرضه و n مقصد تقاضا حل شود ، حداکثر دارای $(m+n-۱)$ متغیر پایه می‌باشد. بعبارت بهتر مرتبه ماتریس ضرایب برابر $(m+n-۱)$ خواهد بود و تعداد بردارهای مستقل نیز حداکثر $m+n-۱$ خواهد بود. اگر مسئله نامتوازن باشد $(m+n-۱)$ به $m+n$ تبدیل می‌شود.

۱۰ـ هرگاه مسئله حمل و نقل به روش سیمپلکس حل شود، تعداد پایه‌ها برابر تعداد محدودیتهای مسئله $(m+n)$ می‌باشد که یکی از آنها برابر صفر خواهد بود. بنابراین هرگاه مسئله حمل و نقل به روش سیمپلکس حل شود حتماً جواب منحط خواهد داشت.

۶ـ۱ـ۶ـ شروط لازم و کافی در مسئله حمل و نقل

الف) برای وجود جواب: هر مسئله حمل و نقل در صورتی که متوازن یا نامتوازن باشد جواب دارد و نیازی به هیچگونه شرطی نخواهد داشت.

ب) برای جواب عدد صحیح: باید مقادیر عرضه و تقاضا عدد صحیح باشد. در صورتی‌که مسئله به‌گونه‌ای مطرح شود که ضرایب تکنولوژی صفر یا یک نباشد، باید با روابط ریاضی ضرایب را صفر و یک نمود.

ج) برای وجود جواب بهینه: به ازای جواب قابل قبول مسئله اولیه، حل مزدوج متناظری وجود داشته باشد که جواب آن نیز قابل قبول بوده و دارای مقادیر تابع هدف یکسانی باشند.

۶ـ۲ـ الگوریتم حل مدل حمل و نقل

قدم اول) تعیین جواب اساسی موجه اولیه با یکی از روشهای مقابل:

۱ـ روش گوشه شمال غربی (سمت چپ بالا)
۲ـ روش کمترین هزینه سطری یا ستونی
۳ـ روش کمترین هزینهٔ ماتریسی
۴ـ روش تقریبی وگل

نکته: براساس تجربه غالباً جوابهای حاصل از روشهای فوق به ترتیب از پائین به بالا به جواب بهینه نزدیکتر می‌باشند.

قدم دوم) تعیین جواب بهینه از جواب اساسی بهینه اولیه با یکی از روشهای مقابل:

۱ـ روش مستقیم (اولیه یا پله سنگ)
۲ـ روش مضارب (مزدوج، توزیع تعدیل شده، *MODI*)

نکته: اگر چنانچه به جواب بهینه نرسیدیم ، با انتخاب متغیر ورودی و خروجی و تعیین جواب اساسی موجه جدید قدم دوم را تا رسیدن به حل نهایی ادامه می‌دهیم.

۶ـ۳ـ روش گوشه شمال غربی

۱ـ بجای گوشه شمال غربی از هرکدام از گوشه‌های دیگر می‌توان استفاده نمود.

۲ـ تعداد متغیرهای اساسی حاصله از این روش حداکثر $(m+n-1)$ می‌شود و در صورتی که کمتر از این تعداد باشد، مسئله دارای حالت منحط است.

۳ـ در محاسبهٔ تعداد مبدأها و مقصدها توجه کنید که سطر یا ستون مجازی محاسبه شود.

۴ـ هرگاه مقادیر عرضه و تقاضا غیر از مرحله آخر سطر بطور همزمان صفر شود (بصورت قطری حرکت نموده) در نهایت حل مسئله منحط خواهد بود.

۵ـ بدلیل استقلال متغیرهای پایه از یکدیگر به کمک خطوط عمودی و افقی نمی‌توان حلقه بسته تشکیل داد زیرا در اینصورت باید متغیرهای پایه وابسته باشند.

۶ـ این روش تنها روشی است که به هزینه‌های حمل و نقل ارتباطی ندارد و بدون توجه به هزینه‌های حمل و نقل قابل حل است. به همین دلیل این روش یک جواب پایه موجه جواب ارائه نمی‌دهد.

