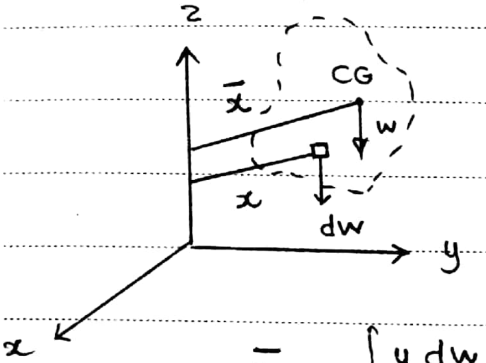
خواص هندسی سطوح : ← مرکز هندسی سطح centroid مرکز وار

مرکز جرم - مرکز ثقل - مرکز وار حجم

مرکز وار سطح - مرکز وار خط - مرکز وار اجسام مرکب

قضایای پاپوس



مرکز ثقل : $\bar{x}W = \int x\,dW$

$$W = \int dW \longrightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dW}{\int dW}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dW}{\int dW}$$

$dW = dm\,g$ شتاب جاذبه در کل جسم ثابت و یکسان

$$\longrightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dm\,g}{\int dm\,g}$$

مرکز جرم : $\longrightarrow \bar{x} = \dfrac{\int x\,dm}{M}$

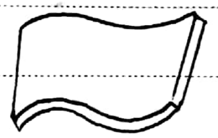
اگر شتاب جاذبه در کل حجم ثابت باشد مرکز ثقل و مرکز جرم بر هم منطبق خواهند شد.

مرکز حجم : $\bar{x} = \dfrac{\int x\,dv}{v} \quad \bar{y} = \dfrac{\int y\,dv}{v} \quad \bar{z} = \dfrac{\int z\,dv}{v}$

$dm = \rho\,dv \longrightarrow$ چگالی یکنواخت $\bar{x} = \dfrac{\int x\,dm}{M} = \dfrac{\int x\rho\,dv}{\int \rho\,dv} = \dfrac{\int x\,dv}{\int dv}$

* مرکز حجم یک خاصیت صرفاً هندسی است.

مرکز سطح : $dv = dA\,.\,t$

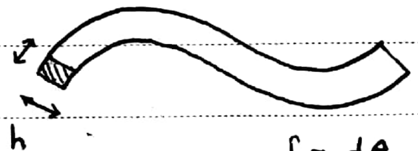


$$\bar{x} = \frac{\int x\,t\,dA}{\int t\,dA} \xrightarrow{\text{ثابت } t} \frac{\int x\,dA}{\int dA}$$

t ضخامت

مرکز هندسی سطح می‌تواند لزوماً روی سطح نباشد.

مرکز وار خط :



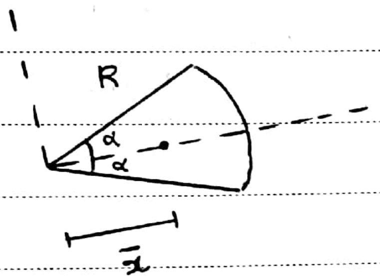
$$dA = h\,dL$$

$$L = \int dL$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int x h\,dL}{\int h\,dL} = \frac{\int x\,dL}{\int dL}$$

مرکز هندسی خط :
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dL}{L}$$

مثال ۳ : مرکز هندسی قطاع دایره‌ای

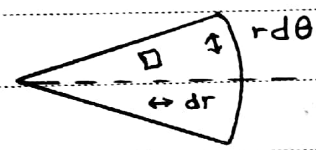


به دلیل تقارن $\bar{y} = 0$

$$A = \alpha R^2$$

سه روش المان گیری :

روش اول :

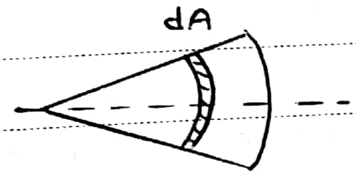


$$dA = r\,d\theta\,dr$$

$$x = r\cos\theta$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{0}^{R}(r\cos\theta)(r\,dr\,d\theta)}{\alpha R^2} = \frac{\frac{1}{3}R^3\,2\sin\alpha}{\alpha R^2} = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

روش دوم :



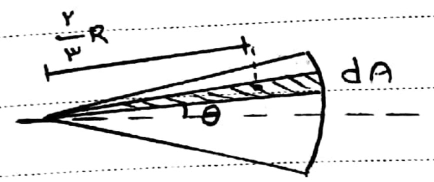
$$dA = r(2\alpha)\,dr$$

$$x_c = r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c\,dA}{\int dA} = \frac{\int_0^R r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,r(2\alpha)\,dr}{\alpha R^2} = \frac{2\sin\alpha\,R^3}{3\alpha R^2} = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{\overset{A_1}{\int x\,dA} + \overset{A_2}{\int x\,dA} + \overset{A_3}{\int x\,dA}}{A} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{\int x_c\,dA}{\int dA}$$

روش سوم :



$$dA = \frac{1}{2}(R\,d\theta)R$$

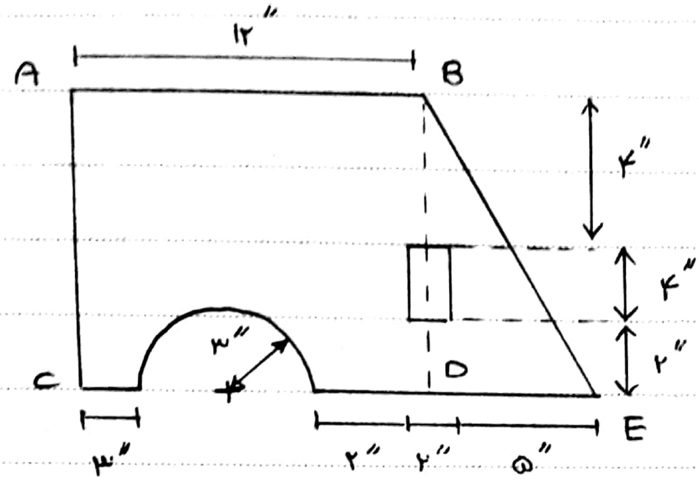
$$x_c = \frac{2}{3}R\cos\theta$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{2}{3}R\cos\theta\right)\left(\frac{1}{2}R^2\,d\theta\right)}{\alpha R^2} = \frac{\frac{1}{3}R^3(2\sin\alpha)}{\alpha R^2} = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Subject
Date

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i m_i}{\sum m_i}$$

مثال ۴ : مرکز هندسی سطح مرکب



$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i}$$

سطح (۱) : ABCD

سطح (۲) : $\overset{\Delta}{BDE}$

سطح (۳) : نیم دایره (-)

سطح (۴) : مستطیل کوچک (-)

مرکز دستگاه مختصات روی نقطه C

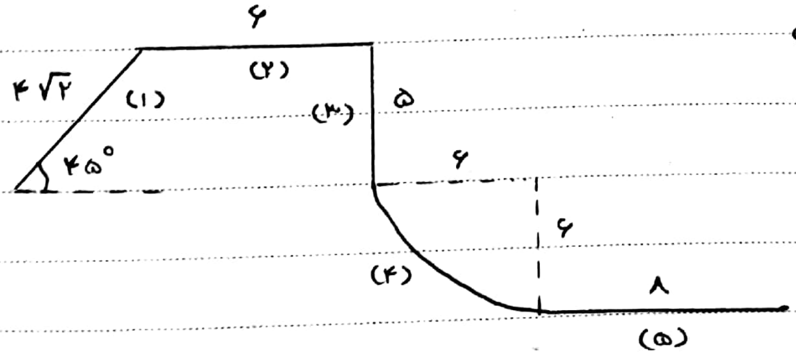
	i	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	A_i	$\bar{x}_i A_i$	$\bar{y}_i A_i$
	۱	۶	۵	۱۲۰	۷۲۰	۶۰۰
	۲	۱۴	$\frac{۱۰}{۳}$	۳۰	۴۲۰	۱۰۰
(-)	۳	۶	$\frac{۴}{\pi}$	$-\frac{1}{2}\pi(۳)^2$	-۸۴/۸	-۱۸
(-)	۴	۱۲	۴	-۸	-۹۶	-۳۲
				۱۲۷/۹	۹۵۹	۶۵۰

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{۹۵۹}{۱۲۷/۹} = ۷/۵''$$

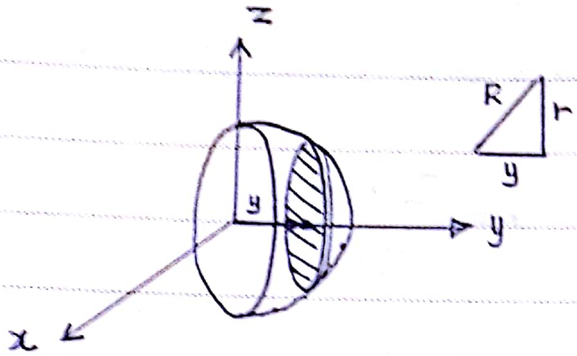
$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{۶۵۰}{۱۲۷/۹} = ۵/۰۸''$$

$$\int y\, dA = \bar{y} A = ۵/۰۸ \, (۱۲۷/۹) = ۶۵۰$$

مثال ۵ : مرکز هندسی منحنی



مثال: مرکز حجم یک نیم کره



به دلیل تقارن $\bar{z}=\bar{x}=0$

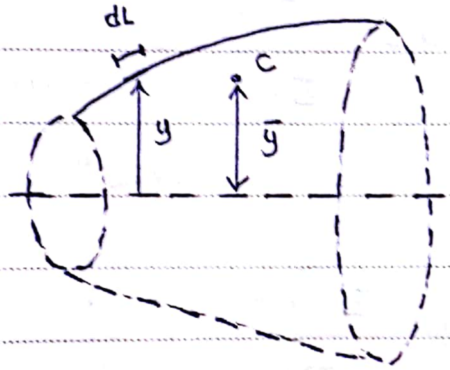
و مرکز حجم روی محور y قرار دارد

لذا مقدار $\bar{y}$ را محاسبه می کنیم

$$\bar{y}=\frac{\int y_c\,dV}{V}=\frac{\int_0^R y(\pi r^2 dy)}{\frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi R^3)}=\frac{\int_0^R \pi y(R^2-y^2)\,dy}{\frac{2}{3}\pi R^3}$$

$$=\frac{\pi(R^2\frac{1}{2}R^2-\frac{1}{4}R^4)}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})R=\frac{3}{8}R$$

قضایای پاپوس:

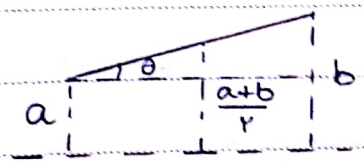


$dA=2\pi y\,dL$

$$A=\int 2\pi y\,dL=2\pi\int y\,dL=2\pi(\bar{y}L)$$

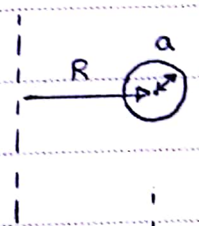
$A=\theta\bar{y}L$

مثال ۱)



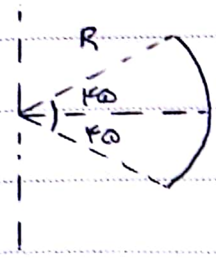
$$A=2\pi(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{\sin\theta}=\frac{\pi(b^2-a^2)}{\sin\theta}$$

مثال ۲)



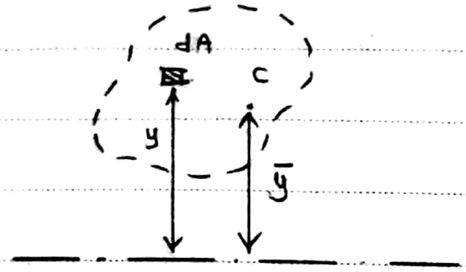
$$A=2\pi R(2\pi a)=4\pi^2 aR$$

مثال ۳)



$$\frac{R\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{2R\sqrt{2}}{\pi}$$

$$A=2\pi(\frac{2R\sqrt{2}}{\pi})(\frac{\pi}{2}R)=2\pi\sqrt{2}R^2$$



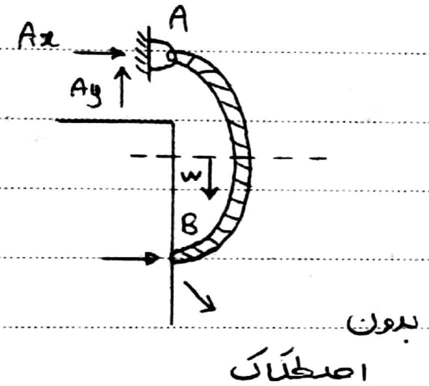
$$dV = dA(2\pi y)$$

$$V = 2\pi \int y\,dA = 2\pi \bar{y} A \qquad V = \theta \bar{y} A$$

مثال ۱ : $V = \pi\left(\frac{b+2a}{3}\right)\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{\tan\theta} = \frac{1}{6}\pi\frac{(b-a)^2(b+2a)}{\tan\theta}$

مثال ۲ : $V = 2\pi R(\pi a^2) = 2\pi^2 a^2 R$

مثال : وزن دریچه : W به همراه عکس العمل A و B

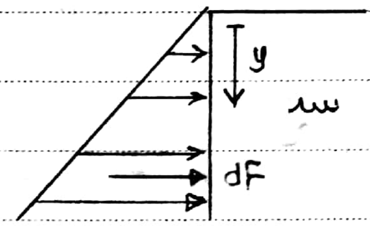


$$\sum F_y = 0 \longrightarrow A_y = W \qquad \frac{R\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}R = \bar{x}$$

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow B(2R) - W\left(\frac{2R}{\pi}\right) = 0 \longrightarrow B = \frac{W}{\pi}$$

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow A_x = -B = -\frac{W}{\pi}$$

لنگر لختی سطح : Area moment of inertia

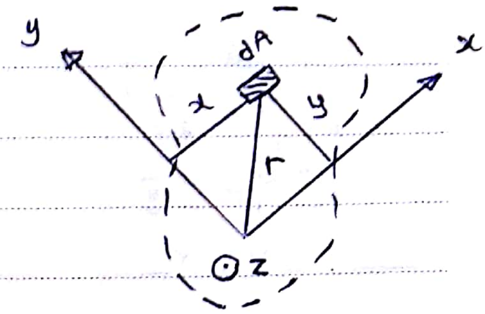


$$dF = p\,dA \longrightarrow R = \int dF = \int p\,dA$$

$$p = \rho g h = Ky \qquad R = \int p\,dA = \int Ky\,dA = K\underbrace{\int y\,dA}_{\text{لنگر اول سطح}} \qquad Q = \int y\,dA$$

$$dM = y\,dF = y\,p\,dA = Ky^2\,dA \longrightarrow M = K\underbrace{\int y^2\,dA}_{\text{لنگر دوم سطح}} \qquad I = \int y^2\,dA$$

