

تام م. آپوستل



حساب دیفرانسیل و انتگرال

جلد دوم

ترجمہ

علیرضا ذکائی

مہدی رضائی دلفی

علی اکبر عالم زادہ

فرخ فیروزان

فضاهای خطی

۱.۱ مقدمه

در ریاضیات به نمونه‌های زیادی از اشیاء ریاضی برمی‌خوریم که می‌توانند با هم جمع و یا در اعداد حقیقی ضرب شوند. قبل از همه، اعداد حقیقی خود از این اشیاء‌اند. سایر مثالها عبارتند از توابع حقیقی، اعداد مختلط، سربهای نامتناهی، بردارها در فضای n ، و توابع برداری. در این فصل یکی از مفاهیم کلی ریاضی، به نام فضای خطی، را مطرح می‌کنیم که همه این مثالها و بسیاری دیگر را به عنوان حالاتی خاص دربردارد. بطور خلاصه، یک فضای خطی مجموعه‌ای است از عناصر از هر نوع که می‌توان بر آنها اعمالی (به نام جمع و ضرب در اعداد) را انجام داد. در تعریف فضای خطی نه سرشت عنصرها را مشخص می‌کنیم و نه می‌گوییم اعمال چطور صورت می‌گیرند. در عوض، قید می‌کنیم که اعمال خواص معینی دارند و آنها را اصول موضوع فضای خطی می‌انگاریم. حال به شرح مبسوط این اصول می‌پردازیم.

۲.۱ تعریف فضای خطی

فرض کنیم V مجموعه‌ای ناتهی از اشیاء، که عنصر خوانده می‌شوند، باشد. V را در صورتی یک فضای خطی نامیم که در ده اصل موضوع زیر که به سه گروه تقسیم شده‌اند صدق کند:

اصول موضوع بسته بودن

اصل موضوع ۱. بسته بودن تحت جمع. به هر جفت عنصر x و y در V عنصر منحصر بفردی در V مربوط است به نام مجموع x و y که با $x + y$ نموده می‌شود.

اصل موضوع ۲. بسته بودن تحت ضرب در اعداد حقیقی. به هر x در V و هر عدد حقیقی a عنصری در V مربوط است به نام حاصل ضرب a و x که با ax نشان داده می شود.

اصول موضوع جمع

اصل موضوع ۳. قانون تعویض پذیری. به ازای هر x و y در V داریم $x + y = y + x$.

اصل موضوع ۴. قانون شرکت پذیری. به ازای هر x ، y ، و z در V داریم

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

اصل موضوع ۵. وجود عنصر صفر. عنصری در V ، که با 0 نموده می شود، هست بطوری که

$$x + 0 = x \text{، به ازای هر } x \text{ در } V$$

اصل موضوع ۶. وجود قرینه. به ازای هر x در V عنصر $(-1)x$ این خاصیت را دارد که

$$x + (-1)x = 0.$$

اصول موضوع ضرب در اعداد

اصل موضوع ۷. قانون شرکت پذیری. به ازای هر x در V و هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$a(bx) = (ab)x.$$

اصل موضوع ۸. قانون پخش پذیری برای جمع در V . به ازای هر x و y در V و هر a حقیقی داریم

$$a(x + y) = ax + ay.$$

اصل موضوع ۹. قانون پخش پذیری برای جمع اعداد. به ازای هر x در V و هر a و b حقیقی داریم

$$(a + b)x = ax + bx.$$

اصل موضوع ۱۰. وجود همانی. به ازای هر x در V داریم $1x = x$.

گاهی فضاهاى خطی را، که در فوق تعریف شد، فضاهاى خطی حقیقی می نامند تا بر ضرب عناصر V در اعداد حقیقی تأکید شده باشد. اگر در اصول موضوع ۲، ۷، ۸، و

۹ عدد حقیقی را با عدد مختلط عوض کنیم، نهاد حاصل فضای خطی مختلط نام خواهد داشت. گاهی فضای خطی را فضای برداری خطی و یا فقط فضای برداری می نامند؛ اعدادی که به عنوان ضرب به کار رفته اسکالر نیز خوانده می شوند. اسکالرهایی یک فضای خطی حقیقی اعداد حقیقی و اسکالرهایی یک فضای خطی مختلط اعداد مختلط هستند. ما عمدتاً " با فضاهای خطی حقیقی سر و کار داریم، اما تمام قضایا برای فضاهای خطی مختلط نیز اعتبار دارند. هرگاه اصطلاح فضای خطی را بی توضیح به کار بردیم، فرض آن است که فضا می تواند حقیقی یا مختلط باشد.

