اعداد مختلط

تألیف والتر لدرمان

ترجمهٔ علی‌اکبر مهرورز

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

مرکز نشر دانشگاهی
۱۹۷

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۱۵

Complex Numbers
Walter Ledermann
Routledge & Kegan Paul,1976

اعداد مختلط
تألیف والتر لدرمان
ترجمهٔ دکتر علی‌اکبر مهرورز
ویراستهٔ دکتر مهدی بهزاد
مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۴
تعداد ۳۰۰۰
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ دانشگاه علامه طباطبائی

لدرمان، والتر Ledermann, Walter
اعداد مختلط
عنوان اصلی:Complex Numbers
۱ اعداد. ۲. توابع متغیر مختلط. الف. مهرورز، علی‌اکبر، مترجم. ب. عنوان
QA ۲۵۵ ۵۱۵/۹

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

پیشگفتار

هدف این کتاب معرفی بی‌پیرایه‌ای از اعـداد مختلط و خواص آنهاست. اعداد مختلط، همانند انواع دیگر اعداد، اساساً اشیایی هستند که با آنها تحت قواعد معین محاسبه انجام می‌گیرد؛ ووقتی که این اصل درنظر گرفته شود، طبیعت اعداد مختلط اسرارآمیزتر ازانواع دیگر اعداد نخواهد بود. این نحوهٔ صوری دستیابی به اعداد مختلط اخیراً درگزارشی[1] که برای اتحادیهٔ ریاضی تهیه شده، توصیه گردیده است. ما معتقدیم که این روش مزایای واضحی در تدریس دارد و بیش از تعریفهای دیگر هندسی یا علم‌الحرکاتی $\sqrt{-1}$، کـه سابق براین پیشنهاد می‌شد، درجهت مفاهیم جبر مدرن است.

ازطرف دیگر، واضح است که دریك کتاب درسی مقدماتی جایی برای بحث مفصل سؤالاتی از قبیل سازگاری منطقی، که حتماً باید در مبحث اصول موضوعی دقیق گنجانیده شود، وجود ندارد. به‌هرحال، قسمتهایی راکه بایدحذف می‌شد (البته بااخطارلازم) می‌توان به‌سادگی با روشهای جبرمجرد که منافاتی با خط‌مشی سادهٔ اتخاذ شدهٔ دراین کتاب هم ندارد اضافه کرد.

مایلم از دوست وهمکارم دکتر ج. ا. گرین[2] به‌خاطرچند پیشنهاد ارزنده، مخصوصاً در رابطه با فصل همگرایی کـه دنباله‌ای از کتاب او و از این مجموعه به نـام دنباله‌ها و سریهاست، تشکر نمایم.

والتر لدرمان

---

۱. تدریس جبر مجرد درکلاسهای ششم، فصل۳ (شرکت‌ج. بل‌وپسران، لندن، ۱۹۵۷ میلادی.)

2. J. A. Green

فصل اول

نظریهٔ جبری اعداد مختلط

۱. دستگاه اعداد

قبل از معرفی اعداد مختلط بهتر است به‌اختصار انواع اعدادی را که با آنها بیشتر آشنا هستیم مرور بکنیم و ببینیم چرا انواع مختلف اعداد وجود دارند.

ابتدایی‌ترین نوع عدد مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ...، است که کودکان آنها را برای شمارش اشیا یاد می‌گیرند. حساب، علم اعداد، براین واقعیت پایه‌گذاری می‌شود که اعداد را، طبق قواعد معینی که به‌زودی آنها را با جزئیات بیشتر مطرح خواهیم کرد، می‌توان با هم جمع و درهم ضرب نمود. وجود این دو قانون ترکیب و رابطهٔ متقابل آنهاست که به‌عنوان خصیصهٔ واقعی تمام اعداد تلقی می‌شود و به‌مثابهٔ راهنمایی در معرفی دستگاههای جدید اعداد برای هدفهای مختلف به‌ما کمك می‌کند.

حال یادآور می‌شویم که در برنامهٔ مدارس چگونه از اعداد طبیعی به‌دستگاههای ظریفتردسترسی پیدا می‌کنیم. کوشش برای اینکه تفریق، یعنی حل معادلهٔ $a+x=b$ نسبت به x وقتی که a و b داده‌شده‌اند، همواره میسر باشد به معرفی صفر (یکی از دستاوردهای بزرگ فکر بشر) واعداد منفی منجرمی‌شود. اکنون مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح (اعداد تام) $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ دردسترس‌ماست. سپس،وقتی که‌می‌خواهیم عمل تقسیم را انجام دهیم باید معادله‌های $ax=b$ را، که در آن a و b معلومند و a غیر صفر است، حل کنیم. برای‌اینکه در همهٔ حالات حل معادله ممکن باشد معرفی اعداد گویا (کسرها) لازم است. این اعداد با نماد b/a، که در آن a و b اعداد صحیح هستند و a غیرصفر است، نشان داده می‌شوند.

وقتی که به این مرحله رسیدیم، چهار عمل اصلی حساب، یعنی اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، بدون محدودیت به‌استثنای تقسیم برصفر، همواره قابل استفاده هستند. این اعمال اصلی از قوانین عمومی زیر که در ریاضیات از اهمیت اساسی برخوردار هستند پیروی می‌نمایند.

(۱) $a+b=b+a$ (قانون جابه‌جایی جمع).

(۲) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (قانون شرکت‌پذیری جمع).

(۳) $a+x=b$ دارای جواب منحصربه‌فردی است که به‌صورت $x=b-a$ نوشته می‌شود (قانون تفریق).

(۴) $ab=ba$ (قانون جابه‌جایی ضرب).

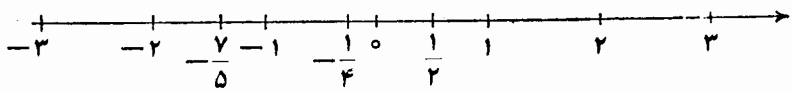
(۵) $(ab)c=a(bc)$ (قانون شرکت‌پذیری ضرب).

(۶) $(a\neq ۰)$ و $ax=b$ دارای جواب منحصر به‌فرد $x=b/a$ است (قانون تقسیم).

(۷) $(a+b)c=ac+bc$ (قانون توزیع‌پذیری).

اغلب این قوانین، شاید با ظاهری متفاوت، چنان برای خواننده آشنا هستند که ممکن است از وجودشان بی‌اطلاع باشد. بنابراین از قانون شرکت‌پذیری جمع نتیجه می‌شود که ستونی از اعداد را می‌توان از بالا به‌پایین و یا از پایین به‌بالا جمع کرد. قانون توزیع‌پذیری نیز بیشتر به‌عنوان اصل ضرب کروشه‌ها مشهور است.

اعداد گویا برای بحث دربارهٔ بیشتر سؤالات ابتدایی حساب کافی است، ولی نارسایی آنها هنگام بررسی مسائلی چون محاسبهٔ ریشهٔ دوم ظاهر می‌شود. مثلاً، می‌توان نشان داد که $\sqrt{۲}$ را نمی‌توان به‌صورت m/n، که در آن m و n اعداد صحیح باشند نوشت؛ یعنی اعدادی صحیح مانند m و $n(\neq ۰)$ وجود ندارند که $m^{۲}=۲n^{۲}$. همچنین، وقتی از جبر به آنالیز می‌رسیم، که در آن حد دنباله نقشی اساسی دارد. ملاحظه می‌کنیم که حد دنباله‌ای از اعداد گویا لزوماً عددی گویا نیست[۱]. این وضعیت را با به‌کار بردن تنها یك محور مختصات



شکل ۱

می‌توان تشریح کرد. روی این محور اول همهٔ اعداد صحیح را با مقیاس معینی مشخص می‌کنیم. سپس فرض می‌کنیم که همهٔ اعداد گویا، مثل ۷/۵−، ۱/۴−، ۱/۲، ...، هم درج شده باشند؛ ولی بعد از انجام این عمل، نقاط بسیار دیگری نیز روی خط وجود

۱. صفحه ۷ از کتاب دنباله‌ها و سریها تألیف ج. ا. گرین، از این مجموعه، را ملاحظه کنید.

خواهند داشت که درمقابلشان هیچ عددی نوشته نشده است. مثلاً وقتی که پاره‌خطی به‌طول $\sqrt{۲}$ (قطر مربعی به‌ضلع واحد) را روی محور طوری بخوابانیم که یك انتهایش در ۰ قرارگیرد، انتهای دیگرش روی نقطه‌ای از محور می‌افتدکه هنوز به‌آن هیچ عددی نسبت داده نشده است. از طرف دیگر، به‌طور شهودی این واقعیت را می‌پذیریم که هرپاره‌خط بایدطولی‌داشته باشدکه بایك «عدد» مشخص می‌شود. به‌عبارت دیگر، مسلم می‌انگاریم که هر نقطه از محور مختصی داردکه عددی معین است، اگر نقطه در راستِ ۰ باشد این عدد مثبت و اگر نقطه در چپِ ۰ باشد منفی است. این عدد لازم نیست‌که عددی گویا باشد. مجموعهٔ اعدادی‌که به‌این طریق تمام خط را پرمی‌کنند، مجموعهٔ اعداد حقیقی نامیده می‌شود؛ این مجموعه شامل اعدادگویای آشنا هست، و بقیه‌اش، نظیر $\sqrt{۲}$، e، π، $\log ۲$، و غیره، هم اعداد گنگ نام دارند. (البته،کلمهٔ گنگ بدین معنی است که عدد، با خارج‌قسمت دو عدد صحیح برابر نیست و هیچ ارتباطی با این مفهوم نداردکه یك‌چیز گنگ‌از حد فهم خارج است.) به‌عبارت دیگر، اعداد حقیقی را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ همهٔ کسرهای اعشاری توصیف کرد. یك‌کسر اعشاری پایاندار یا یك‌کسر اعشاری بازگشتی متناظر با عددی‌گویاست، حال‌آنکه سایرکسرها اعدادگنگ را نمایش می‌دهند.

از روش نمایش اعداد حقیقی برروی یك خط واضح است که یك رابطهٔ ترتیبی بین آنها وجود دارد؛ یعنی هردو عدد حقیقی a و b در یکی از روابط $a=b$ یا $a<b$ یا $a>b$ صدق می‌کنند. در حقیقت وقتی‌که می‌خواهیم اعداد را برای اندازه‌گیری‌به‌کار ببریم‌این خاصیت خیلی‌اهمیت پیدا می‌کند. ولی درمتن جبری حاضر،ما به‌این واقعیت‌که اعداد حقیقی، نظیر اعدادگویا، می‌توانند با هم جمع و درهم ضرب شوند و از قوانین (۱) تا (۷) که در (صفحهٔ ۴) دیدیم پیروی می‌نمایند، خیلی بیشتر علاقه‌مند هستیم. ما این عقیده را می‌پذیریم‌که وجود این دو روش ترکیب همراه با قوانین مربوط است‌که به‌نام عدد مصداق می‌دهد. اعداد اساساً چیزهایی هستندکه محاسبه می‌شوند وهرخاصیت دیگری، هرچند مفید برای هدفهای معین، جزئی از تعریف عدد نیست. یکی از خواص ثانویه، این واقعیت‌است‌که اعداد حقیقی را می‌توان به‌اعداد مثبت ومنفی دسته‌بندی‌کرد و ازآن استنتاجهایی، نظیر «حاصل‌ضرب دو عدد منفی مثبت است» را به‌دست آورد.

برای مدتی طولانی اعتقاد براین بودکه با معرفی مجموعهٔ کامل اعداد حقیقی‌علم حساب به‌حد اشباع رسیده است. درواقع، هیچ مسئلهٔ هندسی یافنی واضحی وجودنداشت که خلق اعداد تازه‌ای را ایجاب کند. با این وجود، اگر فقط اعداد حقیقی در دسترس باشند، یکی از ساده‌ترین پرسشهای جبری در وضع رضایت‌بخشی باقی نمی‌ماند. زیرا در آن صورت مجبوریم بپذیریم‌که بعضی از معادلات درجهٔ دوم جواب دارند و بعضی هیچ جوابی ندارند. از طرف دیگر، به‌آسانی ملاحظه می‌شود اگر بتوانیم معادلهٔ خاص

$$x^{۲}+۱=۰ \qquad (۱.۱)$$

را حل‌کنیم تمام معادلات درجهٔ دوم جواب خواهند داشت، زیرا از اینجا معنایی برای

$\sqrt{-1}$ ودر نتیجه برای $\sqrt{-a}$، که در آن a هر عدد مثبتی است، حاصل می‌شود. درواقع، به‌سادگی می‌توان نوشت $\sqrt{-a}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a}$. واضح‌است که (۱.۱) نمی‌تواندجواب حقیقی داشته باشد، زیرا اگر x حقیقی باشد، x^2 هرگز منفی نیست و بنابراین نمی‌تواند برابر ۱ — باشد. لذا برای آنکه (۱.۱) قابل حل باشد باید نوع جدیدی عدد معرفی گردد که در مورد آن قاعدهٔ «مربع هرعددی مثبت است» مسلماً برقرار نباشد. ولی این قاعده، یا درواقع هرچیز دیگر مربوط به‌مثبت بودن یا منفی بودن نتیجه‌ای از هفت‌قانون اساسی که قبلاً دیدیم نیست، وبنابراین‌کاملاً[۴] قابل‌درك است که این قوانین بتوانند درمورد علایم یا اعدادی که اصطلاحات مثبت ومنفی برایشان به‌کار نمی‌رود هم برقرار باشند.

حال به‌معرفی نمادی چون i می‌پردازیم که با آن نظیر مجهولی مانند x در جبر رفتار می‌شود. i این خاصیت اضافی را هم واردکه

$$i^2=-1. \tag{۲.۱}$$

به‌عبارت دقیقتر، (به‌طور آزمایشی) مسلم می‌انگاریم که وقتی i به‌اعداد حقیقی موجود اضافه شود، جمع و ضرب در دستگاه بزرگ شده، علی‌رغم قرارداد نامأنوس (۲.۱)، هنوزهم از هفت قانون اساسی پیروی می‌کنند. با این فرض، از (۲.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$i^3=-i,\ \ i^4=1,\ \ i^5=i,\ \ i^6=-1,\ \cdots. \tag{۳.۱}$$

پس یك چندجمله‌ای برحسب i، یعنی عبارتی به‌صورت $a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3+a_4i^4+\cdots+a_ni^n$، که در آن ضرایب a_0، a_1، $\cdots$، a_n حقیقی هستند، به صورت سادهٔ $a+ib$، که در آن $\cdots-a=a_0-a_2+a_4$ و $\cdots-b=a_1-a_3+a_5$ اعداد حقیقی هستند، تبدیل می‌شود. نمادی به‌صورت

$$a+bi \ \ \text{یا}\ \ \alpha=a+ib$$

که در آن a و b حقیقی باشند، یك عدد مختلط نامیده می‌شود. خواص جبری و خواص دیگر این اعداد درقسمتهای بعدی این‌کتاب مورد مطالعه قرار خواهدگرفت و وجه‌تسمیهٔ آنها برای ما روشن خواهد شد.

۲. نظریهٔ جبری

اولین پیشنیاز برای آنکه مجموعه‌ای از اشیا، واجد شرایط اعداد باشد این است که قابلیت جمع شدن و ضرب شدن را داشته باشد. راه طبیعی تعریف جمع عبارت است از

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d), \tag{۴.۱}$$

که جمله‌های با i را با هم و جمله‌های بدون i را با هم جمع کنیم. مثلاً[۴]،

$$(3+2i)+(5+6i)=8+8i،\ \text{و}\ (-1+2i)+(2+(-7)i)=1+(-3)i.$$

اما ضرب؛ از راه ضرب صوری

$$(a+ib)(c+id)=ac+adi+bci+bdi^2$$

به‌دست می‌آید و با توجه به (۲۰۱)

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc). \qquad (5.1)$$

تعاریف (۴۰۱) و (۵۰۱) مبنای یك بحث برای اعداد مختلط را تشکیل می‌دهند. گرچه این تعاریف کاملاً طبیعی یا حتی واضح به‌نظر می‌رسند، ولی فقط وقتی قابل قبول خواهند بود که با هفت قانون اساسی سازگار باشند. درواقع این سازگاری برقرار است، اما بررسی آن تا حدی مفصل؛ وما از خواننده می‌خواهیم که آن را با اعتماد بپذیرد.

عدد مختلط $a+ib$ وقتی که اعداد حقیقی a و b معلوم باشند کاملاً مشخص است. اعداد $a+ib$ و $c+id$ مساوی هستند اگروفقط اگر $a=c$ و $b=d$ با هم برقرار باشند. پس هرمعادله‌ای که شامل اعداد مختلط باشد با دو معادله از اعداد حقیقی هم‌ارز است.

ممکن است یك عدد مختلط را به‌عنوان زوجی مرتب از اعداد حقیقی مانند (a, b) درنظر گرفت، دراین صورت فرمولهای (۴۰۱) و (۵۰۱) با قواعد جمع وضرب چنین زوجهایی متناظر می‌گردند. پس:

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$

$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc).$$

به‌هرحال، ما ترجیح می‌دهیم که یك عدد مختلط را به‌عنوان یك موجود منفرد ریاضی در نظر بگیریم، و هروقت که ممکن باشد برای نشان دادن آن از تنها یك حرف، نظیر $\alpha=a+ib$، استفاده کنیم.

اعداد حقیقی a و b را به‌ترتیب قسمت حقیقی و قسمت انگاری α می‌نامیم، وچنین می‌نویسیم:

$$a=\mathcal{R}\alpha, \quad b=\mathcal{J}\alpha.$$

توجه داشته باشید که قسمت انگاری α درحقیقت یك عدد حقیقی است. وقتی که $\mathcal{J}\alpha=0$، آنگاه عدد مختلط α به $a+i0$ تبدیل می‌شود، واین نماد از هر لحاظ مانند عدد حقیقی a عمل می‌کند. در این حالت، قواعد جمع و ضرب به

$$(a+i0)+(c+i0)=a+c+i0$$

$$(a+i0)\cdot(c+i0)=ac+i0$$

بدل می‌شوند. بنابراین به‌جای $a+i0$ صرفاً می‌نویسیم a و بدین سبب اعداد حقیقی را حالت خاص اعداد مختلط، یعنی اعداد مختلطی که قسمت انگاریشان صفر هستند، تلقی می‌کنیم. مخصوصاً توجه داشته باشید که ضرب یك عدد مختلط دریك عدد حقیقی ازقاعدهٔ سادهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$a(c+id)=ac+iad.$$

صفرمختلط و واحدمختلط همان ۰ و ۱ حقیقی هستند. عدد مختلط به‌صورت ib را که قسمت حقیقیش صفر است یك عدد انگاری محض می‌نامند. دربارهٔ مختصرکردن نمادها لازم به‌تذکر نیست که $a+(-b)i$ به‌صورت $a-ib$ نوشته می‌شود. به‌طور واضح تفریق طبق فرمول

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d),$$

انجام می‌پذیرد. بحث دربارهٔ تقسیم را تا معرفی چند مفهوم و فرمول مفید دیگر به تعویق می‌اندازیم.

به‌هرعدد مختلط $\alpha=a+ib$ عدد مختلط مزدوج $\bar{\alpha}=a-ib$ را متناظر می‌کنیم. پس، $\alpha=\bar{\alpha}$ بدین معنی است که α حقیقی است، یعنی $b=0$؛ و $\bar{\alpha}=-\alpha$ برقرار است اگر و فقط اگر α انگاری محض باشد. برای به‌دست آوردن $\bar{\alpha}$ از α فقط به‌جای i، $-i$ را قرار می‌دهیم. باید توجه داشت که هرحکم جبری قابل توجه دربارهٔ i دربارهٔ $-i$ نیز صحیح است، زیرا هردو نماد در رابطهٔ تعیین‌کنندهٔ $i^2=(-i)^2=-1$ صدق می‌کنند.