$Q_x = \int y\,dA = \bar{y}A \qquad Q_y = \int x\,dA = \bar{x}A$



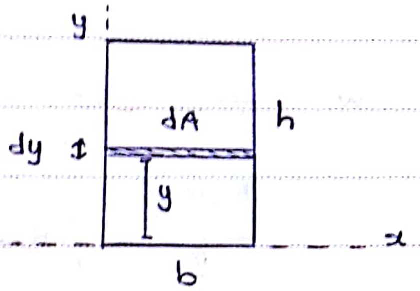
$I_{xx} = \int y^2\,dA \qquad I_{yy} = \int x^2\,dA$

لنگر لختی نرمال

$I_{zz} = \int r^2\,dA = \int (x^2+y^2)\,dA = I_{yy} + I_{xx}$ لنگر قطبی

$I_{xy} = \int xy\,dA$ لنگر لختی ضربی $\qquad * \; I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

مثال ۱: مستطیل

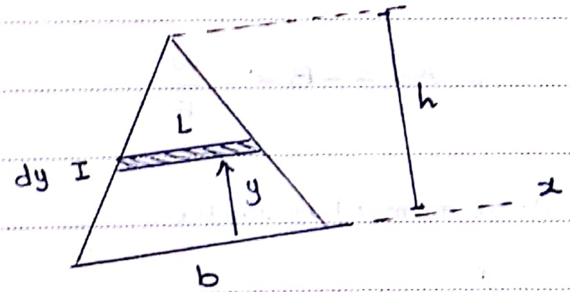


$I_{xx} = \int y^2\,dA$

$= \int_0^h y^2 (b\,dy) = \frac{1}{3} b h^3 = \frac{1}{3} bh \cdot h^2 = \frac{1}{3} A h^2$

$I_{yy} = \frac{1}{3} h b^3 = \frac{1}{3} A b^2 \qquad I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{3} A (b^2 + h^2)$

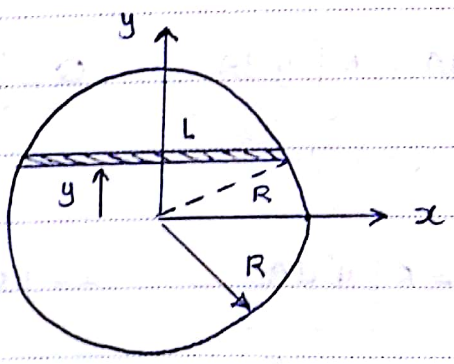
مثال ۲: مثلث



$\frac{L}{b} = \frac{h-y}{h} \longrightarrow L = b\left(1 - \frac{y}{h}\right)$

$I_{xx} = \int y^2\,dA = \int_0^h y^2 L\,dy = \int_0^h b y^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = b\left[\frac{h^3}{3} - \frac{1}{h}\frac{h^4}{4}\right] = \frac{1}{12} b h^3$

مثال ۳: دایره



$I_{xx} = \int_{-R}^{+R} y^2\,dA$

$= 2\int_0^R y^2 L\,dy = 2\int_0^R 2y^2\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$

المان dA حلقه کوچکی به شعاع r از مرکز مختصات

$$I_{zz}=\int r^2 dA=\int_0^R r^2(2\pi r dr)=\frac{2\pi}{4}R^4=\frac{1}{2}\pi R^4$$

$$I_{xx}=I_{yy} \qquad I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}$$

پس بدون انتگرال گیری هم می‌توان I_{xx} را به وسیله I_{zz} به دست آورد.

$d=2R$

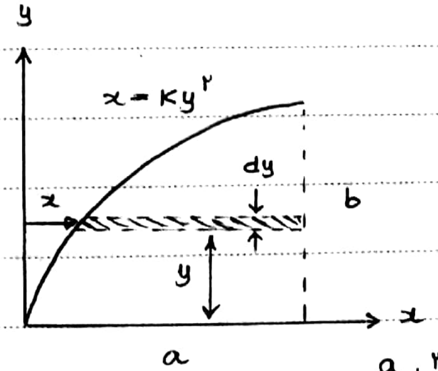
$$I_{yy}^{(\text{D})}=\frac{1}{2}I_{yy}^{(\text{◠})}=\frac{1}{4}I_{yy}^{(\text{O})}=\frac{1}{256}\pi d^4$$

حلقه به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 $\Rightarrow$ $I_{zz}=\frac{1}{2}\pi(R_2^4-R_1^4)$

حلقه به ضخامت t شعاع R ، $R_2=R+\frac{t}{2}$ ، $R_1=R-\frac{t}{2}$

$$I=\frac{1}{2}\pi(R_2^2-R_1^2)(R_2^2+R_1^2)$$
$$=\frac{1}{2}\pi t(2R)(2R^2)=2\pi R^3 t$$

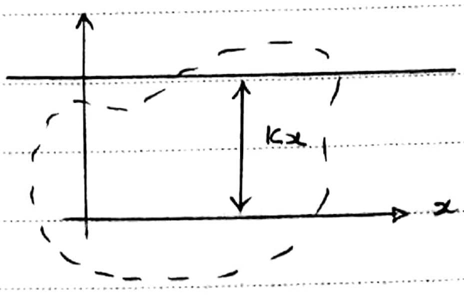
مثال:



$$a=kb^2 \longrightarrow k=\frac{a}{b^2}$$
$$\frac{x}{a}=\left(\frac{y}{b}\right)^2$$

$$I_{xx}=\int y^2 dA=\int_0^b y^2(a-x)\,dy=\int_0^b y^2(a-ky^2)\,dy$$
$$=\frac{a}{3}b^3-\frac{k}{5}b^5=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)ab^3$$

شعاع ژیراسیون:

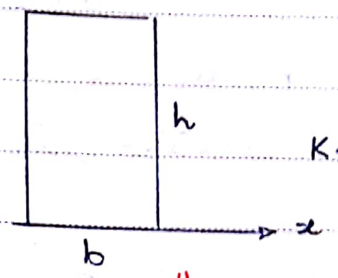


$$I_x=\int y^2 dA=k_x^2 A$$

$$\longrightarrow k_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

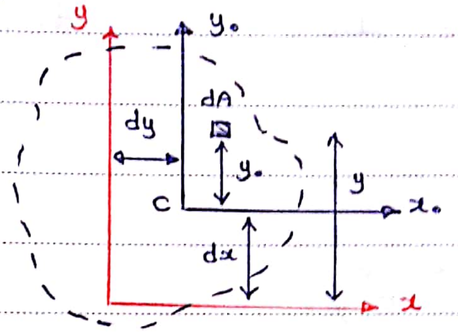
$$I_{zz}=I_{xx}+I_{yy} \longrightarrow k_z^2=k_x^2+k_y^2$$

سوال: $I_{xx}=\frac{1}{3}bh^3 \qquad K_x=?$



$$K_x=\sqrt{\frac{I_{xx}}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh}}=\frac{\sqrt{3}}{3}h$$

قضیه انتقال موازی محور ها:



$I_{x_0x_0} \quad d_x \longrightarrow I_{xx}$?

$I_{y_0y_0} \quad d_y \qquad\quad I_{yy}$

$$I_{xx}=\int y^2\,dA=\int (y_0+d_x)^2\,dA$$

$y=y_0+d_x$

$$=\int (y_0^2+2d_x y_0+d_x^2)\,dA$$

گذرنده از مرکز هندسی

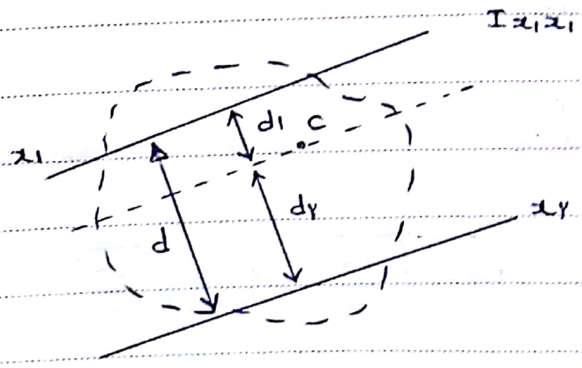
$$=\int y_0^2\,dA+2d_x\int y_0\,dA+d_x^2\int dA \rightarrow I_{xx}=I_{x_0x_0}+\underbrace{2d_x\bar{y}_0A}_{0}+Ad_x^2$$

$$\rightarrow I_{xx}=I_{x_0x_0}+Ad_x^2$$

$I_{yy}=I_{y_0y_0}+Ad_y^2 \qquad I_{zz}=I_{z_0z_0}+Ad_z^2 \qquad K_x^2=K_{x_0}^2+d_x^2$

اگر لختی نسبت به یک محور گذرنده از مرکز هندسی سطح را داشته باشیم ($\bar{I}$) و آن محور را به صورت موازی به اندازه d جابه‌جا کنیم در این صورت خواهیم داشت: $I_{xx}=\bar{I}_{xx}+Ad_x^2$

نکته ۱: کمترین مقدار I در یک راستا نسبت به محوری ایجاد می‌شود که از مرکز هندسی سطح عبور کند.

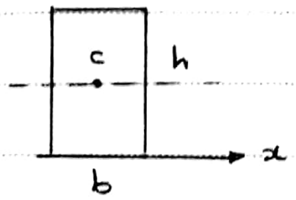


نکته ۲: $I_{x_2x_2}\neq I_{x_1x_1}+Ad^2$

$$I_{x_1x_1}=\bar{I}+Ad_1^2 \rightarrow \bar{I}=I_{x_1x_1}-Ad_1^2$$

$$I_{x_2x_2}=\bar{I}+Ad_2^2=I_{x_1x_1}+A(d_2^2-d_1^2)$$

مثال:

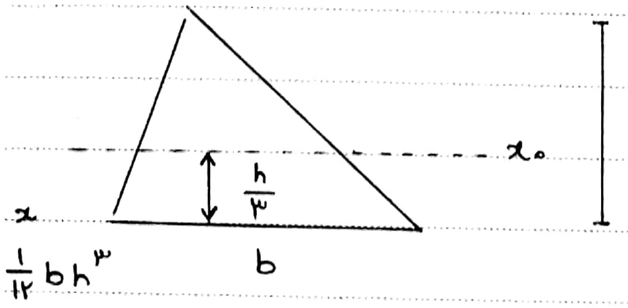


$$I_{xx} = \frac{1}{3} b h^3 \qquad \bar{I}_{xx} = ?$$

$$I_{xx} = \bar{I}_{xx} + A d^2 \longrightarrow \frac{1}{3} b h^3 = \bar{I}_{xx} + b h \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\longrightarrow \bar{I}_{xx} = \frac{1}{12} b h^3$$

مثال:

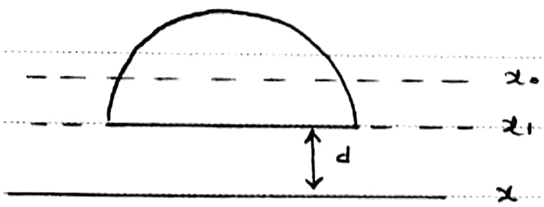


$$\bar{I}_{xx} + A d^2 = I_{xx}$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{1}{12} b h^3 - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{18} b h^3 = \frac{1}{36} b h^3$$

مثال: نیم دایره به شعاع ۲۰ mm به فاصله ۱۵ mm از محور x



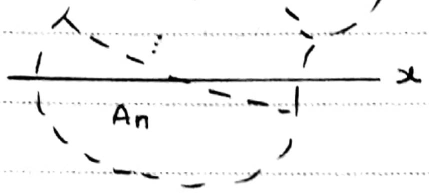
$$\frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{4R}{3\pi}$$

دایره $\bar{I}_{zz} = \frac{1}{2} A R^2 = \frac{1}{2} \pi R^4 \longrightarrow \bar{I}_{zz} = \frac{1}{4} \pi R^4 \longrightarrow \bar{I}_{xx} = I_{x_1x_1} = \frac{1}{8} \pi R^4$

$$I_{x_1x_1} = \bar{I} + A\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = \frac{1}{8} \pi R^4 \qquad I_{x_2x_2} = \bar{I} + A\left(d + \frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8} \pi R^4 - \frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + \frac{\pi R^2}{2}\left(d + \frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

ممان اینرسی سطوح مرکب:

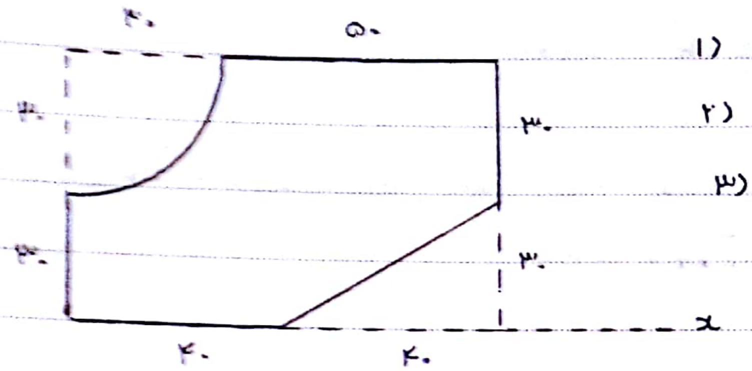


$$I_{xx} = \sum \left(\bar{I}_{xx} + A d^2\right)$$

PAPCO

Subject
Date

تحویل تمرین ۹۷/۲/۱۷



مثال: ۱) مستطیل
۲) ربع دایره
۳) مثلث

قطعه	A_i	$\bar{I}_x$	d_x	$A d_x^2$
۱	$60 \times 80 = 4800$	$\frac{1}{12}(80)(60)^3$	30	$4800(30)^2$
۲	$-\frac{1}{4}\pi(30)^2$	$-\left(\frac{1}{16}\pi(30)^4 - \frac{1}{4}\pi(30)^2\left(\frac{4\times30}{3\pi}\right)^2\right)$	$60 - \frac{40}{\pi}$	
۳	$-\frac{1}{2}(30)(40)$	$-\frac{1}{36}(40)(30)^3$	10	
		$\sum \bar{I}_x$		$\sum A d_x^2$

$$I = \sum \bar{I}_x + \sum A d_x^2 = 4/05 \times 10^6$$

۱) $\frac{1}{12} bh^3$ ۲) $\frac{1}{16}\pi R^4 - \frac{1}{4}\pi R^2\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$ ۳) $\frac{1}{36} bh^3$

لنگرهای لختی قائم: $I_{xx} = \int y^2 dA \quad I_{yy} = \int x^2 dA \quad I_{zz} = \int r^2 dA$

لنگر لختی ضربی: $I_{xy} = \int xy \, dA$

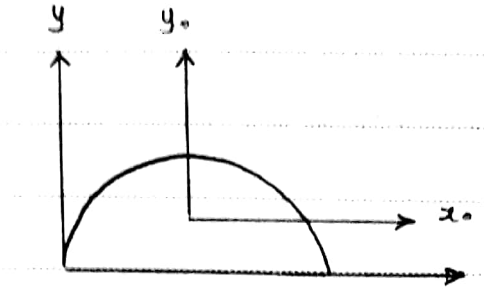
اگر یکی از محورهای x یا y محور تقارن سطح باشد در آن صورت $I_{xy} = 0$

انتقال موازی محورها: $x = x_0 + d_y \qquad y = y_0 + d_x$

$$I_{xy} = \int (x_0 + d_y)(y_0 + d_x)\, dA = \int x_0 y_0 \, dA + d_x \int x_0 \, dA$$
$$+ d_y \int y_0 \, dA + d_x d_y \int dA = I_{x_0 y_0} + d_x d_y A = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A$$

اگر حرکت انتقال موازی محوری در خلاف راستای محور دیگر باشد مقدار d منفی خواهد بود.

