مطالب ناب مهندسی صنایع
https://telegram.me/industrialEngineering_qie

به نام خدا

مبانی مهندسی برق

مدرس: محسن سبزی نژاد

1

فصل اول:

مدارهای الکتریکی – جریان مستقیم

2

□□□□ □□□

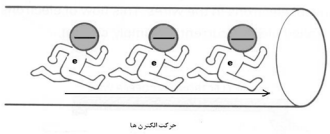
- معرفي عناصرالكتريكي و روابط آنها
- مدارهاي معادل نورتن و تونن
- قوانين جريان و ولتاژ
- روشهاي ولتاژ-گره و جريان-خانه
- مدارهاي مرتبه اول
- مدارهاي مرتبه دوم

فيزيک الکتريسيته

الکترون های آزاد

الکترون ها ي خارجي ترين لايه مي توا نند بوسيله ي يك نيروي خارجي مثل ميدان مغناطيسي ،اصطكاك و يا واكنش هاي شيميايي از مدارشان خارج شوند.

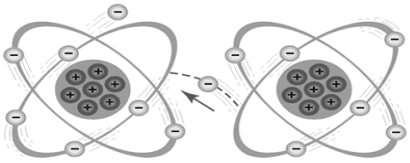
در اين صورت « الکترون هاي آزاد» ناميده مي شوند . مبناي الکتريسيته حرکت اين الکترون هاي آزاد است .



حرکت الکترون ها

Free Electrons

Electrons in the outer shell can be freed of their orbits by an external force such as a magnetic field, friction, or chemical action. They are then called "free electrons." The motion of these free electrons is the basis of electricity.



فيزيک الکتريسيته(ادامه)

رساناها

جريان الکتريکي هنگامي ايجاد مي شود که الکترون هاي آزاد از يك اتم به اتم ديگر منتقل شوند . ماده اي که به الکترون ها اجازه حرکت آزادانه را مي دهد هادي (رسانا) ناميده مي شود .

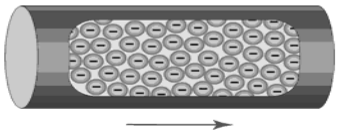
مس ،نقره ،الومينيوم ،روي ، آهن از جمله هادي هاي خوب مي باشند .

Conductors

An electric current is produced when free electrons move from one atom to the next. Materials that permit many electrons to move freely are called conductors.

Good Conductors:

- Copper
- Silver
- Aluminum
- Zinc
- Brass
- Iron



5

فيزيک الکتريسيته(ادامه)

نارساناها

موادي که به تعداد کمي از الکترون ها اجازه ي حرکت مي دهند ، نارسانا (عايق) ناميده مي شوند .

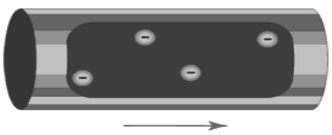
پلاستيك ، لاستيك ، شيشه ، ميکا و سراميك نارسا نا مي باشند .

Insulators

Materials that allow few electrons to flow are called insulators.

Good Insulators:

- Plastic
- Rubber
- Glass
- Mica
- Ceramic



6

فيزيک الکتريسيته(ادامه)

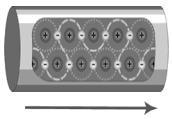
جريان

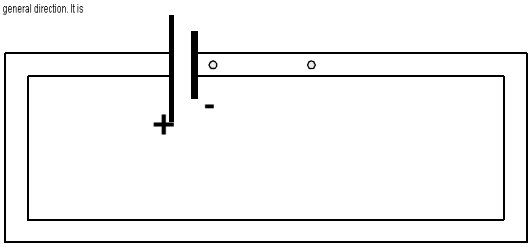
جريان ، شارش الکترون هاي آزاد در يک ماده از يک اتم به اتم بعدي و در يک جهت مشخص مي باشد که آن را با نماد « I» نشان مي دهند، و با واحد آمپر سنجيده مي شود .

Current

Current is the flow of free electrons in a material from one atom to the next in the same general direction. It is designated by the symbol "I" and is quantified in amps.

Prefix	Symbol	Decimal
1 kiloampere	1 kA	1 000 A
1 milliampere	1 mA	1/1000 A
1 microampere	1 µA	1/1,000,000 A





7

فيزيک الکتريسيته(ادامه)

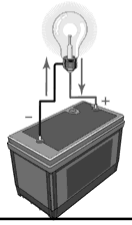
ولتاژ

به نيرويي که موجب جاري شدن جريان در يک هادي مي شود نيروي محرکه الکتريکي گويند که از وجود يک اختلاف پتانسيل ناشي مي شود . از اختلاف پتانسيل عمدتا با عنوان ولتاژ ياد مي شود و بر حسب ولت سنجيده مي شود .

Voltage

The force that makes current flow through a conductor is called electromotive force (emf), which results from a difference in voltage potential. This difference in potential is more commonly referred to simply as voltage, and is measured in volts.

Prefix	Symbol	Decimal
1 kilovolt	1 kV	1 000 V
1 millivolt	1 mV	1/1 000 V
1 microvolt	1 µV	1/1,000,000 V



8

فيزيک الکتريسيته(ادامه)

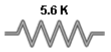
مقاومت

تمام مواد تا حدي مانع شارش جريان مي شوند . اين خاصيت مقاومت ناميده مي شود واحد اندازه گيري مقاومت اهم است که با حرف يوناني (Ω) نمايش داده مي شود . با افزايش طول يا کاهش قطر مقاومت زياد مي شود .قطعاتي که براي داشتن مقدار مقاومت خاصي توليد مي شوند " مقاومت" ناميده مي شوند .عايق ها مقاومت بسيار بالايي در برابر عبور جريان دارند در حالي که هادي ها مقاومت کمي در برابر عبور جريان دارند و به جريان اجازه مي دهند به راحتي جاري شود .

Resistance

All materials impede the flow of current to some extent. This property is called resistance. The unit of measure for resistance is the ohm, which is symbolized by the Greek letter omega (Ω). Resistance increases with an increase in length or a decrease in cross-section of a material. Devices manufactured to have specific resistances are called resistors. Insulators have a very high resistance to current flow. Conductors, on the other hand, have low resistances, and allow current to flow freely.

Prefix	Symbol	Decimal
1 kilohm	1 kΩ	1000 Ω
1 megohm	1 MΩ	1,000,000 Ω



Schematic Diagram Symbol

5.6 KΩ Resistor

9

فيزيک الکتريسيته(ادامه)

قانون اهم

قانون اهم فرمول پايه در مدارهاي الکتريکي است . اين قانون اظهار مي دارد که جريان رابطه ي مستقيم با ولتاژ و رابطه ي عکس با مقاومت دارد .در فرمول فوق اين موضوع بيان شده است .

سه قاعده زير را به خاطر بسپاريد:

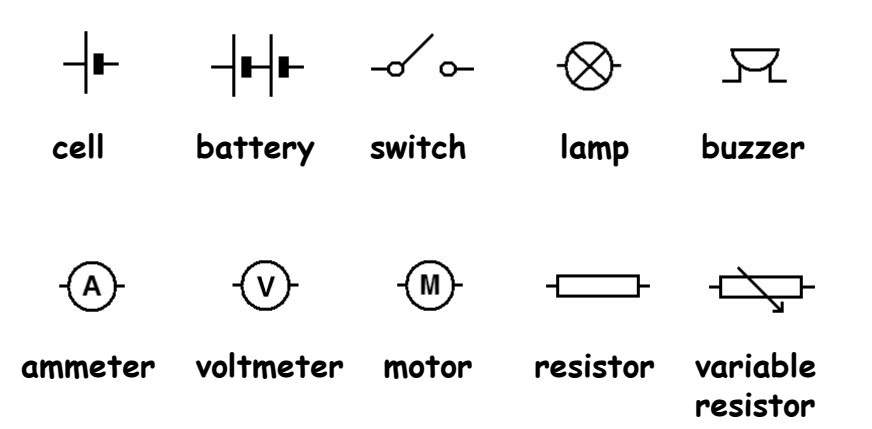
- جريان هميشه بر حسب آمپر بيان مي شود .
- ولتاژ هميشه بر حسب ولت بيان مي شود .
- مقاومت هميشه بر حسب اهم بيان مي شود .

Ohm's Law

Ohm's Law is the basic formula used in electrical circuits. It states that current varies directly with voltage and inversely with resistance. It is expressed in the following formula:

$$\text{Current} = \frac{\text{Voltage}}{\text{Resistance}} \quad OR \quad I = \frac{E}{R}$$

10



معرفي عناصر الكتريكي و روابط آنها

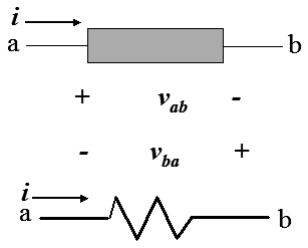
12

□□□□□□□ □□□□□

- واحد اندازه گیری آن اهم می‌باشد.
- بین جریان و ولتاژ آن همیشه قانون اهم برقرار است:

$$V=R\,I$$

که R مقاومت، I جریان و V ولتاژ است.



13

Single Node Pair Circuits: Current division.

A single node pair circuit is shown in Figure 4.4

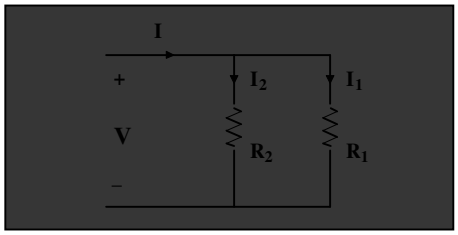
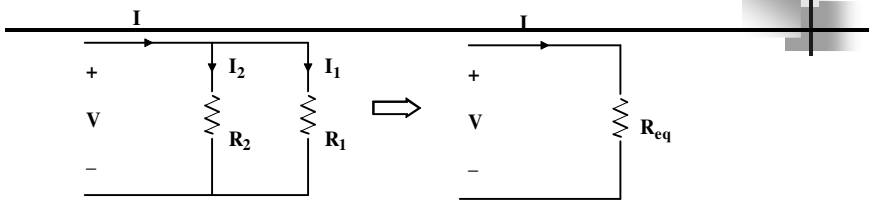


Figure 4.4: A circuit with a single node pair.