به‌آسانی می‌توان قواعد مهم

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}, \qquad (۶.۱)$$

$$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\,\bar{\beta} \qquad (۷.۱)$$

را بررسی کرد. مثلاً، (۷.۱) صراحتاً بدین معنی است که با نمادگذاری (۵.۱) داریم $(a-ib)(c-id)=(ac-bd)-i(ad+bc)$. درحالت‌خاص، داریم: $\overline{\alpha^2}=(\bar{\alpha})^2$، وغیره. از ضرب α در $\bar{\alpha}$ نتیجهٔ جالبی حاصل می‌شود؛

$$\alpha\bar{\alpha}=(a+ib)(a-ib)=a^2-(ib)^2=a^2+b^2$$

که عددی حقیقی و مثبت است، مگر درصورت $\alpha=0$ که دراین حالت مسلماً صفر است. عدد حقیقی نامنفی[۱]

$$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(\mathcal{R}\alpha)^2+(\mathcal{J}\alpha)^2} \qquad (۸.۱)$$

پیمانهٔ (قدرمطلق) α نامیده می‌شود، و داریم

$$\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2. \qquad (۹.۱)$$

بار دیگر خاطرنشان می‌کنیم که $|\alpha|=0$ اگر و فقط اگر $\alpha=0$ و به‌ازای همهٔ اعداد مختلط غیر از صفر، $|\alpha|>0$. البته، ممکن است اعداد مختلط متمایز پیمانه‌های

۱. ما این قرارداد را می‌پذیریم که منظور از ریشهٔ دوم هرعدد حقیقی نامنفی همواره ریشهٔ دوم مثبت آن باشد.

متساوی داشته باشند، مثلاً، اعداد مختلط مزدوج همواره پیمانه‌های متساوی دارند، یعنی $|\alpha|=|\bar{\alpha}|$. اگر $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$، که در آن θ عدد حقیقی دلخواهی است، آنگاه $|\alpha|=\sqrt{\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta}=۱$. وقتی که $\alpha=a$ حقیقی باشد، تعریف (۸.۱) به $|\alpha|=\sqrt{a^{۲}}$ تبدیل می‌شود که مساوی a است اگر $a>۰$ و مساوی $-a$ است اگر $a<۰$. این موضوع با تعریف پیمانهٔ $|a|$ عددی‌حقیقی چون a هماهنگ، و در نتیجه (۸.۱) تعمیم‌یافتهٔ آن است.

فرض کنید $\beta=c+id$ عدد مختلط دیگری باشد. می‌خواهیم پیمانهٔ حاصلضرب $\alpha\beta$ را به‌دست آوریم. با استفاده از (۷.۱) و (۹.۱) داریم

$$|\alpha\beta|^{۲}=(\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta})=\alpha\beta\bar{\alpha}\,\bar{\beta}=\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}=|\alpha|^{۲}|\beta|^{۲}. \qquad (۱۰.۱)$$

چون پیمانه هیچ‌وقت منفی نیست استخراج ریشهٔ دوم هیچ ابهامی به وجود نمی‌آورد و نتیجهٔ خیلی سادهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$|\alpha\beta|=|\alpha|\,|\beta|. \qquad (۱۱.۱)$$

وقتی که بخواهیم این نتیجه را درمورد اعداد حقیقی بیان کنیم با قراردادن مقادیر $\mathcal{R}(\alpha\beta)$ و $\mathcal{J}(\alpha\beta)$ از (۵.۱) در (۸.۱)، $|\alpha\beta|$ را محاسبه می‌کنیم؛ پس

$$|\alpha\beta|^{۲}=(ac-bd)^{۲}+(ad+bc)^{۲}.$$

بنابراین، (۱۰.۱) با اتحاد جالب توجه

$$(ac-bd)^{۲}+(ad+bc)^{۲}=(a^{۲}+b^{۲})(c^{۲}+d^{۲})$$

هم‌ارز است که البته به‌آسانی با محاسبهٔ مستقیم هم به‌دست می‌آید. درحالت خاص، وقتی که $\alpha=\beta$، فرمول ضرب (۱۱.۱) به صورت $|\alpha^{۲}|=|\alpha|^{۲}$ درمی‌آید، و با تکرار این استدلال درمی‌یابیم که اگر n عدد صحیح مثبتی باشد $|\alpha^{n}|=|\alpha|^{n}$.

مثال.

$$|i|=|-i|=۱,\ |-۵|=۵,\ |۱+i|=\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}=\sqrt{۲}\,.$$

$$|(۱+i)^{۴}|=۴,\ |\operatorname{tg}\theta+i|=\sqrt{(\operatorname{tg}\theta)^{۲}+۱}=|\sec\theta|.$$

حال می‌توان به‌مسئلهٔ تقسیم، جواب ساده‌ای ارائه داد. فرض کنید $\alpha=a+ib$ و $\beta=c+id$ اعداد مختلط مفروضی باشند و $\alpha\neq۰$. تعیین عددی مانند $\xi=x+iy$ با شرط

$$\alpha\xi=\beta,\ (\alpha\neq۰) \qquad (۱۲.۱)$$

موردنظر است. فعلاً فرض می‌کنیم عددی چون ξ وجود داشته باشد. آنگاه با ضرب (۱۲.۱) در $\bar{\alpha}$ درمی‌یابیم که $\bar{\alpha}\alpha\xi=\bar{\alpha}\beta$؛ یعنی

$$(a^2+b^2)(x+iy)=(a-ib)(c+id)=(ac+bd)+i(ad-bc).$$

با مقایسهٔ قسمتهای حقیقی و انگاری دوطرف ملاحظه می‌کنیم که

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

پس اگر اصلاً جوابی وجود داشته باشد، باید به‌صورت

$$\xi=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+i\frac{ad-bc}{a^2+b^2}=\frac{1}{|\alpha|^2}\bar{\alpha}\beta. \qquad (۱۳.۱)$$

باشد. به‌عکس، به‌آسانی ملاحظه می‌شود که (۱۳.۱) حتماً در (۱۲.۱) صدق می‌کند. درواقع، $\alpha(1/|\alpha|^2)\bar{\alpha}\beta=(\alpha\bar{\alpha}/|\alpha|^2)\beta=\beta$. جواب منحصربه‌فردی که در (۱۳.۱) عرضه‌شد، به‌صورت β/α یا $\beta\alpha^{-1}$ نوشته می‌شود. نیازی‌به‌حفظ‌کردن فرمول‌صریح‌جهت β/α نیست. استدلالی که نشان می‌دهد چنین عدد مختلطی وجود دارد هم‌ارز گویا کردن مخرج در عبارات گنگ است. درواقع، نباید فراموش کرد که $i=\sqrt{-1}$ هم به‌هرحال عبارت گنگی است. برای ساده‌کردن یك کسرمختلط، صورت ومخرج را درمختلط مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم؛ پس

$$\frac{c+id}{a+ib}=\frac{(c+id)\,(a-ib)}{(a+ib)\,(a-ib)}=\frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2} \qquad (۱۴.۱)$$

که هم‌ارز (۱۳.۱) است. مخصوصاً، توجه می‌کنیم که اگر $\alpha\neq 0$،

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}=\frac{a-ib}{a^2+b^2} \quad \text{و} \quad \left|\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}. \qquad (۱۵.۱)$$

به‌طور خلاصه، می‌توان گفت اعداد مختلط اشیایی ریاضی هستند که جمع، ضرب، تفریق، و تقسیم درمورد آنها چنان تعریف می‌شود که در هفت قانون اساسی صدق می‌نمایند. اعداد حقیقی را می‌توان حالات خاصی از اعداد مختلط دانست و در نتیجه هرخاصیت کلی اعداد مختلط در مورد اعداد حقیقی هم صادق است. البته، عکس این حکم صحیح نیست. مثلاً، هیچ رابطهٔ ترتیبی ساده‌ای بین اعداد مختلط وجود ندارد و لذا نه نماد $\alpha<\beta$ تعریف می‌شود، و نه‌مثبت یا منفی بودن یك عدد مختلط معنی دارد. اینها خواصی از اعداد حقیقی هستند که نمی‌توانند به‌اعداد مختلط انتقال یابند.

ساده‌ترین نوع مسئله، تبدیل عباراتی حاوی اعداد مختلط به صورت متعارف آن، یعنی به‌صورت $x+iy$، است که درآن x و y اعدادحقیقی باشند. این موضوع درمثالهای زیر روشن خواهد شد.

مثال ۱.

$$\frac{(1+2i)^2}{1-i}=\frac{1+4i+4i^2}{1-i}=\frac{-3+4i}{1-i}=\frac{(-3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{-7+i}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i.$$

مثال ۲.

$$\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-2i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}+\frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$=\frac{1-i}{2}+\frac{1+2i}{5}=\frac{7}{10}-\frac{1}{10}i.$$

مثال ۳.

$$1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7=\frac{1-i^8}{1-i}=\frac{1-(i^4)^2}{1-i}=0\,.$$

فرض کنید $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ یك چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی a_0، a_1، a_2، $\cdots$، a_n باشد. اگر به‌جای x عدد مختلطی چــون α را قرار دهیم، عدد زیر به‌دست می‌آید:

$$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n. \qquad (۱۶.۱)$$

حال می‌خواهیم $\overline{f(\alpha)}$ را بیابیم. با به‌کاربردن مکــرر (۶.۱) و (۷.۱) و با گذاشتن یك خط تیره روی هرجمله و روی عوامل موجود درطرف راست (۱۶.۱) می‌توان این‌کاررا انجام داد. اما چون ضرایب حقیقی هستند داریــم $\overline{a}_0=a_0$، $\overline{a}_1=a_1$، $\cdots$. بنابراین $\overline{f(\alpha)}=a_0(\overline{\alpha})^n+a_1(\overline{\alpha})^{n-1}+\cdots+a_n$. یا، به‌اختصار:

$$\overline{f(\alpha)}=f(\overline{\alpha}). \qquad (۱۷.۱)$$

حال فــرض می‌کنیم $f(\alpha)=0$. آنگــاه $\overline{f(\alpha)}=0$ و از (۱۷.۱) نتیجــه می‌شود کــه $f(\overline{\alpha})=0$. پس‌این نتیجه‌مهم ثابت شد که‌اگر $f(x)=0$ معادله‌ای با ضرایب حقیقی‌باشد، آنگاه یاجوابهایش حقیقی هستند یا دو به‌دو اعداد مختلط مزدوجی چون α، $\overline{\alpha}$ می باشند.

درمورد اعداد مختلط خود را به‌چهارقانون حساب محدود کرده‌ایم. مطالعهٔ اصولی توابع پیچیده‌تر را تا معرفی ایده‌های هندسی و تحلیلی به تعویق خواهیم انداخت. با این وجود، استخراج ریشه‌های دوم‌کاری‌ابتدایی است که دراین مرحله ازکارهم می‌توانلموزد

بحث قرار بگیرد.

فرض کنید $\alpha = a + ib$ عدد مختلط مفروضی باشد. تعیین عددی مانند $\xi = x + iy$ به‌طوری که $\alpha = \xi^{۲}$، یعنی

$$(x+iy)^{۲} = a+ib$$

مورد نظر ماست. با جدا کردن مؤلفه‌های حقیقی و انگاری این معادله، داریم

$$x^{۲} - y^{۲} = a, \quad ۲xy = b. \qquad (۱۸.۱)$$

اول فرض می‌کنیم که ξ وجود داشته باشد. با محاسبهٔ پیمانه نتیجه می‌گیریم که $|\xi|^{۲} = |\xi^{۲}| = |\alpha|$، و با مجذور کردن آنها داریم $(|\xi|^{۲})^{۲} = |\alpha|^{۲}$؛ یعنی

$$(x^{۲}+y^{۲})^{۲} = a^{۲}+b^{۲}. \qquad (۱۹.۱)$$

از ترکیب این تساوی و (۱۸.۱) درمی‌یابیم که

$$x^{۲} = \frac{۱}{۲}(a+\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}), \quad y^{۲} = \frac{۱}{۲}(-a+\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}).$$

عبارات طرف‌راست این‌معادلات هرگز منفی نمی‌شوند، لذا، با گرفتن ریشهٔ دوم، همان‌طور که باید، برای x و y مقادیری حقیقی به‌دست می‌آیند. برای محاسبهٔ علامات x و y باید تساوی $xy = (۱/۲)b$ را در نظر بگیریم. پس وقتی که b مثبت باشد، x و y هم‌علامت هستند، ووقتی که b منفی باشد، هم‌علامت نیستند. بنابراین، همان‌طور که می‌توان انتظار داشت معادلهٔ $\alpha = \xi^{۲}$، $(\alpha \neq ۰)$ درست دارای دو جواب است و نه چهار جواب: اگر $\xi_{۱} = x_{۱} + iy_{۱}$ یك جواب باشد، آنگاه $\xi_{۲} = -\xi_{۱} = -x_{۱} - iy_{۱}$ هم جواب دیگر است. در مسائل عددی بهتر است که مقدار یکی از مجهولات، مثلاً x، را پیدا کنیم و سپس از $xy = (۱/۲)b$ دیگری را به‌دست آوریم.

مثال.

$\sqrt{(۵-۱۲i)}$ را محاسبه کنید. فرض می‌کنیم $\sqrt{(۵-۱۲i)} = x+iy$. آنگاه داریم $x^{۲} - y^{۲} = ۵$ و $۲xy = -۱۲$. بنابر (۱۹.۱) و اینکه $x^{۲}+y^{۲} > ۰$، بدون هیچ ابهامی خواهیم داشت $x^{۲}+y^{۲} = \sqrt{۵^{۲}+(-۱۲)^{۲}}$، یا $x^{۲}+y^{۲} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$. ازاینجا نتیجه می‌شود که $۲x^{۲} = ۵ + ۱۳ = ۱۸$، یا $x = \pm ۳$ و $y = -۶/x = \mp ۲$. پس $\sqrt{(۵-۱۲i)} = \pm(۳-۲i)$.

خواننده به‌یاد دارد که عدد i اساساً به‌منظور اطمینان از قابل حل بودن معادلات درجهٔ دوم معین با ضرایب حقیقی معرفی شده بود. در نگاه اول ممکن است این‌گمان به‌وجود آید که حل معادلات درجهٔ دوم باضرایب مختلط بازهم به‌اعدادکلیتری نیازدارد، حال‌آنکه چنین نیست. در حقیقت، ریشه‌های

$$\alpha\xi^{۲}+\beta\xi+\gamma=۰$$

که درآن $\alpha(\neq ۰)$، β و γ اعداد مختلط هستند، بازهم از فرمول

$$\left(\frac{۱}{۲\alpha}\right)\left\{-\beta\pm\sqrt{(\beta^{۲}-۴\alpha\gamma)}\right\} \qquad (۲۰.۱)$$

به‌دست می‌آیند. حال درست است که عبارت زیر علامت رادیکال عموماً عددی مختلط است، ولی می‌دانیم که ریشهٔ دوم هرعدد مختلط عددی از نوع بالاتر نیست بلکه عددی است مختلط.

تمرینهای فصل اول

۱. اعداد زیر را به‌صورت $x+iy$، که درآن x و y حقیقی هستند، بیان کنید:

(۱) $(۱+۲i)(۳+۴i)$.

(۲) $\dfrac{۱}{۳+۲i}$.

(۳) $(۲+i)^{۴}$.

(۴) $\dfrac{۱}{(۴+۲i)(۲-۳i)}$.

(۵) $\dfrac{۳+۴i}{۱+۲i}$.

(۶) $\dfrac{۱-i}{۱+i}$.

۲. نسبت به ξ حل کنید:

(۱) $(۲+i)\xi+i=۳$.

(۲) $\dfrac{\xi-۱}{\xi-i}=\dfrac{۲}{۳}$.

۳. مجموع n جملهٔ زیررا به‌دست آورید:

$$i+(۲+۳i)+(۴+۵i)+(۶+۷i)+\cdots+\{۲n-۲+(۲n-۱)i\}.$$

۴. پیمانه‌ها را محاسبه کنید:

(۱) $۴+۳i$.

(۲) $(۲-i)^{۶}$.

(۳) $\frac{۱}{۵+۱۲i}$.

(۴) $\frac{۱+۲it-t^{۲}}{۱+t^{۲}}$ (t حقیقی).

۵. نشان دهید که $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$. پیمانهٔ $\frac{(۱+۲i)^{۱۲}}{(۱-۲i)^{۹}}$ را بیابید.

۶. مطلوب است محاسبهٔ

(۱) $\sqrt{i}$, (۲) $(۲+۲i)^{\frac{۱}{۲}}$, (۳) $(۳+۴i)^{\frac{۱}{۲}}$.

۷. معادلهٔ $\xi^{۲}-(۳+i)\xi+۴+۳i=۰$ را حل کنید.

۸. معادلهٔ درجهٔ دومی با ضرایب حقیقی پیدا کنید که $۲+i$ به‌عنوان یکی از ریشه‌هایش باشد. ریشهٔ دیگر چقدر است؟

۹. ثابت کنید که $|\alpha+\beta|^{۲}+|\alpha-\beta|^{۲}=۲|\alpha|^{۲}+۲|\beta|^{۲}$.

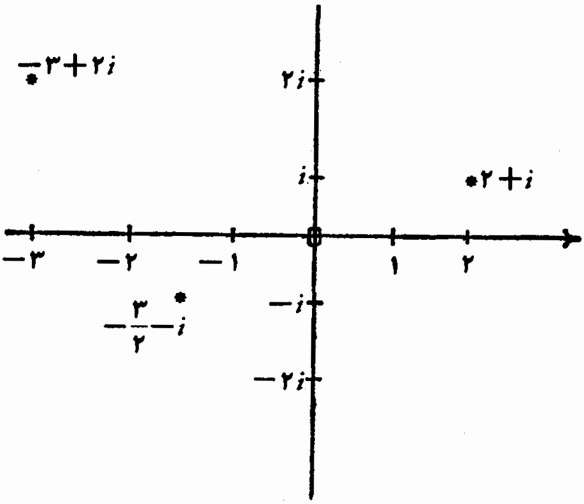
۱۰. معادلهٔ $z^{۴}-۲z^{۲}+۴=۰$ را حل کنید.

فصل دوم

نمایش هندسی

قبلاً تذکر دادیم که عدد مختلط $x+iy$ را می‌توان به‌صورت زوج مرتبی چون (x, y) از اعداد حقیقی نوشت. طبق آنچه که از هندسهٔ مختصاتی می‌دانیم زوج مرتب (x, y) را می‌توان به‌عنوان مختصات نقطه‌ای از یک صفحه تلقی کرد. پس تعیین اعداد مختلط، به طور هندسی به‌صورت زیر درمی‌آید. صفحه‌ای را اختیار وآن را با محورهای متعامد دکارتی Ox و Oy مجهز می‌کنیم. فرض می‌کنیم عدد $x+iy$ به‌وسیلهٔ نقطهٔ $P=(x, y)$ نمایش داده شود. بدین طریق می‌توان اعداد مختلط را به‌صورت نقاط یك صفحه مشخص کرد (شکل ۲ را ملاحظه کنید). این صفحه (به‌طور صحیح‌تر چنین صفحه‌ای) را اغلب صفحهٔ آرگاند، یا نمودار آرگاند، و یا به‌طور ساده صفحهٔ مختلط می‌نامند. هررابطهٔ جبری بین اعداد مختلط را می‌توان به‌صورت یك رابطهٔ هندسی بین نقاط متناظر صفحهٔ آرگاند بیان کرد؛ و به‌عکس، اصولاً هررابطهٔ بین نقاط یك صفحه را می‌توان به‌عنوان رابطه‌ای بین اعداد مختلط تلقی نمود. با این وجودخواننده باید موقعیت منطقی را به‌وضوح به‌خاطر بسپاردکه: اعداد مختلط را به‌عنوان اشیایی جبری تعریف کردیم که از قوانین ترکیب‌معینی تبعیت‌می‌کنند. نقاط صفحهٔ آرگاند قدرت یك نمایش‌تصویری را دارندکه برای بسیاری‌از هدفهای نظری وعملیً مفید هم هستند. ولی این نمایش نباید با خود اشیا اشتباه شود. به‌عنوان مقایسه،درجهٔ حرارت‌غالباً توسط ارتفاع‌ستونی‌ازجیوه نمایش داده می‌شود،وخود وسیلهٔ بسیارمفیدی هم هست. اماهیچ‌کس نمی‌گویدکه‌درجهٔ حرارت ستونی ازجیوه است. علاوه براین راههای دیگری هم برای نمایش‌اعداد مختلط (ودرجهٔ‌حرارت) وجود دارند.