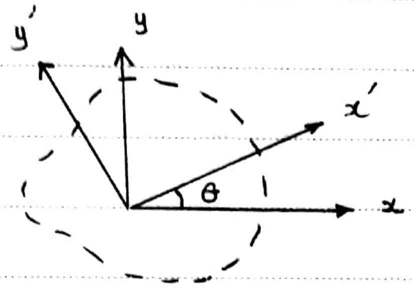
مثال: مطلوب است محاسبه تنگر لختی I_{xy} برای سطح زیر:



$$\bar{I}_{xy} = I_{x_0 y_0} = 0$$

$$\updownarrow \frac{4R}{3\pi} \qquad d_x = +\frac{4R}{3\pi} \qquad d_y = +R$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A = 0 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)(R)\,\frac{\pi R^2}{2} = \frac{2}{3}R^4$$



تنگر لختی نسبت به محورهای دوران یافته:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$* \quad I_{x'x'} = I'_{xx} = \int y'^2\, dA = \int (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2\, dA$$

$$= \int \sin^2\theta\, x^2\, dA + \int \cos^2\theta\, y^2\, dA - \int 2\sin\theta\cos\theta\, xy\, dA$$

$$= \sin^2\theta \int x^2\, dA + \cos^2\theta \int y^2\, dA - \sin 2\theta \int xy\, dA$$

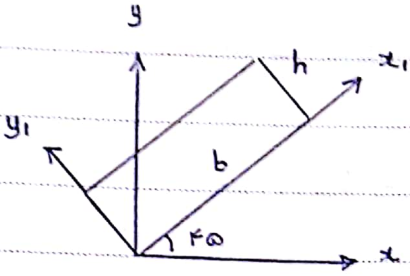
$$= I_{yy}\sin^2\theta + I_{xx}\cos^2\theta - \sin 2\theta\, I_{xy}$$

$$* \quad I_{y'y'} = \int x'^2\, dA = I_{yy}\cos^2\theta + I_{xx}\sin^2\theta + \sin 2\theta\, I_{xy}$$

برای به دست آوردن I'_{yy} می‌توانستیم به جای زاویه θ در I'_{xx}، $\frac{\pi}{2}+\theta$ را قرار دهیم. چون اگر به این اندازه دوران دهیم همان می‌شود.

$$* \quad I_{x'y'} = \int x'y'\, dA = \sin\theta\cos\theta\,(I_{xx} - I_{yy}) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, I_{xy}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\theta\,(I_{xx} - I_{yy}) + \cos 2\theta\, I_{xy}$$



مثال ۵:

$I_{x_1x_1} = \frac{1}{3} bh^3 \qquad I_{y_1y_1} = \frac{1}{3} hb^3$

$I_{x_1y_1} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A = 0 + \frac{h}{2}\,\frac{b}{2}\, bh = \frac{1}{4} b^2h^2$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$

$$I_{xx} = \frac{1}{3} hb^3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} bh^3\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{4} b^2h^2\right) = \frac{2b^2+2h^2+3bh}{12}\, bh$$

اگر در یک نقطه بخواهیم محوری را مشخص کنیم که بیشترین یا کمترین مقدار I نسبت به آن محور را داشته باشد زاویه آن را مشخص کنید:

$$\frac{\partial I'_{xx}}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow I_{yy}\sin 2\theta - I_{xx}\sin 2\theta - 2\cos 2\theta\, I_{xy} = 0$$

$$\longrightarrow \tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_{yy}-I_{xx}} = \tan(2\theta_p) = \tan(\pi + 2\theta_p)$$

$$\theta = \theta_p \longrightarrow 2\theta = \pi + 2\theta_p \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \theta_p$$

همواره در یک نقطه می توان یک دستگاه مختصات معرفی نمود که لنگر لختی حول یکی از محور های آن ماکزیمم و نسبت به دیگری مینیمم باشد و در این حالت لنگر لختی ضربی صفر خواهد شد.

مقادیر اکسترمم لنگر لختی ضربی:

$$\frac{\partial I'_{xy}}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow \cos 2\theta_s\,(I_{xx} - I_{yy}) = 2\sin 2\theta_s\, I_{xy}$$

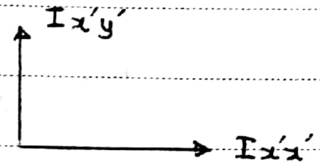
$$\longrightarrow \tan 2\theta_s = \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2I_{xy}} = -\frac{1}{\tan 2\theta_p} \longrightarrow \tan 2\theta_s = \cot(-2\theta_p) = \tan\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2\theta_p\right)$$

$$2\theta_s = \pm\frac{\pi}{2} + 2\theta_p \longrightarrow \theta_s = \pm\frac{\pi}{4} + \theta_p$$

دستگاهی که با دوران دستگاه مختصات اصلی به مقدار $\frac{\pi}{4}$ به دست می آید دستگاهی است که لنگر لختی آن max است و در این حالت لنگر لختی نسبت به هر دو محور با هم برابر بوده و با متوسط لنگر لختی برابر است.

دایره مور: $\left(I_{x'x'} - \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \frac{1}{4}\left(I_{xx}-I_{yy}\right)^2 + I_{xy}^2$

$(x-a)^2 + y^2 = b^2$



دایره‌ای به مرکز $(a,0)$ و شعاع b در این دستگاه مختصات

کافیست روابط $I_{x'x'}$ و $I_{x'y'}$ را بر حسب نسبت های مثلثاتی 2θ بنویسیم تا به رابطه بالا برسیم.

- بنابراین مور نشان داد مکان هندسی لنگر لختی دوران یافته یک دایره می باشد.

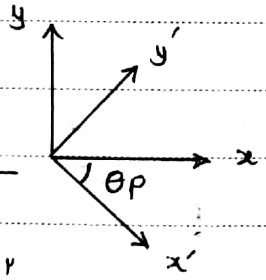
نکات دایره مور:

۱- میزان زوایا روی دایره مور، دو برابر میزان زوایا روی محور ها می باشد چون زاویه بین محور x و y برابر ۹۰ درجه می باشد این زاویه روی دایره ۱۸۰ است و بنابراین هر قطر دایره مور بیانگر یک دستگاه مختصات هست.

۲- مراحل رسم دایره مور:

$C \left| \begin{matrix} \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad A \left| \begin{matrix} I_{xx} \\ I_{xy} \end{matrix} \right. \qquad B \left| \begin{matrix} I_{yy} \\ -I_{xy} \end{matrix} \right.$

AB قطر دلخواه دایره مور است.

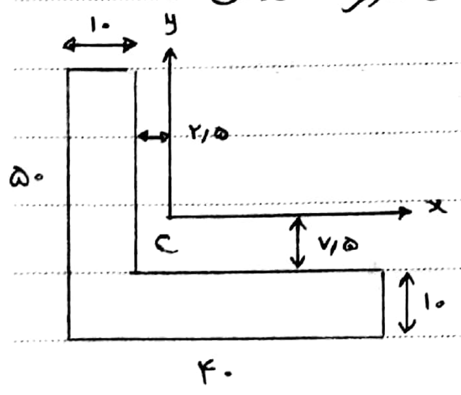


$I_{max} = C + R$

$I_{min} = C - R \qquad C = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{(I_{xx}-I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2}$

$I_{xy}^{max} = R$

مثال: مطلوب است تعیین محور های اصلی گذرنده از مرکز هندسی سطح و محاسبه مقادیر I_{max}، I_{min} و I_{xy}^{max}.



محاسبه می شود:

$I_{xx} = 18.17 \times 10^4 \ mm^4$

$I_{yy} = 10.17 \times 10^4 \ mm^4$

$I_{xy} = -7.5 \times 10^4 \ mm^4$

Subject
Date

$X(۱۸٫۱۷ \,,\, -۷٫۵)$ $\quad$ $Y(۱۰٫۱۷ \,,\, ۷٫۵)$ $\quad$ $C = \frac{۱۸٫۱۷ + ۱۰٫۱۷}{۲} = ۱۴٫۱۷$

$I_{xx} \quad I_{xy} \qquad I_{yy} \quad -I_{xy}$

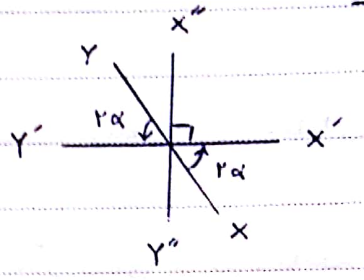
$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۱۸٫۱۷-۱۰٫۱۷)^{۲} + (-۷٫۵-۷٫۵)^{۲}} = ۸٫۵$$

$I_{max} = C+R = ۲۲٫۶۷$

$I_{min} = C-R = ۵٫۳۳$

$\tan ۲\alpha = \frac{۷٫۵}{۴}$

$\longrightarrow \alpha \simeq ۳۱^{\circ}$



$I_{x'x'} = ۲۲٫۶۷ \times ۱۰^{۴}\ mm^{۴}$

$I_{y'y'} = ۵٫۳۳ \times ۱۰^{۴}\ mm^{۴}$ $\qquad$ $I_{x'y'} = ۰$

$I_{x''x''} = ۱۴٫۱۷ \times ۱۰^{۴}\ mm^{۴}$ $\quad$ $I_{x''y''} = ۸٫۵ \times ۱۰^{۴}\ mm^{۴}$ $\quad$ $I_{y''y''} = ۱۴٫۱۷ \times ۱۰^{۴}\ mm^{۴}$

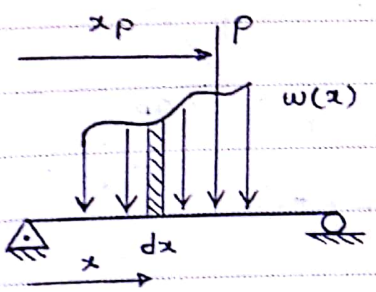
$I_{xy}^{max} = \frac{I_{max} - I_{min}}{۲}$

* هر شکلی که تقارن دارد I_{xy} آن صفر است.

$I_{x''y''} = \frac{I''_{xx} + I''_{yy}}{۲}$

تحلیل تیرها:

- مقدمه - انواع تکیه گاه ها در تیر ها
- تحلیل نیروهای خارجی - تحلیل نیروهای داخلی



$w(x) = \frac{df}{dx} \longrightarrow df = w\,dx$

$f = \int df = \int w\,dx =$ سطح زیر منحنی

بار متمرکز معادل بار گسترده ← مقدار آن معادل سطح زیر نمودار است

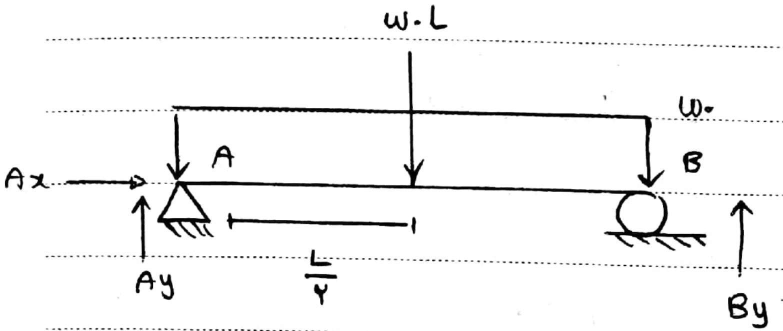
← محل آن مرکز هندسی سطح است.

$P x_p = \int x\,df = \int x w\,dx$

$$\longrightarrow x_p = \frac{\int x\,df}{P} = \frac{\int x\,dA}{A} = \bar{x}$$

تحلیل تیرها: اندازه: سطح زیر نمودار $w-x$

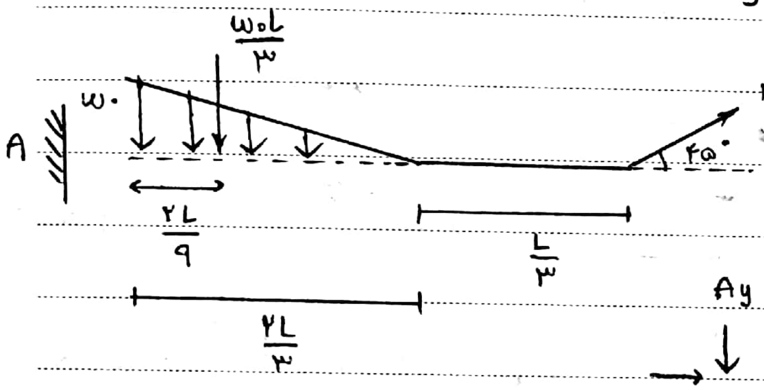
خط اثر: از مرکز هندسی سطح

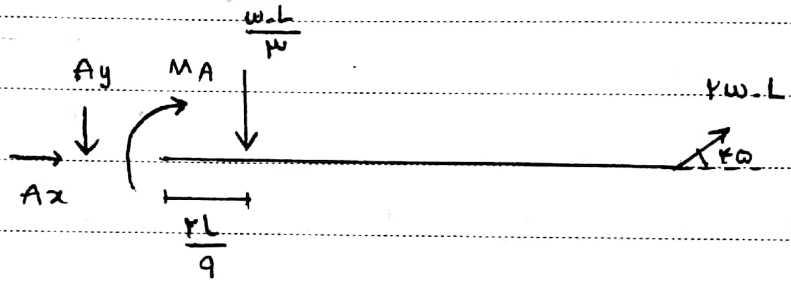


$A_x = 0$

$A_y = B_y = \frac{1}{2} w_0 L$

مثال:





$$\sum \vec{F}_x = 0 \longrightarrow A_x + 2 w_0 L \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

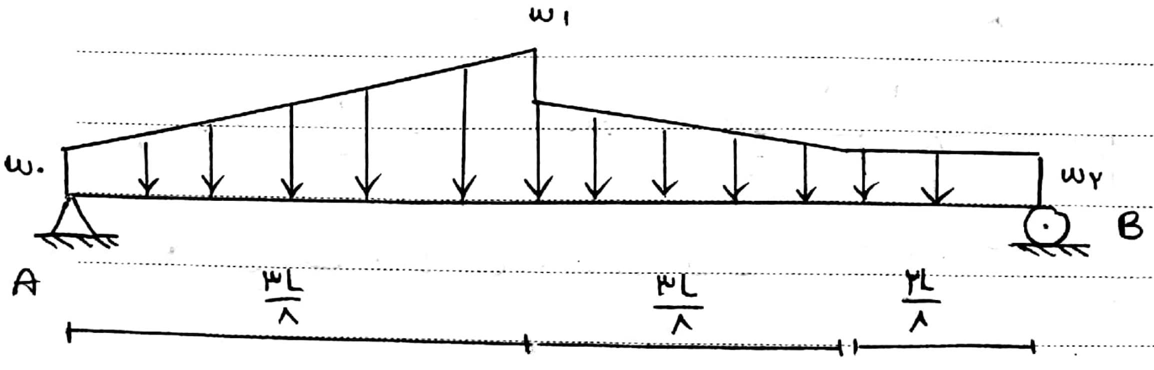
$$\longrightarrow A_x = -\sqrt{2}\, w_0 L$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \longrightarrow -A_y - \frac{w_0 L}{3} + 2 w_0 L \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \longrightarrow A_y = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) w_0 L$$