۶ـ۴ـ روش کمترین هزینهٔ ماتریسی

۱ـ در شرایط تساوی، حداقل هزینهٔ یکی از سلولها به اختیار انتخاب می‌شود ولی بهتر است آن سلولی انتخاب شود که می‌تواند تخصیص بیشتری به خود اختصاص دهد.

۲ـ برای محاسبه حداقل هزینه توجه کنید که حتی‌الامکان از سطر یا ستون مجازی تا زمانی‌که

مجبور نشده‌اید استفاده نکنید.

۳ـ اگر سطر و ستون مقادیر عرضه و تقاضا غیر از مرحله آخر یکباره صفر شود، جواب حاصل منحط بوده و تعداد متغیرهای پایه کمتر از $(m+n-1)$ خواهد بود.

۶ـ۵ـ روش تقریبی وگل

۱ـ در شرایط تساوی، هزینهٔ یکی به دلخواه انتخاب می‌شود ولی بهتر است آن سلولی انتخاب شود که می‌تواند تخصیص بیشتری به خود اختصاص دهد.

۲ـ برای محاسبهٔ اختلاف دو حداقل هزینه سطری یا ستونی حتی‌الامکان از سطر یا ستون مجازی استفاده نکنید.

۳ـ زمانی‌که فقط یک سطر یا فقط یک ستون باقی مانده است الگو را خاتمه داده و تخصیص‌های باقی‌مانده را بطور همزمان انجام دهید.

در بهبود جوابها به روش‌های پله سنگ و مضارب قابل ذکر است که روش اول با استفاده از مفهوم مسئله اولیه، نسبت به تعیین جواب بهینه اقدام می‌کند، در حالی‌که در روش مضارب حل بهینه با استفاده از مفهوم مسئله ثانویه انجام می‌شود.

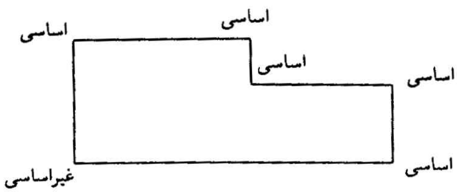
۶ـ۶ـ روش پله سنگ

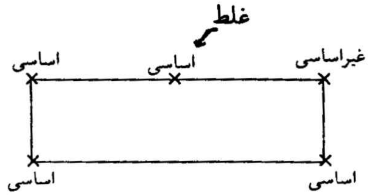
این روش روندی را دنبال می‌نماید تا با یک سری عملیات متوالی از یک جواب موجه ابتدایی به جواب بهینه برسد. گام‌های زیر جهت بهبود جواب بکار گرفته می‌شود.

گام ۱ ـ یک خانهٔ خالی (یک متغیر غیراساسی) را جهت ارزیابی انتخاب کنید.

گام ۲ ـ برای خانه خالی انتخاب شده یک مسیر پله سنگ رسم کنید. یکی از گوشه‌های این مسیر در خانه خالی انتخابی (خانه‌ای که متغیر غیراساسی دارد) قرار گرفته و سایر گوشه‌ها باید در خانه‌های پر (خانه هایی که متغیرهای آن اساسی است) واقع شده و سپس به گوشه موردنظر که در خانه خالی قرار گرفته علامت (+) اختصاص داده و به سایر گوشه‌ها، یکی در میان علامت منفی (−) و سپس (+) تخصیص دهید.

تذکر: مسیر پله سنگ، مسیری است بسته و منحصر به فرد که دارای اضلاعی عمود بر هم می‌باشد. در روش پله سنگ هر حرکت فقط به یک متغیر اساسی منتهی می‌شود و نقطه شروع و پایان آن، متغیر غیراساسی مورد بررسی می‌باشد.