We would like to determine how the current divides (splits) in the circuit.

6

Single Node Pair Circuits: Current division.



$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$ Eq. 4.2

$$I = \frac{V}{R_{eq}}$$ Eq. 4.3

Therefore;

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$ Eq. 4.4

7

Single Node Pair Circuits: Current division.

In general, if we have N resistors in parallel as in Figure 4.5

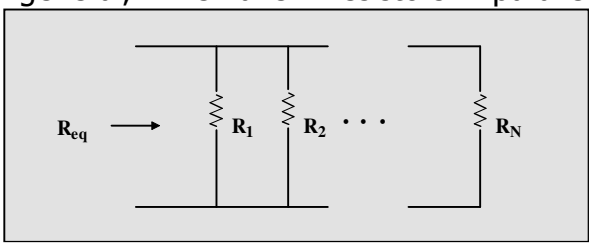


Figure 4.5: Resistors in parallel.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots \frac{1}{R_N}$$ Eq. 4.6

9

قانون کولن

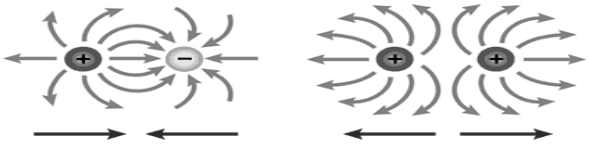
موادي كه الكترون اضافي دارند ، داراي بار منفي هستند . موادي كه تعداد پروتون هايشان بيشتر از الكترون هايشان است داراي بار مثبت مي باشند . عناصري كه تعداد پروتون ها و الكترون هاي مساوي دارند خنثي (بي بار) ناميده مي شوند .

بارها در اطراف خودشان ميدان الكتريكي غير قابل مشاهده اي دارند كه مي توان اثر اين ميدان را توسط خطوط نيرو يي كه به صورت شعاعي از بار مثبت شروع و به بار منفي ختم مي شوند ، نشان داد . بارهاي ناهمنام يكديگر را جذب مي نمايند و بارهاي همنام يكديگر را دفع مي كنند .

Electric Charges

Materials that have an excess of electrons are said to have a negative charge. Materials with more protons than electrons are said to have a positive charge. Elements with an equal number of protons and electrons are said to be neutral (no charge).

Charged bodies have an invisible electric field around them that can be represented by force lines radiating away from a positive charge and towards a negative charge. Unlike charges attract each other; like charges repel each other.



Unlike Charges Attract Like Charges Repel

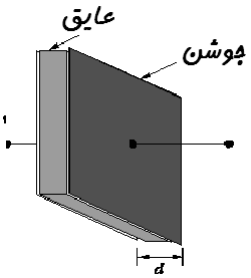
17

□□□□

- واحد اندازه گیری آن فاراد می باشد.
- رابطه ولتاژ و بار الکتریکی خازن بصورت زیر می باشد:

$$q = Cv$$

که C ظرفیت، q بار الکتریکی و v ولتاژ خازن می باشند.

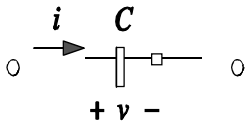


18

□□□□ □□□□□

- I جریان و v ولتاژ خازن می باشند:

$$i = c\,(dv/dt)$$



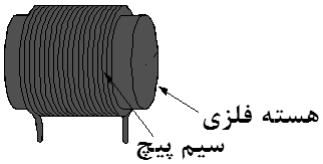
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)d\xi + v(t_0)$$

□□□□: ولتاژ خازن بطور ناگهانی تغییر نمیکند.

$$w(t) = \frac{1}{2}Cv(t)^2$$

□□ (□□□□□□)

- واحد اندازه گیری آن هانری (H) میباشد.
- روابط آن بصورت زیر میباشد که L القاکنایی، w انرژی، i جریان و v ولتاژ سلف میباشد.
- □□□: *جریان سلف تغییر ناگهانی ندارد.*



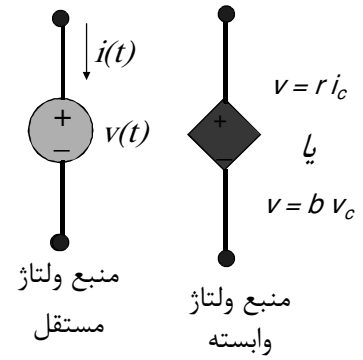
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\xi)d\xi + i(t_0)$$

$$w(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$$

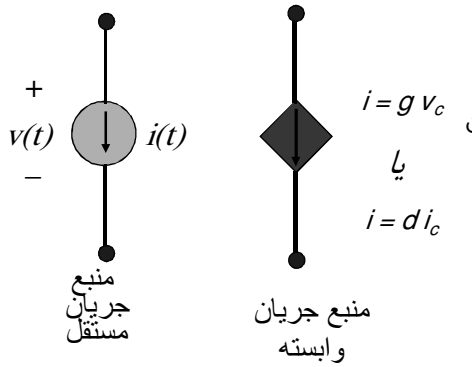
□□□□□ □□□□□

- منابع ولتاژ همواره دارای ولتاژ ثابتی هستند و ولتاژ آنها بستگی به میزان جریان آنها ندارد.
- منابع ولتاژ بر دو نوع هستند، منابع ولتاژ مستقل و منابع ولتاژ وابسته.
- میزان ولتاژ منابع ولتاژ وابسته، بستگی به جریان یا ولتاژ قسمت دیگری از مدار دارد.



□□□□□ □□□□□

- منابع جریان همواره دارای جریان ثابتی هستند و جریان آنها بستگی به میزان ولتاژ آنها ندارد.
- منابع جریان بر دو نوع هستند، منابع جریان مستقل و منابع جریان وابسته.
- میزان جریان منابع جریان وابسته، بستگی به جریان یا ولتاژ قسمت دیگری از مدار دارد.



□□□□ □□□□□ □□□□

- □□□ (***Node***): محل اتصال دو یا بیشتر عنصر الکتریکی به یکدیگر را گره میگویند.
- □□□ (***Loop***): هر مسیر بسته در داخل مدار الکتریکی را گویند.
- □□□: مجموعه عناصری که میتوان آنها را بدون عبور مجدد از یک گره پیمود.
- □□□: مسیری که تنها از یک عنصر و دو گره مربوط به دو سر آن عنصر تشکیل میشود.

23

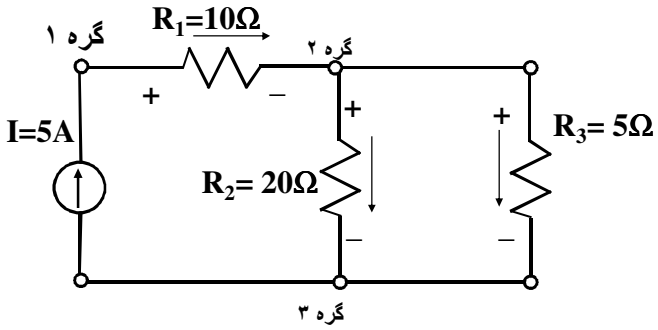
□□□□ □□□□

- این قانون اصطلاحاً KCL نیز نامیده میشود بصورت زیر است:
- مجموع جبری تمام جریانها در هر گره از مدار همواره برابر با صفر است.
- به عبارت دیگر مجموع جریانهای ورودی در هر گره برابر با مجموع جریانهای خروجی از آن گره است.
- □□□: در هنگام نوشتن معادلات KCL جریانهای خروجی را با علامت مثبت و جریانهای ورودی را با علامت منفی نمایش میدهیم.

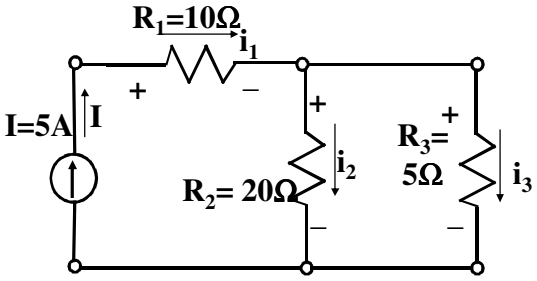
24

KCL □□ □□□□

- در مدار زیر با استفاده از روابط KCL جریانهای هر شاخه را بدست آورید.



□□



Node 1: $+I - i_1 = 0$ $\quad V_2=V_3$

Node 2: $+i_1 - i_2 - i_3 = 0$ $\quad R_2 i_2=R_3 i_3$

Node 3: $+i_2 + i_3 - I = 0$ $\quad 20 i_2=5 i_3$

- برای هر گره یک معادله نوشته شد و سه معادله بدست آمد در حالیکه مجهولهای مسأله I ,i_1, i_2, i_3 هستند. برای یافتن جواب نیاز به داشتن یک معادله دیگر است.
- با توجه به شکل مسأله I، همان مقدار جریان منبع جریان و برابر با ۵ میباشد. بنابراین $I=5$ معادله بعدی است.
- با حل دستگاه چهار معادله، چهار مجهول، مقادیر جریانهای هر شاخه بدست میآید.

- $I=5$, $i_1=5$, $i_2=1$, $i_3=4^A$
- $V_1=50$, $V_2=V_3=20^V$

27

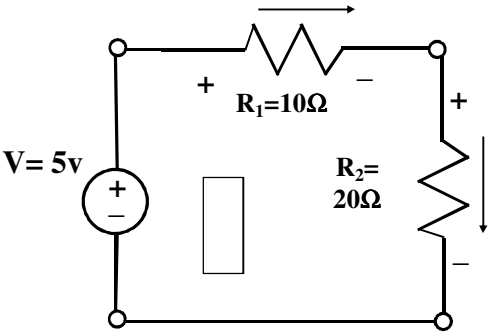
□□□□□ □□□□□

- این قانون اصطلاحاً KVL نیز نامیده میشود بصورت زیر است:
- مجموع جبری ولتاژ تمام عناصر الکتریکی در هر حلقه از مدار الکتریکی همواره برابر با صفر است.
- *□□□*: در هنگام نوشتن معادلات KVL هرگاه از طرف علامت مثبت وارد یک عنصر شویم، آن ولتاژ را با علامت مثبت جمع میکنیم و اگر از طرف علامت منفی وارد عنصر شویم، آن ولتاژ را با علامت منفی جمع میکنیم.