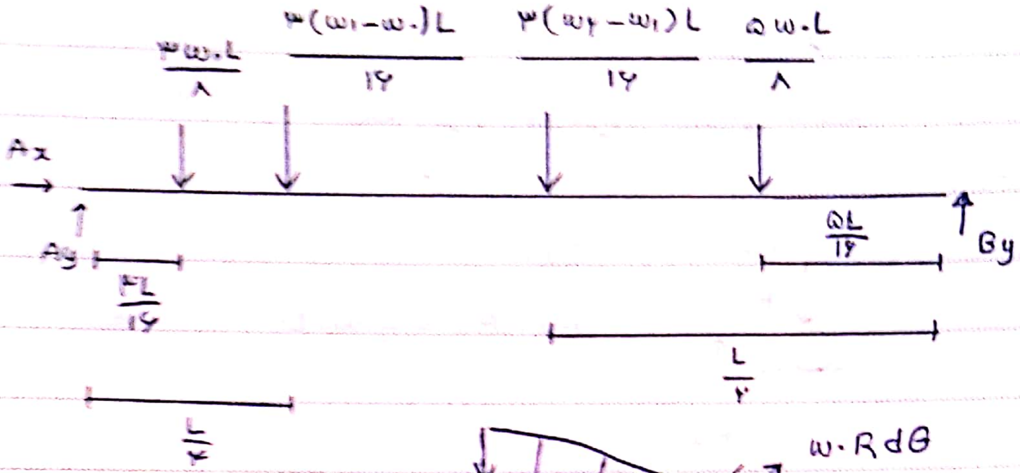
$$\sum \vec{M}_A = 0 \longrightarrow M_A + \left(\frac{w_0 L}{3}\right)\left(\frac{2L}{9}\right) - \sqrt{2}\, w_0 L \cdot L = 0$$

$$\longrightarrow M_A = \sqrt{2}\, w_0 L^2 - \frac{2}{27} w_0 L^2$$

مثال:

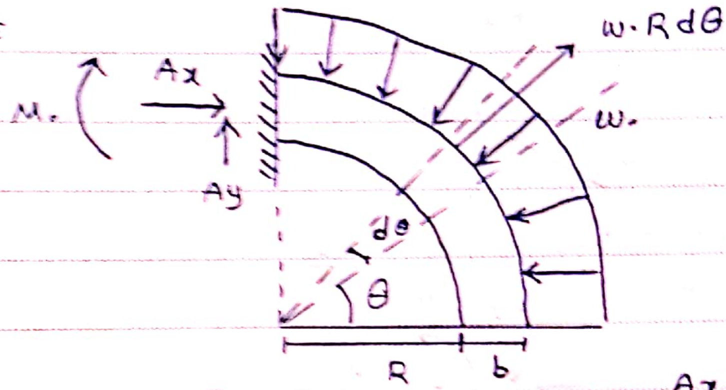


Subject
Date



با نوشتن معادلات تعادل نیرو محاسبه می شوند.

مثال:



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$A_x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (w_0 R\, d\theta)\cos\theta = 0$$

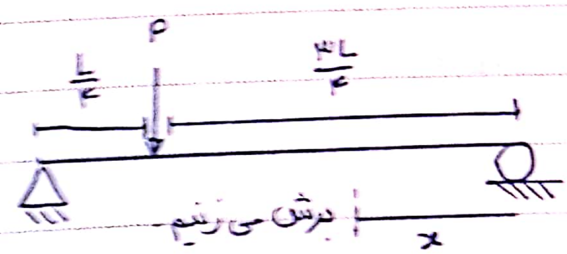
$$A_x = w_0 R \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = w_0 R$$

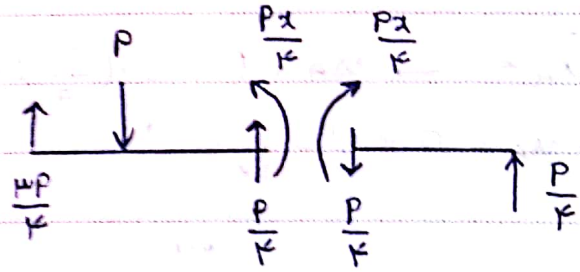
$$\sum \vec{F}_y = 0 \rightarrow A_y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (w_0 R\, d\theta)\sin\theta$$

$$\rightarrow A_y = w_0 R(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = w_0 R$$

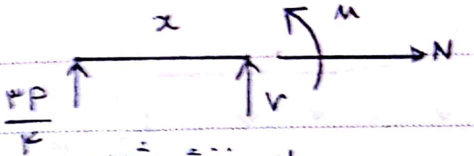
$$\sum \vec{M}_0 = 0 \rightarrow A_x \cdot R + M_0 = 0$$

$$\rightarrow M_0 = -w_0 R^2$$





$0 \le x < \frac{L}{4}$

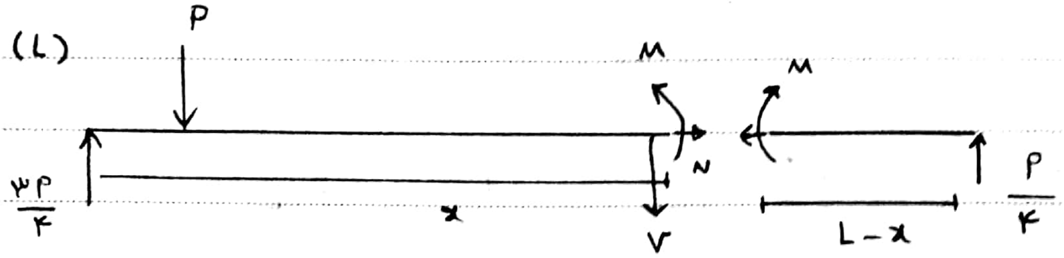


$N = 0 \quad V = \frac{3P}{4} \quad M = \frac{3P}{4}x$

برای خنثی شدن جهت آن را بر می گردانیم. (۷)

* اگر جهت x را آن طرف تیر بگیریم

$\frac{L}{۴} < x \leq \frac{۳L}{۴}$ (L)



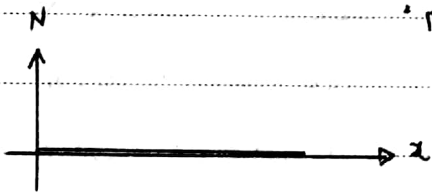
$N = ۰ \quad V = \frac{۳P}{۴} - P = -\frac{P}{۴} \qquad \sum \vec{M} = ۰ \longrightarrow \frac{۳P}{۴} x - P\left(x - \frac{L}{۴}\right) - M = ۰$

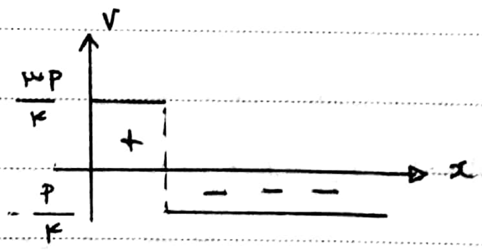
$$M = -\frac{P}{۴} x + \frac{PL}{۴} = \frac{P}{۴}(L - x)$$

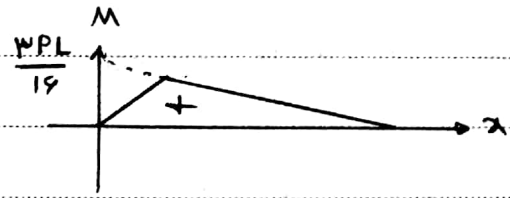
$۰ \leq x < \frac{L}{۴} \longrightarrow N = ۰ \quad V = \frac{۳P}{۴} \quad M = \frac{۳P}{۴} x$

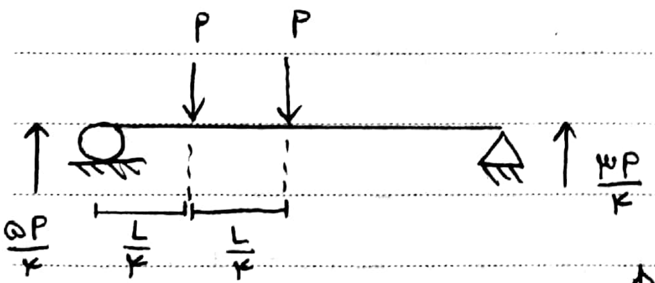
$\frac{L}{۴} < x \leq L \longrightarrow N = ۰ \quad V = -\frac{P}{۴} \quad M = \frac{P}{۴}(L - x)$

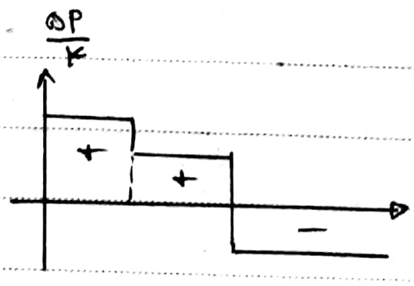
حال نمودار های N و V و M برحسب x را رسم می‌کنیم.

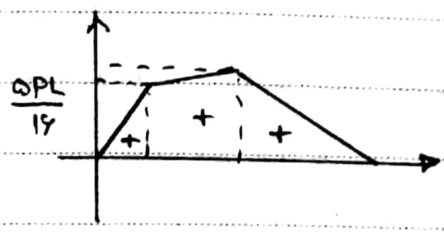








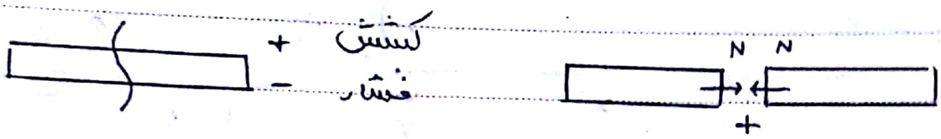


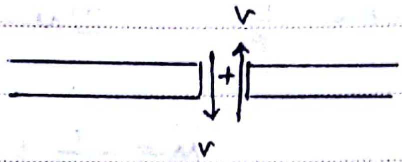


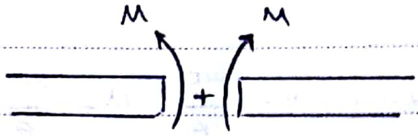
Subject
Date

چهارشنبه ۹۷/۲/۲۶ ساعت ۱۶ الی ۱۸ الف۱۳

قرارداد جهت برای نیروهای محوری، برشی و ممان خمشی:





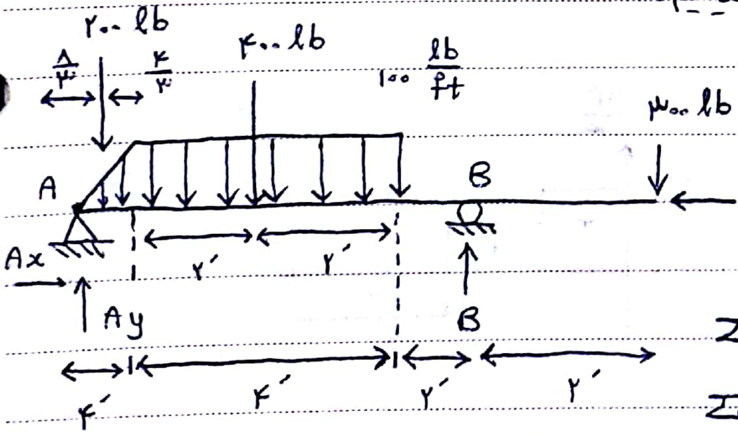


روش تعیین عکس‌العمل‌های داخلی در تیر:

تئوری: قاعدتاً می‌بایست در محل مورد نظر تیر را برش داده و نیروهای محوری N، برشی V و خمشی M را در محل برش اعمال نمود. سپس با قوانین تعادل آن‌ها را تعیین نمود.

عملی: در عمل تیر را برش می‌دهیم و یک سمت را نگه می‌داریم و هر آنچه نیرو و گشتاور روی سمت دیگر می‌باشد را به محل برش انتقال می‌دهیم و با رعایت قرارداد N و V و M را تعیین می‌نماییم.

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام نیروهای محوری، برشی و خمشی

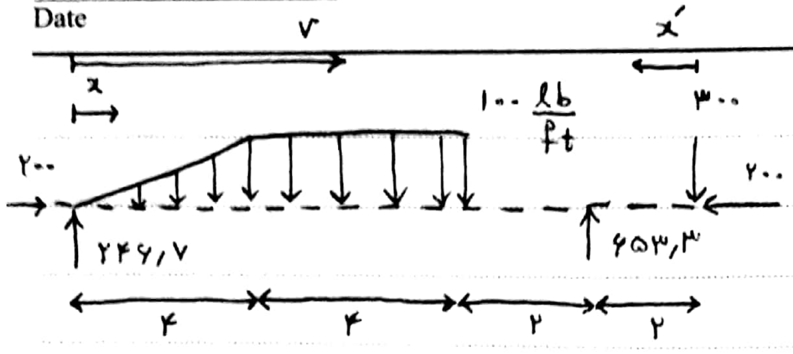


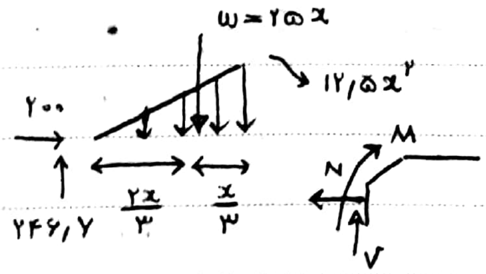
$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \rightarrow A_x = 200\ lb$$

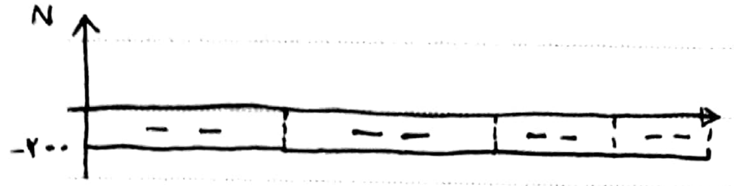
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 200\left(\frac{8}{3}\right) + 400(6) - B(10) + 300(12) = 0 \rightarrow B = \frac{160}{3} + 240 + 360 = 653.3\ lb$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y - 200 - 400 + 653.3 - 300 = 0 \rightarrow A_y = 246.7\ lb$$