گام ۳ ـ هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه‌هایی که دارای علامت مثبت هستند را با هم جمع و از مجموع هزینه حمل هر واحد کالا برای خانه‌هایی که دارای علامت (−) هستند، کم کنید عدد حاصل ارزش خانهٔ خالی انتخابی را نشان می‌دهد $(\overline{C}_{ij} = C_{ij} - Z_{ij})$

گام ۴ ـ ارزش تمامی خانه‌های خالی را مطابق گام‌های فوق بدست آورده، اگر ارزش تمامی خانه‌های خالی عددی غیرمنفی بود به جواب بهینه رسیده‌اید، در غیر اینصورت این جدول بهینه نبوده و گام‌های بعدی را اجرا کنید.

گام ۵ ـ انتخاب متغیر ورودی: آن خانه خالی را که دارای منفی‌ترین ارزش محاسبه شده $(\overline{C}_{ij} = C_{ij} - Z_{ij})$ باشد را انتخاب کنید و متغیر مربوط به این خانه را متغیر ورودی بنامید.

گام ۶ ـ انتخاب متغیر خروجی: از میان تمام خانه‌هایی که رأس مسیر پله سنگ در آن قرار گرفته و دارای علامت منفی هستند، خانه‌ای را که دارای کمترین مقدار متغیر اساسی (x_{ij}) است را انتخاب کنید. متغیر مربوط به این خانه را متغیر خروجی بنامید.

گام ۷ ـ بدست آوردن جدول جدید: یک جدول جدید رسم کرده و مقدار خانه انتخابی در گام ۶ (مقدار x_{ij} متغیر خروجی) را به مقدار x_{ij} خانه‌هایی که دارای علامت (+) هستند، اضافه کرده و از مقدار (x_{ij}) خانه‌هایی که دارای علامت منفی (−) هستند کم کنید و مقدار سایر خانه‌هایی که راس‌های مسیر پله‌سنگ در آنها قرار نگرفته به همان صورت به جدول جدید منتقل کرده و به گام اول برگردید.

☜ **نکته:** مقدار هزینه کاهش یافته تابع هدف از رابطه زیر حاصل می‌شود.

هزینه کاهش یافته = (مقدار متغیر خروجی) ($|C_{ij} - Z_{ij}|$ متغیر ورودی)

۶ـ۷ـ روش مضارب (توزیع تعدیل شده)

همانگونه که مطرح شد در روش مضارب حل بهینه با استفاده از مفهوم مسئله ثانویه انجام می‌شود. متغیرهای ثانویه مربوط به محدودیت عرضه با u_i و متغیرهای ثانویه مربوط به محدودیتهای تقاضا با v_j تعریف می‌شود.

۶ـ۷ـ۱ـ ثانویه (دوگان) مسئله حمل و نقل

اگر یک مسئله حمل و نقل بصورت زیر باشد:

$$Min\ Z = \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = S_i \qquad (i = 1,\dots,m$$ (محدودیتهای عرضه از مبدأ)

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j \qquad (j = 1,\dots,n$$ (محدودیتهای تقاضا در مقصد)

$$x_{ij} \geq 0$$

آنگاه ثانویه (دوگان) آن بصورت زیر نگاشته می‌شود.

$$Max\ Y = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq C_{ij}$$

u_i ، v_j آزاد در علامت

مطابق قضایای دوگان، متغیر x_{ij} وقتی اساسی می‌شود که محدودیت ثانویه متناظر با آن فعال بوده و بصورت تساوی برقرار باشد. یعنی برای متغیرهای اساسی (خانه‌های جدول با مقادیر مثبت) رابطه $u_i + v_j = C_{ij}$ برقرار است. حال با استفاده از رابطه فوق کلیه مقادیر u_i (به تعداد سطرهای جدول حمل و نقل) و v_j (به تعداد ستونهای جدول حمل و نقل) را بدست می‌آوریم که تعداد این مجهولها $(m+n)$ بوده و تعداد معادلات $u_i + v_j = C_{ij}$ (به تعداد متغیرهای اساسی یعنی $m + n - 1$) خواهد بود. لذا به یکی از مجهولات (معمولاً u_1) مقدار دلخواه صفر را تخصیص داده و سایر مجهولات u_i و v_j را با استفاده از رابطه $u_i + v_j = C_{ij}$ جهت متغیرهای اساسی بدست می‌آوریم و برای خانه‌های تخصیص نیافته (متغیرهای غیراساسی) مقادیر $C_{ij} - (u_i + v_j)$ محاسبه نموده و گام‌های زیر را انجام می‌دهیم.