28

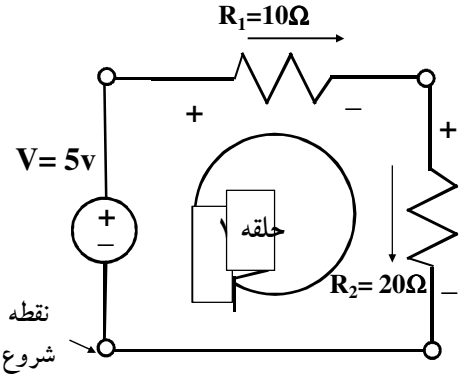
KVL □□ □□□□

- در مدار زیر با استفاده از روابط KVL مقادیر جریانها و ولتاژها را بدست آورید:



29

□□



- برای حل مدار از نقطه نشان داده شده در شکل شروع کرده و رابطه KVL را مینویسیم:
  - $-V+V_{R1}+V_{R2}=0$
- برای حل مدار نیاز به روابط دیگری نیز میباشد که با توجه به شکل، آنها را مینویسیم:
  - $V=5V$
  - $i_V = i_{R1} = i_{R2}$
  - $V_{R1}=10\, i_{R1}$
  - $V_{R2}=20\, i_{R2}$

30

- از حل دستگاه معادلات بالا مقادیر جریانها و ولتاژها بصورت زیر بدست می آیند:

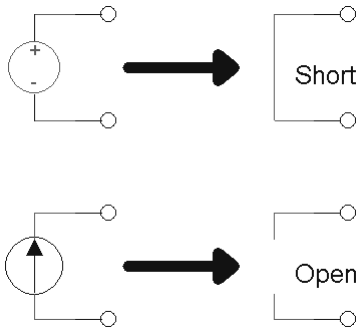
- $V=5^V$
- $V_{R1}=5/3$
- $V_{R2}=10/3$
- $i_{R1}=i_{R2}=5/30$

31

- در مدارهایی که چند منبع ولتاژ وجود دارد، هر بار تنها یکی از آنها را در نظر گرفته و با صفر کردن بقیه منابع، پاسخ مدار محاسبه میشود. این عمل برای همه منابع انجام میشود و در نهایت همه پاسخهای محاسبه شده با هم جمع میشوند تا جواب نهایی بدست آید.
- منظور از پاسخ مدار، مجهولی است که در مسأله خواسته شده است.

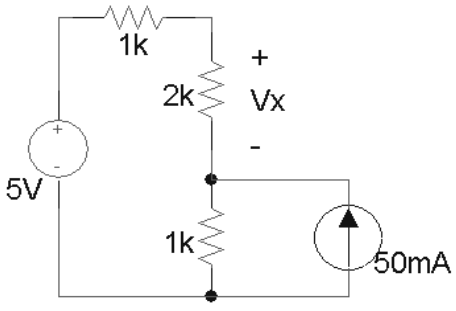
32

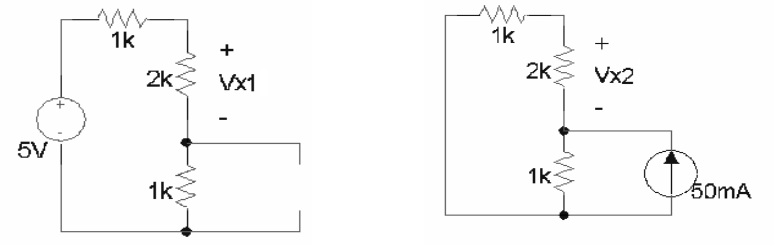
- ////: برای صفر کردن منابع ولتاژ، آنها را اتصال کوتاه و منابع جریان را مدار باز میکنیم.



□□□□

- در مدار زیر با استفاده از اصل جمع آثار مقدار ولتاژ V_X را بدست آورید.





- برای حل، مشابه آنچه که در شکلهای بالا دیده میشود، هربار تنها یکی از منابع در نظر گرفته میشود و سایر منابع صفر میشوند. مقادیر V_{X1} و V_{X2} بصورت زیر محاسبه میشوند:

$i_1=5/(1+2+1)=1.25^{mA}$

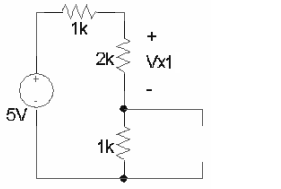
$V_{X1}=2\ i_1=2.5\ ^{V}$

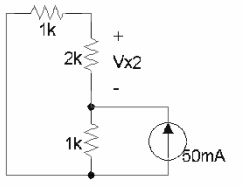
$i_2=50*1/(1+3)=12.5^{mA}$

$V_{X2}=-2\ i_2=-25^{V}$

$V=V_{X1}+V_{X2}=2.5-25$

$\underline{V=-22.5^{V}}$

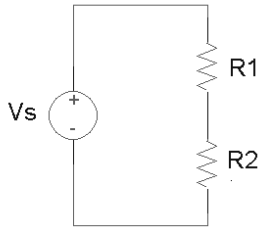




چند مدار ساده

□□□□□ □□□□□ □□□□□ □□□□

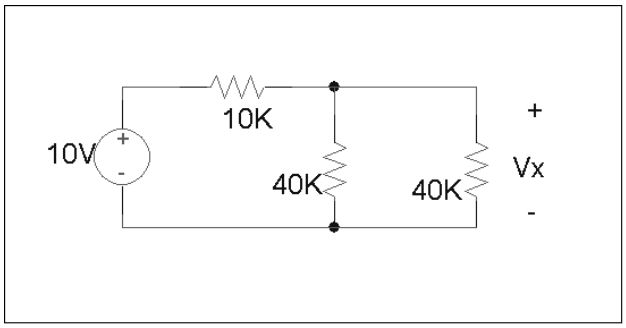
- مدار تقسیم کننده ولتاژ ازترکیب یک منبع ولتاژ و مقاومتهای سری تشکیل شده است.
- برای بدست آوردن رابطه روبرو، ابتدا جریان مدار محاسبه و سپس ولتاژ هر یک از مقاومتها بدست می آید.



$$V_i = \frac{R_i}{\sum_j R_j} V_S$$

□□□□

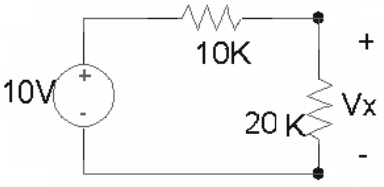
- در مدار زیر با استفاده از روابط تقسیم کننده ولتاژ مقدار ولتاژ V_X را بدست آورید.



39

□□

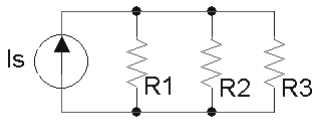
- برای حل مسأله با توجه به موازی بودن مقاومتهای 40K، ابتدا مداربصورت روبروساده می شود.
- برای مدار جدید با استفاده از روابط تقسیم کننده ولتاژ می توان نوشت:



$$V_x=10*20/(10+20)=6.67^V$$

40

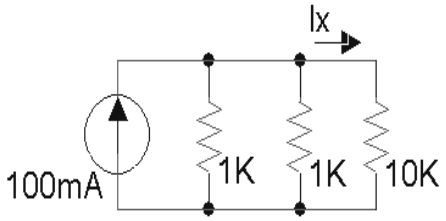
□□□□ □□□□ □□□□ □□□□



- مدار تقسیم کننده جریان ازترکیب یک منبع جریان و مقاومتهای موازی تشکیل شده است.
- برای بدست آوردن رابطه روبرو، ابتدا ولتاژ مدار محاسبه و سپس جریان هر یک از مقاومتها بدست می آید.
- منظور از G_i هدایت الکتریکی مقاومت iام و برابر با $1/R_i$ میباشد.

$$I_i = \frac{G_i}{\sum_j G_j} I_S$$

□□□□



- در مدار روبرو با استفاده از روابط تقسیم کننده جریان مقدار جریان i_X را بدست آورید.

□□

- با توجه به روابط گفته شده در قسمت قبل همچنین موازی بودن سه مقاومت 1K,10K,1K میتوان نوشت:

$i_x = 100*0.5/(0.5+10)$

$= 4.76^{mA}$

از آنجا که دو مقاومت 1k با یکدیگر موازی هستند، بجای آنها از مقاومت 0.5K استفاده شده است.

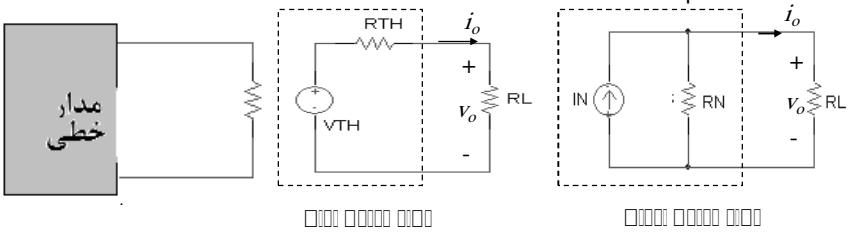
43

مدارهاي معادل نورتن و تونن

44

□□□□ □ □□□ □□□□□ □□□□□□□

- مدارهای معادل نورتن و تونن تکنیکهایی برای ساده سازی بعضی از مدارهای الکتریکی هستند.
- همه مدارهای خطی که فقط دارای مقاومتها و منابع هستند را میتوان بفرم معادل نورتن یا تونن تبدیل کرد.