از این پس غالباً برای نشان دادن یك عدد مختلط از نمادگذاری سنتی‌که حرفی

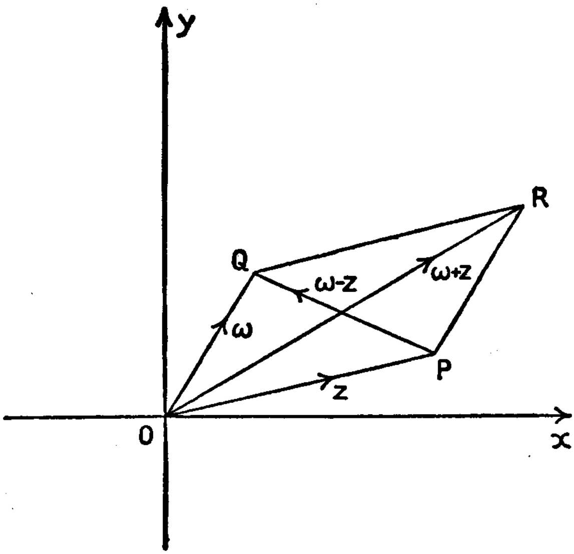


شکل ۲

تنها از حروف الفبای لاتین، همچون $z=x+iy$ یا $w=u+iv$ با شرط حقیقی بودن x، y، u و v، است استفاده خواهیم‌کرد. اغلب برای اختصار، به‌جای «نقطهٔ نمایش z» می‌گوییم «نقطهٔ z». چون محور xها متشکل از نقاط حقیقی است، آن را محور حقیقی می‌نامیم. به‌همین ترتیب، محور yها را که حاوی همهٔ نقاط انگاری محض است، با قدری گمراه‌کنندگی، محور انگاری می‌نامیم. (البته، این محور انگاری‌تر از محور حقیقی نیست.) مرکز O متناظر با عدد صفر است.

تعبیری‌دیگرولی درعین‌حال‌مربوط برای‌اعداد مختلط‌این است‌که بردار $\overrightarrow{OP}$ باشرط $P=(x, y)$ را، یا به‌طور کلیتر قطعه خط جهت‌دار $\overrightarrow{P_۱P_۲}$ را، که در آن $P_۱=(x_۱, y_۱)$، $P_۲=(x_۲, y_۲)$ و $x_۲-x_۱=x$، $y_۲-y_۱=y$، به عدد مختلط $x+iy$ متناظر کنیم. بازهم اگر سوءتفاهمی پیش نیاید، به‌جای بردار نمایش z، از بردار z سخن خواهیم گفت؛ حتی به خاطر راحتی کار با نوشتن $z=\overrightarrow{OP}$ مرتکب سوء استفاده از زبان هم خواهیم شد.

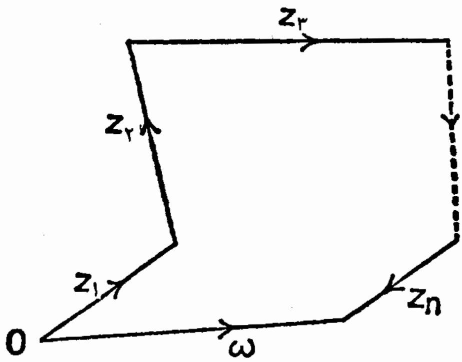
حال اگر $z=x+iy$ و $w=u+iv$، مجموع z و w را به زبان برداری برمی‌گردانیم. z و w را به‌ترتیب با بردارهای $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳

آنگاه $z+w=(x+u)+i(y+v)$ متناظر با بردار $\overrightarrow{OR}$ است که در آن
$$R=(x+u, y+v).$$
آشکارا، R رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه‌رأس دیگرش Q، O و P می‌باشند. پس محقق شد که جمع اعداد مختلط از قانون متوازی‌الاضلاع پیروی می‌کند. توجه کنید که ممکن است z و w به‌ترتیب با $\overrightarrow{QR}$ و $\overrightarrow{PR}$ هم نمایش داده شوند. پس روابط
$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR} \text{ و } \overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$$
را داریم که هریك می‌تواند به‌عنوان قانون مثلثی جمع تلقی شود. رابطهٔ هندسی
$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}(=\overrightarrow{OR})$$
به معنی $z+w=w+z$ است و تأییدی برقانون جابه‌جایی جمع. برای نمایش دادن مجموع $w=z_1+z_2+\cdots+z_n$ متشکل از چندین عدد مختلط، بردارهای متناظر با z_1، z_2، $\cdots$ و z_n را به‌صورت خط شکسته‌ای که از O آغاز شود پشت‌سرهم قرار می‌دهیم (شکل ۴ را ببینید).
برداری که O را به‌نقطهٔ انتهایی بردار z_n وصل می‌کند متناظر با w است. درحالت خاص، رابطهٔ $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ به‌معنی این است که خط‌شکستهٔ $OP_1P_2\cdots P_n$ یك چندضلعی بسته است $(O=P_n)$.

تفاضل دو عدد مختلط نیز می‌تواند به‌سادگی توسط نمودار برداری نمایش داده



شکل ۴

P_1، P_2، P_3، ... نقاط انتهایی z_1، z_2، z_3، ... هستند

شود. اگر $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ به‌ترتیب متناظر با z و w باشند، آنگاه $w-z$ به وسیلهٔ $\overrightarrow{PQ}$، یعنی به‌وسیلهٔ برداری که از وصل‌کردن نقطهٔ انتهایی z به‌نقطهٔ انتهایی w به‌دست می‌آید، نمایش داده می‌شود.

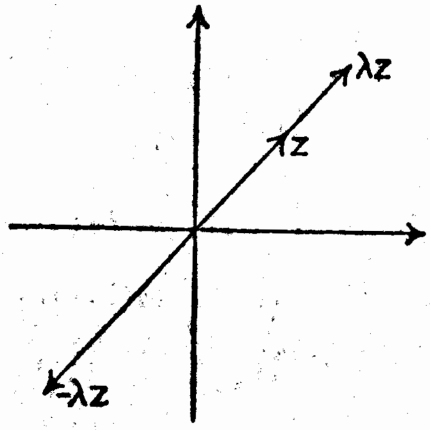
اگر z به‌وسیلهٔ بردار $\overrightarrow{OP}$ که در آن $P=(x,\ y)$، نمایش داده شود آنگاه طول این بردار از فرمول

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

به‌دست می‌آید. به‌طور کلیتر، اگر z به‌وسیلهٔ $\overrightarrow{P_1P_2}$ نمایش‌داده شود، آنگاه $|z|=P_1P_2$ طول پاره‌خط P_1P_2 است. فرض کنیم $\overrightarrow{OP_1}=z_1=x_1+iy_1$، $\overrightarrow{OP_2}=z_2=x_2+iy_2$، و $z=z_2-z_1$. آنگاه $|z|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$، یعنی $|z|=P_1P_2$ طول پاره‌خط مذکور است.

اگر λ عددی حقیقی باشد، بردار λz موازی با بردار z است و طولش $|\lambda|$ برابر طول z. اگر $\lambda>0$، بردارهای z و λz هم‌جهت هستند و درصورتی‌که $\lambda<0$، جهت‌ها مخالف یکدیگرند (شکل ۵ را ملاحظه کنید که در آن $|\lambda|>1$). در حالت خاص توجه کنید که $|z|=|-z|$. اگر $z\neq 0$، بردار $(1/|z|)z$ برداری یکه (یعنی برداری با طول واحد) است و با z هم‌جهت.

بار دیگر مثلث OPR (شکل ۳) را که بیانگر فرمول $z+w=w+z$ است درنظر می‌گیریم. با به‌کاربردن حکم اقلیدسی که مجموع دوضلع هرمثلث نمی‌تواند از ضلع سوم کوچکتر باشد، به‌رابطهٔ مهم «نامساوی مثلثی» می‌رسیم:



شکل ۵

$$|z+w| \leqslant |z|+|w|. \qquad (۱.۲)$$

خواننده متوجه خواهد شد که این یك نامساوی بین پیمانه‌های اعداد مختلط است نه‌بین خود این اعداد (زیرا می‌دانیم که چنین چیزی وجود ندارد). در (۱.۲) تساوی برقرار است فقط وفقط وقتی که مثلث OPR فروبریزد، یعنی وقتی که $w=\lambda z$ و λ عدد حقیقی مثبتی باشد.

با به‌کاربردن مکرر (۱.۲) به‌نامساوی کلیتر

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

می‌رسیم. نباید تصور شود که درمورد $|z-w|$ نامساوی مشابهی ولی در جهت مخالف وجود دارد. درواقع، چون $|w|=|-w|$، فقط می‌توان چنین بیان کرد که

$$|z-w|=|z+(-w)| \leqslant |z|+|w|.$$

استنتاجی مفیدتر که از (۱.۲) حاصل می‌شود چنین است: فرض کنیم $z=z_2$ و $w=z_1-z_2$ ولذا $z+w=z_1$. آنگاه (۱.۲) تبدیل می‌شود به

$$|z_1| \leqslant |z_2|+|z_1-z_2|$$

یا

$$|z_1-z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|. \qquad (۲.۲)$$

واضح است که با مناسب انتخاب کردن z و w می‌توان z_1 و z_2 را با هردو عدد مختلط دلخواهی برابر گرفت. مخصوصاً، به‌ازای زوج (z_1, z_2) که ازعوض کردن z_1 با z_2 حاصل می‌شود (۲.۲) بازهم برقرار است. پس، همچنین داریم:

$$|z_2 - z_1| \geqslant |z_2| - |z_1|.$$

ازطرف‌دیگر، $|z_2 - z_1| = |-(z_1 - z_2)| = |z_1 - z_2|$، لذا به‌عنوان یك نتیجهٔ‌منشا بهٔ با (۲.۲) داریم

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_2| - |z_1|. \qquad (3.2)$$

یکی از نامساویهای (۲.۲) یا (۳.۲) بدیهی است زیرا طرف راستش منفی یا صفراست. باکمك دیگری که نتیجه‌ای غیربدیهی است

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \qquad (4.2)$$

را می‌توان داشت که همواره برقرار است.

چنانچه عدد مختلط متغیری چون z (که از این پس یك متغیر مختلط نامیده‌خواهد شد) به‌یك یا چند شرط وابسته باشد قسمتی از صفحه را می‌پوشاند. در بیشتر موارد،این شرایط مربوط به‌پیمانهٔ اعداد مختلط هستند.

مثال ۱. معادلهٔ $|z-a| = r$ که در آن r مثبت[1] است، دایره‌ای را مشخص می‌کندکه شعاعش r و مرکزش a است. داخل دایره توسط $|z-a| < r$ و خارج آن توسط $|z-a| > r$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۲. رابطهٔ $\mathcal{R}z > \lambda$، (λ حقیقی) حاکی است که z در نیم صفحه طرف راست خط قائم $x = \lambda$ قراردارد.

مثال ۳. فرض‌کنیم z توسط شرط

$$|z-1| = |z+1| \qquad (5.2)$$

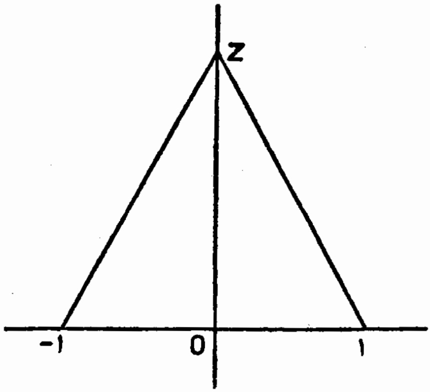
محدود شده باشد. چون، عموماً، $|z-a|$ مبین فاصلهٔ بین z و a است، معادلهٔ (۵.۲) متناظر با مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از ۱ و ۱ — است،که چیزی جزمحورانگاری (محور yها)، یعنی $\mathcal{R}z = 0$ نیست (شکل ۶ را ملاحظه کنید).

این نتیجه را می‌توان با محاسبه نیز به‌دست آورد. با مجذورکردن (۵.۲) درمی‌یابیم که

$$|z-1|^2 = |z+1|^2$$
$$(z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1).$$

---

۱. قرارداد می‌کنیم که اصطلاح مثبت یا منفی دلالت براین دارد که عدد موردنظر حقیقی است.



شکل ۶

پس از ضرب و ساده‌کردن داریم $\circ = 2(z+\bar{z})$، یعنی $\mathcal{R}z = \circ$.

مثال ۴. خطی را که از مبدأ نمی‌گذرد، می‌توان با معادله‌ای به‌صورت

$$\mathcal{R}(az) = 1 \qquad (۶.۲)$$

که در آن a عدد مختلط مناسبی‌است نمایش داد. درواقع، فرض‌کنید $a = l - im$. آنگاه به‌سادگی دیده می‌شود که (۶.۲) با معادلهٔ $lx + my = 1$، معادلهٔ آشنای خطراستی‌که‌از مبدأ نمی‌گذرد، معادل است.

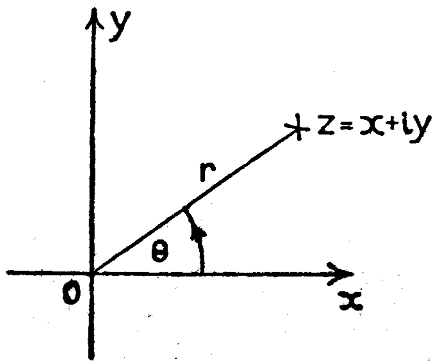
برای بحث دربارهٔ تعبیر هندسی حاصل‌ضرب اعداد مختلط، استفاده از مختصات قطبی (r, θ) از مختصات دکارتی (x, y) راحت‌تر است. شکی نیست‌که خواننده با معادلات

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad (۷.۲)$$

که روابط بین این دو دستگاه مختصات را بیان می‌کنند (شکل ۷) آشنا هست. توجه‌کنید

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \qquad (۸.۲)$$

که فوراً تعبیری هندسی از پیمانه را به‌ما ارائه می‌کند: $|z|$ فاصلهٔ نقطهٔ z از مبدأ است. زاویهٔ θ همیشه، مگرآنکه‌خلافش ذکرشده باشد، بارادیان اندازه‌گیری می‌شود. به‌هرحال، مقدارآن به‌طورکامل از معادلات (۷.۲) به‌دست نمی‌آید، زیرا مسلماً می‌توان مضارب صحیح دلخواهی از 2π را به‌آن افزود یا ازآن‌کم کرد. برای رفع این ابهام، شرط



شکل ۷

اضافی زیر را وضع می‌کنیم که

$$-\pi < \theta \leqslant \pi. \qquad (۹.۲)$$

به‌ازای هر عدد غیرصفری چون z فقط و فقط یک مقدار θ وجود دارد که در (۷.۲) و (۹.۲) صدق می‌کند. این مقدار را شناسهٔ z می‌نامند، و می‌نویسند

$$\theta = \arg z. \qquad (۱۰.۲)$$

ما $\arg 0$ را تعریف نمی‌کنیم. رابطهٔ $\operatorname{tg}\theta = y/x$، که نتیجه‌ای مستقیم از (۷.۲) است، θ را به‌طور منحصر به‌فرد معین نمی‌کند، مگر اینکه همان‌گونه که مرسوم است تابع $\operatorname{tg}^{-1} t$ چنان تعریف گردد که به‌ازای همهٔ مقادیر t

$$-\frac{1}{2}\pi \leqslant \operatorname{tg}^{-1} t \leqslant \frac{1}{2}\pi .$$

درحالت عمومی، مقدار $\operatorname{tg}^{-1}(y/x)$ برابر است با θ، یا $\theta+\pi$ یا $\theta-\pi$؛ و تنها بعد از بررسی علامات هم x و هم y وملاحظهٔ شرط (۹.۲) است که می‌توان گفت کدام از این سه مقدار، صحیح است.

چند مثال.

(۱): $\arg 3 = 0$، (۲): $\arg(-3) = \pi$، (۳): $\arg(1+i) = \pi/4$،
(۴): $\arg(-1-i) = -3\pi/4$. (توجه کنید که هم در (۳) و هم در (۴) داریم: $\operatorname{tg}^{-1}(y/x) = \pi/4$.)، (۵): $\arg 2i = \pi/2$، (۶): $\arg(-i) = -\pi/2$.

حال بنابر (۷.۲) عدد مختلط $z = x+iy$ را می‌توان به‌صورت زیر که شکل قطبی

آن نام دارد نوشت

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad (۱۱.۲)$$

دراینجا $r=|z|$ و $\theta=\arg z$. به‌عکس، اگر z به شکل (۱۱.۲) بیان شده باشد و r و θ اعدادی حقیقی باشند که درنامساویهای $r \geqslant 0$ و $-\pi<\theta\leqslant\pi$ صدق می‌کنند، آنگاه (۱۱.۲) شکل قطبی z است، و می‌توان استنباط کرد که $r=|z|$ و $\theta=\arg z$.

حال، دو عدد مختلط به‌شکلهای قطبی $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ و $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ را درنظرمی گیریم. داریم

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=$$
$$r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2$$
$$+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}.$$

لذا

$$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}. \qquad (۱۲.۲)$$

از این معادله فوراً حکم زیر راکه هم‌اکنون هم آن را می‌دانیم به‌دست می‌آوریم:

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1|\,|z_2|.$$

از طرف دیگر، صحیح نیست بگوییم که $\arg z_1z_2$ مساوی با $\theta_1+\theta_2$ است، زیرا این عدد ممکن‌است خارج ازبرد (۹.۲) بیفتد. تنها چیزی که می‌توانیم بگوییم این‌است که با شرط $k=0$، یا ۱، یا ۱ −،

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2+2k\pi, \qquad (۱۳.۲)$$

و تنها با بررسی شرط (۹.۲) است که مقدار درست k مشخص می گردد.

اگر z به‌شکل قطبی (۱۱.۲) باشد، آنگاه

$$\bar z=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}.$$

وقتی که $z\neq 0$، می‌توانیم (۱۵.۱)، یعنی $z^{-1}=r^{-2}\bar z$ را به‌کار ببریم. بنابراین

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta). \qquad (۱۴.۲)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\arg\bar z=\arg\frac{1}{z}=-\arg z,$$

مگراینکه z یك عدد حقیقی منفی باشد. درچنین حالاتی، مثلاً وقتی که $z=-p$، و p مثبت باشد، داریم

$$\arg(-p)=\arg\left(-\frac{۱}{p}\right)=\pi.$$

از ترکیب (۱۴.۲) و (۱۲.۲) به‌آسانی فرمولی برای خارج‌قسمت دوعدد مختلط به‌دست می‌آوریم. با به‌کاربردن نمادهای قبلی و با فرض $z_۲\neq ۰$، درمی‌یابیم که

$$\frac{z_۱}{z_۲}=z_۱\frac{۱}{z_۲}=\frac{r_۱}{r_۲}(\cos\theta_۱+i\sin\theta_۱)(\cos(-\theta_۲)+i\sin(-\theta_۲)).$$

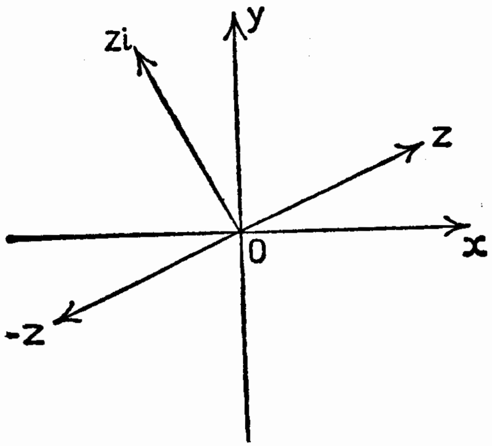
بنابراین

$$\frac{z_۱}{z_۲}=\frac{r_۱}{r_۲}\left\{\cos(\theta_۱-\theta_۲)+i\sin(\theta_۱-\theta_۲)\right\}$$

شکل قطبی $z_۱/z_۲$ است. پس می‌توان استنباط کردکه (۱): $|z_۱/z_۲|=r_۱/r_۲$ و (۲): $\arg(z_۱/z_۲)=\arg z_۱-\arg z_۲+۲k\pi$، که درآن $k=۰$، یا ۱، یا ۱ــ. اگرفقط خطوط محمل بردارهای $z_۱$ و $z_۲$ بدون توجه به‌جهتشان موردنظرباشند، آنگاه می‌توان گفت که $\arg(z_۱/z_۲)$ زاویهٔ بین این خطوط را معین می‌کند.