۳.۱ چند مثال از فضاهای خطی

اگر مجموعه V را مشخص کنیم و بگوییم چطور عنصرهایش با هم جمع و در اعداد ضرب می شوند، به نمونه ملموسی از فضاهای خطی دست خواهیم یافت. به آسانی می توان تحقیق کرد که هر یک از مثالهای زیر در تمام اصول موضوع فضای خطی حقیقی صدق می کند.

مثال ۱. فرض کنیم $V = \mathbb{R}$ ، یعنی مجموعه تمام اعداد حقیقی، و $y + x$ و ax جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی باشند.

مثال ۲. فرض کنیم $V = \mathbb{C}$ ، یعنی مجموعه تمام اعداد مختلط، و $y + x$ را جمع معمولی اعداد مختلط و ax را ضرب عدد مختلط x در عدد حقیقی a تعریف می کنیم. با اینکه عنصرهای V مختلط اند، این یک فضای خطی حقیقی است، چونکه اسکالرهایی حقیقی هستند.

مثال ۳. فرض کنیم $V = V_n$ ، یعنی فضای برداری تمام n تاییهای اعداد حقیقی باشد، که در آن جمع و ضرب در اسکالرها طبق معمول برحسب مؤلفهها تعریف شده اند.

مثال ۴. فرض کنیم V مجموعه تمام بردارهایی در V_n باشد که بر بردار معلوم و ناصفر N عمودند. اگر $n = 2$ ، این فضا خط مستقیمی است ماربر O که N پک بردار قائم آن است. اگر $n = 3$ ، این فضا صفحه ای است ماربر O که N یک بردار قائم آن می باشد.

مثالهای زیر فضاهای تابعی نام دارند. عنصرهای V توابعی حقیقی اند، و در آن

جمع دو تابع f و g طبق معمول تعریف می‌شود: به ازای هر x حقیقی در اشتراک قلمروهای f و g ،

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

ضرب تابع f در اسکالر حقیقی a این‌طور تعریف خواهد شد: af تابعی است که مقدارش در هر x از قلمرو f مساوی $af(x)$ است. عنصر صفر تابعی است که مقادیرش همه جا صفرند. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که هریک از مجموعه‌های زیر یک فضای تابعی است.

مثال ۵. مجموعه‌ای تمام توابعی که بر یک بازه معلوم تعریف شده‌اند.

مثال ۶. مجموعه‌ای تمام چند جمله‌ایها.

مثال ۷. مجموعه‌ای تمام چند جمله‌ایها از درجه نایبتر از n که n ثابت است. (هرگاه این مجموعه‌ای را در نظر گرفتیم، فرض است که چند جمله‌ای صفر نیز در آن قرار دارد.) مجموعه‌ای تمام چند جمله‌ایها از درجه n یک فضای خطی نیست، چونکه اصول موضوع بسته بودن برقرار نیستند. مثلاً، مجموع دو چند جمله‌ای از درجه n لزوماً از درجه n نیست.

مثال ۸. مجموعه‌ای تمام توابع پیوسته بر یک بازه معلوم. اگر بازه $[a, b]$ باشد، این فضا را به $C(a, b)$ نشان خواهیم داد.

مثال ۹. مجموعه‌ای تمام توابعی که در یک نقطه معلوم مشتق‌پذیرند.

مثال ۱۰. مجموعه‌ای تمام توابعی که بر یک بازه معلوم انتگرال‌پذیرند.

مثال ۱۱. مجموعه‌ای تمام توابع f که $f(1) = 0$. در این مثال عدد ۰ مهم است. اگر ۰ را با عدد ناصفر c عوض کنیم، اصول موضوع بسته بودن نقض خواهند شد.