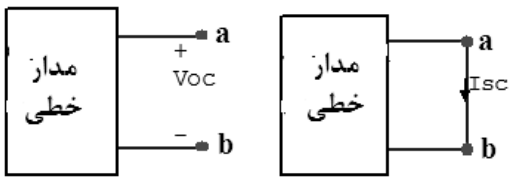
□□□ □□□□□ □□□□ □□□□□ □□□□□

45

□□□□ □□□□□ □□□□

یکی از روشها برای یافتن مدار معادل تونن به اینصورت است که:

- ابتدا با فرض مدار باز بودن ترمینالهای a وb، ولتاژ بین آن دو V_{ab} را محاسبه میکنیم.
- سپس با اتصال کوتاه کردن ترمینالهای a و b، جریان اتصال کوتاه I_{sc} محاسبه میشود.



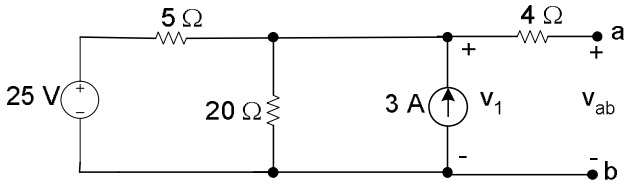
46

- با تقسیم کردن ولتاژ V_{ab} بر I_{SC} مقدار مقاومت تونن که همان R_{Th} میباشد، بدست میآید.
- مقدار ولتاژ منبع ولتاژ در مدار معادل تونن همان ولتاژ مدار باز V_{ab} میباشد.

$$V_{Th}=V_{ab}/I_{SC}$$
$$V_{Th}=V_{ab}$$

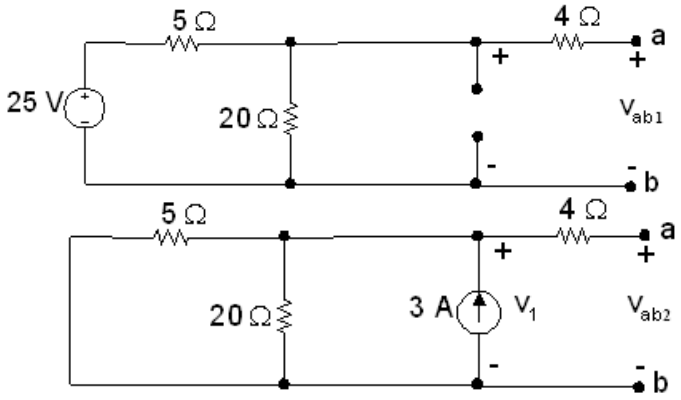
□□□□

- مدار معادل تونن مدار زیر را بدست آورید.



□□

- برای حل مسأله از اصل جمع آثار استفاده می‌کنیم:

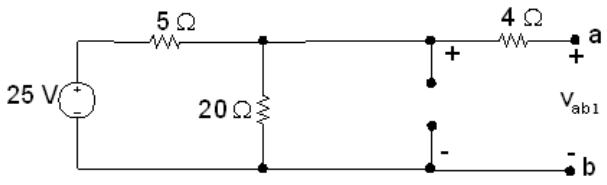


49

□□

- از آنجا که مقاومت ۴ اهمی از طرف پایانه a مدار باز است از آن جریانی عبور نمیکند. بنابراین با استفاده از روابط تقسیم کننده ولتاژ داریم:

$V_{ab1}=25*20/(20+5)=20^V$

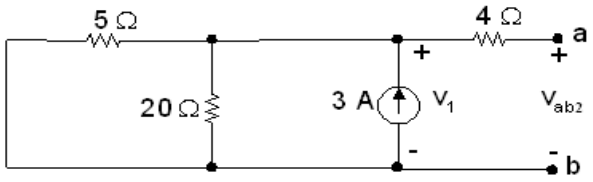


50

- اینبار با صفر کردن منبع ولتاژ ، مقدار ولتاژ V_{ab2} محاسبه میشود:

$R=R_1 || R_2=5*20/(5+20)=4\Omega$

$V_{ab2}=3*4=12^V$

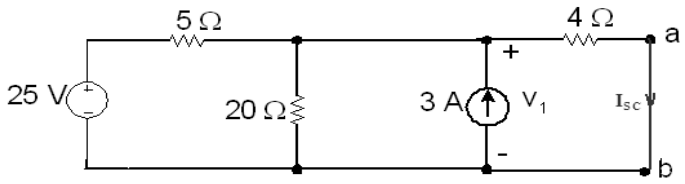


51

- بنابراین مقدار V_{ab} برابر خواهد شد با:

$V_{ab}=V_{ab1}+V_{ab2}=20+12=32^V$

- حال با فرض اتصال کوتاه بودن ترمینالهای a و b مقدار جریان اتصال کوتاه محاسبه می‌شود:

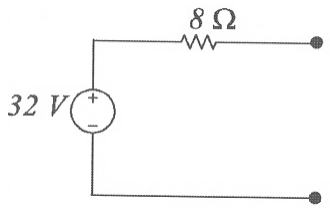


52

- با استفاده از اصل جمع آثار مقدار جریان اتصال کوتاه برابر ۴ آمپر بدست می آید $I_{SC}=4A$.
- مقادیر منبع ولتاژ و مقاومت تونن بصورت زیر محاسبه میشوند:

$V_{Th}=V_{ab}=32^{V}$

$R_{Th}=V_{ab}/I_{SC}=32/4=8^{\Omega}$



53

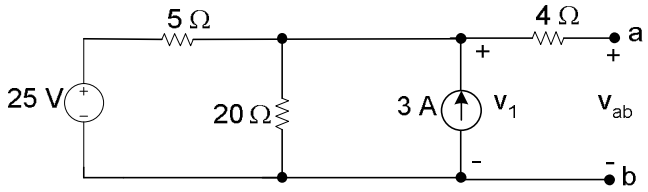
□□□ □□□□□□□□□ □□□□□ □□□ □ □□

- برای بدست آوردن مقاومت تونن می توان به اینصورت عمل کرد که ابتدا تمام منابع ولتاژ و جریان مستقل را صفر کرده و مقاومت معادل دیده شده از دو سر a وb محاسبه میشود. این مقاومت همان مقاومت معادل تونن R_{Th} میباشد.
- مقدار ولتاژ منبع ولتاژ معادل تونن V_{Th} مشابه حالت قبل محاسبه میشود و همان V_{ab} با فرض مدارباز بودن دو سر a و b میباشد.

54

□□□□

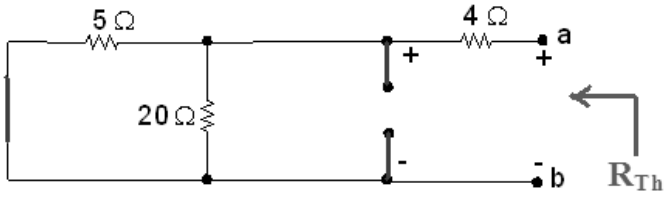
- برای مدار زیر مدار معادل تونن را بدست آورید (همان مدار مثال قبلی).



55

□□

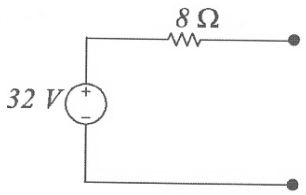
- نحوه محاسبه ولتاژ V_{Th} مشابه مثال قبلی است و مقدار آن برابر با 32^{V} میباشد.
- برای محاسبه R_{Th}، ابتدا تمام منابع مستقل را صفر میکنیم و مدار زیر حاصل میشود. سپس مقدار مقاومت معادل دیده شده از دو سر a و b را محاسبه میکنیم:



56

- از آنجا که مقاومتهای ۵ و ۲۰ اهمی با هم موازی و مجموعه آنها با مقاومت ۴ اهمی سری هستند، مقاومت معادل کل از رابطه زیر بدست میآید:

- $R=(5||20)+4=5*20/(5+20)+4$
- $R=4+4=8^{\Omega}$
- $R_{Th}=8^{\Omega}$



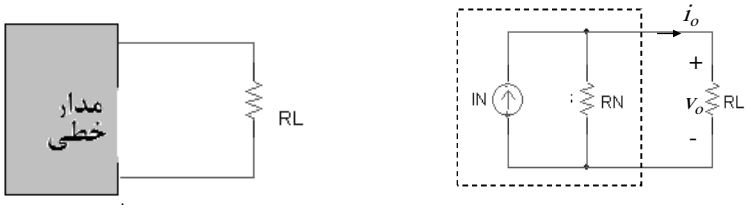
57

□□□□ □□□□□ □□□□

- مشابه آنچه برای مدار معادل تونن گفته شد، می‌توان بجای هر مدار شامل مقاومتها، منابع مستقل یا وابستهٔ ولتاژ یا جریان از ترکیب موازی یک منبع جریان و یک مقاومت استفاده کرد.

58

- بجای مدار سمت چپ از معادل آن می‌توان استفاده کرد که در سمت راست نشان داده شده است.



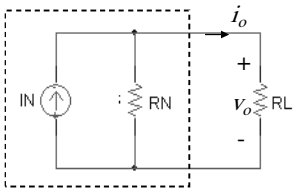
59

□□□□ □□□□□ □□□□ □□□□□□ □□□□

شامل دو مرحله است:

۱-یافتن مقاومت نورتن

۲- یافتن مقدار منبع جریان نورتن



60

□□□□□ □□□□□□

- نحوهٔ یافتن مقاومت نورتن مشابه روشهای یافتن مقاومت تونن است.
- با محاسبهٔ ولتاژ ترمینالهای خروجی وقتی که مدار باز هستند و سپس محاسبه جریان اتصال کوتاه ترمینالهای خروجی.

$$R=V/I_{SC}$$

- تمامی منابع مستقل ولتاژ و جریان برابر با صفر قرار داده می‌شود، سپس مقاومت معادل محاسبه می‌شود.