حال فرمول حاصل‌ضرب را در حالت ویژه‌ای که یکی از عوامل i باشد به‌کار می‌بریم. چون $|i|=۱$ و $\arg i=(۱/۲)\pi$، شکل قطبی i چنین است: $i=\cos(\pi/۲)+i\sin(\pi/۲)$. بنابراین

$$zi=r\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{۲}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{۲}\right)\right\}.$$

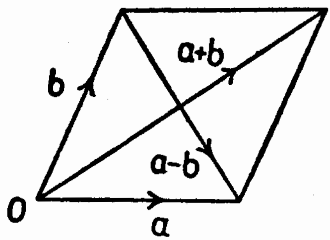


شکل ۸

پس بردار zi از دوران بردار z به‌اندازهٔ $\pi/۲$ به دست می‌آید. با تکرار این عمل، z به‌اندازهٔ π دوران پیدا می‌کند و بردار $-z$ به دست می‌آید، یعنی برحسب نمادها $-z = i(i(z))$. این به‌طریقه‌ای هندسی حکم $i^۲ = -۱$ را روشن می‌سازد.

به‌طور کلیتر، اگر a عدد مختلط ثابت و غیرصفری باشد و z متغیری مختلط، می‌توان حاصل‌ضرب az (یا za) را به عنوان عملی که روی z انجام می‌گیرد، یعنی بردار z را به‌بردار az تبدیل می‌کند، تعبیر نمود. اگر $a = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$، عمل $z \to az$ منجر به‌ضرب طول بردار z در ρ و دوران جهتش به‌اندازهٔ زاویه‌ای چون α می‌گردد.

مثال ۱. ثابت کنید که اقطار یك لوزی برهم عمودند. رئوس لوزی را می‌توان با اعداد a، ۰ و b با شرایط $|a| = |b| \neq ۰$ و $a \neq \pm b$ (شکل ۹) نمایش داد.



شکل ۹

در این صورت اقطار با $a+b$ و $a-b$ مشخص می‌شوند. این قضیهٔ هندسی به‌معنی این است که $\arg (a-b)/(a+b) = \pm\pi/۲$، یا به‌عبارت دیگر $q = (a-b)/(a+b)$ یك عدد انگاری محض است. شرط لازم و کافی مناسب این است که $q + \bar{q} = ۰$. درواقع بنابرشرط $|a| = |b|$ به‌سادگی درمی‌یابیم که:

$$q + \bar{q} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{a}+\bar{b}} = \frac{۲a\bar{a} - ۲b\bar{b}}{(a+b)(\bar{a}+\bar{b})} = ۰\,.$$

مثال ۲. نقاط متمایز $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ روی یك خط مستقیم قرار دارند اگر وفقط اگر

$$\frac{z_۱ - z_۳}{z_۳ - z_۲} = \lambda$$

عددی حقیقی باشد، و در این صورت $z_۳$ پاره‌خطی را که توسط $z_۱ - z_۲$ نمایش داده می‌شود تقسیم می‌کند، با این تفاهم که اگر $z_۳$ نقطه‌ای داخلی برای تقسیم‌بندی باشد $\lambda > ۰$

و اگر نقطه‌ای خارجی برای آن باشد $\lambda < 0$. این شرط معادل با این حکم است که بردار $z_3 - z_1$ مضربی حقیقی از بردار $z_2 - z_3$ است و درنتیجه هردو بردار روی یك خط مستقیم قراردارند.

توجه کنید که اگر z_3 نقطهٔ وسط z_1 و z_2 باشد، آنگاه $\lambda = 1$ و لذا $z_3 = 1/2(z_1 + z_2)$.

مثال ۳. فرض کنید اعداد مختلط ثابت a و b و متغیر z، به‌ترتیب، معرف نقاط A، B و z باشند. آنگاه معادلهٔ

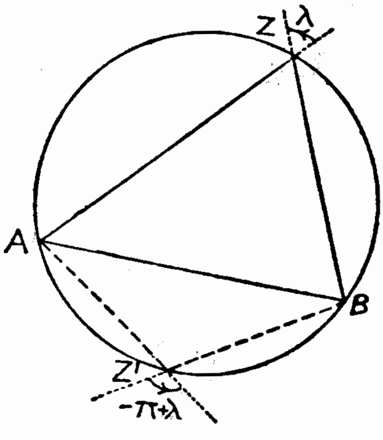
$$\arg \frac{z-b}{z-a} = \lambda$$

که در آن λ عدد حقیقی ثابتی است و در شرط $-\pi < \lambda \leqslant \pi$ صدق می‌کند، کمانی از دایره‌ای را نشان می‌دهد که AB وتر آن است و از نقطه‌ای چون z واقع برمحیط دایره، روبه‌روی زاویهٔ λ واقع می‌شود. کمان مکمل $AZ'B$ با معادلهٔ

$$\arg \frac{z'-b}{z'-a} = -\pi + \lambda$$

توصیف می‌شود (شکل ۱۰ را ببینید).

حال به‌فرمول ضرب (۱۲.۲) بازمی‌گردیم و آن را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم. فرض کنید z_1، z_2، ...، و z_n مجموعه‌ای از اعداد مختلط، و هریك به‌شکل قطبی‌نمایش داده شده باشند؛ مثلاً



شکل ۱۰

$$z_k=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k),\ (k=1,2,\cdots,n).$$

با به‌کار بردن مکرر (۱۲.۲) معلوم می‌شود که حاصل‌ضرب این اعداد از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\}.$$

درحالت خاص، وقتی که $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$، نتیجه می‌گیریم که:

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta). \qquad (۱۵.۲)$$

بازهم درحالت خاصتر، اگر عددی چون z داشته باشیم که درمـورد آن $r=1$، آنگاه $z=\cos\theta+i\sin\theta$. معادلهٔ (۱۵.۲) دراین حالت به‌صورت

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \qquad (۱۶.۲)$$

درمی‌آید. این فرمول استثنایی به قضیهٔ دوموآور[1] مشهور است. این فرمول فعلاً فقط برای وقتی که n عددی صحیح و مثبت باشد ثابت شده است. اگر همان‌طور که معمول است z^0 را برابر با ۱ بگیریم فرمول به‌روشنی برای $n=0$ نیز برقرار خواهد بود. حال، فرض کنید n عددی صحیح و منفی، مثلاً $n=-q$ با شرط $q>0$ باشد. آنگاه:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=[(\cos\theta+i\sin\theta)^q]^{-1}=[\cos q\theta+i\sin q\theta]^{-1}$$
$$=\cos(-q\theta)+i\sin(-q\theta) \qquad \text{بنابر (۱۴.۲)،}$$
$$=\cos n\theta+i\sin n\theta,$$

که درستی (۱۶.۲) برای اعداد منفی n نیز به‌ثبوت می‌رسد.

ازخلاصهٔ این مطالب می‌توان گفت که‌توان nام تابع $\cos\theta+i\sin\theta$ به‌سادگی از ضرب شناسهٔ θ در n به‌دست می‌آیـد. خواننده، این پدیده را از تابـع نمایی کلی نیـز درخواهد یافت. زیرا فرض‌کنید $f(x)=a^{\gamma x}$، کـه درآن a و γ ثابت هستند و a مثبت است. آنگـاه، به‌طـور واضـح، $[f(x)]^n=f(nx)$. اینـك نشـان خـواهیم دادکـه $\cos\theta+i\sin\theta$ درواقع تابع نمایی از نوع خاصی است، و تنها با این اطلاع است که ازکشف برجسته ولی به‌ظاهر مرموز دوموآور می‌توان درکی واقعی داشت.

دراین مرحله ازکار مجبوریم از بعضی از نتایجی کـه در فصل چهار (صفحهٔ ۴۳) به‌طور اصولی مورد بحث قرار خواهندگرفت استفاده‌کنیم. وقتی‌که z عددی مختلط‌باشد، تابع e^z (یا $\exp z$، که برای چاپ مناسبتر ولی در عین‌حال زشت‌تر است) توسط سری نامتناهی

---

1. de Moivre

$$e^z = \exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (۱۷.۲)$$

تعریف می‌شود. وقتی که $z = x$ حقیقی باشد این سری به‌فرمول[۱] مشهوری برای e^x تبدیل می‌شود. ما در اینجاکارخود را جهت ارائهٔ شرحـی دقیق از معنای یك‌سری نامتناهی بـا جملات مختلط متوقف نمی‌کنیم و از خواننده می‌خواهیم با اعتماد بپذیردکه تابع‌تعریف شدهٔ توسط (۱۷.۲) دارای خواص موردنظر هست. به‌خصوص:

$$\exp(z_1 + z_2 + \cdots + z_m) = \exp z_1 \exp z_2 \cdots \exp z_m$$

و در نتیجه $\exp(mz) = (\exp z)^m$. حال فرض‌کنید $z = i\theta$ و θ حقیقی باشد. آنگاه خواهیم داشت:

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right).$$

دراین فرمول تغییر محل جملات بامراجعه به‌نتایج عمومی نظریهٔ همگرایی (صفحه ۵۱ را ببینید) به‌سادگی توجیه می‌شود. حال اگر از سریهای معروف[۲]:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots, \ \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

به‌ازای θی حقیقی، استفاده‌کنیم درمی‌یابیم که

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \qquad (۱۸.۲)$$

اکنون ازخواص‌عمومی تابع‌نمایی به‌سادگی دیده می‌شودکه $(\exp i\theta)^m = \exp im\theta$، یعنی $(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta$، و لذا نه‌تنها قضیه دوموآور را باردیگر ثابت‌کردیم بلکه، درعین‌حال، آن را درجای صحیحش هم قرارادادیم.

نتیجهٔ (۱۸.۲) به فرمول اولر[۳] مشهور است، ویکی از شگفت‌انگیزترین کشفیات در ریاضیات می‌باشد. با توسیع دستگاه اعداد به‌دستگاهی کـه شامل اعداد مختلط هـم باشد معلوم می‌شودکه توابع مثلثاتی $\cos\theta$ و $\sin\theta$ ارتباط نزدیکی با تابع‌نمایی دارند. این واقعیت مسلماً به‌تنهایی برای توجیه معرفی اعداد مختلط کافی است. اینك چندحالت‌خاص را ملاحظه می‌کنیم:

---

۱. ص. ۲۷، P. J. Hilton, Differential Calculus.

۲. ص. ۴۴. همین مرجع.

3. Euler

$$e^{i\pi/4}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$e^{i\pi/2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,\ e^{-i\pi/2}=-i$$

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1,\ e^{-i\pi}=-1$$

و بالاخره،

$$e^{2i\pi}=1. \tag{19.2}$$

فرمول اخیر نتایج بسیاری هم دارد. زیرا اگر z عدد مختلط دلخواهی باشد، نتیجه می‌گیریم که:

$$\exp(z+2\pi i)=\exp z\exp 2\pi i=\exp z. \tag{20.2}$$

پس مقدار تابع نمایی، با افزودن $2\pi i$ به‌متغیر z، بدون تغییر باقی می‌ماند. به‌طور کلیتر، به‌جای (۱۹.۲) می‌توان $\exp(2m\pi i)=1$ و به‌جای (۲۰.۲)

$$\exp(z+2m\pi i)=\exp z,\ (m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{21.2}$$

را قرار داد. بعداً خواهیم دید (صفحهٔ ۵۳) اگر به‌ازای همهٔ zها داشته باشیم $\exp(z+p)=\exp z$، آنگاه با شرط اینکه k عددی صحیح باشد، $p=2k\pi i$. معادلهٔ (۲۰.۲) درارتباط است با، ودرواقع نتیجه‌ای‌است از، این حکم معروف که $\cos\theta$ و $\sin\theta$ توابعی متناوب با دورهٔ تناوب 2π هستند، یعنی به‌ازای هر θ، $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$ و $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$ اکنون از روی تشابه می‌گوییم که e^z نیز تابع متناوبی است و دورهٔ تناوبش عدد انگاری محض $2\pi i$ است. اگر متغیرها را به‌مقادیر حقیقی محدود کنیم تناوبی بودن تابع‌نمایی مخفی باقی می‌ماند. وقتی با اعداد مختلط سروکار داریم مهم است مشاهده کنیم که از معادلهٔ $\exp z_1=\exp z_2$ لزوماً $z_1=z_2$ نتیجه نمی‌شود، بلکه $z_1=z_2+2k\pi i$، که درآن k عدد صحیحی است، به‌دست می‌آید.

حال شکل قطبی یك عدد مختلط را می‌توان به‌صورت مختصرتر زیر نوشت:

$$z=re^{i\theta}$$

معادلهٔ (۱۸.۲) حاکی است که در حالاتی معین توابع‌نمایی را می‌توان برحسب توابع مثلثاتی هم نوشت. حال‌به‌عکس، ثابت‌می‌کنیم که توابع مثلثاتی راهم می‌توان به‌ترکیبات ساده‌ای از توابع نمایی تبدیل کرد. چون مقدار θ در(۱۸.۲)کاملاً دلخواه‌است، به‌جای آن می‌توانیم $-\theta$ را هم قرار دهیم. پس با توجه به (۱۸.۲) داریم:

$$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta.$$

ازحل این دو معادله برحسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ داریم:

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}),\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}). \qquad (۲۲.۲)$$

این معادلات را فقط به‌ازای اعداد حقیقی θ به‌دست آوردیم. ولی بعداً خواهیم دید که این معادلات درواقع به‌ازای مقادیر مختلط متغیر نیز برقرارند (صفحهٔ ۵۳).

جهت روشنتر شدن مطلب، مورد استعمال اعداد مختلط در محاسبهٔ مجموع سریهای مثلثاتی مشخصی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

مثال ۱. فرمول ساده‌ای برای مجموع

$$C=\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha+2\theta)+\cdots+\cos(\alpha+n\theta), \qquad (۲۳.۲)$$

که در آن α و θ اعدادحقیقی دلخواهی هستند ولی $\theta\neq 2k\pi$ (k عددی صحیح)، به‌دست آورید. همراه با (۲۳.۲)مجموع

$$S=\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha+2\theta)+\cdots+\sin(\alpha+n\theta)$$

را هم درنظرمی گیریم. بنابر فرمول اولر (۱۸.۲)،

$$\cos(\alpha+r\theta)+i\sin(\alpha+r\theta)=e^{i(\alpha+r\theta)}$$

ولذا

$$C+iS=\sum_{r=1}^{n}e^{i(\alpha+r\theta)}=e^{i\alpha}\sum_{r=1}^{n}e^{ir\theta}.$$

مجموع اخیر تصاعدی هندسی با قدر نسبت $e^{i\theta}$ است. پس:

$$C+iS=e^{i\alpha}e^{i\theta}\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=e^{i\alpha+\frac{n+1}{2}i\theta}\frac{e^{in\theta/2}-e^{-in\theta/2}}{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}.$$

بنابراین طبق (۲۲.۲) داریم:

$$C+iS=e^{i\alpha+\frac{n+1}{2}i\theta}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

سرانجام، با جداکردن قسمتهای حقیقی وانگاری درمی‌یابیم که

$$C=\cos\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\theta\right)\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$S=\sin\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\theta\right)\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

مثال ۲. نشان دهید که اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه

$$T = n\sin\theta + \frac{n(n-1)}{2!}\sin 2\theta + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin 3\theta + \cdots + \sin n\theta = \left(2\cos\frac{1}{2}\theta\right)^n \sin\frac{1}{2}n\theta \,.$$

برهان: با توجه به

$$(1+e^{i\theta})^n = 1 + ne^{i\theta} + \frac{n(n-1)}{2!}e^{2i\theta} + \cdots + e^{in\theta}$$

داریم

$$T = \mathcal{I}\{(1+e^{i\theta})^n\} = \mathcal{I}\{e^{\frac{1}{2}in\theta}(e^{\frac{1}{2}i\theta}+e^{-\frac{1}{2}i\theta})^n\}$$
$$= \mathcal{I}\left(e^{\frac{1}{2}in\theta}\, 2^n \cos^n\frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{1}{2}n\theta\left(2\cos\frac{1}{2}\theta\right)^n \,.$$

تمرینهای فصل دوم

۱. نقاط A و B به‌ترتیب با اعداد مختلط $a = 1-3i$ و $b = -3+4i$ نشان داده می‌شوند. نقطه‌ای چون X روی محور حقیقی مثبت چنان بیابید که مثلث AXB قائم‌الزاویه‌ای، با زاویهٔ قائمه در رأس X، باشد.

۲. نشان دهید که نقاط $2+i$، $3+2i$، $2+3i$ و $1+2i$ رئوس یك مربع هستند.

۳. درصفحهٔ z ناحیهٔ مشخص شده توسط نامساوی

$$|z-1|+|z-i| \leqslant 4$$

را بیابید.

۴. ثابت کنید شرط لازم وکافی برای آنکه نقاط z_1، z_2 و z_3 روی یك خط راست قرار بگیرند این است که اعدادی حقیقی چون λ_1، λ_2 و λ_3، که همگی صفر نیستند، $\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3 = 0$ و $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0$، وجود داشته باشند.

۵. معادلهٔ $\epsilon z\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{z}+\gamma = 0$، که در آن ϵ و γ حقیقی هستند و a مختلط، مفروض است. نشان دهید که این معادله دایره‌ای را نمایش می‌دهد اگر $\epsilon \neq 0$ و $|a|^2 = \epsilon\gamma$ و خط راستی را نمایش می‌دهد اگر $\epsilon = 0$ و $a \neq 0$.

۶. شرط لازم وکافی برای آنکه بتوان چهارضلعی z_1، z_2، z_3 و z_4 را در دایره‌ای محاط کرد این است که نسبت توافقی

$$\{z_1, z_2; z_3, z_4\} = (z_1-z_2)(z_3-z_4)/(z_1-z_4)(z_3-z_2)$$

حقیقی باشد.

۷ . رئوس متوازی‌الاضلاعی چون $ABVU$ به‌ترتیب با اعداد مختلط a، b، v و u نمایش داده می‌شوند. زاویهٔ UAB برابر α است و $|UA|=\lambda|AB|$. ثابت کنید با فرض $q=\lambda e^{i\alpha}$، $u=(1-q)a+qb$ و $v=-qa+(1+q)b$.

۸ . نشان دهید اگر $\lambda \neq 0, 1$، معادلهٔ $|(z-a)/(z-b)|=\lambda$ دایره‌ای را نمایش می‌دهد که a یا b، برحسب اینکه $\lambda<1$ یا $\lambda>1$، در درونش قرار می‌گیرد.

۹ . ثابت کنید اگر $\cos\theta=c$، آنگاه $\cos 6\theta=32c^6-48c^4+18c^2-1$ و $\sin 6\theta/\sin\theta=32c^5-32c^3+6c$.