مثال ۱۲. مجموعه‌ای تمام جوابهای معادله دیفرانسیل خطی و همگن $y'' + ay' + by = 0$ ،

که در آن a و b ثابتهای معلومی هستند. در اینجا نیز 0 اهمیت دارد. مجموعه جوابهای یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن در اصول موضوع بسته بودن صدق نمی‌کند.

این امثله و بسیاری دیگر نشان می‌دهند که مفهوم فضای خطی چگونه در جبر، هندسه، و آنالیز نفوذ دارد. وقتی از اصول موضوع فضای خطی قضیه‌ای نتیجه‌شود، یکباره مطلبی حاصل می‌شود که برای هر نمونه ملموس معتبر است. با یکی کردن مثالهای مختلف بدین راه بینش عمیقتری از هر یک به دست خواهد آمد. گاهی اطلاع ویژه‌ای از یک مثال خاص در پیش‌بینی و یا تعبیر نتایج برقرار برای سایر مثالها مؤثر است و روابطی را که جز این ممکن است از نظر دور بمانند آشکار خواهد ساخت.

۴.۱ نتایج مقدماتی اصول موضوع

قضایای زیر به آسانی از اصول موضوع فضای خطی نتیجه می‌شوند.

قضیه ۱.۱. یکتایی عنصر صفر. در هر فضای خطی یک و فقط یک عنصر صفر وجود دارد.

برهان. اصول موضوع ۵ به ما می‌گوید که دست کم یک عنصر صفر وجود دارد. فرض کنیم دو عنصر صفر، مثلاً O_1 و O_2 ، وجود می‌داشت. با فرض $x = O_1$ و $O = O_2$ در اصل موضوع ۵ داریم $O_1 + O_2 = O_1$. همچنین، با اختیار $x = O_2$ و $O = O_1$ خواهیم داشت $O_2 + O_1 = O_2$. اما، طبق قانون تعویضپذیری، $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$. در نتیجه، $O_1 = O_2$.

قضیه ۲.۱. یکتایی عنصر قرینه. در هر فضای خطی هر عنصر درست یک قرینه دارد؛ یعنی، به ازای هر x ، یک و فقط یک y هست که $x + y = 0$.

برهان. اصل موضوع ۶ به ما می‌گوید که دست کم یک قرینه، یعنی $x(-1)$ را، دارد. فرض کنیم x دو قرینه، مثلاً y_1 و y_2 را، داشته باشد. در این صورت، $x + y_1 = 0$ و $x + y_2 = 0$. با افزودن y_2 به دو طرف معادله اول و استفاده از اصل موضوع ۵، ۴، و

۳ داریم

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2$$

۹

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1.$$

بنابراین، $y_1 = y_2$ ؛ در نتیجه، x درست یک قرینه، یعنی $x(-1)$ را، خواهد داشت.

نماد گذاری. قرینه x را با $-x$ نشان می‌دهیم، و تفاضل $y - x$ را مساوی مجموع $y + (-x)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه^۳ زیر چند خاصیت را که بر اعمال جبری مقدماتی یک فضای خطی حاکمند وصف می‌کند.

قضیه^{۳۰۱}. فرض کنیم x و y عنصرهای دلخواه یک فضای خطی بوده و a و b اسکالرهایی دلخواهی باشند. در این صورت، خواص زیر را خواهیم داشت:

$$(A) \quad 0x = O$$

$$(B) \quad aO = O$$

$$(P) \quad (-a)x = -(ax) = a(-x)$$

$$(T) \quad \text{هرگاه } ax = O \text{، آنگاه } a = 0 \text{ یا } x = O$$

$$(N) \quad \text{هرگاه } ax = ay \text{ و } a \neq 0 \text{، آنگاه } x = y$$

$$(J) \quad \text{هرگاه } ax = bx \text{ و } x \neq O \text{، آنگاه } a = b$$

$$(C) \quad -(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$$

$$(H) \quad x + x = 2x, \quad x + x + x = 3x, \quad \text{و بطور کلی، } \sum_{i=1}^n x = nx$$

ما (A) و (B) و (P) را ثابت می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

برهان (A). فرض کنیم $z = 0x$. می‌خواهیم ثابت کنیم $z = O$. با افزودن z به خودش و استفاده از اصل موضوع ۹، داریم

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z.$$

حال $-z$ را به‌طرفین فوق می‌افزاییم تا $z = O$ به‌دست آید.