۶ـ۷ـ۲ـ گام‌های حل روش مضارب

در این روش نیز از یک جواب موجه ابتدایی گامهای زیر جهت بهبود جواب برداشته می‌شود.

گام ۱ ـ از رابطه $C_{ij} = u_i + v_j$ استفاده کرده و براساس خانه‌های پر برای هر سطر، یک u_i و برای هر ستون، یک v_j محاسبه کنید.

گام ۲ ـ با استفاده از اطلاعات گام اول، ارزش خانه‌های خالی را با استفاده از رابطه $C_{ij} - Z_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ محاسبه نمائید اگر کلیه این مقادیر غیرمنفی بود به جواب بهینه رسیده‌اید در غیر اینصورت به گام بعد بروید.

گام ۳ ـ خانه خالی را که دارای منفی‌ترین مقدار $C_{ij} - Z_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ می‌باشد مشخص نموده و متغیر مربوط به آن را متغیر ورودی بنامید.

گام ۴ ـ برای خانه خالی انتخاب شده در گام چهارم، یک مسیر پله سنگ رسم نموده و از میان خانه‌هایی که دارای علامت منفی می‌باشند، خانه‌ای را که دارای کمترین مقدار x_{ij} است انتخاب و متغیر مربوط به آن را متغیر خروجی بنامید.

گام ۵ ـ مقدار خانه انتخاب شده در گام ۴ (x_{ij}) را به مقدار خانه هایی که دارای علامت مثبت هستند اضافه و از مقدار خانه‌هایی که دارای علامت منفی هستند، کم کنید تا جدول جدید بدست آید، سپس به گام اول برگردید.

۶ـ۸ـ حالات خاص در روش حمل و نقل

۱ـ مسئله حمل و نقل هیچ وقت دارای حالت خاص بدون جواب بهینه یا منطقه موجه نامحدود نیست و همواره جوابی موجه و عدد صحیح خواهد داشت.

۲ـ در مرحله یافتن جواب موجه ابتدایی : هرگاه در تخصیص مقادیر به یک خانه خالی، همزمان میزان عرضه سطر و تقاضای ستون با هم به صفر برسد. در این شرایط یا سطر یا ستون حذف می‌شود و به یکی از خانه‌های خالی سطر یا ستون دیگر مقدار صفر تعلق می‌گیرد. در این حالت مقدار صفر به یک متغیر اساسی تعلق گرفته و حالت خاص جواب تبهگن است.

۳ـ در مرحله بهبود جواب: هرگاه هنگام تعیین متغیر خروجی، در گوشه‌های منفی دو مقدار حداقل، یکسان داشته باشیم در جدول بعد یکی از متغیرها از پایه خارج می‌شود و متغیر دیگر با مقدار صفر در پایه باقی می‌ماند که در این حالت جواب اساسی تبهگن خواهیم داشت.

۴ـ در جدول حمل و نقل اگر کمتر از $m + n - 1$ متغیر اساسی داشته باشیم، در این حالت به تعداد کمبود، متغیر اساسی تبهگن وجود خواهد داشت.

۵ـ هرگاه مقدار یک یا چند خانه خالی (متغیر غیراساسی)، با رابطهٔ $Z_{ij} - C_{ij} = u_i + v_j - C_{ij}$ معادل صفر گردد مسئله دارای حالت خاص جواب بهینه چندگانه خواهد شد.