61

□□□□ □□□□□ □□□□

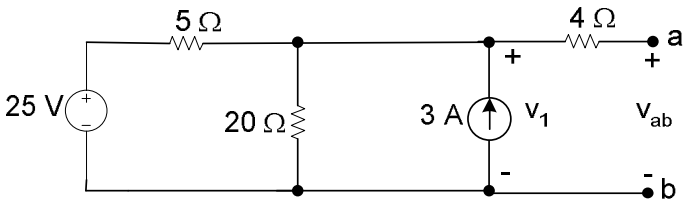
- مقدار جریان منبع جریان نورتن، برابر است با همان جریان اتصال کوتاه ترمینالهای خروجی.
- توضیح: در صورتیکه مدار معادل تونن موجود باشد، از رابطهٔ زیر هم می‌توان جریان منبع را بدست آورد:

$$I_N=V_{Th}/R_{Th}$$

62

□□□□

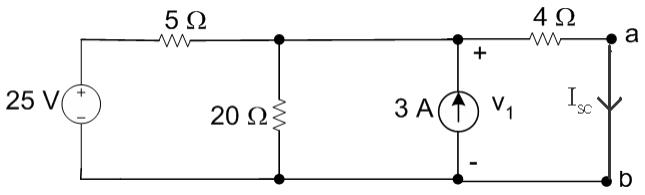
- مدار معادل نورتن مدار زیر را بدست آورید:



63

□□

- ابتدا جریان اتصال کوتاه را محاسبه می‌کنیم:



64

- با استفاده از اصل جمع آثار مقدار جریان ۴ آمپر بدست می‌آید.

$I_{SC}=4A$

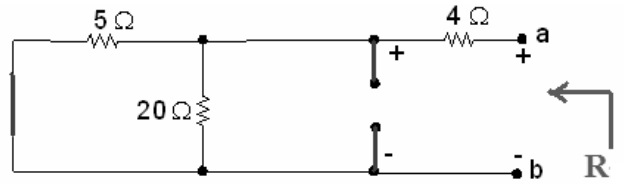
- همانگونه که بعداً نیز اشاره خواهد شد، برای یافتن جریان اتصال کوتاه می‌توان از روشهای دیگری مثل ولتاژ-گره، جریان-خانه، KCL و یا KVL استفاده کرد.

65

□□□□□ □□□□□

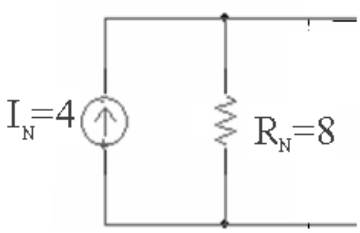
- برای یافتن مقاومت نورتن منابع مستقل را صفر کرده مقومت دیده شده را محاسبه می‌کنیم:

$R=4+(5||20)=4+4=8$



66

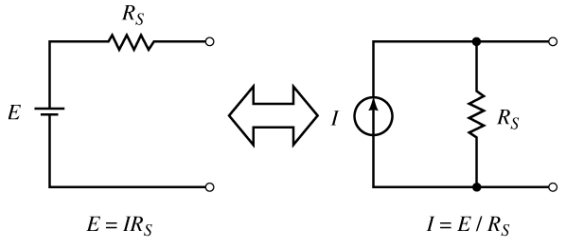
- بنابراین مدار معادل نورتن بشکل زیر است:



67

□□□□ □□□□

- در بعضی موارد تبدیل منبع جریان به منبع ولتاژ یا برعکس، باعث سادگی مسأله می‌شود.
- می‌توان بجای منبع ولتاژ سری با مقاومت، از یک منبع جریان موازی با مقاومت استفاده کرد.



68

مدارهاي مرتبه اول

□□□□ □□□ □□□□ □□□□

- هر مداری که شامل تنها یک عنصر ذخیره کنندهٔ انرژی، تعدادی منبع و تعدادی مقاومت باشد مدار مرتبه اول نامیده می‌شود.
- عنصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی می‌تواند خازن یا مقاومت باشد.
- یکی از خواص مدارهای مرتبه اول اینست که پاسخ مدار دارای تابع دیفرانسیلی درجه اول می‌باشد.

□□□ □□□□ □□□□□□□ □□ □□□□□ □□□□□□

- معادلهٔ دیفرانسیل و ویژگی‌ها و روشهای حل آن.
- پاسخ طبیعی.
- ثابت زمانی.
- پاسخ گذرا و پاسخ ماندگار مدار.

□□□ □□□□□ □□□□□□□ □□□□□

- بطور کلی دو نوع مدار مرتبه اول وجود دارد:
- *مدار RC*: مدارهایی که دارای مجموعه‌ای از مقاومتها و منابع هستند و تنها یک خازن نیز در آنها وجود دارد.
- *مدار RL*: مدارهایی که دارای مجموعه‌ای از مقاومتها و منابع هستند و تنها یک سلف نیز در آنها وجود دارد.

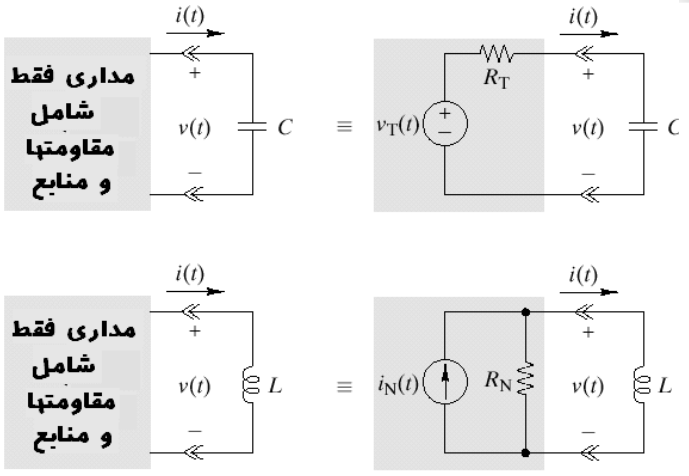
- همانگونه که در مبحث مدارهای معادل نورتن و تونن گفته شد، هر مدار شامل منابع و مقاومتها را می‌توان بصورت:

۱) ترکیب سری یک منبع ولتاژ و مقاومت (معادل تونن)

۲) ترکیب موازی یک منبع جریان و مقاومت(معادل نورتن)

نمایش داد.

73

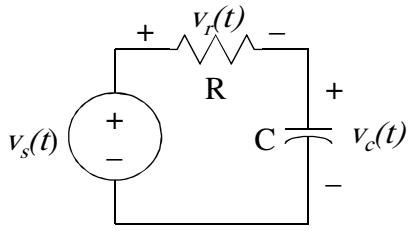


74

مدار RC

RC □□□□

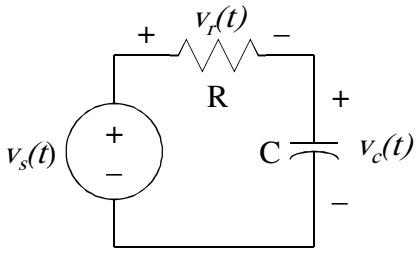
- مدار RC از یک مقاومت و یک خازن تشکیل شده است. مجموعهٔ مقاومت و منبع ولتاژ ممکن است معادل تونن یک مدار دیگر باشد.



RC □□□□ □□□□□

- رابطهٔ KVL را برای مدار نوشته و سپس آنرا تبدیل به یک معادلهٔ دیفرانسیل کرده و حل می‌کنیم:

$$v_r(t) + v_c(t) = v_s(t)$$



77

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx = v_s(t)$$

$$RC\frac{di(t)}{dt} + i(t) = C\frac{dv_s(t)}{dt}$$

$$RC\frac{dv_r(t)}{dt} + v_r(t) = RC\frac{dv_s(t)}{dt}$$

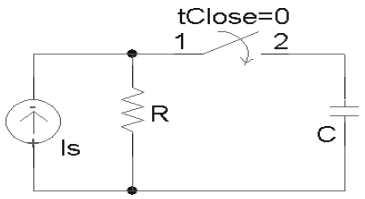
78

- همانگونه که دیده می‌شود معادلات دیفرانسیل بدست آمده درجه اول هستند. برای حل این معادله می‌توان از روشهای حل معادلات دیفرانسیل یا از روش لاپلاس استفاده کرد.
- برای حل معادلات دیفرانسیل نیاز به دانستن شرایط اولیه است. شرایط اولیه با توجه به شکل مدار معلوم می‌شوند.

79

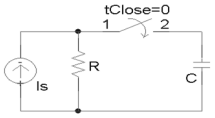
RC □□□□ □□□□□ □□□□□ □□□□□

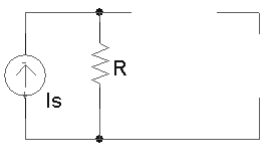
- *یکی از ویژگی‌های خازن اینست که ولتاژ آن بطور ناگهانی تغییر نمی‌کند.*
- در شکل زیر یک مدار RC نشان داده شده است که سوئیچ آن درست در زمان صفر بسته می‌شود و خازن شروع به شارژ می‌کند



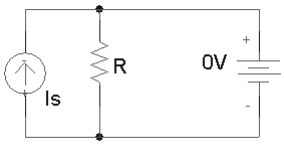
80

- وضعیت مدارRC قبل از بستن کلید، درست بعد از بستن کلید و نهایتاً پس از گذشت زمان طولانی از بستن کلید دیده می‌شود:

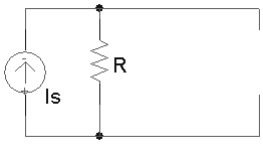




قبل از بستن



بلافاصله بعد از بستن



بعد از گذشت زمان طولاني

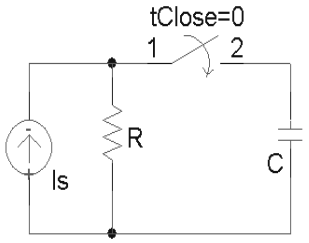
81

:□□□

- خازن در ابتدا شارژ و ولتاژ آن زیاد می‌شود
- بعد از گذشت زمان جریان کمی از آن عبور می‌کند
- با گذشت زمان، جریان عبوری به سمت صفر میل می‌کند. به همین دلیل خازن در زمان بی‌نهایت بعد از تغییر وضعیت کلید، مدار باز در نظر گرفته می‌شود.