برهان (ب) . فرض كنيم $z = a0$ ، z را به خودش مى افزاييم ، و از اصل موضوع ۸ استفاده مى كنيم .

برهان (پ) . فرض كنيم $z = (-a)x$. با افزودن z به ax و استفاده از اصل موضوع ۹ ، داريم

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = 0;$$

پس z قرينه ax است: $z = -(ax)$. بهمين نحو ، اگر $a(-x)$ را به ax اضافه و از اصل موضوع ۸ و خاصيت (ب) استفاده كنيم ، درمى يابيم كه $a(-x) = -(ax)$.

۵۰۱ تعرين

در تمرينهاى ۱ تا ۲۸ معين كنيد كه اگر جمع و ضرب در اسكالرهاى حقيقي طبق معمول تعريف شوند ، مجموعه ها فضاى خطى حقيقي هستند يا خير . براى آنهايي كه نيستند بگويد كدام اصول موضوع برقرار نمى باشند . توابع تمرينهاى ۱ تا ۱۷ حقيقي اند . در تمرينهاى ۳ و ۴ و ۵ هر قلمرو شامل ۰ و ۱ ، و در تمرينهاى ۷ تا ۱۲ حاوى تمام اعداد حقيقي است .

۱ . تمام توابع گويا .

۲ . تمام توابع گويای f/g كه درجه f از درجه g ناپيشتراست (به انضمام $f = 0$) .

۳ . تمام f هاىي كه $f(0) = f(1)$.

۴ . تمام f هاىي كه $f(0) = 2f(1)$.

۵ . تمام f هاىي كه $f(1) = 1 + f(0)$.

۶ . تمام توابع پله اى تعريف شده بر $[0, 1]$.

۷ . تمام f هاىي كه وقتى $x \rightarrow +\infty$ ، $f(x) \rightarrow 0$.

۸ . تمام توابع زوج .

۹ . تمام توابع فرد .

۱۰ . تمام توابع كراندار .

۱۱ . تمام توابع صعودى .

۱۲ . تمام توابع با دوره تناوب 2π .

۱۳ . تمام f هاى انتگرال پذير بر $[0, 1]$ كه $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

- ۱۴ . تمام f های انتگرالپذیر بر $[0, 1]$ که $\int_0^1 f(x) dx \geq 0$.
- ۱۵ . تمام f هایی که در $f(x) = f(1 - x)$ به ازای هر x صدق می کنند .
- ۱۶ . تمام چند جمله ایهای تیلور^۱ از درجه^۱ نایبتر از n به ازای n ی ثابت (به انضمام چند جمله ای صفر) .
- ۱۷ . تمام جوابهای یک معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم خطی
- $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$
- که در آن P و Q توابعی معلوم و همه جا پیوسته اند .
- ۱۸ . تمام دنباله های حقیقی کراندار .
- ۱۹ . تمام دنباله های حقیقی همگرا .
- ۲۰ . تمام سربهای حقیقی همگرا .
- ۲۱ . تمام سربهای حقیقی به طور مطلق همگرا .
- ۲۲ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $z = 0$.
- ۲۳ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $x = 0$ یا $y = 0$.
- ۲۴ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $y = 5x$.
- ۲۵ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $3x + 4y = 1$ و $z = 0$.
- ۲۶ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که ضربهای اسکالر $(1, 2, 3)$ اند .
- ۲۷ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که مؤلفه هایشان در یک دستگاه سه معادله خطی به شکل

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

صدق می کنند .

- ۲۸ . تمام بردارهایی در V_n که ترکیب خطی دو بردار معلوم A و B اند .
- ۲۹ . فرض کنید $V = \mathbb{R}^+$ ، یعنی مجموعه اعداد حقیقی مثبت، باشد. "مجموع" x و y در V را حاصل ضرب $x \cdot y$ (به معنی معمولی)، و "حاصل ضرب" x از V در اسکالر c را cx تعریف کنید. ثابت کنید V فضای خطی حقیقی است که ۱ عنصر صفر آن است .
- ۳۰ . (T) ثابت کنید اصل موضوع ۱۰ را می توان از سایر اصلها نتیجه گرفت .