Subject
Date

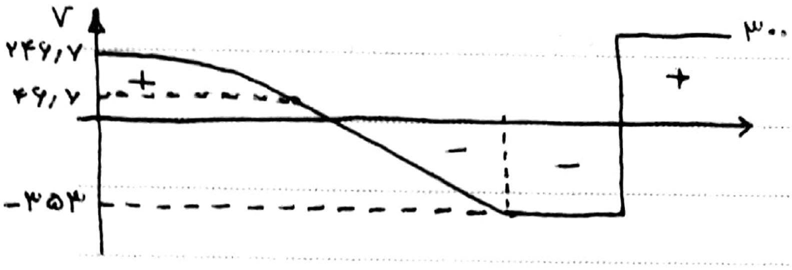




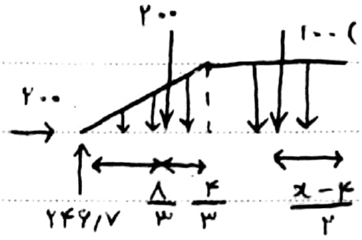


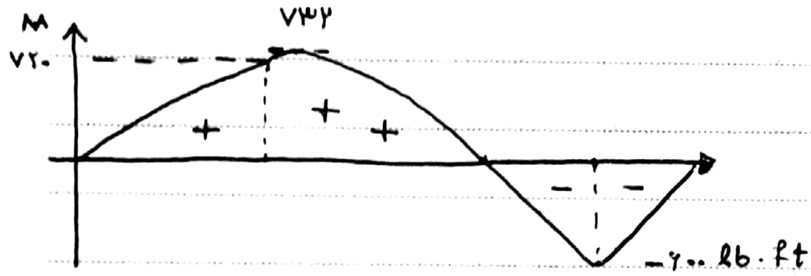
$0 < x < 4$: $V = 246.7 - 12.5x^2$

$N = -200$



$M = 246.7x - \frac{12.5}{3}x^3$



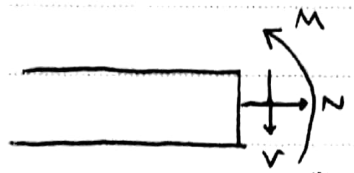


$4 \le x \le 8$

$V = 246.7 - 200 - 100(x-4)$

$N = -200$

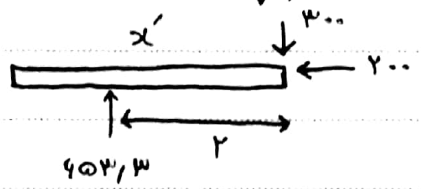
$M = 246.7x - 200\left(x - \frac{8}{3}\right) - 100\,\frac{(x-4)^2}{2}$



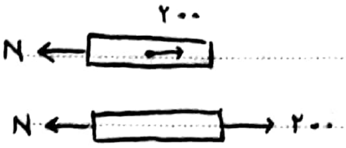
$2 < x' < 4$ $\quad N = -200$

$V = 300 - 653.3 = -353.3$

$M = -300x' + 653(x'-2)$

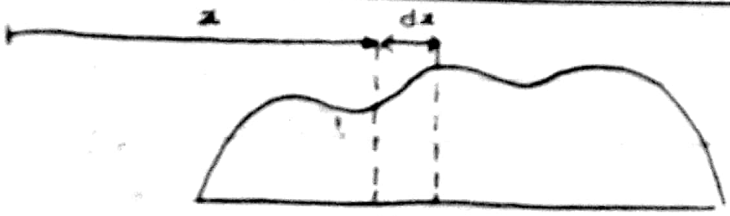


نمی‌شود به جای بارهای گسترده بار متمرکز معادل خود را قرار داد و دیاگرام ها را رسم نمود. نحوه‌ی اعمال نیروهای داخلی، درون تیر مانند بالا باید محاسبه شود.

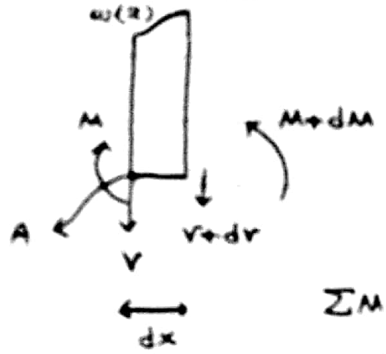


این دو از نظر تعادل یکسان اند امّا از لحاظ نیروهای محوری و خمشی و برشی متفاوت هستند.

P4PCO



$$V(x+dx) = V(x) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}\,dx}_{dV}$$



$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow V - w\,dx - (V+dV) = 0$$

$$\longrightarrow w = -\frac{dV}{dx}$$

$$\Sigma M = 0 \longrightarrow M + (w\,dx)\frac{dx}{2} + (V+dV)\,dx$$

$$-(M+dM) = 0$$

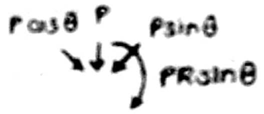
$$\longrightarrow V\,dx = dM \longrightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

$$w = \frac{-d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = -\frac{d^2M}{dx^2}$$

بار متمرکز باعث ایجاد شکستگی در نمودار V

و ممان متمرکز باعث ایجاد شکستگی در نمودار M می‌باشند.

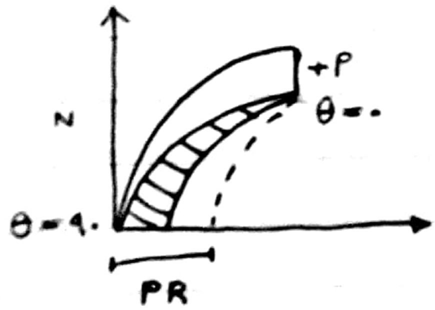
مثال :



$N = -P\sin\theta$

$V = P\cos\theta$

$M = -PR\sin\theta$



کابل ها

- مقدمه

- کابل ها: تحت بار متمرکز / تحت بار گسترده: گسترده در تصویر افقی / گسترده در واحد طول

- چند مثال

Subject
Date

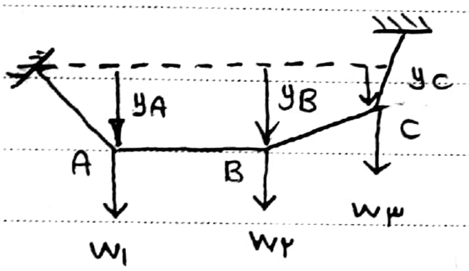
کابل : هر عضوی که فقط بتواند کشش را تحمل نماید، کابل نام دارد.

* فشار - خمش - پیچش را نمی‌تواند تحمل کند.

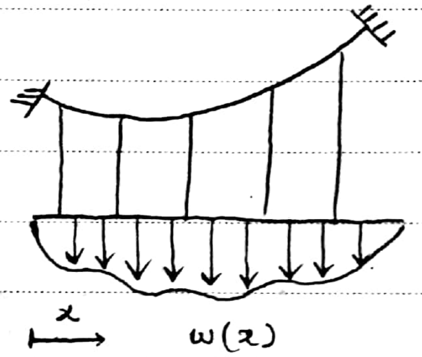
مثال : - انواع سیم بکسل ها - تسمه نقاله ها

- کاغذ در صنعت چاپ - پارچه در نساجی - تسمه در الکتروموتورها

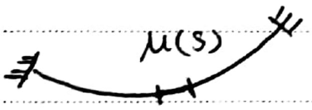
تحلیل کابل ها : ۱) شکل کابل ۲) تعیین نیرو در کابل



کابل تحت بار متمرکز



گسترده بر واحد طول تصویر افقی



تحت وزن
بار گسترده بر واحد طول

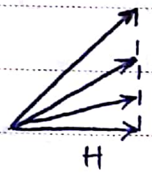
تحلیل کابل تحت بار متمرکز :

چون از وزن کابل صرف نظر می‌گردد هر بخش کابل عملا به صورت یک میله در حالت کشش در خواهد آمد و می‌توان به سادگی تحلیل را انجام داد. توجه داریم که در نقاط اعمال بار، کابل مشابه یک مفصل عمل می‌کند و در تحلیل آن این نکته استفاده خواهد شد.

* اگر کلیه بار های وارده در راستای قائم باشند از تعادل یک بخش کابل می‌توان نتیجه گرفت که مولفه افقی نیرو در کل طول کابل ثابت است. بنابراین هرجا شیب کابل بیشتر باشد مقدار کشش کابل بیشتر خواهد بود و عملا چون اغلب موارد بیشترین شیب در تکیه گاه است همواره کشش ماکزیمم در آن جا خواهد بود.

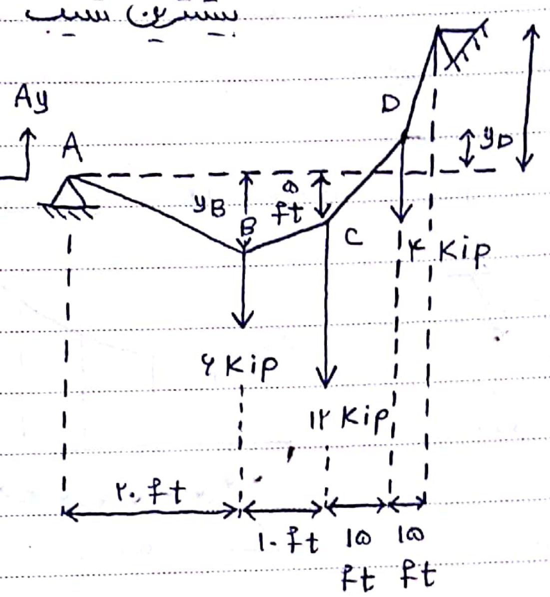
Subject
Date

$Kip = 10^{3}\ lbf$



بیشترین کشش کابل در : بیشترین شیب

مثال



این نیروی افقی : Ax در تصویر طول افقی کابل ثابت است.

۱) طول کابل y_B ، y_D

۲) نیرو در کابل

قطعه AB : $\sum \vec{M}_B = 0 \longrightarrow A_x(y_B) = A_y(20) \longrightarrow (1)$

تعادل کل حول نقطه E : $\sum \vec{M}_E = 0 \longrightarrow A_x(20) + A_y(60) - 6(40) - 12(30) - 4(15) = 0 \longrightarrow (2)$

قطعه ABC : $\sum \vec{M}_C = 0 \longrightarrow -A_x(5) + A_y(30) - 6(10) = 0 \longrightarrow (3)$

قطعه ABCD : $\sum \vec{M}_D = 0 \longrightarrow A_x(y_D) + A_y(45) - 6(25) - 12(15) = 0 \longrightarrow (4)$

$(3),(2) \longrightarrow \begin{cases} 20A_x + 60A_y = 660 \\ -5A_x + 30A_y = 60 \end{cases} \longrightarrow 45A_y = 225 \longrightarrow A_y = 5\ lb,\quad A_x = 18\ lb$

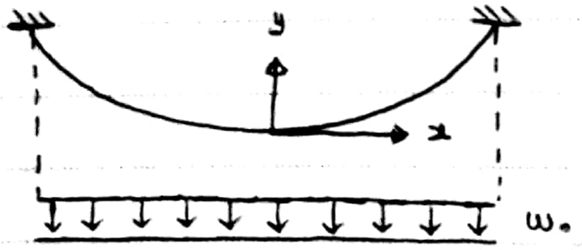
$(1) \longrightarrow 18y_B = 5 \times 20 \longrightarrow y_B = \frac{50}{9}\ ft = 5.56\ ft$

$(4) \longrightarrow 18(y_D) = 150 + 180 - 225 \longrightarrow y_D = \frac{105}{18}\ ft = 5.83\ ft$

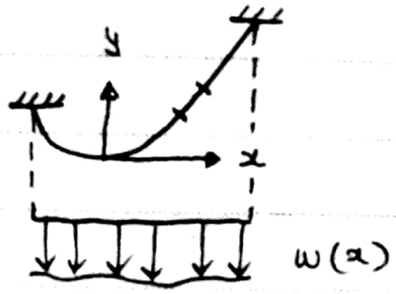
$\theta_{DE} = \tan^{-1}\left(\frac{20 - y_D}{15}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20 - 5.83}{15}\right) = 43.4^{\circ}$ بیشترین شیب در DE

$$T_{max} = \frac{A_x}{\cos \theta_{DE}} = \frac{18}{\cos 43.4} = 24.8\ Kips$$

کابل تحت بار گسترده در واحد طول افقی:



متقارن



نامتقارن

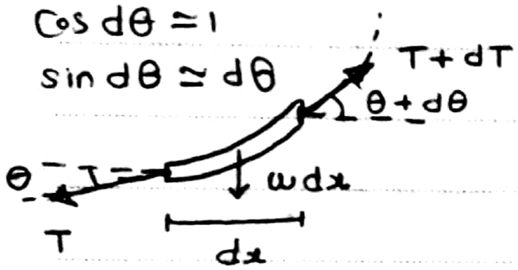
- مبدأ دستگاه مختصات را در محل حداکثر آویز (شیب صفر) قرار می دهیم.
- در ضمن، یافته های عملی بخش قبل همچنان معتبر هستند:

۱) مولفه افقی نیرو در کل کابل ثابت است.

۲) حداکثر کشش کابل در محل حداکثر شیب رخ می دهد.

$\cos d\theta \simeq 1$

$\sin d\theta \simeq d\theta$



$$T(x+dx) = T(x) + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x} dx}_{dT}$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \rightarrow T\cos\theta = (T+dT)\cos(\theta + d\theta)$$

$$\cos(\theta+d\theta) = \cos\theta \underbrace{\cos d\theta}_{1} - \sin\theta \underbrace{\sin d\theta}_{d\theta}$$

$$\rightarrow T\cos\theta = T\cos\theta + dT\cos\theta - T\sin\theta\, d\theta - \underbrace{dT\sin\theta\, d\theta}_{0} \rightarrow d(T\cos\theta) = 0$$

$$\rightarrow T\cos\theta = T_0 \rightarrow$$ T_0 یک عدد ثابت در طول کابل

$$\sum \vec{F}_y = 0 \rightarrow (T+dT)\sin(\theta+d\theta) - T\sin\theta - w\,dx = 0$$

$$\sin(\theta+d\theta) = \sin\theta \underbrace{\cos d\theta}_{1} + \cos\theta \underbrace{\sin d\theta}_{d\theta}$$

$$\rightarrow T\sin\theta + dT\sin\theta + T\cos\theta\, d\theta + \underbrace{dT\cos\theta\, d\theta}_{0} - T\sin\theta - w\,dx = 0$$

$$\rightarrow d(T\sin\theta) = w\,dx$$

$$d(T\cos\theta)=0 \longrightarrow T\cos\theta = T_0 \longrightarrow T=\frac{T_0}{\cos\theta}$$

$$d(T\sin\theta) = w\,dx$$

$$d\left(T_0\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = w\,dx \longrightarrow T_0\, d(\tan\theta) = w\,dx$$

برای حالت بار گسترده بر واحد طول افقی ثابت کابل شکل یک سهمی را خواهد داشت.