۱۰. عبارت $\{1+i\,\mathrm{tg}\,(4m+1)/(4n)\pi\}^n$ را که در آن m و n اعداد صحیحی هستند، به‌شکل $a+ib$، که در آن a و b حقیقی هستند، بیان کنید.

۱۱. ثابت کنید که:

$$\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}=\sin\theta+i\cos\theta$$

ونتیجه بگیرید که

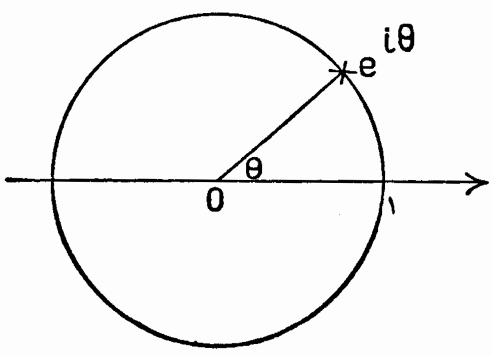
$$\left(1+\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5+i\left(1+\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}\right)^5=0\,.$$

فصل سوم

ریشه‌های واحد

یک عدد مختلط با پیمانهٔ ($r=1$) با شرط حقیقی بودن θ به شکل $\exp i\theta$ یا $\cos\theta + i\sin\theta$ است. در صفحهٔ z این اعداد به‌وسیلهٔ نقاط واقع برمحیط دایرهٔ واحد $x^2+y^2=1$ نمایش داده می‌شوند. توجه کنید که شرط $z\bar{z}=1$ با $\bar{z}=z^{-1}$ معادل‌است، لذا اعداد مختلط با پیمانهٔ واحد بااین حکم مشخص می‌شوند که مزدوجشان برمعکوسشان منطبقند.

حال به‌مطالعهٔ نوع خاصی از اعداد مختلط با پیمانهٔ واحد می‌پردازیم. معادلهٔ



شکل ۱۱

$$z^n = ۱, \qquad (۱.۳)$$

را که در آن n عدد صحیح مثبتی است درنظر بگیرید. جواب این معادله یك ریشهٔ nام واحد نامیده می‌شود. n هرچه باشد، آشکارا $z = ۱$ یك جواب معادله است، و ایــن مسلماً تنها جواب حقیقی ومثبت می‌باشد. وقتی که n زوج باشد، $z = -۱$ نیز در معادله صدق می‌کند، ولی به ازای هر nی هیچ عددی حقیقی غیر از ± ۱ بین ریشه‌های واحد دیده نمی‌شود. اما اگر اعداد مختلط را هم به‌عنوان ریشه بپذیریم، وضع کاملا متفاوت خواهد بود. حال فرض می‌کنیم که‌عدد مختلط z جوابی برای (۱.۳) باشد. آنگاه با گرفتن پیمانه از(۱.۳) خواهیم‌داشت $|z|^n = |z^n| = ۱$. پس $|z|$جواب مثبتی برای (۱.۳) است ولذا $|z| = ۱$. بنابراین، هرریشهٔ واحدلزوماً عددی با پیمانهٔ واحداست؛پس می‌توان‌نوشت $z = \exp i\theta$. دراین صورت معادله به‌شکل

$$\exp in\theta = \cos n\theta + i \sin n\theta = ۱$$

درمی‌آید. از مقایسهٔ قسمتهای حقیقی داریم $\cos n\theta = ۱$، و لذا $n\theta = ۲k\pi$، که درآن k عــددی صحیح است. به‌عبــارت دیگــر، هرجــواب z بــرای (۱.۳) بایــد به‌شکــل $\exp(۲\pi ik/n)$ باشد. از طرف دیگر، چنین عددی در حقیقت یك جواب است، زیرا

$$\{\exp(۲\pi ik/n)\}^n = \exp(۲\pi ki) = ۱, \quad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots).$$

در بادی امــر چنین به‌نظر می‌رسدکــه بدازای هر k یك و لذا بینهایت جــواب به دست آورده‌ایم. اما، این جوابها همگی متمایز نیستند. درواقع اگــر اختلاف $k_۱$ و $k_۲$ مضرب صحیحی از n باشد، مثلاً $k_۲ = k_۱ + sn$ (s عددی صحیح)، آنگاه بنابر (۱۹.۲) داریم:

$$\exp(۲\pi k_۲ i/n) = \exp(۲\pi k_۱ i/n) \exp ۲\pi si = \exp(۲\pi k_۱ i/n).$$

پس، می‌توانیم‌خودمان‌را به‌جوابهایی محدودبکنیم که‌متناظر با $k = ۰, ۱, ۲, \cdots, n-۱$ باشند (یا متناظر با هرمجموعه از n عدد صحیح که اختلاف هیــچ دوتایی از آنها مضربی از n نباشد). این n جواب ویژه، یعنی

$$\epsilon_۰ = ۱,\ \epsilon_۱ = \exp(۲\pi i/n) = \cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n},$$

$$\epsilon_۲ = \exp(۴\pi i/n) = \cos\frac{۴\pi}{n} + i\sin\frac{۴\pi}{n},$$

$$\epsilon_۳ = \exp(۶\pi i/n) = \cos\frac{۶\pi}{n} + i\sin\frac{۶\pi}{n}, \qquad (۲.۳)$$

$$\cdots$$

$$\epsilon_k = \exp(۲k\pi i/n) = \cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\epsilon_{n-1}=\exp(2(n-1)\pi i/n)=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

درواقع متمایز هستند. زیرا هرتساوی بین آنها مثلاً $(k>l)\epsilon_k=\epsilon_l$، به‌تساوی $\exp(2\pi i(k-l)/n)=1$ منجر می‌شود و از مقایسهٔ قسمتهای حقیقی در می‌یابیم که $\cos(2\pi(k-l)/n)=1$. به‌علاوه، هرجواب (۱.۳) دراین فهرست هم هست. زیراقبلاً دیده‌ایم که هرجواب با فرض‌اینکه k عددی صحیح باشد به‌شکل $\exp(2\pi ik/n)$است و این k مسلماً می‌تواند چنان انتخاب شود که دربرد $0\leqslant k\leqslant n-1$ قرار بگیرد. توجه داشته باشید که اگر ϵ یك ریشهٔ nام ۱ باشد، آنگاه همهٔ توانهایش

$$1,\ \epsilon,\ \epsilon^2,\ \cdots,\ \epsilon^{n-1} \tag{۳.۳}$$

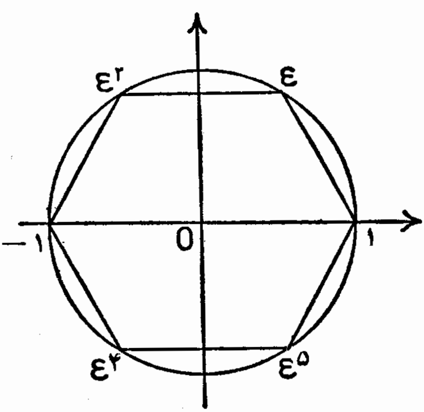
نیز ریشهٔ nام ۱ هستند. اما، درحالت‌کلی همهٔ این توانها متمایز نیستند. یك ریشهٔ nام‌واحد راکه درموردش همهٔ توانهای (۳.۳) متمایز باشند یك ریشهٔ nام اولیهٔ واحد می‌نامند. از اینجا نتیجه می‌شود که اگر ϵ یك ریشهٔ nام اولیهٔ واحد باشد، آنگاه توانهای (۳.۳) مجموعهٔ‌کاملی از جوابها را تشکیل می‌دهند. مقدار n هرچه باشد، عدد

$$\epsilon=\epsilon_1=\exp(2\pi i/n) \tag{۴.۳}$$

یك ریشهٔ nام اولیهٔ واحد است، زیرا توانهای متوالیش با جوابهای مندرج در (۲.۳) یکی هستند. درحقیقت،

$$\epsilon^k=\exp(2k\pi i/n)=(\exp(2\pi i/n))^k,\ \ (k=0,1,\cdots,n-1).$$

وقتی‌که ریشه‌های nام واحد رادرصفحهٔ مختلط رسم‌کنیم، این نقاطرئوس یك nضلعی‌منتظم محاط در دایرهٔ به‌شعاع واحد را تشکیل می‌دهند، ویکی از اینها در نقطهٔ ۱ روی محور حقیقی قرارمی‌گیرد. حالت $n=6$ درشکل ۱۲، مشاهده می‌شود.



شکل ۱۲

مثال ۱. ریشه‌های چهارم واحد ۱، i، ۱− و $-i$ هستند.

مثال ۲. ریشه‌های پنجم واحد عبارتند از:

$$\epsilon_۰=۱,\ \epsilon_۱=\cos\frac{۲\pi}{۵}+i\sin\frac{۲\pi}{۵}=۰٫۳۰۹۰+۰٫۹۵۱۱i,$$

$$\epsilon_۲=\cos\frac{۴\pi}{۵}+i\sin\frac{۴\pi}{۵}=-۰٫۸۰۹۰+۰٫۵۸۷۸i.$$

$$\epsilon_۳=\cos\frac{۶\pi}{۵}+i\sin\frac{۶\pi}{۵}=-۰٫۸۰۹۰-۰٫۵۸۷۸i,$$

$$\epsilon_۴=\cos\frac{۸\pi}{۵}+i\sin\frac{۸\pi}{۵}=۰٫۳۰۹۰-۰٫۹۵۱۱i.$$

مثال ۳. اگر ϵ یك ریشهٔ اولیهٔ واحد باشد، آنگاه

$$۱+\epsilon^{s}+\epsilon^{۲s}+\cdots+\epsilon^{(n-۱)s}$$

برابر ۰ است اگر s مضربی از n نباشد و برابر n است اگر مضربی از n باشد.
زیرا اگر $s=nq$، آنگاه $\epsilon^{s}=۱$ و هریك ازجملات این مجموع برابرواحداست. از طرف دیگر، اگر $s\neq nq$، آنگاه با شرط $۰<r<۱$ می‌توان نوشت $s=nq+r$. لذا $۱\neq\epsilon^{r}=\epsilon^{s}$. وچون مجموع به‌صورت یك تصاعد هندسی با قدر نسبت ϵ^{s} درمی‌آید، مقدارش برابر با $(\epsilon^{ns}-۱)/(\epsilon^{s}-۱)=۰$ است.

ریشهٔ سوم واحد در بعضی از مسائل مربوط به برق مورد توجهٔ خـاص هستند. این اعداد ریشه‌های معادلهٔ

$$z^{۳}-۱=۰ \qquad (۵.۳)$$

می‌باشند. البته، این معادله با اصول اولیه قابل حـل است و نیازی به استمداد از نظریهٔ کلی ندارد. درواقع چون $z^{۳}-۱=(z-۱)(z^{۲}+z+۱)$، معادلهٔ (۵.۳) وقتـی ارضا می‌شود کـه $z=۱$ یـا $z^{۲}+z+۱=۰$، یعنـی $z=۱/۲(-۱\pm i\sqrt{۳})$. بـا نماد‌گذاری سنتی سەریشهٔ سوم واحد عبارتند از:

$$۱, \omega=-\frac{۱}{۲}+\frac{i}{۲}\sqrt{۳},\ \overline{\omega}=-\frac{۱}{۲}-\frac{i}{۲}\sqrt{۳}. \qquad (۶.۳)$$

این جوابها با نظریهٔ‌کلی‌که طبق آن دو ریشهٔ سوم مختلط واحد

$$(\epsilon=)\omega=\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳},\omega^{۲}=\cos\frac{۴\pi}{۳}+i\sin\frac{۴\pi}{۳}$$

هستند مطابقت دارد. ملاحظه می‌کنیم که $\omega^{2}=\overline{\omega}$، واقعیتی که مستقیماً هم به‌آسانی قابل اثبات است. زیرا، چون $|\omega|=1$، داریم $\omega^{2}=\omega^{3}/\omega=1/\omega=\overline{\omega}$. در پایان، رابطهٔ

$$\omega^{2}+\omega+1=0 \tag{۷.۳}$$

را هم‌که درموقع اثبات (۶.۳) دیدیم خاطرنشان می‌سازیم.

مثال ۱. اتحاد

$$x^{3}+y^{3}+z^{3}-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^{2}z)(x+\omega^{2}y+\omega z)$$

را که در آن x، y و z مجهول هستند ثابت کنید.

برای خواننده مشکل نخواهد بود که با ضرب پرانتزهای سمت راست، ترجیحاً با شروع از دو پرانتز آخری، نتیجهٔ مطلوب را به‌دست آورد. راه ماهرانه‌تری که در آن از خواص سادهٔ دترمینانها استفاده می‌شود به‌شرح زیر است. فرض کنیم

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix}$$

با بسط معمولی دترمینان داریم $\Delta=x^{3}+y^{3}+z^{3}-3xyz$. از طرفی، با افزودن سطرهای دوم‌وسوم به‌سطراول معلوم می‌شود که $x+y+z$ یك سازهٔ Δ است. حال اگر ω برابر سطر دوم و ω^{2} برابر سطر سوم را به‌سطر اول اضافه‌کنیم سطراول به‌صورت

$$x+\omega y+\omega^{2}z,\ \ z+\omega x+\omega^{2}y,\ \ y+\omega z+\omega^{2}x$$

یا به‌صورت

$$x+\omega y+\omega^{2}z,\ \ \omega(x+\omega y+\omega^{2}z),\ \ \omega^{2}(x+\omega y+\omega^{2}z)$$

درمی‌آید. این روشن می‌کند که $x+\omega y+\omega^{2}z$ هم یك سازهٔ Δ است.

به‌همین طریق با قراردادن $\omega^{2}(=\overline{\omega})$ به‌جای ω معلوم می‌شود که $x+\omega^{2}y+\omega z$ نیز یك سازهٔ Δ است. چون Δ نسبت به‌هرمجهول از درجهٔ ۳ است، سازهٔ دیگری غیر از یك مقدار ثابت وجود ندارد. با بررسی ضریب x^{3} معلوم می‌گردد که این مقدار ثابت در واقع واحد است و لذا حکم اثبات می‌شود.

مثال ۲. اعداد مختلط ϵ_{1}، ϵ_{2} و ϵ_{3} همگی پیمانهٔ واحد دارند ودرشرط $\epsilon_{1}+\epsilon_{2}+\epsilon_{3}=0$ صدق می‌کنند. ثابت کنید

$$\left(\frac{\epsilon_{2}}{\epsilon_{1}}\right)^{3}=\left(\frac{\epsilon_{3}}{\epsilon_{2}}\right)^{3}=\left(\frac{\epsilon_{1}}{\epsilon_{3}}\right)^{3}=1\,.$$

اگر به‌طور هندسی تعبیر شوند شرایط داده‌شده معادل این عبارت خواهند بود که بردارهای ϵ_1، ϵ_2 و ϵ_3 اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهند. بنابراین $\arg(\epsilon_2/\epsilon_1) = \pm 2\pi/3$، علامت هم به‌جهت گذاری مثلث بستگی دارد. پس $\epsilon_2 = \omega\epsilon_1$ یا $\epsilon_2 = \bar{\omega}\epsilon_1$، و در هردو حالت $(\epsilon_2/\epsilon_1)^3 = 1$. روابط دیگر هم با استدلال مشابه اثبات می‌شوند.

حال که چگونگی استخراج ریشهٔ nام واحد را یادگرفتیم، برای به‌دست آوردن n جواب $a^{1/n}$، با شرطاینکه a عدد مختلط مفروضی باشد، هیچ مشکلی نخواهیم داشت. (مسلماً می‌توان فرض کرد که $a \neq 0$.) فرض کنید $a = p \exp i\alpha$ شکل قطبی a باشد و فرض کنید $z = r \exp i\theta$ جوابی برای معادلهٔ زیر باشد:

$$z^n = a. \qquad (8.3)$$

آنگاه $r^n \exp(i\theta n) = p \exp i\alpha$، وازآنجا $r = \sqrt[n]{p}$ که منظور همان مقدار مثبت منحصر به‌فرد ریشه است و $n\theta = \alpha + 2k\pi$، $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$، لذا داریم $\theta = (\alpha + 2k\pi)/n$. بنابراین می‌توان گفت که $a^{1/n} = \sqrt[n]{p} \exp((\alpha + 2k\pi i)/n)$، زیرا مقدارعددصحیح k هرچه باشد توان nام عددسمت راست برابر با $p \exp i\alpha = a$ است. اگر توجهٔ خود را به‌جوابهای متمایز $a^{1/n}$ معطوف کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{p} \exp\left(\frac{i\alpha}{n}\right)\epsilon_k, \ (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \qquad (9.3)$$

که درآن $\epsilon_k = \exp(2\pi k i/n)$ همهٔ ریشه‌های nام واحد را شامل می‌گردد.

به‌قاعدهٔ زیر توجه کنید: اگر b ریشهٔ خاصی از (۸.۳) باشد مجموعهٔ کامل ریشه‌ها را می‌توان به‌صورت b، $b\epsilon$، $b\epsilon^2$، ... و $b\epsilon^{n-1}$ که درآن ϵ یك ریشهٔ nام اولیهٔ واحد است بیان کرد. اگر $a = p\exp i\alpha$، می‌توانیم b را برابر با $\sqrt[n]{p}\exp(i\alpha/n)$ بگیریم.

مثال ۳. مطلوب است محاسبهٔ $(2 - 2i)^{1/4}$. در این حالت $p = |a| = \sqrt{8}$ و $\alpha = \arg a = -\pi/4$. بنابراین می‌توان b را مساوی $\sqrt[8]{8}(\cos \pi/16 - i \sin \pi/16)$ گرفت. پس چهار مقدار $(2 - 2i)^{1/4}$ عبارتند از b، bi، $-b$ و $-bi$.

مثال ۴. سه ریشهٔ سوم $8i$ را به‌دست آورید. دراین مورد داریم $a = 8i = 8\exp(i\pi/2)$، $|a| = 8$ و $\beta = \pi/2$. پس می‌توان b را مساوی $2\exp(i\pi/6) = 2(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6) = i + \sqrt{3}$ قرار داد. دو ریشهٔ دیگر عبارتند از:

$b\omega = ۲\ \exp(i\pi/۶ + ۲i\pi/۳) = ۲\ \exp(۵i\pi/۶) = i - \sqrt{۳}$، و
$b\omega^۲ = ۲\ \exp(i\pi/۶ + ۴i\pi/۳) = ۲\ \exp(۳i\pi/۲) = -۲i$.

درنظریهٔ مقدماتی معادلات جبری نشان داده می‌شود کــه اگر ریشه‌های معادلهٔ چند جمله‌ای

$$f(z) = a_۰ z^n + a_۱ z^{n-۱} + a_۲ z^{n-۲} + \cdots + a_{n-۱} z + a_n = ۰$$

$\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n باشند، آنگاه چندجمله‌ای را می‌توان به n سازهٔ خطی تجزیه کرد؛ پس:

$$f(z) = a_۰ (z - \alpha_۱)(z - \alpha_۲)(z - \alpha_۳) \cdots (z - \alpha_n).$$

اگر اجازه دهیم که ضرایب و ریشه‌های معادله مختلط باشند به درستی این نتیجه لطمه‌ای وارد نخواهد شد.

با به‌کاربردن این ملاحظات درمورد $z^n - ۱$، اتحاد زیرحاصل می‌شود:

$$z^n - ۱ = (z - ۱)(z - \epsilon)(z - \epsilon^۲) \cdots (z - \epsilon^{n-۱}). \qquad (۱۰.۳)$$

دراینجا ϵ یك ریشهٔ nم اولیهٔ واحد است ((۴.۳) را ملاحظه کنید). از ترکیب (۱۰.۳) با فرمول مشهور

$$z^n - ۱ = (z - ۱)(z^{n-۱} + z^{n-۲} + \cdots + z + ۱)$$

نتیجه می گیریم که:

$$z^{n-۱} + z^{n-۲} + \cdots + z + ۱ = (z - \epsilon)(z - \epsilon^۲) \cdots (z - \epsilon^{n-۱}). \quad (۱۱.۳)$$

مثال ۵. ثابت کنیدکه اگر ϵ یك ریشهٔ nم اولیهٔ واحد باشد، آنگاه

$$(۱ - \epsilon)(۱ - \epsilon^۲) \cdots (۱ - \epsilon^{n-۱}) = n.$$

با گذاشتن $z = ۱$ در (۱۱.۳) بلافاصله حکم حاصل می‌شود.