۶ـ۹ـ تحلیل حساسیت مسئله حمل و نقل

تحلیل حساسیت مدل حمل و نقل
- ۱ـ تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف
  - الف ـ ضرایب متغیرهای غیراساسی
  - ب ـ ضرایب متغیرهای اساسی
- ۲ـ تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا (اعداد سمت راست)

۶ـ۹ـ۱ـ تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف برای متغیرهای غیراساسی

در مسائل Min وقتی، جواب بهینه است که رابطه $C_{ij} - (u_i + v_j) \geq ۰$ برای تمامی متغیرهای غیراساسی برقرار باشد. حال ضرایب C_{ij} جهت متغیرهای غیراساسی باید به گونه‌ای تغییر نماید که جواب فعلی بهینه باقی بماند بنابراین برای متغیرهای غیراساسی x_{ij} باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$C_{ij} + \Delta_{ij} - (u_i + v_j) \geq ۰$$

که در آن Δ_{ij} میزان تغییرات ضریب تابع هدف متغیر غیراساسی x_{ij} خواهد بود.

۶ـ۹ـ۲ـ تحلیل حساسیت ضرایب تابع هدف برای متغیرهای اساسی

در جدول بهینه اگر x_{ij} متغیر اساسی باشد رابطه $C_{ij} = u_i + v_j$ همواره برقرار است. حال جهت تعیین دامنه تغییرات مجاز C_{ij}، بجای عبارت C_{ij} عبارت $C_{ij} + \Delta_{ij}$ را در جدول بهینه قرار داده و مجدداً u_i و v_j های جدید را محاسبه نموده و سپس مقادیر $C_{ij} - (u_i + v_j)$ را برای کلیه مقادیر غیراساسی مربوطه محاسبه نموده و جهت حفظ شرط بهینگی، بزرگتر مساوی صفر قرار می‌دهیم $(C_{ij} - (u_i + v_j) \geq ۰)$ و حدود تغییرات C_{ij} موردنظر (Δ_{ij}) را بدست می آوریم.

۶ـ۹ـ۳ـ تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا (اعداد سمت راست)

تابع هدف مسئله ثانویه در مدل حمل و نقل بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$Max\ Y = \sum_{i}^{m} S_i u_i + \sum_{j}^{n} d_j v_j$$

که در آن u_i و v_j ها متغیر ثانویه و بیانگر قیمت‌های سایه در جدول بهینه می‌باشند و هرگونه تغییر در میزان عرضه مبادی یا تقاضای مقاصد موجب تغییر در مقدار بعضی از متغیرهای اساسی خواهد شد.
باتوجه به این مطالب تحلیل حساسیت عرضه و تقاضا بدین صورت طبقه‌بندی می شود:
حالت ۱) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ i و کاهش همزمان یک واحد در

تقاضای مقصد j عبارتست از:

$$\Delta Z = u_i - v_j$$

حالت ۲) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ i و افزایش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد j عبارتست از:

$$\Delta Z = u_i + v_j$$

حالت ۳) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در تقاضای مقصد j و کاهش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد k عبارتست از:

$$\Delta Z = v_j - v_k$$

حالت ۴) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در عرضه مبدأ i و کاهش همزمان یک واحد در تقاضای مقصد j عبارتست از:

$$\Delta Z = -u_i - v_j$$

حالت ۵) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در عرضه مبدأ k عبارتست از:

$$\Delta Z = u_k - Max\, u_i$$

که در آن از عرضه مبدأ متناظر با $Max\ u_i$ یک واحد کاسته می‌شود.

حالت ۶) تغییرات تابع هدف در اثر افزایش یک واحد در تقاضای مقصد l عبارتست از:

$$\Delta Z = v_l - Max\, v_j$$

که در آن از تقاضای مقصد متناظر با $Max\ v_j$ یک واحد کاسته می‌شود.

حالت ۷) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در عرضه مبدأ k عبارتست از:

$$\Delta Z = -u_k - Max\, u_i$$

که در آن به عرضه مبدأ متناظر با $Max\ u_i$ یک واحد اضافه می‌شود.

حالت ۸) تغییرات تابع هدف در اثر کاهش یک واحد در تقاضای مقصد l عبارتست از:

$$\Delta Z = -v_l - Max\, v_j$$

که در آن به تقاضای مقصد متناظر با $Max\ v_j$ یک واحد اضافه می‌شود.