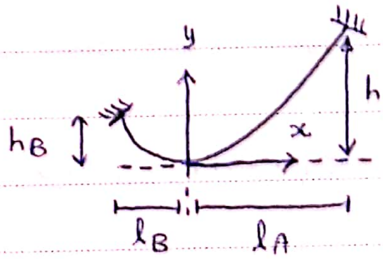
$$T_0 \frac{dy'}{dx} = w \longrightarrow y'' = \frac{w(x)}{T_0}$$

اگر $w(x)=w$ و ثابت باشد :

$$y''=\frac{w}{T_0}$$

$$y' = \frac{w}{T_0}x + c_1 \qquad x=0 \longrightarrow y'=0 \longrightarrow c_1=0 \qquad y=\frac{w}{2T_0}x^2 + c_2 \qquad x=0\ \ y=0 \longrightarrow c_2=0$$

$$y=\frac{w}{2T_0}x^2$$ کابل سهموی

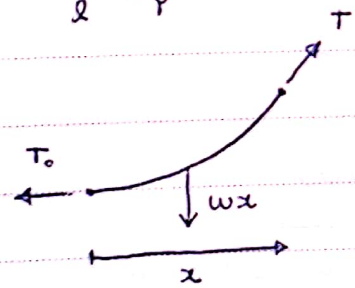


$$x=l_A \quad y=h_A$$

$$\longrightarrow h_A = \frac{w}{2T_0} l_A^2$$

$$\frac{h}{l} < \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow T_0 = \frac{w\, l_A^2}{2h_A}$$

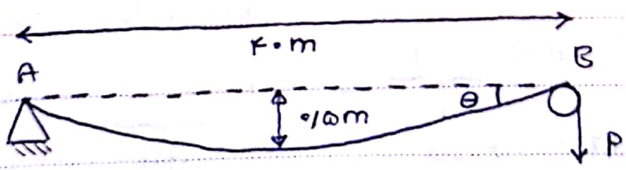


$$T=\sqrt{T_0^2 + w^2x^2} \qquad S=\int_0^{l_A}\sqrt{1+y'^2}\,dx + \int_0^{l_B}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$=\int_0^{l_A}\sqrt{1+\left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\,dx + \int_0^{l_B}\sqrt{1+\left(\frac{wx}{T_0}\right)^2}\,dx$$

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots \longrightarrow S_A = \int_0^{l_A}\left(1+\frac{w^2x^2}{2T_0^2} - \frac{w^4x^4}{8T_0^4}+\cdots\right)dx$$

مثال :

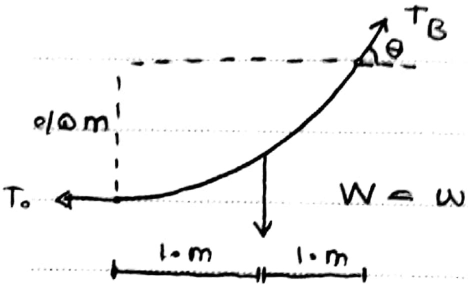


وزن کابل $= 750\ \frac{g}{m}$

$P=?\qquad \theta=?\qquad \widehat{AB}=?$

با تقریب فرض می‌کنیم بار گسترده بر واحد تصویر افقی برابر وزن باشد چون میزان آویختگی اندک است.

$$w=\frac{750}{1000}\times 9.81 = 7.36\ N/m \qquad P=T_B$$



$$\Sigma M_B = \circ \longrightarrow w(۱۰) = T_\circ\,(۰/۵)$$

$$\longrightarrow T_\circ = ۲۰\,W = ۲۹۴۴\ \text{N}$$

$$W = w(۲۰) = ۱۴۷/۲\ \text{N}$$

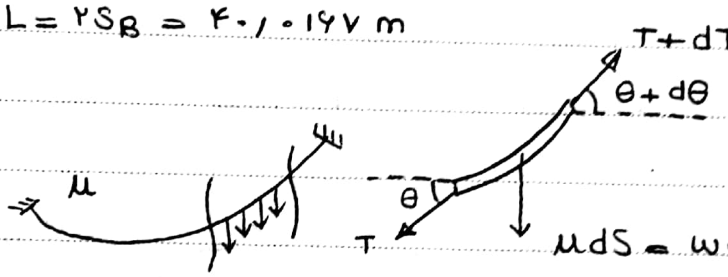
$$T = \sqrt{T_\circ^{۲} + w^{۲} x^{۲}}$$

$$= \sqrt{۲۹۴۴^{۲} + (۷/۳۶ \times ۲۰)^{۲}} = ۲۹۴۸\ \text{N}$$

$$\tan\theta = \frac{W}{T_\circ} = \frac{۱۴۷/۲}{۲۹۴۴} \longrightarrow \theta = ۲/۹^\circ$$

$$S_B = \int_\circ^{۲۰} \sqrt{1 + \left(\frac{۷/۳۶\,x}{۲۹۴۴}\right)^{۲}}\ dx = ۲۰\left[1 + \frac{۲}{۳}\left(\frac{۰/۵}{۲۰}\right)^{۲} + \dots\right] \simeq ۲۰/۰۰۸۳\ \text{m}$$

$$L = ۲S_B = ۴۰/۰۱۶۷\ \text{m}$$



$$\mu\, dS = w\, dx \rightarrow w = \mu \frac{ds}{dx}$$

$$y' = \frac{w}{T_\circ} = \frac{\mu}{T_\circ}\frac{ds}{dx} \qquad dS = \sqrt{1 + y'^{۲}}\ dx \longrightarrow y'' = \frac{\mu}{T_\circ}\sqrt{1 + y'^{۲}}$$

اگر μ ثابت باشد : $\quad y' = p \longrightarrow \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{\mu}{T_\circ}\sqrt{1+p^{۲}} \longrightarrow \displaystyle\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^{۲}}} = \int \frac{\mu}{T_\circ}\,dx$

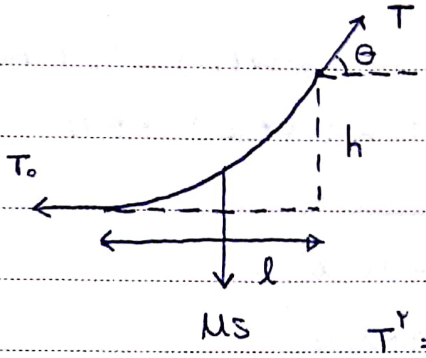
$$\longrightarrow \ln\left(p + \sqrt{1+p^{۲}}\right) = \frac{\mu}{T_\circ}x + C_1 \qquad x = \circ \longrightarrow p = y' = \circ \longrightarrow C_1 = \circ$$

$$\longrightarrow p + \sqrt{1+p^{۲}} = e^{\frac{\mu x}{T_\circ}} \longrightarrow 1 + p^{۲} = \left(e^{\frac{\mu x}{T_\circ}} - p\right)^{۲}$$

$$\longrightarrow 1 = e^{\frac{۲\mu x}{T_\circ}} - ۲p\, e^{\frac{\mu x}{T_\circ}} \longrightarrow e^{-\frac{\mu x}{T_\circ}} = e^{\frac{\mu x}{T_\circ}} - ۲p$$

$$\longrightarrow p = \sinh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right) = \frac{dy}{dx} \longrightarrow y = \frac{T_\circ}{\mu}\cosh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right) + C_۲$$

$$x = \circ \rightarrow y = \circ \longrightarrow C_۲ = -\frac{T_\circ}{\mu} \longrightarrow y = \frac{T_\circ}{\mu}\left(\cosh\left(\frac{\mu x}{T_\circ}\right) - 1\right)$$



$$y' = \tan\theta = \frac{\mu s}{T_0} = \sinh\frac{\mu x}{T_0}$$

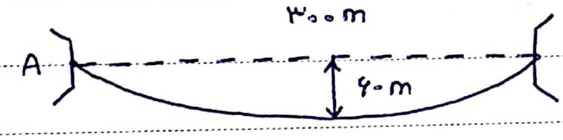
$$\rightarrow S = \frac{T_0}{\mu}\sinh\left(\frac{\mu l}{T_0}\right)$$

$$T^2 = T_0^2 + \mu^2 s^2 = T_0^2 + T_0^2\sinh^2\left(\frac{\mu x}{T_0}\right)$$

$$= T_0^2\left[1+\sinh^2\left(\frac{\mu x}{T_0}\right)\right] = T_0^2\cosh^2\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) \rightarrow T = T_0\cosh\frac{\mu x}{T_0} = \mu y + T_0$$

$$T = T_0 + \mu y$$

مثال : زنجیر $12\ \frac{kg}{m}$



T_0 : کشش در وسط کابل   کشش max   طول کابل

$\mu = 12\times 9.81 = 117.7\ \frac{N}{m}$ $x=150$, $y=60$ $60 = \frac{T_0}{117.7}\left[\cosh\left(\frac{117.7\times 150}{T_0}\right)-1\right]$

$$\frac{7060}{T_0} = \cosh\left(\frac{17660}{T_0}\right)-1 \rightarrow T_0 = 23200\ N$$

$$T = T_0 + \mu y = 23200 + 117.7(60) = 30200$$

$$\frac{\mu s}{T_0} = \sinh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right)$$

$$S_B = \frac{T_0}{\mu}\sinh\left(\frac{\mu l_B}{T_0}\right) = 165\ m \qquad L = 2S_B = 330\ m$$

$$\boxed{y'' = \frac{w}{T_0} \qquad y' = \sinh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right)}$$

فصل ۶ - اصطکاک

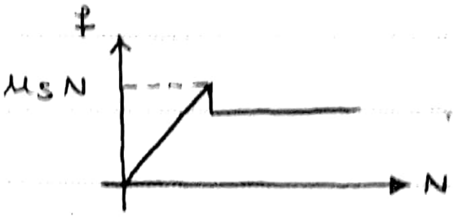
- مقدمه - دلیل ایجاد اصطکاک و انواع آن
- کاربرد های اصطکاک : گوه - پیچ و مهره - تسمه ها - یاتاقان های خشک - کلاچ و ترمز - اصطکاک غلتشی

* مقدار f از روی تعادل به دست می‌آید.

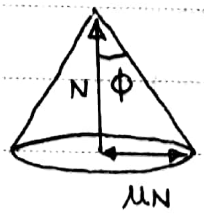
گام اول: فرض می‌کنیم که جسم ساکن می‌ماند. پس تعادل دارد. در نتیجه با استفاده از معادلات تعادل f محاسبه می‌شود.

if $f \le \mu_s N \longrightarrow$ ✓

if not: $f = \mu_k N$



* ضریب اصطکاک به جنس دو سطح، صافی و یا زبری سطح بستگی دارد.

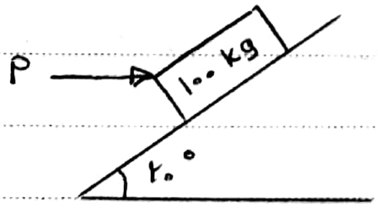


مخروط اصطکاک $\quad \tan\phi = \mu$

مثال: روی سطح شیب دار در چه زاویه‌ای جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد؟

$$mg\cos\theta = N$$

$$mg\sin\theta = f = \mu N \longrightarrow \frac{\mu N}{N} = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} \longrightarrow \mu = \tan\theta$$

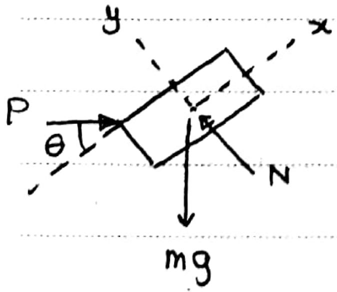


مثال: $\mu_k = 0/17 \quad \mu_s = 0/2$

الف) $P = 500\ kN$ ب) $P = 100\ kN$

در هر دو حالت نیروی اصطکاک را محاسبه کنید.

$\tan\phi = 0/2 \longrightarrow \phi = 11/5°$



$$\sum F_x = 0 \longrightarrow f - mg\sin\theta + P\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow N - mg\cos\theta - P\sin\theta = 0$$

الف) $f = 981\sin 20 - 500\cos 20 = -134/3\ N$

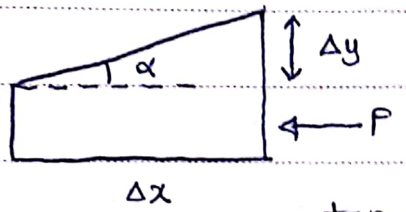
$N = 981\cos 20 + 500\sin 20 = 1093\ N \qquad f_{max} = \mu_s N = 0/2 \times 1093 = 219\ N$

ب) $f = 981 \sin 20 - 100 \cos 20 = 242\ N$

$N = 981 \cos 20 + 100 \sin 20 = 956\ N$

$f_{max} = \mu_s N = 0.2 \times 956 = 191.2\ N$ $\quad \times \longrightarrow f = \mu_K N$

$= 0.17 \times 956 = 162.5\ N$



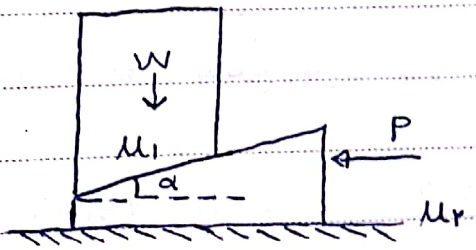
گوه: - تنظیمات دقیق به همراه کاهش نیروی مورد نیاز

$\tan\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \Delta y = \Delta x \cdot \tan\alpha$

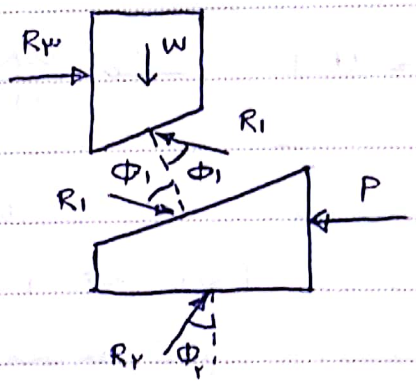
مثلا 0.01

$W_{in} = P\Delta x \qquad W_{out} = W \cdot \Delta y \qquad \eta \cong 100\% \longrightarrow P\Delta x = W\Delta y$

$\longrightarrow P = W \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = W \tan\alpha$



* نیروی مورد نیاز برای حرکت گوه را بیابید.