سازه‌های سمت راست (۱۰.۳) خطی، یعنی نسبت به z از درجهٔ اول، هستند، ولی وقتی‌که $n \geqslant ۲$ این سازه‌ها عدد ϵ را دربردارندکه مختلط است. اگر سازه‌های درجهٔدوم را بپذیریم، می‌توانیم تجزیه را با سازه‌های حقیقی تنها هم انجــام دهیم. این حکم مبتنی براین مشاهده است‌که اگر γ عددی مختلط باشد

$$(z - \gamma)(z - \bar{\gamma}) = z^۲ - (\gamma + \bar{\gamma})z + \gamma\bar{\gamma}$$

یــك چندجملــه‌ای از درجــهٔ دوم بــا ضرایب حقیقی است، زیــرا $\gamma + \bar{\gamma} (= ۲\mathcal{R}\gamma)$ و $\gamma\bar{\gamma} (= |\gamma|^۲)$ هردو حقیقی هستند. می‌دانیم که (صفحه ۱۱) ریشه‌های مختلط معادلهٔ (۱.۳) دوبه‌دومزدوج یکدیگرند. یك ریشه به‌طور نمونه به‌صورت ϵ^r نوشته می‌شود، و درنتیجه $\bar{\epsilon}^r = (\bar{\epsilon})^r = (\epsilon^{-۱})^r = ۱\epsilon^{-r} = \epsilon^n \epsilon^{-r} = \epsilon^{n-r}$. پس ریشه‌های مختلط مزدوج بــه‌صورت زوج زوج عبارتند از:

$$\epsilon,\ \epsilon^{n-1};\ \epsilon^{2},\ \epsilon^{n-2};\ \cdots;\ \epsilon^{s},\ \epsilon^{n-s}, \tag{۱۲.۳}$$

که در آن وقتی که n فرد باشد $s=(1/2)(n-1)$ و وقتی که n زوج باشد $s=(1/2)(n-2)$.

توجه کنید وقتی که n زوج باشد، $\epsilon^{\frac{1}{2}n}=-1$ که «مزدوج خودش» است یک ریشهٔ nم حقیقی واحد است. حال ریشهٔ اولیهٔ خاص (۴.۳) را درنظر می‌گیریم. لذا با توجه به (۲۲.۲) داریم:

$$(z-\epsilon^{r})(z-\epsilon^{n-r})=(z-\epsilon^{r})(z-\epsilon^{-r})=z^{2}-(\epsilon^{r}+\epsilon^{-r})z+1$$

$$=z^{2}-2\cos\frac{2\pi r}{n}z+1\,.$$

پس تجزیهٔ نهایی به‌صورت زیراست:

$$\left.\begin{aligned} z^{n}-1&=(z-1)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(z^{2}-2\cos\frac{2\pi r}{n}z+1\right) &&\text{فرد، } n\\ z^{n}-1&=(z-1)(z+1)\prod_{r=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(z^{2}-2\cos\frac{2\pi r}{n}z+1\right) &&\text{زوج، } n \end{aligned}\right\} \tag{۱۳.۳}$$

روش مشابهی ما را به‌تجزیهٔ $z^{n}-a$ هم که در آن a عدد مختلط مفروضی است هدایت می‌کند. در حقیقت اگر b عددی با شرط $b^{n}=a$ باشد داریم:

$$z^{n}-a=(z-b)(z-\epsilon b)(z-\epsilon^{2}b)\cdots(z-\epsilon^{n-1}b).$$

از اتحادهای جبری‌که قریباً اثبات شد می‌توان برای به‌دست آوردن چندین‌رابطهٔ مثلثاتی استفاده‌کرد.

مثال ۶. نشان دهیدکه

$$z^{6}+z^{3}+1=\left(z^{2}-2z\cos\frac{2\pi}{9}+1\right)\left(z^{2}-2z\cos\frac{4\pi}{9}+1\right)$$

$$\left(z^{2}-2z\cos\frac{8\pi}{9}+1\right) \tag{۱۴.۳}$$

و از آن نتیجه بگیریدکه

$$2\cos 3\theta+1=8\left(\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$\left(\cos\theta-\cos\frac{8\pi}{9}\right) \tag{۱۵.۳}$$

با استفاده از (۱۳.۳) وقتی‌که $n=9$، ملاحظه می‌کنیم‌که سازهٔ متناظر با $r=3$ برابر با

$1+z+z^2 = 1+2\pi/3 \cos 2z - z^2$ است، و سه سازهٔ درجهٔ دوم باقیمانده همان سازه‌های طرف راست (۱۴.۳) هستند. بنابراین عبارت مذکور برابر است با $1+z^3+z^6 = (z^9-1)/(z^3-1) = (z^9-1)/(z-1)(z^2+z+1)$ که (۱۴.۳) را اثبات می‌کند. حال، همهٔ جمله‌های (۱۴.۳) را بر z^3 تقسیم می‌کنیم و سپس می‌نویسیم $z=e^i$. به‌ازای این مقدار z، خواهیم داشت $z+z^{-1}=2\cos\theta$، $z^3+z^{-3}=2\cos 3\theta$، و از آنجا (۱۵.۳) یك نتیجهٔ فوری است.

تمرینهای فصل سوم

۱ . همهٔ ریشه‌های ششم واحد را به‌شکل $a+ib$ (a و b حقیقی) بنویسید.

۲ . $i^{1/4}$ را محاسبه کنید.

۳ . $(2+2i)^{1/3}$ را محاسبه کنید.

۴ . نشان دهید که اگر $|z|=1$ و $\mathcal{R}(z)=-1/2$، آنگاه $z^3=1$.

۵ . ثابت کنید که اگر $\omega=-(1/2)+(i/2)\sqrt{3}$ آنگاه

$$a^3+b^3=(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega), \qquad (1)$$

$$(a+b+c)^3+(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3 = 3(a^3+b^3+c+6abc). \qquad (2)$$

۶ . نشان دهید شرط لازم وکافی برای آنکه اعداد مختلط ۰، u و v متناظر با رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی باشند این است که $u^2+v^2=uv$.

۷ . از تمرین ۶ نتیجه بگیرید که شرط لازم وکافی برای آنکه اعداد z_1، z_2 و z_3 متناظر با رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی باشند این است که:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2.$$

۸ . ریشه‌های $z^8+1=0$ را بنویسید و آنها را در صفحهٔ z رسم کنید. با تجزیهٔ z^8+1 به‌سازه‌های درجهٔ دوم حقیقی نتیجه بگیرید که

$$\cos 4\theta = 8\left(\cos\theta-\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(\cos\theta-\cos\frac{7\pi}{8}\right).$$

۹ . z^5+1 را به‌سازه‌های خطی و درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کنید، و از آن نتیجه بگیرید که $4\sin(\pi/10)\cos(\pi/5)=1$.

۱۰ . نشان دهید که ریشه‌های $(z+1)^6+(z-1)^6=0$ عبارتند از:

$$\pm i\operatorname{cotg}\frac{\pi}{12},\ \pm i\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{12},\ \pm i.$$

فصل چهارم

توابع مقدماتی از یك متغیر مختلط

۰۱ مقدمه

در فصول گذشته اعداد مختلط را از نقطه‌نظر جبری توأم با تعبیرهای هندسی مطالعه‌کردیم و از این راه توانستیم به‌تعریفی معقول ومنطقی برای توانهای z^r، که در آن r عددی‌صحیح است، دست یابیم. همچنین توانهای کسری و چند مقداری بودن آنها را مورد بحث قرار دادیم. حالا در موقعیتی هستیم که عباراتی مانند $(z^{۱/۲}+۲z^{-۵})(۳z^۲+i)$ راکه شامل چند توان از این نوع هستند مورد بررسی قرار دهیم.

با این وجود هنوز هم دسته‌ای وسیع از توابع وجود داردکه خواننده در میدان اعداد حقیقی با آنها سروکار داشته است، و باید به‌صورت متغیر مختلط هم توسیع یابند. ما قبلاً بدون اثبات خواص $\exp z$ راکه در آن z مختلط است بیان‌کردیم، ولی هنوز توابع «مقدماتی» دیگر $\sin z$، $\cos z$ و $\log z$ را بررسی ننموده‌ایم.

واضح است‌که تعریف هندسی $\sin\theta$ به‌صورت (ضلع مقابل)/(وتر) یك مثلث قائم‌الزاویه، وقتی که به‌جای «زاویهٔ» θ عدد مختلط دلخواهی قرار گیرد معنایش را از دست می‌دهد. بنابراین ما روش هندسی راکنار می‌گذاریم و تعاریف خود را براساس سریها پایه‌گذاری می‌کنیم:

$$\exp z=۱+\frac{z}{۱!}+\frac{z^۲}{۲!}+\frac{z^۳}{۳!}+\cdots \qquad (۱.۴)$$

$$\sin z=z-\frac{z^۳}{۳!}+\frac{z^۵}{۵!}-\frac{z^۷}{۷!}+\cdots \qquad (۲.۴)$$

$$\cos z = ۱ - \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۴}{۴!} - \frac{z^۶}{۶!} + \cdots \qquad (۳.۴)$$

برای اطمینان، این سؤال را پیش می‌آوریم که معنای یک سری نامتناهی با جملات مختلط چیست، و لذا در این مرحله ضرورت پیدا می‌کند که به‌همگرایی دنباله‌ها و سریهای مختلط گریزی بزنیم. گرچه سعی خواهیم کرد تا آنجا که امکان دارد دو بخش بعـدی را خودکفا بکنیم، ولی امیدواریم خواننده با همگرایی[۱] دنباله‌ها وسریهای حقیقی آشنایی داشته‌باشد.

۲. دنباله

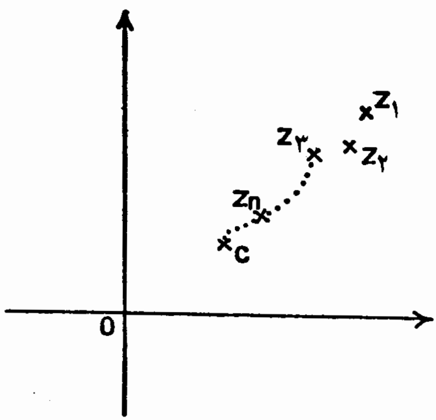
مفهوم همگرایی یک دنباله از اعداد مختلط را می‌توان به‌یک پوچ‌ـدنباله از اعداد حقیقی، یعنی دنباله‌ای از اعداد حقیقی که به‌صفرمیل می‌کند، تبدیل نمود.

تعریف. می‌گوییم دنبالهٔ

$$z_۱, z_۲, z_۳, \cdots, z_n, \cdots$$

از اعداد مختلط به c همگراست و با نماد می‌نویسیم: $z_n \to c$ وقتی که $n \to \infty$، اگر و فقط اگر $|z_n - c| \to ۰$.

معنای هندسی این تعریف به آسانی چنین توصیف می‌شود: نقاط $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $\cdots$ را در صفحهٔ z رسم می‌کنیم و دنبالهٔ فواصل این نقاط از حد مفروض، یعنی



شکل ۱۳

۱. دنباله‌ها و سریها، تألیف J. A. Green، از این سری کتابها.

$$|z_1-c|,\ |z_2-c|,\ \cdots,\ |z_n-c|,\ \cdots, \tag{۴.۲}$$

را درنظر می‌گیریم. این دنباله‌ای است نامنفی از اعداد (حقیقی) و این ادعا که $z_n \to c$ بدین معنی است که نقاط z_1، z_2، $\cdots$ در اطراف نقطهٔ c چنان جمع می‌شوند که وقتی n به‌سمت بینهایت میل کند فواصلشان از نقطهٔ c به‌سمت صفر میل می‌کند.

روش دیگر این است که اعداد مختلط را به‌قسمتهای حقیقی و انگاریشان، مثلاً $z_n = x_n + iy_n$، تفکیک کنیم و درنتیجه مسئلهٔ همگرایی را به‌همگرایی دو دنبالهٔ حقیقی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تبدیل نماییم. قضیهٔ زیر معادل بودن دو روش مذکور را بیان می‌کند.

قضیه. شرط لازم وکافی برای اینکه دنبالهٔ $z_n = x_n + iy_n$ به‌سمت $c = a + ib$ میل کند این است‌که به‌طور همزمان $x_n \to a$ و $y_n \to b$.

برهان. (۱) فرض می‌کنیم طبق تعریف بالا $z_n \to c$. پس $|z_n - c| \to 0$ و بنابراین $|z_n - c|^2 \to 0$، و یا به‌طور صریحتر

$$p_n = (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 \to 0.$$

حال با به‌خاطر آوردن تعریف همگرایی دنباله‌های حقیقی (توجه‌کنید که x_n، y_n و p_n حقیقی هستند)، اجمالاً می‌توان گفت که‌وقتی n بزرگ می‌شود p_n به‌اندازهٔ دلخواه کوچك می‌گردد. ولی $(x_n - a)^2$ و $(y_n - b)^2$ هریك از p_n کوچکتر هستند، یا دست‌کم بزرگتر نیستند، و از اینجا نتیجه می‌شود که $(x_n - a)^2 \to 0$ و $(y_n - b)^2 \to 0$، و لذا

$$x_n \to a,\ y_n \to b. \tag{۵.۴}$$

نوشتن این استدلال از نو و به‌صورتی دقیق هیچ مشکل نیست ولی ما از انجام آن خودداری می‌ورزیم زیرا آن را در جهت‌کمك به‌خواننده نمی‌دانیم.

(۲) به‌عکس، فرض می‌کنیم $x_n \to a$ و $y_n \to b$. آنگاه با تعقیب مراحل اثبات در پاراگراف قبل، نتیجه می‌گیریم که $(x_n - a)^2 \to 0$ و $(y_n - b)^2 \to 0$، وبنابراین $(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 \to 0$. این بدان معنی است که $|z_n - c|^2 \to 0$ و سرانجام $|z_n - c| \to 0$. پس بنابرتعریف اصلی $z_n \to c$.

نتیجه. اگر $z_n \to c$، آنگاه $|z_n| \to |c|$.

زیرا طبق (۴.۲) داریم $\big|\,|z_n| - |c|\,\big| \leqslant |z_n - c|$ و لذا از $z_n \to c$ نتیجه می‌شود $|z_n| \to |c|$.

توجه کنید که اگر $|z_n|$ به‌یك حد متناهی میل نکند حد z_n نمی‌تواند وجود داشته باشد.

چند مثال.

(۱) فرض کنید $z_n=(3+in)^2/n^2$. با تفکیك z_n به قسمتهای حقیقی و انگاری داریم $z_n=(9-n^2)/n^2+6i/n=x_n+iy_n$، که در آن

$$x_n=\frac{9-n^2}{n^2}=-1+\frac{9}{n^2}\to -1$$

و $y_n=6/n\to 0$. پس $z_n\to -1+0i=-1$.

(۲) $z_n=(2/3+3i/4)^n$. چون $\left|\frac{2}{3}+\frac{3i}{4}\right|^2=\frac{4}{9}+\frac{9}{16}=\frac{145}{144}>1$، در نتیجه $|z_n|=(145/144)^{n/2}$ به‌بینهایت میل می‌کند، و بنابراین حد z_n وجود ندارد.

(۳) $z_n=(-1)^n+i/n$. دراینجا z_n به‌سمت حدی میل نمی‌کند، زیرا قسمتهای حقیقی، یعنی $x_n=(-1)^n$، دنباله‌ای همگرا تشکیل نمی‌دهند.

(۴) اگر $|z|<1$، آنگاه وقتی که $n\to\infty$ داریم $z^n\to 0$. زیرا می‌دانیم که دنبالهٔ حقیقی[1] $|z|^n$ به‌صفر میل می‌کند. چون $|z^n|=|z|^n$، درنتیجه $|z^n|\to 0$ یا $|z^n-0|\to 0$ که خود به‌معنی $z^n\to 0$ است.

(۵) $z_n=(\cos\pi/n+i\sin\pi/n)^{2n+1}$. بنابر قضیهٔ دوموآور داریم $z_n=\cos(2n+1)\pi/n+i\sin(2n+1)\pi/n$. چون $(2n+1)/n\to 2$، از پیوستگی توابع $\cos\theta$ و $\sin\theta$ نتیجه می‌شود که $\lim z_n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$.

قواعد محاسبه درمورد دنباله‌های همگرای اعداد مختلط شبیه همان قواعد درمورد دنباله‌های اعداد حقیقی[2] هستند.

چند قاعده. اگر $z_n\to c$ و $w_n\to d$، آنگاه

(۱) $z_n+w_n\to c+d$، (۲) $z_n-w_n\to c-d$، (۳) $z_nw_n\to cd$،

(۴) $z_n/w_n\to c/d$ که درمورد (۴) به‌ازای هر n، $w_n\neq 0$ و نیز $d\neq 0$.

این نتایج را می‌توان ازاصول اولیه، با روشی شبیهٔ استدلالهایی که درمورد اعداد حقیقی به کار رفت، اثبات نمود و یا با تفکیك هر عدد به قسمتهای حقیقی و انگاریش و سپس با استفاده از قواعد شناخته شدهٔ درمورد دنباله‌های حقیقی. پس فرض می‌کنیم $z_n=x_n+iy_n$، $w_n=u_n+iv_n$، $c=a+ib$ و $d=e+if$. آنگاه به‌عنوان مثال، $z_nw_n=(x_nu_n-y_nv_n)+i(y_nu_n+x_nv_n)$. با توجه به مفروضات داریم: $x_n\to a$، $u_n\to e$، $y_n\to b$، $v_n\to f$. بنابراین

$$z_nw_n\to(ae-bf)+i(be+af)=(a+ib)(e+if)=cd.$$

---

۱. مثال ۲ صفحهٔ ۴ از همان‌کتاب J. A. Green.

۲. فصل I بخش ۶ از همان‌کتاب J. A. Green.

۰۴ سری

تعریف همگرایی یك‌سری نامتناهی

$$w_1+w_2+\cdots+w_n+\cdots \qquad (6.4)$$

با جملات مختلط $w_n=x_n+iy_n$ با تعریف همگرایی سریهای با جملات حقیقی[1] یکی است. درهر دومورد مفهوم همگرایی یك سری بمفهوم اساسیتر همگرایی یك دنباله بدل می‌شود.

تعریف. می‌گوییم سری

$$w_1+w_2+\cdots+w_n+\cdots \qquad (6.4)$$

همگرا به‌مجموع W است اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئی W_1، W_2، ...، W_n، ...، که به صورت $W_1=w_1$، $W_2=w_1+w_2$، ...، $W_n=w_1+w_2+\cdots+w_n$، ... تعریف می‌شوند به مصداق تعریف در بخش ۲ همگرا به W باشد. ایـن سری را واگرا نامیم هرگاه دنبالهٔ مجموعهای جزئی واگرا باشد.

با به‌کار بردن قضیهٔ (صفحه ۴۵) درمورد دنبالهٔ مجموعهای جزئی به‌تعریف دیگری می‌رسیم حاکی ازاینکه همگرایی (۶.۴) معادل است با همگرایی به‌طور همزمان‌سریهای حقیقی

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (7.4)$$

و

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots \qquad (8.4)$$

که به‌ترتیب از قسمتهای حقیقی وانگاری به‌دست می‌آیند. زیرا اگـر مجموعهای جزئی nم این سریها را به‌ترتیب با U_n و V_n نشان دهیم، خواهیم داشت $W_n=U_n+iV_n$ و چنان‌که می‌دانیم فرمول حد مختلط $\lim W_n=W=U+iV$ معادل است با دو فرمول حقیقی $\lim U_n=U$ و $\lim V_n=V$.