82

- معادلهٔ دیفرانسیل برای مدار زیر با استفاده از رابطهٔ KCL نوشته شده و حل می‌گردد:



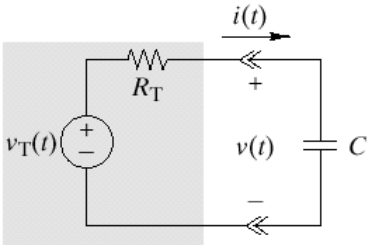
$$-I_S + \frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$v_C(t) = I_S R + (v_C(0) - I_S R)e^{-\frac{1}{RC}t}$$

83

□□□ □□□□ □□ RC □□□□

- مدار مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم رابطهٔ جریان را بدست آوریم.



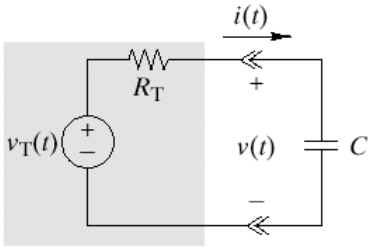
84

□□

$$R_T i(t) + v(t) = v_T(t)$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$R_T C\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = v_T(t)$$



85

□□

- با توجه به رابطه زیر یکی از جوابها بصورت $ke^{-t/Rc}$ می‌باشد.

$$R_T C\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = v_T(t)$$

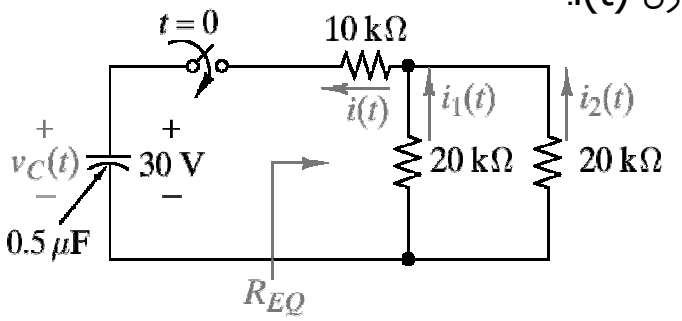
- از طرف دیگر با توجه به شکل مسأله، پس از گذشت زمان طولانی مقدار ولتاژ خازن برابر با V_T می‌شود. بنابراین فرم کلی جواب بصورت زیر است:

$$v(t) = v_T + ke^{(\frac{-t}{RC})}$$

86

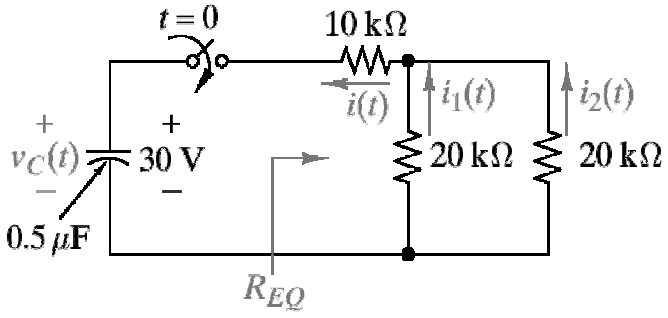
RC □□□□ □□ □□□□

در مدار زیر ولتاژ اولیهٔ خازن برابر با ۳۰ ولت می‌باشد.
درزمان t=0 کلید بسته می‌شود. مطلوبست رابطه جریان خازن i(t).



□□

- ابتدا مقدارمقاومت معادل R_{EQ} را محاسبه می‌کنیم.
- $R_{EQ}=20||20+10=20^{K}$



$$v_c(t) + R_{EQ} i(t) = 0$$

$$i(t) = c\frac{dv_c(t)}{dt}$$

➔ $$v_c(t) + R_{EQ} C \frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$v_c(t) + 10^{-2} \frac{dv_c}{dt} = 0$$

89

- و بنابراین مقدار ولتاژ خازن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$v_c(t) = ke^{-100t}$$

- با توجه به صورت مسأله شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم. مقدار ولتاژ اولیهٔ خازن برابر با ۳۰ می‌باشد. بلافاصله بعد از بستن کلید نیز ولتاژ ثابت خواهد ماند. بنابراین $v_{0+}=30^{V}$ می‌باشد.

رابطه ولتاژ خازن بصورت زیر می‌باشد:

$$v_c(t) = 30e^{-100t}$$

90

- با مشتق‌گیری از رابطه ولتاژ رابطه جریان خازن بدست می‌آید.

$$i(t) = C\frac{dv_c}{dt} = 0.5\times10^{-6}\times30(-100)e^{-100t}$$

$$i(t) = -1.5\times10^{-3}e^{-100t}$$

91

RC □□□□□□□ □□ □□□ □ □□

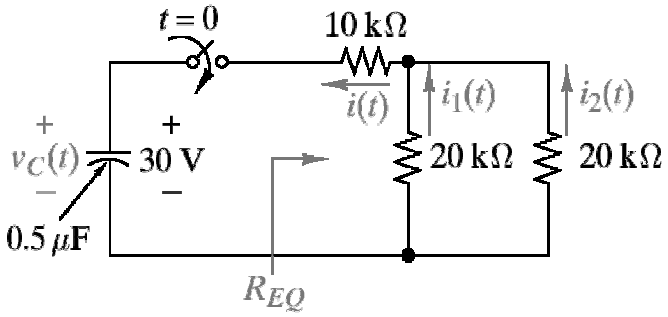
- در قسمتهای قبلی با استفاده از روشهای حل معادلات دیفرانسیل و یا لاپلاس پاسخ مدار محاسبه می‌شد. روش دیگری نیز برای یافتن پاسخ مدارهای Rc وجود دارد.
- ابتدا با استفاده از مقاومت معادل، ثابت زمانی مداربدست می‌آید: $\tau = RC$
- سپس از فرمول زیر استفاده می شود:

پاسخ مدار=مقدار نهایی+(مقدار اولیه-مقدار نهایی)*$e^{-t/RC}$

92

RC □□□□ □□ □□□□

- همان مثال قبلی را از روش جدید حل کنید.



93

- مقدار مقاومت معادل برابر با ۲۰ کیلو اهم می‌باشد. بنابراین:

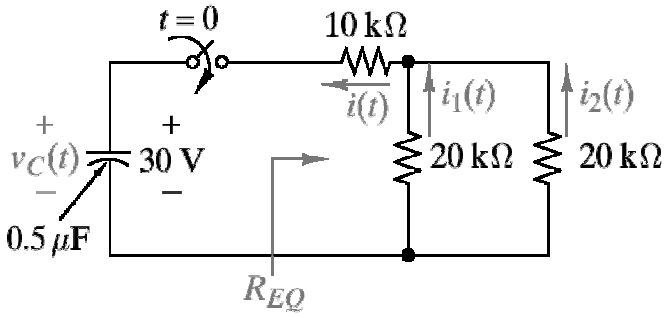
$$\tau = RC = (20\times10^{3})\times(0.5\times10^{-6}) = 0.01$$

- مقدار جریان اولیه برابر است با:

$$i_{0+} = -\frac{v_C(0^+)}{R_{EQ}} = -\frac{30}{20^k} = -1.5\times10^{-3}$$

94

- پس از گذشت زمان طولانی خازن دشارژ شده و مقدار جریان آن به صفر می‌رسد. بنابراین: $i(\infty) = 0$



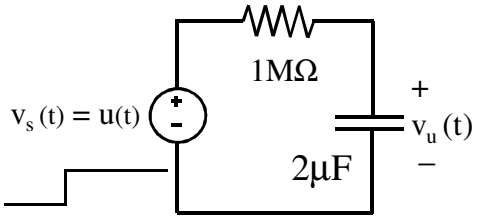
- با استفاده از فرمول گفته شده مقدار جریان خازن بدست می‌آید:

$$i(t) = 0 + (-1.5\times10^{-3})\, e^{-100t}$$

$$i(t) = -1.5\times10^{-3}\, e^{-100t}$$

RC □□□□ □□ □□□□

- در مدار زیر رابطهٔ ولتاژ خازن را بدست آورید با این فرض که مقدار اولیه ولتاژ خازن برابر صفر است. منظور از U(t) تابعی است که برای زمانهای قبل از صفر مقدار آن برابر با صفر و برای زمانهای بعد از صفر مقدارآن برابر ۱ می‌باشد.



97

□□

- ابتدا ثابت زمانی مدار را بدست می‌آوریم.

$$\tau = RC = 10^6 \times 2 \times 10^{-6} = 2$$

- سپس مقادیر اولیه و نهایی ولتاژ را محاسبه می‌کنیم:

$V_C(0^+)=V_C(0^-)=0$

$V_C(\infty)=1$

98

□□

- با استفاده از رابطهٔ زیر ولتاژ خازن را بدست می‌آوریم.

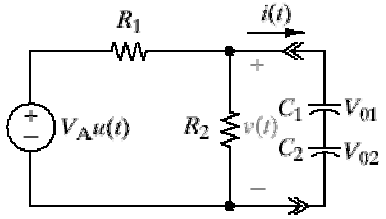
پاسخ مدار=(مقدار نهايي-مقدار اوليه)+مقدار نهايي*e-t/RC

$$V_C(t)=1-(0-1)e^{-t/2}$$

$$V_C(t)=1-e^{-t/2}$$

RC □□□□ □□ □□□□

- مدار زیر همراه مقادیر اولیه ولتاژهای آن داده شده است. مطلوبست مقدار ولتاژ v(t).