آستانه حرکت

$\tan\phi_1 = \mu_1$

$\tan\phi_2 = \mu_2$

$N = R_1 \cos\phi$

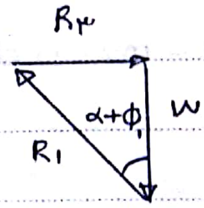
$f_1 = R_1 \sin\phi = R_1 \cos\phi \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$

$= N\mu$

P: نیروی مورد نیاز هنگام بالا بردن جسم

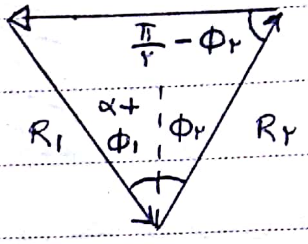
W, μ_1, μ_2, α معلوم $\longrightarrow P = ?$ مجهول

چند ضلعی نیروی قطعه



$\cos(\alpha + \phi_1) = \dfrac{W}{R_1} \longrightarrow R_1 = \dfrac{W}{\cos(\alpha+\phi_1)}$

چند ضلعی نیرویی گوه :



$$\frac{R_1}{\sin(\frac{\pi}{2}-\Phi_2)}=\frac{P}{\sin(\alpha+\Phi_1+\Phi_2)}$$

$$\rightarrow P=\frac{\sin(\alpha+\Phi_1+\Phi_2)}{\cos\Phi_2\cdot\cos(\alpha+\Phi_1)}W$$

در حالت خاص $\mu_2=0$:

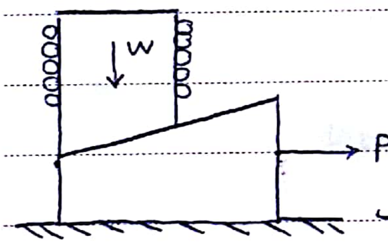
$\tan\Phi_2=\mu_2=0 \rightarrow \Phi_2=0$

$P=\tan(\alpha+\Phi)\,W$

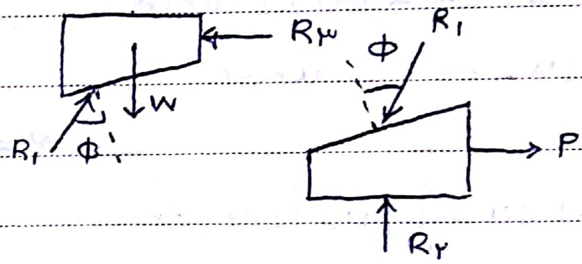
$\mu\cong 0.2 \rightarrow \Phi=11.3 \qquad \tan\alpha=0.05\rightarrow\alpha=2.86$:

$\rightarrow \tan(\alpha+\Phi)=0.25 \longrightarrow P=\frac{W}{4}$

* مطلوب است محاسبه نیرو هنگام پایین آوردن جسم



بدون اصطکاک



با نوشتن تعادل ترسیمی نیروها : $P=\tan(\Phi-\alpha)\,W$

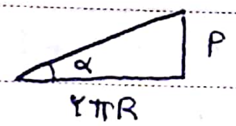
حالت (۱) : $\Phi-\alpha>0$ ← $P>0$: برای بیرون کشیدن گوه بایست نیرو اعمال نمود. $\alpha<\Phi$: گوه حالت خود قفل دارد.

حالت (۲) : $\Phi-\alpha=0$ ← $P=0$: گوه خود در حال بیرون افتادن است، بدون نیاز به نیرو

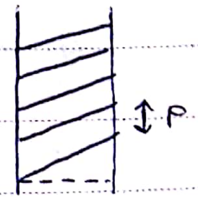
حالت (۳) : $\Phi-\alpha<0$ ← $P<0$: یعنی گوه درحال پرت شدن به بیرون است و نیاز به نیرویی به سمت راست هست تا آن را درحال تعادل نگه داریم.

$P_L=W\tan(\Phi+\alpha) \qquad P_D=W\tan(\Phi-\alpha)$

$M=PR$
- بالا بردن: $M=P_L\cdot R=\underset{\downarrow}{P}R\tan(\alpha+\Phi)$ ($P\rightarrow W$) گشتاور بستن پیچ
- پایین آوردن: $M=P_D\cdot R=-WR\tan(\alpha-\Phi)$ گشتاور باز کردن پیچ



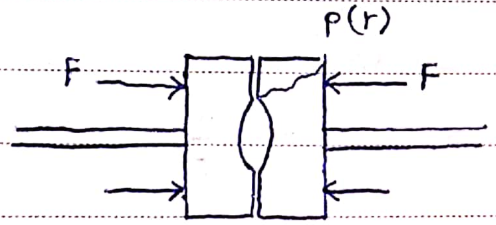
$$\tan\alpha = \frac{P}{2\pi R}$$

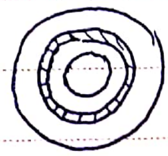


M منفی مانند حالتی است که پیچ را وقتی می بندیم ، با ول کردن آن پیچ باز می شود. درصورتی رخ می دهد که α زیاد باشد.

α کوچک ← پیچ دنده ریز

کلاچ اصطکاکی :





شعاع دایره کوچک R_i

شعاع دایره بزرگ R_o

$dN = P\,dA = p(r)\,(2\pi r\,dr)$ در آستانه لغزش : $df = \mu\,dN$

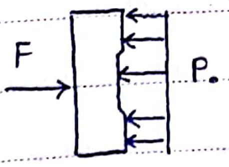
$$dM = r\,df = \mu r\,dN$$

$$F = \int dN = \int_{R_i}^{R_o} p(r)\,(2\pi r)\,dr \longrightarrow M = \int_{R_i}^{R_o} dM = \int_{R_i}^{R_o} \mu\, p(r)\,(2\pi r^2)\,dr$$

هدف : محاسبه حداکثر گشتاور قابل انتقال $F \longrightarrow p(r) \longrightarrow M$

نحوه توزیع فشار روی سطح : ① فرض توزیع یکنواخت فشار $p(r) = P_0$

مناسب برای دیسک های نو



$$F = \int_{R_i}^{R_o} P_0\, 2\pi r\,dr = \pi P_0 (R_o^2 - R_i^2) \longrightarrow P_0 = \frac{F}{\pi(R_o^2 - R_i^2)}$$

حداکثر گشتاور اصطکاکی قابل انتقال

$$M = \int_{R_i}^{R_o} \mu P_0\, 2\pi r^2\,dr = \frac{2}{3}\pi\mu P_0 (R_o^3 - R_i^3)$$

$$= \frac{2}{3}\mu F \frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} = \mu F R_{avg}$$

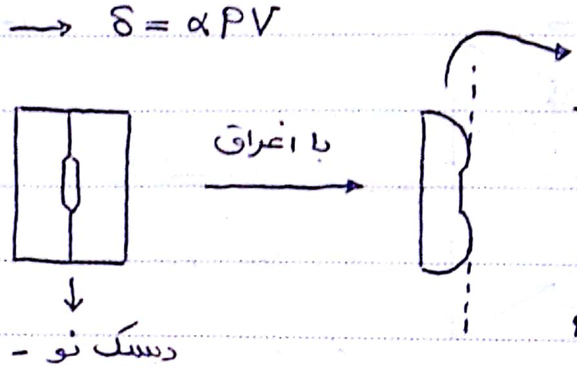
$$\longrightarrow R_{avg} = \frac{2}{3}\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2}$$

در حالت خاص : $R_i = 0$, $R_o = R$ $\qquad P_0 = \dfrac{F}{\pi R^2} \qquad M = \dfrac{2}{3}\mu F R$

$\longrightarrow R_{avg} = \dfrac{2}{3} R$

نرخ سایش : $\delta \propto PV \longrightarrow \delta = \alpha PV$

بررسی صحت فرض فشار ثابت :



دیسک نو - سطوح کاملا تحت

تماس ندارد و سائیده نمی‌شود.

در عمل باید سایش یکنواخت باشد پس حاصل ضرب PV باید برای همه جا یکسان باشد و چون $V = R\omega \longrightarrow P = \dfrac{K}{r}$ متناسب با $\dfrac{1}{r}$

② فرض سایش یکنواخت

$$F = \int_{R_i}^{R_o} \frac{K}{r}(2\pi r\,dr) = \int_{R_i}^{R_o} 2\pi K\,dr$$

$$= 2\pi K(R_o - R_i) \longrightarrow K = \frac{F}{2\pi(R_o - R_i)} \longrightarrow P = \frac{F}{2\pi(R_o - R_i)}\frac{1}{r}$$

$$M = \int_{R_i}^{R_o} \mu \frac{K}{r} 2\pi r^2 dr = \mu K \pi (R_o^2 - R_i^2) = \frac{1}{2}\mu F \frac{R_o^2 - R_i^2}{R_o - R_i} = \frac{1}{2}\mu F (R_o + R_i)$$

$$= \mu F R_{avg} \qquad R_{avg} = \frac{1}{2}(R_o + R_i) \qquad \text{if}: R_i = 0 \longrightarrow R_{avg} = \frac{1}{2}R_o$$

درصد کاهش گشتاور در حالت دیسک توپر $= \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{4} = 25\%$

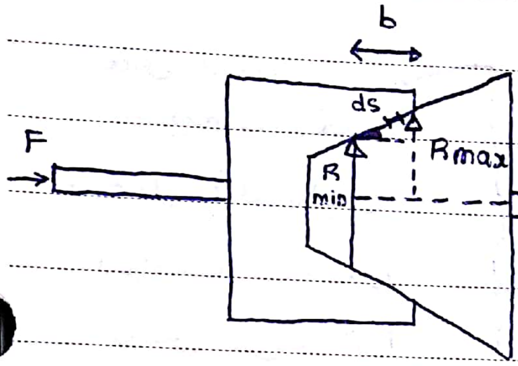
$R_i = KR_o$: $\quad M_{\text{فشار ثابت}} = \dfrac{2}{3}\mu F \dfrac{R_o^3 - (KR_o)^3}{R_o^2 - (KR_o)^2} = \dfrac{2}{3}\mu F R_o \dfrac{1-K^3}{1-K^2}$

$M_{\text{سایش ثابت}} = \dfrac{1}{2}\mu F R_o (1+K)$

Date

$$\frac{1-K^3}{1-K^2} = \frac{(1-K)(1+K+K^2)}{(1-K)(1+K)} = \frac{1+K+K^2}{1+K}$$

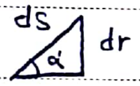
K	$\frac{2}{3}\frac{1-K^3}{1-K^2}$	$\frac{1}{2}(1+K)$
۰/۵	۰/۷۸	۰/۷۵
۰/۷	۰/۸۵	۰/۸۵
۰/۳	۰/۷۱	۰/۶۵



کلاچ با سطح مخروطی:

زاویه مشخص شده: α

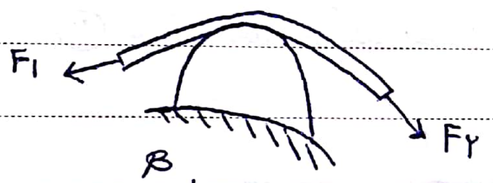
$$\mu_{\text{موثر}} = \frac{\mu}{\sin\alpha}$$

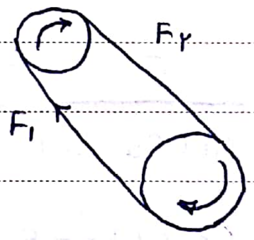


$$dA = 2\pi r\, ds = 2\pi r \frac{dr}{\sin\alpha}$$

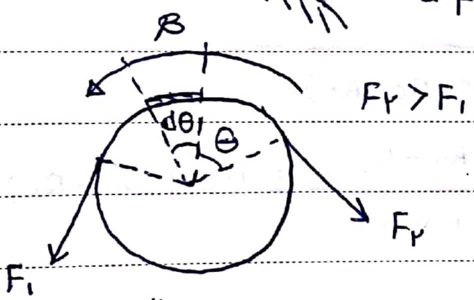
$$\longrightarrow A = \int_{R_{min}}^{R_{max}} \frac{1}{\sin\alpha} 2\pi r\, dr$$

اصطکاک در تسمه ها:

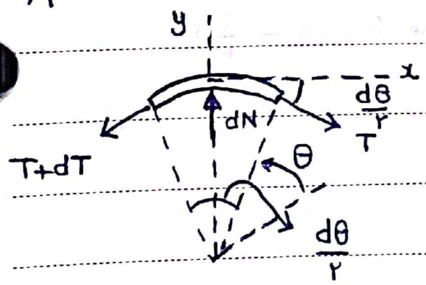




F_2, F_1 ای که تسمه روی قرقره نلغزه.



$F_2 > F_1$



$$\sum F_x = 0 \longrightarrow T\cos\frac{d\theta}{2} + df = (T+dT)\cos\frac{d\theta}{2}$$

$$df = \mu\, dN$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow dN - T\sin\frac{d\theta}{2} - (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} = 0$$

$$T + df = T + dT \longrightarrow dT = df \qquad dN = T\frac{d\theta}{2} + (T+dT)\frac{d\theta}{2} \simeq T\,d\theta$$

$$df = dT = \mu\, dN = \mu T\, d\theta$$

$$\longrightarrow \frac{dT}{T} = \mu\, d\theta \longrightarrow \int_0^\beta \frac{dT}{T} = \int_0^\beta \mu\, d\theta \longrightarrow \ln T \Big|_{F_1}^{F_2} = \mu\beta$$

$$\longrightarrow \ln\frac{F_2}{F_1} = \mu\beta \longrightarrow \frac{F_2}{F_1} = e^{\mu\beta}$$ شرط لغزش

نکات : ۱) β بر حسب رادیان است.

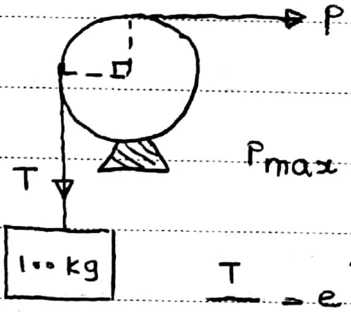
۲) β زاویه تماس است و اگر مثلا طنابی چند دور حول یک درام بچرخد زاویه تماس چند برابر 2π است.

۳) شعاع و شکل درام مهم نیست.

۴) مقادیر حاصل از $e^{\mu\beta}$ می‌تواند خیلی خیلی زیاد باشد !!

$\mu = 0.3$			
β :	π	2π	10π
$e^{0.3\beta}$:	2.56	6.59	$\simeq 12000$

مثال: مقادیر حداکثر و حداقل نیروی P برای تعادل را بیابید.

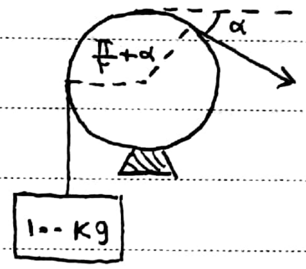


$$T = 100\,(9.81) = 981\ N$$

$$P_{max} \div T = e^{0.3\left(\frac{\pi}{2}\right)} \longrightarrow P_{max} = 981\, e^{0.3\frac{\pi}{2}} = 981\,(1.602) = 1572\ N$$

$$\frac{T}{P_{min}} = e^{0.3\frac{\pi}{2}} \longrightarrow P_{min} = \frac{981}{1.602} = 612\ N$$

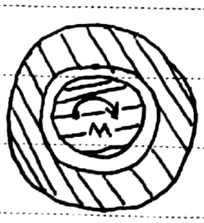
مثال: α_{min} را بیابید.



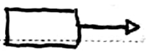
$$\frac{981}{500} = e^{0.3\beta} \longrightarrow 0.3\beta = \ln\frac{981}{500} = 0.674$$

$$\longrightarrow \beta = 2.25\ rad$$

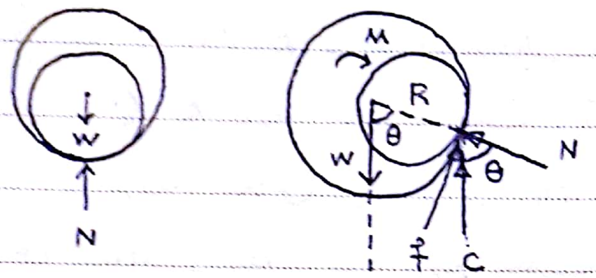
$$\beta = 2.25\,\frac{180}{\pi} = 128.7^\circ = 90 + \alpha \longrightarrow \alpha = 38.7^\circ$$



گشتاور مورد نیاز برای شروع دوران (گشتاور مورد نیاز برای غلبه بر اصطکاک تکیه‌گاهی) را بیابید.