پس نتیجه می‌شود که اگر هریك از(۷.۴) یا (۸.۴) واگرا باشد آنگاه (۶.۴)هم واگراست. مثلاً سری $\sum(n+i)/n^2$ واگراست زیرا سری‌قسمتهای‌حقیقی، یعنی $\sum 1/n$ واگراست.

آزمون مفید دیگر واگرایی ازاین حقیقت ناشی می‌شود که اگردنبالهٔ $\{W_n\}$ به‌صفر میل نکند،سری $\sum W_n$ یقیناً واگراست. زیرا دراین‌حالت یکی از $\{U_n\}$ یا $\{V_n\}$ به‌صفر میل نمی‌کند، ولذا یکی از (۷.۴) یا (۸.۴) واگراست.

تفکیك یك سری مختلط به‌قسمتهای حقیقی و انگاری اغلب پرزحمت و، همان‌گونه

---

۱. صفحهٔ ۲۸ از همان‌کتاب J. A. Green.

که دیده‌ایم، شامل آزمودن دوسری حقیقی جهت همگرایی است. برای بسیاری‌ازهدفهای عملی اثبات همگرایی مطلق، که شبیه حالت حقیقی[1] تعریف می‌شود، کافی است.

تعریف. سری $w_1+w_2+\cdots$ همگرای مطلق نامیده می‌شود اگر سری

$$|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|+\cdots \qquad (۹.۴)$$

همگرا باشد.

جملات (۹.۴) مسلماً حقیقی ونامنفی هستند، واین سری می‌تواند به‌وسیلهٔ آزمونهای آشنا مورد بررسی قرار گیرد. اهمیت مفهوم همگرایی مطلق از حکم زیرناشی می‌شود.

قضیه. هرسری همگرای مطلق، همگرا هم هست.

برهان. فرض کنید (۹.۴) همگرا باشد. چون

$|w_n|=(u_n^2+v_n^2)^{1/2}\geqslant(u_n^2)^{1/2}=|u_n|$ وچون به‌همین دلیل

$$|w_n|\geqslant|v_n|,$$

آزمون مقایسه درمورد سریهای حقیقی با جملات نامنفی[2] نشان می‌دهد که سریهای (۷.۴) و (۸.۴) همگرای مطلق هستند و بنابراین همگرا.

چند مثال.

(۱) $\sum\frac{(-1)^n+i\cos n\theta}{n^2}=\sum\frac{(-1)^n}{n^2}+i\sum\frac{\cos n\theta}{n^2}$ همگراست، زیرا قسمتهای حقیقی و انگاری، هردوتشکیل سری همگرا می‌دهند. درواقع‌این سریها همگرای مطلق هستند، زیرا

$$\left|\frac{(-1)^n+i\cos n\theta}{n^2}\right|\leqslant\frac{1+|\cos n\theta|}{n^2}\leqslant\frac{2}{n^2}.$$ [از (۱.۲) استفاده شده‌است.]

(۲) $\sum\left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^n$ واگراست، زیرا جملهٔ عمومی به‌صفرمیل نمی‌کند، چون به‌ازای هر n

$$\left|\left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)\right|=\left|\frac{2+3i}{3-2i}\right|^n=\left(\frac{4+9}{9+4}\right)^{n/2}=1$$

---

۱. صفحهٔ ۴۵ از همان‌کتاب J. A. Green.

۲. صفحهٔ ۳۴ از همان‌کتاب J. A. Green.

(صفحهٔ ۴۸ را ملاحظه کنید).

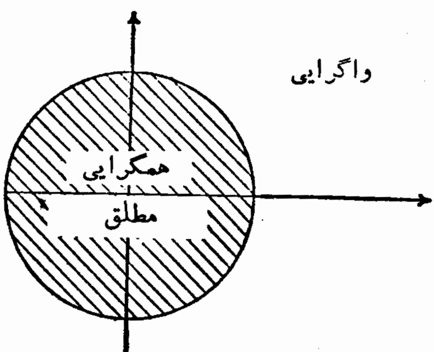
(۳) $\sum\left(\frac{z}{1-z}\right)^n$ همگرای مطلق است به‌شرط اینکه $|z/(1-z)|<1$. این شرط بدین معنی است که z به ۰ نزدیکتر است تا به ۱؛ یعنی $\Re z<1/2$. (به‌طریق دیگر، این نتیجه را می‌توان با محاسبه هم به دست آورد؛ از $|z|^2<|1-z|^2$ نتیجه می‌شود که $x^2+y^2<(1-x)^2+y^2$ و لذا $x<1/2$.)

۴. سری توانی

یك سری به‌شکل

$$c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots+c_nz^n+\cdots, \qquad (10.4)$$

را، که درآن $z=x+iy$ متغیر مختلطی است وضرایب c_0، c_1، c_2، ... هم اعـدادی مفروض و عموماً مختلط هستند، یك‌سری توانی می‌نامند. ممکن است اتفاق بیفتد کـه این سری به‌ازای همهٔ مقادیر z همگرا باشد، که مسلماً موقعیتی است بس مطلوب، یا اینکه در جهت تفریط، به‌ازای هیچ مقدار z مگر صفر همگرا نباشد، که آن هم یقیناً حالتی است نسبتاً بی‌ثمر. به‌طور کلی عددی مثبت مانند R وجود دارد به‌طوری‌کـه به‌ازای $|z|<R$ سری (۱۰.۴) همگرای مطلق است و به‌ازای $|z|>R$ واگراست. گـرچه از اثبات این‌حکم صرفنظر می‌کنیم، ولی تعبیر هندسی آن این‌است که هر نقطهٔ دایرهٔ باز $|z|<R$ (یعنی به‌استثنای مرز) نقطه‌ای برای همگرایی مطلق است، حال‌آنکـه هر نقطهٔ خارج دایـره نقطه‌ای است برای واگرایی. تنها نقاط واقع برمحیط دایره باقی می‌مانند. طبقه‌بندی ایـن نقاط غالباً



شکل ۱۴

کار مشکلی است ودراینجا مورد توجه ما هم‌نیست. عدد R شعاع‌همگرایی نامیده می‌شود، و وقتی‌که سری در تمام صفحه همگـرا (ی مطلق) باشد نوشتن $R=\infty$ قرارداد مفیدی است.

تعیین شعاع همگرایی مسئله مهمـی است. توجه کنیدکه ایـن موضوع فقط مربوط به‌سریهای

$$|c_{0}|+|c_{1}z|+|c_{2}z^{2}|+\cdots \qquad (۱۱.۴)$$

با جملات حقیقی نامنفی است. در بسیاری ازحالات با به‌کاربردن آزمون نسبت درمورد (۱۱.۴) می‌توان R را به‌دست آورد. (لـزومی ندارد به‌خواننده اخطارکنیم کـه آزمون نسبت را هرگز نباید درمورد خودسری توانی و یـا هرسری دیگری کـه جملاتش مثبت نیستند به‌کاربرد.)

چند مثال.

(۱) سری $1+z+z^{2}+\cdots+z^{n}+\cdots$ مفروض‌است. برای آزمایش‌همگرایی مطلق،حد نسبت $|z|=|z^{n}|/|z^{n-1}|$ را وقتی‌که $n\to\infty$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. چون این نسبت تصادفاً مستقل از n است، نتیجه می‌گیریم‌که $\lim|z^{n}|/|z^{n-1}|=|z|$. حال آزمون نسبت حاکی است که اگر $|z|<1$، سری به طور مطلق همگراست و اگر $1<|z|$، واگراست. پس دراین حالت $R=1$. در حقیقت، وقتی‌که $|z|<1$ می‌توان نشان دادکه همانند حالت حقیقی،[1] $1+z+z^{2}+\cdots+z^{n}+\cdots=(1-z)^{-1}$.

(۲) سری

$$E(z)=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\cdots+\frac{z^{n}}{n!}+\cdots \qquad (۱۲.۴)$$

به‌ازای همهٔ مقادیر z به‌طور مطلق همگراست. اثبات همانند حالت‌حقیقی[1] است. در واقع صرفنظر از مقدار z

$$\lim\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|\Big/\left|\frac{z^{n}}{n!}\right|=\lim\frac{|z|}{n+1}=0\,.$$

(۳) خواننده به‌راحتی‌می‌تواند اثبات کندکه $C(z)=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}-\frac{z^{6}}{6!}+\cdots$

و

$$S(z)=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\frac{z_{7}}{7!}+\cdots$$

---

۱. صفحهٔ ۴۸ از همان‌کتاب J. A. Green.

نیز به‌ازای همهٔ مقادیر z همگرا هستند.

تا زمانی‌که متغیر، محدود شودکه در داخل دایرهٔ همگرایی بماند محاسبهٔ سریهای توانی از بسیاری جهات شبیهٔ مجموعهای متناهی (چندجمله‌ایها) است. پس دوسری‌توانی را می‌توان به‌روش معمولی با هم جمع یا ازهم‌کم‌کرد و اگر

$$f(z)=a_۰+a_۱z+a_۲z^۲+\cdots$$

و

$$g(w)=b_۰+b_۱w+b_۲w^۲+\cdots.$$

به‌ازای مقادیر معینی از z و w هردو به‌طور مطلق همگرا باشند آنگاه داریم

$$f(z)g(\omega)=a_۰b_۰+(a_۱b_۰z+a_۰b_۱w)+(a_۲b_۰z^۲$$
$$+a_۱b_۱zw+a_۰b_۲w^۲)+\cdots.$$

پس سریهای توانی به‌طور مطلق همگرا را می‌توان جمله به‌جمله درهم ضرب، و جملات را به‌هرترتیبی[۱]، مثلاً برحسب توانهای صعودی متغیرهای z و w، مرتب کرد.

مثال.

$$(۱-z)^{-۲}=(۱-z)^{-۱}(۱-z)^{-۱}$$
$$=(۱+z+z^۲+\cdots)(۱+z+z^۲+\cdots)$$
$$=۱+۲z+۳z^۲+۴z^۳+\cdots.$$

گاهی سریهای مختلط، برای به‌دست آوردن نتایجی درمورد سریهای حقیقی،ابزار مفیدی هستند. مثال زیرجهت تشریح بهماکمك می‌کند. در فرمول

$$(۱-z)^{-۱}=۱+z+z^۲+\cdots\ (|z|<۱),$$

به جای z می‌نویسیم $re^{i\theta}(r<۱)$ و قسمتهای حقیقی را با هم مقایسه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$۱+r\cos\theta+r^۲\cos ۲\theta+\cdots=\Re(۱-re^{i\theta})^{-۱}$$
$$=\frac{۱-r\cos\theta}{۱-۲r\cos\theta+r^۲}.$$

حال فرض می‌کنیم $۰<\theta<\pi/۲$. در نتیجه $۰<\cos\theta<۱$ و لـذا معادلهٔ اخیر

---

۱. صفحات ۵۱–۵۴ از همان‌کتاب J. A. Green.

به‌ازای $r=\cos\theta$ برقرار است. پس:

$$1+(\cos\theta)^2+(\cos\theta)^2\cos 2\theta+(\cos\theta)^3\cos 3\theta+\cdots$$
$$=\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}=1$$

وبنابراین

$$\cos\theta+\cos\theta\cos 2\theta+(\cos\theta)^2\cos 3\theta$$
$$+(\cos\theta)^3\cos 4\theta+\cdots=0.$$

۵. توابع e^z، $\cos z$ و $\sin z$

در بخش قبل دیدیم که سریهای نامتناهی $E(z)$، $C(z)$ و $S(z)$ به‌ازای جمیع مقادیر z همگرا هستند. به‌عبارت دیگر، این سریها توابعی از z هستند که به‌ازای جمیع مقادیر z تعریف می‌شوند. وقتی $z=x$ و x حقیقی باشد، این سریها با بسطهای[1] توابع آشنای $\exp x$ (یا e^x)، $\sin x$ و $\cos x$ سازش دارند، ولذا این تعاریف مناسب هستند. ازاین پس به‌جای $E(z)$، $C(z)$ و $S(z)$ به‌ترتیب خواهیم نوشت $\exp z$ (یا e^z)، $\cos z$ و $\sin z$. همهٔ خواص مربوط به‌این توابع راباید به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم ازتعاریفشان، به‌عنوان سریهای توانی، به‌دست آورد. اینك در چند حالت ساده منظور خود را توضیح می‌دهیم.

(۱) مهمترین خاصیت تابع‌نمایی معادلهٔ تابعی

$$\exp z\exp w=\exp(z+w) \qquad (۱۳.۴)$$

است. اثبات[2] درست شبیهٔ حالت متغیر حقیقی است و در اینجا لزومی به تکرار ندارد. به خصوص، با قراردادن $\omega=-z$، ملاحظه می‌کنیم که رابطهٔ

$$\exp z\exp(-z)=\exp 0=1$$

به‌ازای عدد مختلط z نیز برقرار است و از اینجا نتیجه می‌گیریم که تابع نمایی هرگز صفر نیست.

با این وجود خواننده باید از انتقال بی‌محابای احکام اعداد حقیقی به‌اعدادمختلط، درصورتی‌که اثبات نشده باشند، پرهیز کند. به‌عنوان مثال، این‌گزاره که $\exp x$ به‌ازای مقادیرحقیقی x همواره مثبت است صحیح می‌باشد، ولی به‌ازای عدد مختلط z سری $\exp z$ لازم نیست حتی حقیقی باشد تا چه رسد که مثبت. مثلاً، می‌دانیم که $\exp(2\pi i)=-1$.

---

۱. صفحات ۲۷ و ۴۴ از: P. J. Hilton, Differential Calculus.

۲. صفحات ۵۲ و ۵۳ از همان‌کتاب J. A. Green.

(۲) با قراردادن iz به‌جای z در تعریف (۱۲.۴) در می‌یابیم که

$$\exp(iz) = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right).$$

درنتیجه رابطهٔ اساسی

$$\exp iz = \cos z + i \sin z \qquad (۱۴.۴)$$

را به‌دست می‌آوریم که حالت خاصش قبلاً درصفحهٔ ۲۸ ذکر شده بود. یادآوری می‌کنیم که (۱۴.۴) به‌معادلهٔ مهم $\exp(2\pi i) = 1$ منجر می‌شود که نشان می‌دهد $\exp z$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi i$ است. چون (۱۴.۴) به‌ازای مقادیر مختلط دلخواه برقرار است، می‌توانیم z را با $-z$ عوض کنیم، ولذا

$$\exp(-iz) = \cos(-z) + i \sin(-z).$$

حال بررسی سریهای معرف نشان می‌دهد که $\cos z$ تابعی زوج و $\sin z$ تابعی فرد است، یعنی

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z. \qquad (۱۵.۴)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\exp(-iz) = \cos z - i \sin z. \qquad (۱۶.۴)$$

از ترکیب (۱۴.۴) و (۱۶.۴) خواهیم داشت:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} + e^{-iz}). \qquad (۱۷.۴)$$

بنابراین روشن شد که دردامنهٔ اعداد مختلط توابع $\cos z$ و $\sin z$ کمی بیشتر از اختصارات ترکیبات سادهٔ توابع نمایی هستند. پس، تعداد توابع مقدماتی در واقع از سه به‌یك تقلیل می‌یابد. ولی اگر خود را به متغیرهای حقیقی محدود کنیم، این حقیقت پوشیده می‌ماند. توجه کنید اگر $z = \theta$ و θ حقیقی باشد، آنگاه (۱۷.۴) به (۲۲.۲) تبدیل می‌شود. در این کتاب خواص آشنای $\cos \theta$ و $\sin \theta$ را اثبات شده تلقی می‌کنیم. به‌خصوص، درنظر نداریم π را «تعریف» و روابط $\cos \pi/2 = 0$ و $\sin \pi/2 = 1$ و غیره را

اثبات کنیم. از طرف دیگر، بجاست سؤال کنیم که آیا فرمولی نظیر قضیهٔ جمعی

$$\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w \tag{۱۸.۴}$$

وقتی که z و w مختلط باشند هنوزهم برقراراست. برای اثبات این نتیجه ملاحظه‌می‌کنیم که

$$\begin{aligned} ۲\sin z\cos w &= ۲\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}\,\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{۲} \\ &= \frac{۱}{۲i}\{(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw})\} \\ &= \frac{۱}{۲i}\{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}+e^{i(z-w)}-e^{-i(z-w)}\}, \end{aligned}$$

یعنی

$$۲\sin z\cos w=\sin(z+w)+\sin(z-w).$$

با تعویض z و w رابطهٔ دیگر

$$۲\cos z\sin w=\sin(z+w)-\sin(z-w)$$

به‌دست می‌آید، و از آنجا با یك عمل‌جمع بلافاصله (۱۸.۴) حاصل می‌شود. به‌خصوص، وقتی که $w=۱/۲\pi$، می بینیم که

$$\sin\left(\frac{۱}{۲}\pi+z\right)=\cos z \tag{۱۹.۴}$$

و به همین ترتیب $\sin(\pi+z)=-\sin z$، $\cos(\pi+z)=-\cos z$، و غیره. بقیهٔ فرمولهای جمعی، یعنی:

$$\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w$$
$$\sin(z-w)=\sin z\cos w-\cos z\sin w$$
$$\cos(z-w)=\cos z\cos w+\sin z\sin w$$

با قراردادن$(۱/۲)\pi+w$ یا $-w$ به‌جای w در (۱۸.۴) به‌آسانی به‌دست می‌آیند.توجه کنید وقتی که $z=w$، آنگاه معادلهٔ اخیر به

$$\cos^۲ z+\sin^۲ z=۱ \tag{۲۰.۴}$$

تبدیل می‌شود. از این رابطه نباید استنباط کرد که، همانند اعداد حقیقی، $\sin z$ و $\cos z$ پیمانه‌ای کمتر از واحد دارند. زیرا این توابع درحالت کلی دارای مقادیرمختلط هستندو مجذورشان دیگر شبیه مجذور پیمانه‌شان نیست. مثلاً*، اگر p عددی مثبت باشد، آنگاه

$$\cos(ip)=\frac{۱}{۲}(e^{-p}+e^{p})>\frac{۱}{۲}e^{p},$$

زیرا $e^{-p}>۰$. پس ملاحظه می‌شود که $\cos ip$ عددی حقیقی است و با بزرگ شدن p می‌تواند از هرحدی تجاوز کند.

بقیهٔ توابع مثلثاتی اهمیت کمتری دارند و طبق معمول برحسب $\cos z$ و $\sin z$ تعریف می‌شوند. مثلاً:

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{۱}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\,.$$

خواننده مشاهده می‌کند که تعریف $\cos z$ و $\sin z$ نظیر تعریف توابع هذلولی گون[۱]

$$\cosh z=\frac{۱}{۲}(e^{z}+e^{-z}),\ \sinh z=\frac{۱}{۲}(e^{z}-e^{-z}) \qquad (۲۱.۴)$$

است.

از مقایسهٔ (۱۷.۴) و (۲۱.۲) روابط سادهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\left.\begin{array}{l}\cos iz=\cosh z,\ \sin iz=i\sinh z\\ \cosh iz=\cos z,\ \sinh iz=i\sin z\end{array}\right\} \qquad (۲۲.۴)$$

سرانجام، تجزیهٔ توابع مقدماتی، به‌قسمتهای حقیقی وانگاری، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $z=x+iy$، آنگاه

$$\exp z=\exp(x+iy)=e^{x}e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y),$$

لذا داریم:

$$\mathcal{R}e^{z}=e^{x}\cos y,\ \mathcal{J}(e^{z})=e^{x}\sin y$$
$$|e^{z}|=e^{x},\ \arg e^{z}=y+۲k\pi.$$

در اینجا k عدد صحیحی است که $-\pi<y+۲k\pi\leqslant\pi$. توجه کنید که پیمانهٔ e^{z} فقط به‌قسمت حقیقی z ارتباط دارد.