$V_A = 100$ V
at $t = 0$
$V_{01} = 5$ V
$V_{02} = 10$ V

$C_1 = 0.1\ \mu$F
$C_2 = 0.5\ \mu$F
$R_1 = 30$ kΩ
$R_2 = 10$ kΩ

□□

- خازنها با یکدیگر سری هستند. بنابراین خازن معادل آن بصورت زیر است:

$$C_{EQ} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{C_2}} = 0.0833\ \mu F$$

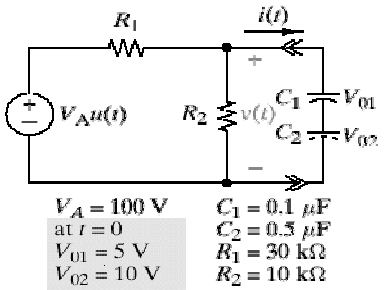
- مقدار ولتاژ اولیه مجموع دو خازن:

$$V_0 = V_{01} + V_{02} = 5 + 10 = 15V$$

101

- مدار دارای چند مقاومت میباشد و لازم است ابتدا معادل تونن آن را بدست آورد.

$$v_{Th} = v_{oc} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_A u(t) = \frac{10}{40} 100u(t) = 25u(t)$$



$V_A = 100$ V
at $t = 0$
$V_{01} = 5$ V
$V_{02} = 10$ V

$C_1 = 0.1\ \mu$F
$C_2 = 0.5\ \mu$F
$R_1 = 30$ kΩ
$R_2 = 10$ kΩ

102

- مقدار مقاومت معادل نیز بصورت زیر بدست می‌آید.

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 7.5k\Omega$$

- مقدار ثابت زمانی را محاسبه می‌کنیم

$$Tc = R_T C_{EQ} = \left(7.5x10^{3}\right)\left(8.33x10^{-8}\right) = \frac{1}{1600}\,s$$

103

□□

- با استفاده از فرمول زیر جواب بدست می‌آید.

پاسخ مدار=مقدار نهايي+(مقدار نهايي-مقدار اوليه)*$e^{-t/RC}$

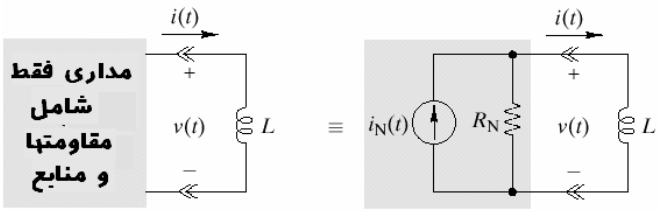
$$v(t) = (15-25)e^{-1600t} + 25$$
$$= 25 - 10e^{-1600t}\ V \qquad t \geq 0$$

104

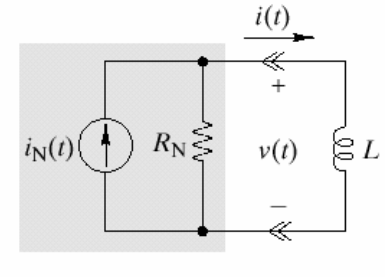
مدارهاي مرتبه اول RL

RL □□□ □□□□

- مشابه مدارهای RC هستند و دارای یک سلف و تعدادی مقاومت و منبع می‌باشد. پاسخ مدار نیز جواب معادله دیفرانسیلی درجه اول است.



RL □□□□ □□□□



$$G_N v(t) + i(t) = i_N(t)$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\boxed{G_N L\frac{di(i)}{dt} + i(t) = i_N(t)}$$

107

■

$$i(t) = Ke^{st}$$

$$G_N Ls + 1 = 0$$

$$s = -1/G_N L$$

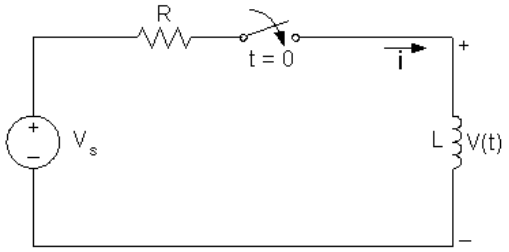
$$i(0) = I_0 = Ke^0 = K$$

$$\boxed{i(t) = I_0 e^{-t/G_N L} \qquad t \geq 0}$$

108

RL□□□

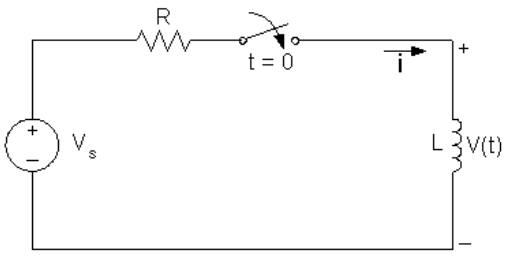
- در مدار زیر قبل از صفر جریانی از مدار عبور نمی‌کند. پس از بستن کلید رابطه جریان را بدست آورید.



109

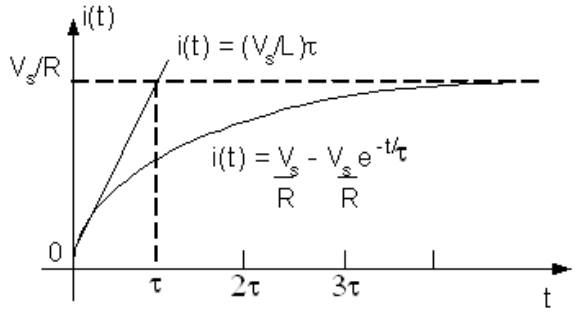
□□

$$V_s = iR + L\frac{di}{dt} \qquad i(t) = \frac{V_S}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$$



110

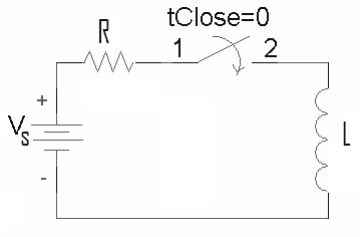
- منحنی تغییرات پاسخ مدار مشابه مدار RC است و بصورت نمایی تغییر می‌کند. بطور کلی در مدارهای مرتبه اول پس از گذشت زمانی معادل ۳ برابر ثابت زمانی پاسخ مدار تقریباً به مقدار نهایی خود می‌رسد.



111

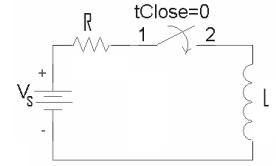
RL □□□□ □□□□□ □□□□□ □□□□□

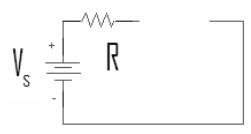
- یکی از ویژگی‌های سلف اینست که جریان آن بطور ناگهانی تغییر نمی‌کند.
- در شکل زیر یک مدار RL نشان داده شده است که سوئیچ آن درست در زمان صفر بسته می‌شود و جریان در مدار برقرار می‌شود.

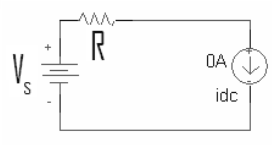


112

- وضعیت مدارRL قبل از بستن کلید، درست بعد از بستن کلید و نهایتاً پس از گذشت زمان طولانی از بستن کلید دیده می‌شود:







قبل از بستن　　بلافاصله بعد از بستن　　بعد از گذشت زمان طولاني

113

- *[illegible]*: سلف در ابتدا مقاومت زیادی در مقابل عبور جریان از خود نشان می‌دهد ولی بعد از گذشت زمان جریان بیشتری از آن عبور می‌کند. بعبارت دیگرسلف در زمان بی‌نهایت بعد از تغییر وضعیت کلید، اتصال کوتاه در نظر گرفته می‌شود.

114

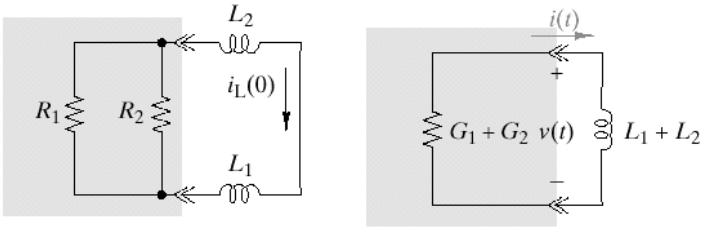
RL □□□□ □□□□ □□□□□ □□□□□□

- مشابه آنچه که برای مدار RC گفته شد به دو طریق می‌توان پاسخ مدار را بدست آورد.
- در روش اول با استفاده از حل معادله دیفرانسیل یا روش لاپلاس جواب بدست می‌آید.
- در روش دوم از فرمول زیر استفاده می‌شود:

پاسخ مدار=مقدار نهايي+(مقدار اوليه-مقدار نهايي)*$e^{-tR/L}$

RL □□□□ □□ □□□□

- در مدار زیر $L_1=10^{mH}$ و $L_2=30^{mH}$ و $R_1=2^{K}$ و $R_2=6^{K}$ و $i_L(0^-)=100^{mA}$ می‌باشد. مطلوبست رابطه جریان سلف در زمانهای بعد از بستن کلید.

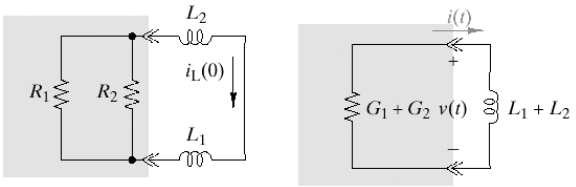


□□

- سلفها با هم سری و مقاومتها موازی هستند. بنابراین:

$$L_{EQ} = L_1 + L_2 = 10 + 30 = 40mH$$

$$G_{EQ} = G_1 + G_2 = 10^{-3}/2 + 10^{-3}/6 = 2x10^{-3}/3S$$



- ثابت زمانی مدار برابر با L/R می‌باشد. بنابراین:

$$T_C = G_{EQ} L_{EQ} = 8x10^{-5}/3s = 1/37500s$$

- می‌توان رابطهٔ جریان سلف را بصورت زیر نوشت:

$$i(t) = 0 + (100 - 0)e^{-37500t}$$

$$i(t) = 100e^{-37500t}\ mA$$

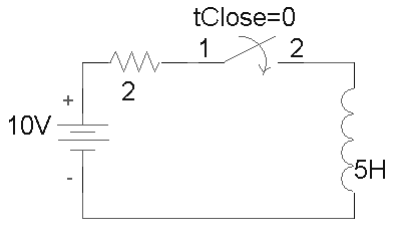
- با استفاده از روابط تقسیم کننده جریان می‌توان جریان مقاومتها را بدست آورد.

$$iR_1(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t) = 0.075e^{-37500t} \quad A \qquad t \geq 0$$

$$iR_2(t) = \frac{R1}{R1 + R2} i(t) = 0.025e^{-37500t} \quad A \qquad t \geq 0$$

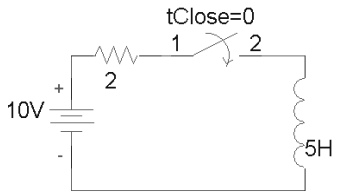
RL□□□□ □□ □□□□

- در مدار زیر کلید درست در لحظهٔ صفر بسته می‌شود. مطلوبست معادلهٔ جریان مدار.