 μN $\qquad P_{lost} = FV = \mu N V$

PAPCO



$$\theta = \phi = \tan^{-1} \mu$$

$$M_{start} = Wd = W \cdot R \sin\phi$$

$$\vec{C} = \vec{f} + \vec{N} \qquad |\vec{C}| = |\vec{W}|$$

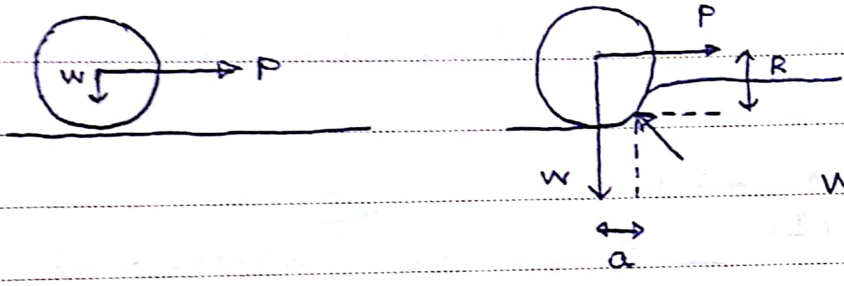
$$\xrightarrow[\tan\phi \simeq \sin\phi]{\phi \ll 1} M_{start} \simeq WR\tan\phi$$

$$\longrightarrow M_{start} = \mu WR$$

روغن داخل gap مانند ← یاتاقان هیدرو دینامیکی

یک گوه عمل می کند.

اصطکاک غلتشی:



$$Wa = PR \longrightarrow P = \frac{a}{R} W = \mu V$$

فصل ۷ - کار مجازی

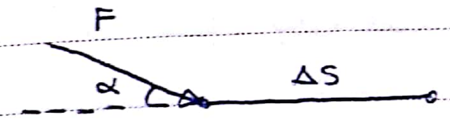
virtual work

- مقدمه - کار یک نیرو - جابه جایی مجازی
- اصل کار مجازی برای ذره و جسم صلب
- انرژی پتانسیل - اصل کار مجازی برای سیستم های کشسان
- تعادل (پایدار، ناپایدار، خنثی)

روش کار مجازی یک روش ساده برای محاسبات تعادل است.

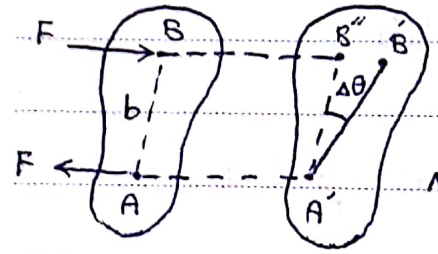
برای سیستم هایی که دارای تعدادی زیاد عضو و دارای امکان حرکت هستند

این روش محاسبات را ساده می کند.



$$W = (F\cos\alpha)\,\Delta S = F(\Delta S \cos\alpha)$$
$$= \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

کار یک نیرو



$$W = F(b\Delta\theta) = Fb\,\Delta\theta = M\,\Delta\theta$$

کار گشتاور

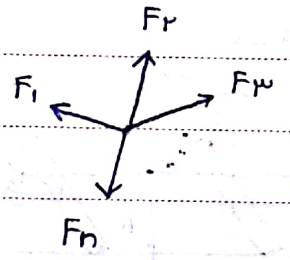
$$M = Fb$$

از AB تا $A'B''$ چون دوران نداریم کار گشتاور صفر است.

جابه‌جایی مجازی برای یک ذره:

- جابه‌جایی کوچک و فرضی ولی دلخواه
- فرض می‌کنیم حین جابه‌جایی مجازی همه‌ی نیروها ثابت باشند.
- سازگار با شرایط تکیه‌گاهی

$\vec{dr}$ جابه‌جایی $\vec{\delta r}$ جابه‌جایی مجازی



$$\sum F = \vec{F_1} + \dots + \vec{F_n} = 0$$

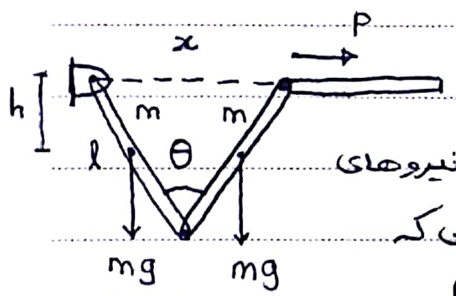
$$\delta W = \vec{F_1}\cdot\vec{\delta r} + \dots + \vec{F_n}\cdot\vec{\delta r} = (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots + \vec{F_n})\cdot\vec{\delta r}$$

کار مجازی روی ذره = مجموع کار مجازی کلیه نیروها

* اصل کار مجازی روی یک ذره:
اگر کار مجازی روی یک ذره برای هر جابه‌جایی مجازی دلخواه برابر صفر باشد آن‌گاه جسم در حال تعادل است.

* اصل کار مجازی برای جسم صلب: اگر کار مجازی روی یک جسم صلب برای هر جابه‌جایی مجازی دلخواه برابر صفر باشد آن‌گاه جسم در حال تعادل است.

مثال: زاویه تعادلی θ را بیابید.



دیاگرام آزاد نیروهای فعال (نیروهایی که کار انجام نمی‌دهند غیرفعال نامیده می‌شوند)

$$x = 2l\sin\frac{\theta}{2} \longrightarrow \delta x = 2l\left(\frac{\delta\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2} = l\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

$$h = \frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2} \longrightarrow \delta h = \frac{l}{2}\left(\frac{\delta\theta}{2}\right)\left(-\sin\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{1}{4}\,l\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

این جا فقط یک درجه آزادی θ داریم:

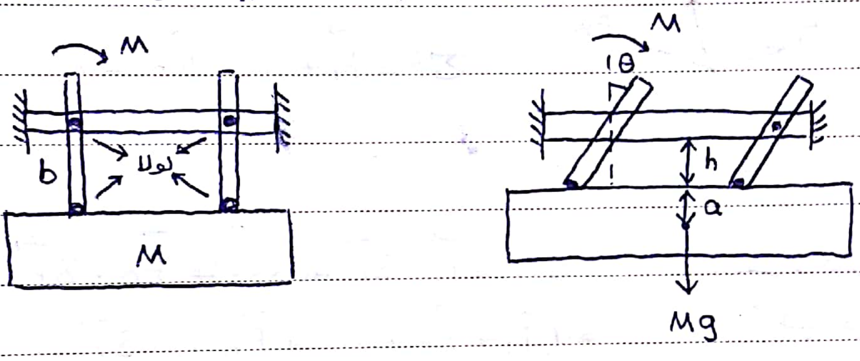
$$\delta W = P\,\delta x + 2mg\,\delta h = 0$$

$$\longrightarrow P\,l\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta - \frac{1}{2}\,l\sin\frac{\theta}{2}\,mg\,\delta\theta = 0$$

$$\longrightarrow P\cos\frac{\theta}{2} - \frac{mg}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0 \longrightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{2P}{mg}$$

$P \to \infty : \theta \to \pi$ $\qquad$ $P \to 0 : \theta \to 0$

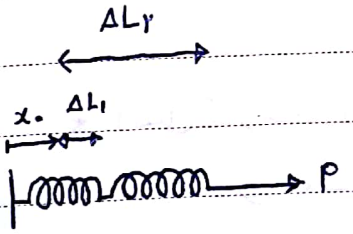
مثال ۲:



$$\delta W = M\,\delta\theta + mg\,\delta h = 0 \longrightarrow (M - mgb\sin\theta)\,\delta\theta = 0$$

$h = a + b\cos\theta$ $\qquad$ $\delta h = -b\sin\theta\,\delta\theta$ $\qquad$ $\longrightarrow M = mgb\sin\theta$

گشتاور وارد شده

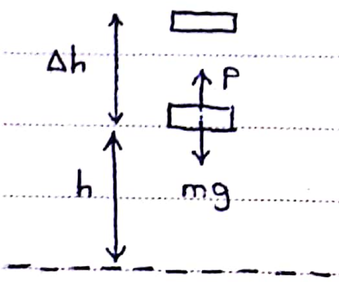


* اصل کار مجازی برای سیستم های کشسان:

$F = Kx$ $\qquad$ $\Delta V_e = \int P\,dx = \int Kx\,dx = \frac{1}{2}K(\Delta L_2^2 - \Delta L_1^2)$

$V_e = \frac{1}{2}K\Delta L^2$ $\qquad$ $\Delta W_e = -\Delta V_e$

$V_e = \frac{1}{2}Kx^2$ $\qquad$ x : تغییر طول فنر



$$\Delta W_g^{\text{من}} = P\Delta h = mg\Delta h$$

$$V_g = mg\Delta h$$

$$\Delta W_g = -\Delta V_g$$

$$\delta W = 0 \qquad \delta W_{ext} + \underbrace{\delta W_e}_{-\delta V_e} + \underbrace{\delta W_g}_{-\delta V_g} = 0 \longrightarrow \delta W_{ext} - \delta(V_e + V_g) = 0$$

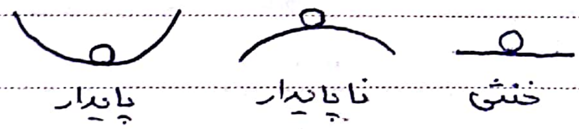
انرژی پتانسیل کل سیستم : $V = V_e + V_g \longrightarrow \delta W_{ext} = \delta V$: اصل کار مجازی برای سیستم های کشسان

- اگر غیر از نیروی وزن و فنرها، نیروی دیگری به سیستم وارد نشود آن گاه خواهیم داشت: $\delta V = 0$

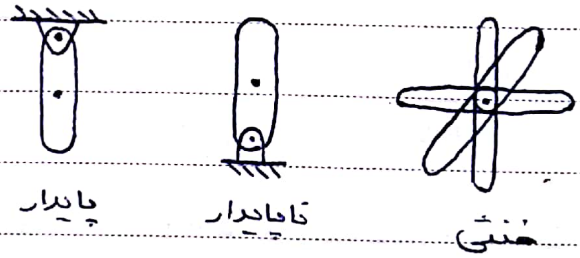
تعادل زمانی وجود دارد که انرژی پتانسیل حالت اکستریم خود را داشته باشد.

یک سیستم وقتی تعادل خود به خودی و طبیعی خود را پیدا می کند انرژی پتانسیل آن اکستریم است.

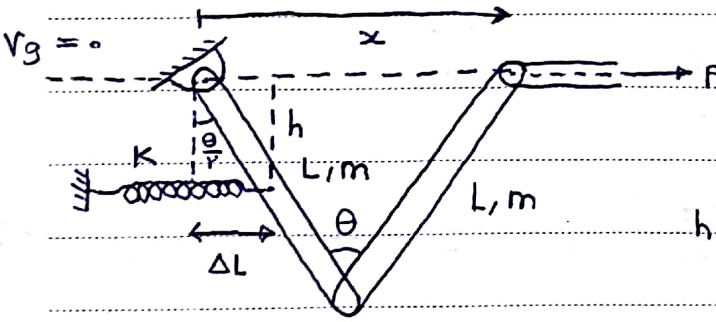
تعادل: - پایدار stable - ناپایدار unstable - خنثی neutral



پایدار	ناپایدار	خنثی
$\frac{dV}{dx} = 0$	$\frac{dV}{dx} = 0$	$\frac{dV}{dx} = 0$
$\frac{d^2V}{dx^2} > 0$	$\frac{d^2V}{dx^2} < 0$	$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$



مثال:



$$\delta W_{ext} = \delta V$$

$$x = 2L\sin\frac{\theta}{2}$$

$$h = \frac{L}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \Delta L = \frac{L}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\delta W_{ext} = P\delta x = P\delta\left(2L\sin\frac{\theta}{2}\right) = PL\cos\frac{\theta}{2} \cdot \delta\theta$$

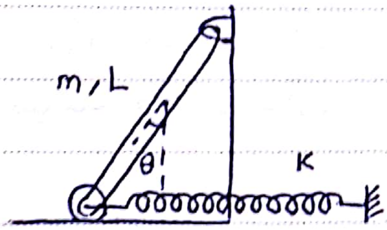
$$V = \frac{1}{2} K \Delta L^2 + mg(-h) = \frac{1}{2} K \left(\frac{L}{2} \sin\frac{\theta}{2} \right)^2 - mg \frac{L}{2} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\longrightarrow \delta V = \frac{1}{8} K L^2 \left(\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \right) \delta\theta + mg \frac{L}{4} \sin\frac{\theta}{2}\, \delta\theta$$

$$\delta W_{ext} = \delta V \longrightarrow PL \cos\frac{\theta}{2}\, \delta\theta = \left(\frac{1}{8} K L^2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} + \frac{mgL}{4} \sin\frac{\theta}{2} \right) \delta\theta$$

$$\longrightarrow PL = \frac{1}{8} K L^2 \sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} mgL \tan\frac{\theta}{2}$$

مثال:



$\delta V = 0$

$$V = mg\left(\frac{L}{2} \cos\theta\right) + \frac{1}{2} K (L \sin\theta)^2$$

$V_g = 0$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \longrightarrow -\frac{1}{2} mgL \sin\theta + \frac{1}{2} K L^2 (\sin 2\theta) = 0$$

$$\longrightarrow \sin\theta \left[\frac{-mgL}{2} + KL^2 \cos\theta \right] = 0 \qquad \sin\theta = 0 \longrightarrow \theta = 0$$

$$-\frac{1}{2} mgL + KL^2 \cos\theta = 0 \longrightarrow \cos\theta = \frac{mg}{2KL}$$

- همواره $\theta = 0$ یک وضعیت تعادلی است.

- اگر $\frac{mg}{2KL} < 1$ باشد نیز یک زاویه تعادل دیگر داریم $\quad \theta^* = \cos^{-1} \frac{mg}{2KL}$

$\left(K > \frac{mg}{2L}\right)$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -\frac{1}{2} mgL \cos\theta + KL^2 \cos 2\theta \Big|_{\theta=0} = -\frac{1}{2} mgL + KL^2 \longrightarrow K > \frac{mg}{2L}$$: تعادل پایدار

$K < \frac{mg}{2L}$: تعادل ناپایدار $\qquad K = \frac{mg}{2L}$: تعادل خنثی

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}\Big|_{\theta=\theta^*} = -\frac{1}{2} mgL \frac{mg}{2KL} + KL^2 \left(2\left(\frac{mg}{2KL}\right)^2 - 1 \right) = -\frac{1}{4} \frac{(mg)^2}{K} + \frac{1}{2} \frac{(mg)^2}{K} - KL^2$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(mg)^2}{K} - KL^2 < 0 \longrightarrow$$ تعادل ناپایدار