حال، با به‌کاربردن (۱۸.۴) درمی‌یابیم که

$$\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y,$$

و ازاینجا:

$$\mathcal{R}\sin z=\sin x\cosh y,\ \mathcal{J}\sin z=\cos x\sinh y,$$
$$|\sin z|^{۲}=\sin^{۲}x\cosh^{۲}y+\cos^{۲}x\sinh^{۲}y$$
$$=\sin^{۲}x(۱+\sinh^{۲}y)+\cos^{۲}x\sinh^{۲}y$$

---

۱. صفحهٔ ۳۰ از همان کتاب P. J. Hilton.

$$=\sin^2 x+(\sin^2 x+\cos^2 x)\sinh^2 y=\sin^2 x+\sinh^2 y,$$

ولذا داریم:

$$|\sin z|=(\sin^2 x+\sinh^2 y)^{1/2}.$$

خواننده برای به دست آوردن فرمول مربوط به $\cos(x+iy)$ و مربوط به‌سایر توابع مثلثاتی هیچ مشکلی نخواهد داشت.

۶. لگاریتم

در این کتاب همهٔ لگاریتمها در پایهٔ e هستند. یادآوری می‌کنیم که اگر x مثبت باشد، $\log x$ عددی مانند u است به‌طوری که $x=\exp u$. می‌دانیم که فقط و فقط یك عدد حقیقی با این خاصیت وجود دارد ولذا بدون هیچ‌گونه ابهامی $\log x$ را به‌عنوان جواب حقیقی u از معادلهٔ

$$x=\exp u$$

که در آن x عدد مثبت مفروضی است تعریف می‌کنیم.

به‌طور مشابه، سعی می‌کنیم $\log z$ را به‌عنوان جواب w از معادلهٔ

$$z=\exp w \tag{۲۳.۴}$$

که در آن z عدد مختلط مفروضی است تعریف کنیم. ولی، اکنون با این مشکل مواجه می‌شویم که اگر w جوابی برای (۲۳.۴) باشد، آنگاه $w+2k\pi i$ هم که در آن k عدد صحیح دلخواهی است، یك جواب می‌باشد. ((۲۱.۲) را ملاحظه کنید). از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $w=\log z$ اصلاً وجود داشته باشد، دارای بینهایت مقدار است که تفاوتشان از یکدیگر مضرب صحیحی از $2\pi i$ است. حال این مقادیر را با جزئیات بیشتر بررسی می‌کنیم.

چون $\exp w$ هیچ وقت صفر نمی‌شود، پس $\log z$ برای $z=0$ معنی نخواهد داشت. لذا از این پس فرض می‌کنیم که $z\neq 0$. می‌نویسیم $z=r\exp(i\theta)$ و $w=u+iv$. آنگاه (۲۳.۴) به‌صورت

$$re^{i\theta}=e^u e^{iv} \tag{۲۴.۴}$$

درمی‌آید. از مقایسهٔ پیمانه‌ها درمی‌یابیم که $r=\exp u$، و درنتیجه

$$u=\log r,$$

که دراینجا لگاریتم دارای مقدار حقیقی منحصر به‌فرد معمولی است که وجود دارد، زیرا $r>0$. حال معادلهٔ (۲۴.۴) به‌صورت $\exp i\theta=\exp iv$ درمی‌آید، و از آن فقط می‌توان نتیجه گرفت که

$$v=\theta+۲k\pi.$$

در اینجا k یك عدد صحیح است. با توجه به اینکه $r=|z|$ و $\theta=\arg z$، نتیجهٔ نهایی را می‌توان به‌صورت

$$\log z=\log |z|+i(\arg z+۲k\pi), \qquad (۲۵.۴)$$

بیان کرد، که در آن $\log |z|$ در طرف راست مبین لگاریتم حقیقی است.

مقدار متناظر با $k=۰$، مقدار اصلی لگاریتم نامیده می‌شود و گاهی با نماد جداگانه‌ای چون

$$\log z=\log |z|+i \arg z$$

نشان داده‌می‌شود. وقتی‌که x مثبت باشد، مقدار اصلی به‌صورت معمول $\log x(=\log x)$ تبدیل می‌شود، زیرا دراین حالت $\arg x=۰$.

چند مثال.

$$\log (-۲)=\log |-۲|+i \arg (-۲)=\log ۲+\pi i. \qquad (۱)$$

$$\log i=\log |i|+ \arg i=\log ۱+\frac{i\pi}{۲}=\frac{i\pi}{۲}. \qquad (۲)$$

(۳) معادلهٔ $۴ \cos z=۳+i$ را حل کنید. این معادله با

$۲ \exp (iz)+۲ \exp (-iz)=۳+i$ معادل است. بنابراین

$$۲ \exp (۲iz)-(۳+i) \exp (iz)+۲=۰.$$

با توجه به‌اینکه این معادله برحسب $\exp (iz)$ ازدرجهٔ دوم است، پس از محاسبات لازم درمی‌یابیم که $\exp (iz)=۱+i$ یا $\exp (iz)=۱/۲-i/۲$، و در نتیجه یا

$$iz=\log (۱+i)=\frac{۱}{۲} \log ۲+i \left(\frac{\pi}{۴}+۲\pi n\right),$$

$$z=\frac{۸n+۱}{۴}\pi-\frac{i}{۲} \log ۲, (n=۰, \pm۱, \pm۲, \cdots)$$

یا

$$iz=\log \left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}i\right)=-\frac{۱}{۲} \log ۲+i \left(-\frac{\pi}{۴}+۲\pi m\right),$$

$$z=\frac{۸m-۱}{۴}\pi+\frac{i}{۲} \log ۲, (m=۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots).$$

(۴) معادلهٔ $\tan z = i$ حتی وقتی که z مختلط باشد جواب ندارد، زیرا اگر $z = z_0$ یك جواب معادله باشد، باید داشته باشیم $\sin z_0 = i \cos z_0$، یا $\sin^2 z_0 = -\cos^2 z_0$، و درنتیجه $\sin^2 z_0 + \cos^2 z_0 = 0$ که با (۲۰.۴) متناقض است.

تمرینهای فصل چهارم

۱. در هریك از حالات زیر وجود $\lim z_n$ را وقتی‌که $n \to \infty$ بررسی، و درصورت وجود، مقدار آن را محاسبه‌کنید:

$$(1)\ z_n = \left(\frac{1+in}{1+n}\right)^3 \quad (2)\ z_n = i^n \quad (3)\ z_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{4}{5}i\right)^n$$

$$(4)\ z_n = \left(\cos\frac{\pi}{n+1} + i\sin\frac{\pi}{n+1}\right)^n \quad (5)\ z_n = \tan in.$$

۲. دربارهٔ همگرایی سریهای زیر بحث‌کنید:

$$(1)\ \sum \frac{1}{n^2 - in} \quad (2)\ \sum \frac{n}{n^2+i} \quad (3)\ \sum \frac{e^{in}}{n^2}$$

$$(4)\ \sum \left(\frac{2+3i}{4+i}\right)^n \quad (5)\ \sum \frac{\sin in}{n^2}.$$

۳. شعاع همگرایی هریك از سریهای توانی زیر را به‌دست آورید:

$$(1)\ \sum nz^n \quad (2)\ \sum \frac{3^n - 1}{2^n + 1} z^n \quad (3)\ \sum \frac{(2n)!z^n}{(n!)^2}$$

$$(4)\ \sum \frac{\cos in}{n^2} z^n.$$

۴. سریهای توانی $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$ چنانندکه $|b_n| \leqslant |a_n|$، $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. ثابت‌کنیدکه شعاع همگرایی سری توانی اول نمی‌تواند از شعاع همگرایی دومی بیشتر باشد.

۵. نشان دهید اگر z در داخل دایرهٔ $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ قرار داشته باشد، آنگاه $e^{-1} \leqslant |e^z| \leqslant e^3$.

۶. عبارات زیر را ساده‌کنید:

$$(1)\ \log(-1) \quad (2)\ \log(1 - i\tan\alpha),\ (0 < \alpha < \pi/2) \quad (3)\ 2^i$$

$$(4)\ i^i.$$

۷. معادلهٔ $\sin z = 2$ را حل کنید.

۸. ثابت کنید که:

$$(1)\quad 2\cosh z\cosh w = \cosh(z+w) + \cosh(z-w)$$

$$(2)\quad 2\sinh z\cosh w = \sinh(z+w) + \sinh(z-w)$$

$$(3)\quad 2\sinh z\sinh w = \cosh(z+w) - \cosh(z-w).$$

۹. (۱) قسمتهای حقیقی و انگاری $\tanh z\ (=\sinh z/\cosh z)$ را که در آن $z = x+iy$ (x و y حقیقی) محاسبه کنید.

(۲) معادلهٔ $\tanh z = i$ را حل کنید.

۱۰. نشان دهید که اگر r حقیقی و $|r| < 1$ باشد، آنگاه

$$\sin\theta + r\sin 3\theta + r^2\sin 5\theta + \cdots = \frac{(1+r)\sin\theta}{1-2r\cos 2\theta + r^2}.$$

از اینجا نتیجه بگیرید که اگر θ مضرب صحیحی از $\pi/2$ نباشد آنگاه

$$\sin\theta + \cos 2\theta\sin 3\theta + (\cos 2\theta)^2\sin 5\theta + \cdots = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta.$$

جواب تمرینها

فصل اول

۱. (۱) $-۵+۱۰i$، (۲) $\frac{۳}{۱۳}-\frac{۲}{۱۳}i$، (۳) $-۷+۲۴i$،
(۴) $\frac{۷}{۱۳۰}+\frac{۲}{۶۵}i$، (۵) $\frac{۱۱}{۵}-\frac{۲}{۵}i$، (۶) $-i$.

۲. (۱) $۱-i$، (۲) $۳-۲i$.

۳. $n(n-۱)+in^۲$.

۴. (۱) ۵، (۲) $|۲-i|^۶=(\sqrt{۵})^۶=۱۲۵$، (۳) $|۵+۱۲i|^{-۱}=(\sqrt{۲۵+۱۴۴})^{-۱}=\frac{۱}{۱۳}$، (۴) ۱.

۵. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\left|\alpha\frac{۱}{\beta}\right|=|\alpha|\left|\frac{۱}{\beta}\right|=|\alpha|\frac{۱}{|\beta|}$، $\frac{|۱+۲i|^{۱۲}}{|۱-۲i|^۹}=\frac{(\sqrt{۵})^{۱۲}}{(\sqrt{۵})^۹}=(\sqrt{۵})^۳=۵\sqrt{۵}$.

۶. (۱) $\pm\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{i}{\sqrt{۲}}\right)$، (۲) $\pm\{(\sqrt{۲}+۱)^{۱/۲}+i(\sqrt{۲}-۱)^{۱/۲}\}$،
(۳) $\pm(۲+i)$.

۷. $۲-i$، $۱+۲i$.

۸. $\xi^۲-۴\xi+۵=۰$، ریشه‌ها: $۲+i$، $۲-i$.

۱۰. $\pm\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶}\pm\sqrt{۲}i)$ (چهار ترکیب از علامتها).

فصل دوم

۱. اگر X به‌وسیلهٔ x نمایش داده شود، شرط این است که $(a-x)/(b-x)$ انگاری محض باشد: $x = ۳$.

۳. داخل و محیط بیضی با کانونهای ۱ و i و قطر بزرگ ۴.

۴. شرایط با $(z_۱ - z_۳)/(z_۲ - z_۲) = \lambda$ معادل است (مثال۲، صفحهٔ ۲۵ را ملاحظه کنید).

۶. بنابرخاصیت مشهور چهارضلعی‌های دوری کافی است ثابت کنیم که مجموع زوایای مقابل، مثلاً در $z_۱$ و $z_۳$، برابر π است. پس

$$\arg\frac{z_۲ - z_۱}{z_۴ - z_۱} + \arg\frac{z_۴ - z_۳}{z_۲ - z_۳} = \pm\pi \text{ یا } ۰$$

$$\arg\frac{(z_۲ - z_۱)(z_۴ - z_۳)}{(z_۴ - z_۱)(z_۲ - z_۳)} = \pm\pi \text{ یا } ۰,$$

یعنی $\{z_۱, z_۳; z_۲, z_۴\}$ حقیقی است.

۷. $u - a = q(b-a)$، $v - b = u - a$.

۸. وقتی‌که $\lambda = ۱$، یعنی وقتی که $|z-a| = |z-b|$، معادله تمام نقاطی را مشخص می‌کند که از a و b به‌یك فاصله باشند، یعنی تمام نقاط عمود منصف پاره‌خط AB را.

۱۰. $\frac{۱+i}{\sqrt{۲}}\left(\sec\frac{۴m+۱}{۴n}\pi\right)^n(-۱)^m$.

فصل سوم

۱. ۱، $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}i\sqrt{۳}$، $-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}i\sqrt{۳}$، -۱، $-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}i\sqrt{۳}$، $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}i\sqrt{۳}$.

۲. b، bi، $-b$، $-bi$، که در آن $b = \cos\frac{\pi}{۸} + i\sin\frac{\pi}{۸}$.

۳. $\sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۱۲} + i\sin\frac{\pi}{۱۲}\right)$، $-۱+i$، $-\sqrt{۲}\left(\cos\frac{۵\pi}{۱۲} + i\sin\frac{۵\pi}{۱۲}\right)$.

۶. اضلاع مثلث به‌وسیلهٔ بردارهای u، $v-u$ و $-v$ نمایش داده می‌شوند. فرض کنید $z = (-v)/u$ و $w = (v-u)/u$. باید نشان دهیم که $\arg z = \pm ۲\pi/۳$، و $\arg w = \pm ۲\pi/۳$. با توجه به‌این حقیقت که $z^۲ + z + ۱ = w^۲ + w + ۱ = ۰$ نتیجه حاصل می‌شود.

۷. فرض کنید $u = z_۱ - z_۳$ و $v = z_۲ - z_۳$ (انتقال مبدأ به $z_۳$).

۸. درفرمول حاصل‌ضرب $z^{۸}+۱$ هر طرف را بر $z^{۴}$ تقسیم و فرض کنید $z=e^{i\theta}$.
۹. در فرمول حاصل ضرب $z^{۵}+۱$، قرار دهید $z=i$.

فصل چهارم

۱. (۱) $-i$، (۲) حد ندارد، (۳) ۰، (۴) ۱ —، (۵) i.
۲. (۱) همگرا، (۲) واگراست، زیرا قسمتهای حقیقی واگراست، (۳) همگرای مطلق، (۴) همگرا، (۵) واگراست، زیرا

$$\left|\frac{\sin in}{n^{۲}}\right|=\left|\frac{e^{-n}-e^{n}}{۲in^{۲}}\right|>\frac{e^{n}-۱}{۲n^{۲}}\to\infty .$$

۳. (۱) ۱، (۲) $\frac{۲}{۳}$، (۳) $\frac{۱}{۴}$، (۴) $\frac{۱}{e}$.
۵. $|e^{z}|=|e^{x}|$. بزرگترین وکوچکترین مقدار x روی دایره به‌ترتیب ۳ و ۱ — هستند.
۶. (۱) $(۲k+۱)\pi i$، (۲) $\log\sec\alpha+i(-\alpha+۲k\pi)$،
(۳) $\cos\log ۲+i\sin\log ۲$، (۴) $\exp\left(-\frac{\pi}{۲}(۴k+۱)\right)$.
۷. $\log(۲\pm\sqrt{۳})-i\frac{(۴k+۱)\pi}{۲}$.
۹. (۱) $\frac{\sinh ۲x+i\sin ۲y}{\cosh ۲x+\cos ۲y}$، (۲) $\frac{۴k+۱}{۴k}\pi i$.

واژه‌نامه - انگلیسی به فارسی

absolute	مطلق
-value-	قدرمطلق
argument	شناسه
associative law	قانون شرکت‌پذیری
axis	محور
commutative law	قانون جابه‌جایی
complex number	عدد مختلط
conjugate	مزدوج
convergence	همگرایی
diagram	نمودار
distributive law	قانون توزیع‌پذیری
imaginary	انگاری
irrational number	عددگنگ
integer	عدد صحیح
modulus	پیمانه

natural number	عدد طبیعی
number	عدد
part	قسمت
plane	صفحه
polar form	شکل قطبی
primitive root	ریشهٔ اولیه
purely imaginary	انگاری محض
radius	شعاع
rational number	عددگویا
real number	عددحقیقی
root	ریشه
sequence	دنباله
series	سری
unity	واحد
variable	متغیر

واژه‌نامه - فارسی به انگلیسی

انگاری	imaginary
انگاری محض	purely imaginary
پیمانه	modulus
دنباله	sequence
ریشه	root
ریشهٔ اولیه	primitive root
سری	series
شعاع	radius
شکل قطبی	polar form
شناسه	argument
صفحه	plane
عدد	number

real number	ـ حقیقی
integer	ـ صحیح
natural number	ـ طبیعی
irrational number	ـ گنگ
rational number	ـ گویا
complex number	ـ مختلط
law	قانون
distributive law	ـ توزیع‌پذیری
commutative law	ـ جابه‌جایی
assciative law	ـ شرکت‌پذیری
absolute value	قدرمطلق
part	قسمت
variable	متغیر
axis	محور
conjugate	مزدوج
absolute	مطلق
diagram	نمودار
unity	واحد
convergence	همگرایی

فهرست راهنما

گروه ریاضی مرکز نشردانشگاهی منتشر کرده است

* **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی**، جورج ب. توماس، ترجمهٔ علی اکبر جعفریان و ابوالقاسم میامئی، چاپ ۲، ۳، ۴، ۵

** ... رهاب داورپناه، جلد ۱ (با همکاری د... صنعتی شریف)

۱ـ **حساب دیفرانسیل و انتگرال**، تألیف تام م. آپوستل، ترجمهٔ علیرضا ذکایی و دیگران، جلد اول

۲ـ **هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی**، تألیف ماروین جی. گرینبرگ، ترجمهٔ م. هـ. شفیعیها، چاپ دوم

۳ـ **متغیرهای مختلط و کاربرد آنها**، تألیف روئل و. چرچیل و دیگران، ترجمهٔ امیر خسروی

۴ـ **سری فوریه**، تألیف ی.ن. اسندون، ترجمهٔ بتول جذبی

۵ـ **نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها**، تألیف پ. ر. هالموس، ترجمهٔ عبدالحمید دادالله

۶ـ **نخستین درس در جبر مجرد**، تألیف ف.ج. هیگینز، ترجمهٔ محمدرضا رجب‌زاده مقدم

۷ـ **آشنایی با نظریهٔ اعداد**، تألیف ویلیام و. آدامز، لری جوئل‌ـ گلدشتین، ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی، جلد اول

۸ـ **جبر خطی**، تألیف مایکل اونان، ترجمهٔ علی‌اکبر محمدی‌ـ حسن‌آبادی

۹ـ **ریاضیات مهندسی پیشرفته**، تألیف اروین کرویت سیگ، ترجمهٔ عبدالله شیدفر و حسین فرمان، جلد اول

۱۰ـ **آشنایی با تاریخ ریاضیات**، تألیف هاورد و. ایوز، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، جلد اول

۱۱ـ **معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها**، تألیف جرج ف. سیمونز، ترجمهٔ علی‌اکبر بابایی و ابوالقاسم میامئی

۱۲ـ **آمار مقدماتی**، تألیف ت.هـ. ووناکت ور. ج. ووناکت، ترجمهٔ محمدرضا مشکانی، جلد اول

۱۳ـ **طراحی منطقی دستگاههای رقمی**، تألیف آرتور د. فریدمن، ترجمهٔ شهلا طباطبائی و فرهاد صاحبان

۱۴ـ **حساب دیفرانسیل و انتگرال برای رشته‌های بازرگانی، زیست‌شناسی و علوم اجتماعی**، تألیف د. ج. کرودیس و دیگران، ترجمهٔ ابوالقاسم لاله