۶ـ۱۰ـ مسئله تخصیص (واگذاری)

مدل تخصیص *(Assignment)* مدلی خاص از مسئله حمل و نقل می‌باشد که برای تخصیص یک کار یا فعالیت یا شغل یا وظیفه به یک ماشین، کارگر، یا شخص استفاده می‌شود به گونه‌ای که هزینه تخصیص حداقل گشته و یا بهره‌وری و سود ناشی از تخصیص حداکثر گردد.

☜ **نکته:** در مدل تخصیص تعداد عرضه m و تقاضا n با هم برابر بوده $(m=n)$ و همچنین مقدار مقادیر عرضه و تقاضا مساوی یک می‌باشد.

$s_i = d_j = ۱$

ماتریس هزینه یک مسئله تخصیص به صورت زیر ترسیم می‌شود.

فرد \ شغل	۱	۲	....	j	...	n
۱	$C_{۱۱}$	$C_{۱۲}$	....	$C_{۱j}$	...	$C_{۱n}$
۲	$C_{۲۱}$	$C_{۲۲}$	....	$C_{۲j}$	...	$C_{۲n}$
⋮	⋮					
i	$C_{i۱}$	$C_{i۲}$	....	C_{ij}	...	C_{in}
⋮	⋮					
n	$C_{n۱}$	$C_{n۲}$	....	C_{nj}	...	C_{nn}

۶ـ۱۱ـ روش‌های حل مدل تخصیص

۶ـ۱۱ـ۱ـ روش شمارش کامل

می‌خواهیم n شغل را به n فرد تخصیص دهیم به گونه‌ای که حداکثر بهره‌وری حاصل شود. در این روش کلیه حالات ممکن تخصیص شغل‌ها به افراد در نظر گرفته شده و برای هرکدام مقدار تابع هدف را محاسبه می‌کنیم. بهترین حالت وقتی است که تابع هدف کمترین مقدار را داشته باشد. این روش کاربرد چندانی ندارد.

☜ **نکته:** تعداد کل حالات تخصیص n شغل به n فرد $n!$ می‌باشد.

۶ـ۱۱ـ۲ـ روش برنامه‌ریزی عدد صحیح

در برنامه‌ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص پارامترها به شکل زیر تعریف می‌شود.

x_{ij}: متغیرهای تصمیم برای تخصیص n فرد به n شغل

C_{ij}: هزینه تخصیص فرد iام به شغل jام

حال مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مسئله تخصیص به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$Min\ Z = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} C_{ij}x_{ij}$$

$$S.t: \sum_{j=۱}^{n} x_{ij} = ۱ \qquad i = ۱,۲,\dots,n$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_{ij} = ۱ \qquad j = ۱,۲,\dots,n$$

$$x_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر فرد } i \text{ام کار } j \text{ام را انجام دهد} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

محدودیت اول نشان می‌دهد که باید به همه افراد شغل تخصیص داده شود و محدودیت دوم نشان می‌دهد که باید به هر شغلی یک فرد تخصیص داده شود.

۶ـ۱۱ـ۳ـ روش برنامه‌ریزی خطی

با جایگزینی $x_{ij} \geq ۰$ به جای $x_{ij} = \begin{cases} ۱ \\ ۰ \end{cases}$ در مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح فوق، مسئله به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود.

۶ـ۱۱ـ۴ـ روش حمل و نقل

مدل تخصیص در واقع نوع خاصی از مدل حمل و نقل می‌باشد که در آن مشاغل (عرضه) به افراد (تقاضا) تخصیص داده می‌شود و به این ترتیب ($n.n = n^۲$) متغیر تصمیم (x_{ij}) وجود خواهد داشت که‌ازاین‌متغیرهاتعداد($n + n - ۱ = ۲n - ۱$)متغیراساسی،خواهدبود.ولی‌چون‌هرمتغیراساسی‌بامقدار یک، همزمان نیازمندی یک سطر و ستون را برآورده می‌کند، پس در هر سطر یا ستون یک متغیر اساسی با مقدار صفر داریم. به عبارت دیگر از $۲n - ۱$ متغیر اساسی n متغیر اساسی با مقدار یک و $n-۱$ متغیر اساسی با مقدار صفر (جوابهای تبهگن) وجود دارد.