□□

- در لحظهٔ قبل از صفر $i(0^-)=0$ می‌باشد و جریانی از سلف نمی‌گذرد.
- در زمان بی‌نهایت بعد از بسته شدن کلید نیز سلف اتصال کوتاه فرض می‌شود و بنابراین:



$i(\infty)=10/2=5^A$

- حال ثابت زمانی مدار را بدست می‌آوریم.

ثابت زماني=L/R=5/2=2.5

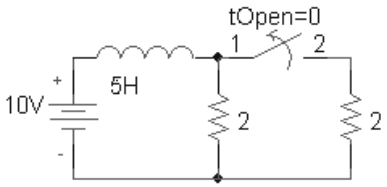
- با داشتن ثابت زمانی، مقدار اولیه و مقدارنهایی می‌توان رابطهٔ جریان را نوشت:

پاسخ مدار=مقدار نهايي+(مقدار نهايي-مقدار اوليه)*$e^{-tR/L}$

$i(t)=5+(0-5)\ e^{-t/2.5}=5(1-e^{-t/2.5})$

RL □□□□ □□ □□□□

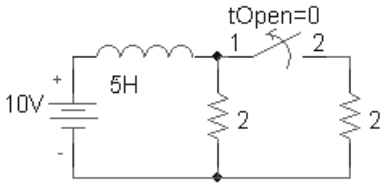
- در مدار زیر مقدار جریان سلف را بعد از باز کردن کلید بدست آورید.

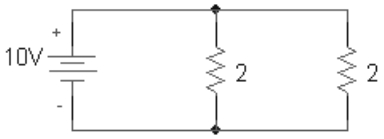


□□

- در لحظات قبل از صفر کلید بسته است و جریان از هر دو مقاومت عبور می‌کند. در این حالت سلف مثل یک اتصال کوتاه عمل می‌کند:

$i(0^-) = 10/(2||2) = 10^A$

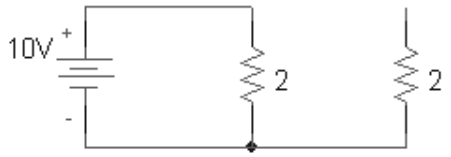




- از آنجا که جریان سلف تغییر ناگهانی ندارد، داریم:

$i(0^+)=i(0^-)=10^A$

- بعد از گذشت مدت زمان زیادی از تغییر وضعیت کلید، سلف دوباره مشابه اتصال کوتاه عمل می‌کند:

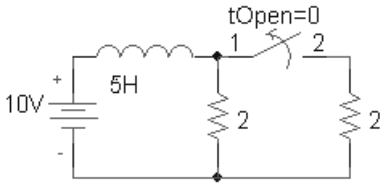


$i(\infty)=10/2=5^A$

125

- پس از باز کردن کلید، مقاومتی که توسط سلف دیده می‌شود برابر با ۲ اهم می‌باشد. بنابراین ثابت زمانی آن برابر است با:

ثابت زمانی$=L/R=5/2=2.5^S$



126

- با استفاده از رابطهٔ زیر معادلهٔ جریان سلف را بدست می‌آوریم:

پاسخ مدار=مقدار نهايي+(مقدار نهايي-مقدار اوليه)*$e^{-tR/L}$

$i(t)=5+(10-5)\ e^{-t/2.5}=5(1+e^{-t/2.5})$

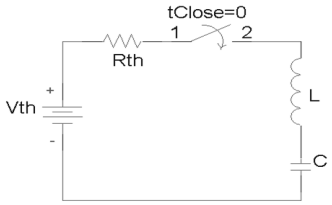
127

مدارهاي مرتبه دوم

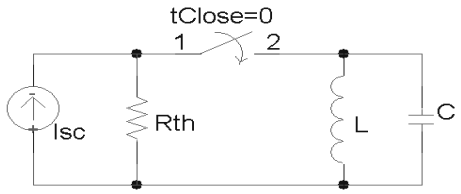
128

□□□□□ □□□ □□□□□ □□□□

- مدارهایی که دارای تعدادی مقاومت و منبع، یک خازن و یک سلف می‌باشند. این مدارها بر دو نوع هستند، مدار RLC سری و مدار RLC موازی.

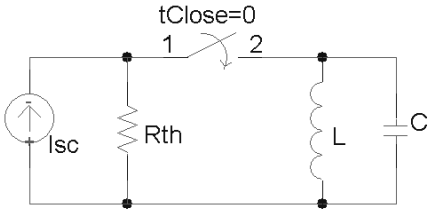


□□□



□□□□□

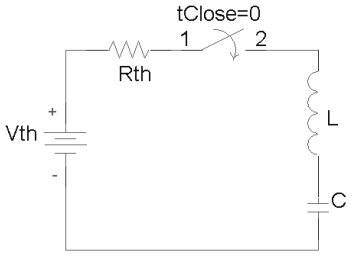
□□□□□ RLC □□□□



$$-I_{SC}+\frac{V_C}{R_{TH}}+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}V_C(x)dx+C\frac{dV_C}{dt}$$

$$\frac{d^2V_C}{dt^2}+\frac{1}{R_{TH}C}\frac{dV_C}{dt}+\frac{1}{LC}V_C=\frac{1}{C}\frac{dI_{SC}}{dt}$$

□□□ RLC □□□□



$$-V_{TH} + i_L R_{TH} + L\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_L(x)dx = 0$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_{TH}}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{L}\frac{dV_{TH}}{dt}$$

□□□□□□ □□□ □□□

$$a\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + cx(t) = f(t)$$

	□□□	□□□□□
a	1	1
b	R_{th}/L	$1/(R_{th}C)$
c	1/(LC)	1/(LC)

□□□□ □□□ □□□□

- فرم کلی جواب مدارهای مرتبه دوم بصورت زیر است:

مقدار نهایی + پاسخ طبیعی=پاسخ مدار

که مقدار نهایی در واقع پاسخ مدار است وقتی که مدار به حالت پایدار خود رسیده باشد یا بعبارت دیگر با فرض مدارباز بودن خازنها و اتصال کوتاه بودن سلفها، پاسخ مدار محاسبه می‌شود.

□□□□□ □□□□□

- برای بدست آوردن پاسخ طبیعی معادلهٔ دیفرانسیلی را حل می‌کنیم:

$$a\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+cx(t)=f(t)$$

$$ap^2Ae^{pt}+bpAe^{pt}+cAe^{pt}=0$$

$$\left(ap^2+bp+c\right)Ae^{pt}=0$$

$$ap^2+bp+c=0$$

- با حل معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌های معادله بدست می‌آید:

$$p_1, p_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- بسته به مقادیر ریشه‌ها سه حالت ممکن است اتفاق افتد که فوق میرا، میرای بحرانی و زیر میرا نامیده می‌شوند.

□□□ □□□ □□□

- اگر $b^2 > 4ac$ باشد مقادیر p_1 و p_2 حقیقی هستند و جواب معادلهٔ دیفرانسیلی (پاسخ گذرا) بصورت زیراست:

$$x_{trans}(t) = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t}$$

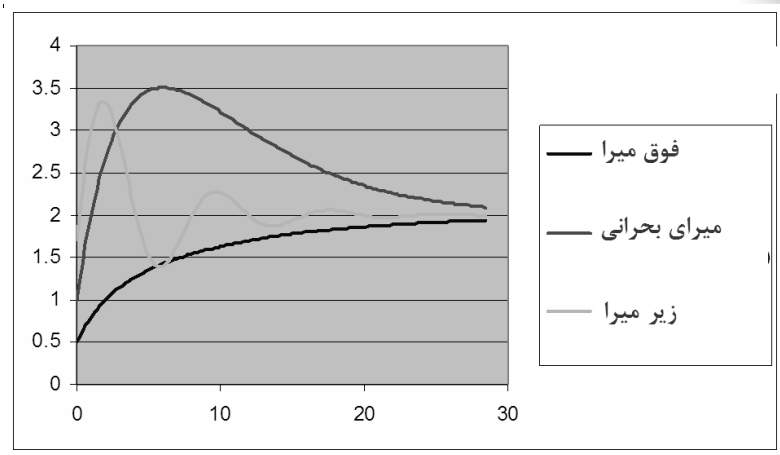
- که مقادیر p_1 و p_2 معلوم هستند ولی مقادیر A_1 و A_2 باید معلوم شوند.

□□□□ □□□□ □□□

- این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که $b^2 = 4ac$ باشد. با توجه به آنچه از معادلات دیفرانسیل می‌دانیم فرم جواب بصورت زیر است:

$$x_{trans}(t) = A_1 e^{-pt} + A_2 te^{-pt}$$

- که مشابه حالت قبل مقادیر p_1 و p_2 معلوم هستند ولی مقادیر A_1 و A_2 باید معلوم شوند.



خلاصه‌اي از روش حل مدارهاي RLC

139

- با توجه به سری یا موازی بودن مدار RLC چندجمله‌ای مشخصه را تشکیل دهید.
- با استفاده از روشهای حل معادلات دیفرانسیل یا روش لاپلاس، جواب معادله مشخصه را بدست آورید.
- مقدارنهایی پاسخ را با فرض مدار باز بودن خازن و اتصال کوتاه بودن سلف بدست آورده به معادله اضافه کنید.
- با استفاده از شرایط اولیه، مجهولات موجود در پاسخ را بدست آورید.

140