۶ـ۱۱ـ۵ـ روش مجارستانی (بسط ماتریسی)

روش مجارستانی بهترین روش برای حل مدل تخصیص بوده و مبتنی بر خاصیت ماتریسها در روابط بین مسئله اولیه و ثانویه می‌باشد. این روش بر مبنای قضیه زیر بنیان نهاده شده است.

«اگر تمامی اعداد هر سطر یا ستون یک مسئله تخصیص، به یک میزان افزایش یا کاهش یابند، جواب بهینه مسئله تخصیص جدید، معادل همان مسئله اول خواهد بود.»

گام اول ـ در هر سطر ماتریس هزینه، کوچکترین عدد را انتخاب و از بقیه اعداد موجود در آن سطر کم کرده و ماتریس هزینه جدید تشکیل دهید. سپس در هر ستون ماتریس حاصله نیز، کوچکترین عدد موجود در ستون را از بقیه اعداد همان ستون کم کنید. ماتریس حاصل «ماتریس هزینه‌های کاهش یافته یا جدول هزینه فرصت» نامگذاری می‌شود.

گام دوم ـ با استفاده از حداقل تعداد خطوط، تمامی صفرهای موجود در سطر یا ستون ماتریس هزینه‌های کاهش یافته را بپوشانید. (این خطوط، خطوط پوششی نامیده می‌شود و باید حتماً افقی یا عمودی باشند) اگر تعداد خطوط پوشش برابر افراد یا مشاغل (n) باشد به جدول بهینه رسیده‌اید در غیر اینصورت به گام سوم بروید.

☜ **نکته:** خطوط پوششی به گونه‌ای ترسیم می‌گردد که هر خط تا آنجا که ممکن است تعداد بیشتری از صفرها را بپوشاند.

گام سوم ـ کوچکترین عددی را که در ماتریس اخیر روی آن خط کشیده نشده است انتخاب کرده و این عدد را از تمامی اعدادی که روی آنها خطی کشیده نشده است کم کرده و به اعدادی که در محل تقاطع خطوط پوشش قرار دارند اضافه کرده و به گام دوم برگردید.
گام چهارم ـ پس از رسیدن به جدول بهینه جهت تعیین جواب بهینه، بایستی هرکار به یک فرد واگذار شود. جهت این کار سطر یا ستونی را که فقط یک صفر دارد پیدا کرده و دور آن خط بکشید و بر این مبنا کار و فردی که باید آن را انجام دهد، مشخص می‌شود. حال از سطر و ستونی که صفر آن تعیین شده صرفنظر کرده و در مابقی جدول به دنبال سطر یا ستونی بگردید که یک صفر را داشته باشد و عملیات بدین ترتیب ادامه می‌یابد تا جواب بهینه حاصل شود.

☜ **نکته:** جواب وقتی بهینه است که در هر سطر یا ستون فقط به دور یک صفر خط کشیده شده باشد.

☜ **نکته:** پس از بدست آوردن جواب بهینه برای یک مسئله تخصیص ممکن است مقدار و موقعیت صفرها در جدول نهایی به گونه‌ای باشد که بتوان بیش از یک جواب بهینه یافت. هرگاه در جدول نهایی تعداد صفرها برای هر سطر یا ستونی بیش از یک باشد امکان وجود جواب بهینهٔ چندگانه وجود دارد. در جواب بهینه چندگانه مقادیر Z به ازای تمام جوابهای بهینه یکسان می‌باشد.

☜ **نکته:** در مسئله تخصیص اگر بخواهیم کاری به فردی تخصیص نیابد هزینه آن را بسیار زیاد (M) در نظر می‌گیریم.

☜ **نکته:** اگر چنانچه در مسائل تخصیص تعداد سطرها و ستونها مساوی نباشد (عدم توازن) در آن صورت از سطر یا ستون مجازی با هزینه‌های صفر استفاده می‌کنیم تا توازن حاصل شود.