(ب) ثابت کنید اگر اصل موضوع ۶ با اصل موضوع ۶ ربر عوض شود، دیگر نمی توان اصل موضوع ۱۰ را از سایر اصول نتیجه گرفت.

اصل موضوع ۶. به ازای هر x در V عنصری مثل y در V هست که $x + y = 0$.
 ۳۱. فرض کنید S مجموعه تمام جفتهای مرتب (x_1, x_2) از اعداد حقیقی باشد. در هر حالت معین کنید آیا S با اعمال جمع و ضرب در اسکالرها تعریف شده یک فضای خطی هست یا نه. اگر مجموعه یک فضای خطی نیست، نشان دهید کدام اصول نقض شده اند:

$$(A) \quad a(x_1, x_2) = (ax_1, 0), \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$(B) \quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2), \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

$$(C) \quad a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2), \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2)$$

$$(D) \quad a(x_1, x_2) = (|ax_1|, |ax_2|), \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|)$$

۳۲. قسمتهای (ت) تا (ح) قضیه ۳۰۱ را ثابت کنید.

۶.۱ زیرفضاهای یک فضای خطی

فرض کنیم V یک فضای خطی و S یک زیر مجموعه ناتهی آن باشد. چنانچه S نیز با همان جمع و ضرب در اسکالرها یک فضای خطی باشد، S یک زیر فضای V نامیده می شود. قضیه زیر در تعیین اینکه زیر مجموعه ای از یک فضای خطی زیر فضا هست یا نه محک ساده ای می باشد.

قضیه ۴۰۱. فرض کنیم S یک زیر مجموعه ناتهی فضای خطی V باشد. در این صورت، S یک زیر فضاست اگر و فقط اگر در اصول موضوع بسته بودن صدق کند.

برهان. اگر S یک زیر فضا باشد، در تمام اصول موضوع یک فضای خطی صدق می کند؛ و در نتیجه، بخصوص، در اصول موضوع بسته بودن صدق خواهد کرد.

حال نشان می دهیم که اگر S در اصول موضوع بسته بودن صدق کند، در سایر اصول نیز صادق است. گوییم قوانین تعویض پذیری و شرکت پذیری جمع (اصول ۳ و ۴) و اصول موضوع ضرب در اسکالرها (اصول ۷ تا ۱۰) خود بخود در S برقرارند، زیرا برای تمام عناصر V چنین اند. می ماند تحقیق اصول ۵ و ۶، وجود عنصر صفر در S ، و وجود قرینه

برای هر عنصر در S .

فرض کنیم x یک عنصر S باشد. $(S, +)$ چون ناتهی است، دست کم یک عنصر دارد. بنا به اصل موضوع ۲، به ازای هر اسکالر a ، ax در S است. با فرض $a = 0$ نتیجه می شود که $0x$ در S می باشد. اما، طبق قضیه ۳.۱ (۱) $0x = 0$ پس $0 \in S$ و اصل موضوع ۵ برقرار است. با فرض $a = -1$ می بینیم که $(-1)x$ نیز در S است. اما $x + (-1)x = 0$ ، زیرا x و $(-1)x$ هر دو در V هستند. لذا، اصل موضوع ۶ در S صادق است. بنابراین، S یک زیر فضای V می باشد.

تعریف. فرض کنیم S یک زیر مجموعه ناتهی فضای خطی V باشد. عنصر x در V به

شکل

$$x = \sum_{i=1}^k c_i x_i,$$

که در آن x_1, \dots, x_k همه در S بوده و c_1, \dots, c_k اسکالر هستند، را یک ترکیب خطی متناهی از عناصر S می نامیم. مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی از عناصر S در اصل موضوع بسته بودن صدق می کند؛ و در نتیجه، یک زیر فضای V است. ما این را زیر فضای پیموده شده به وسیله S ، یا پیمای خطی S ، می خوانیم و با $L(S)$ نشانش می دهیم. اگر S تهی باشد، $L(S)$ را مساوی $\{0\}$ ، یعنی مجموعه ای فقط مرکب از عنصر صفر، تعریف می کنیم.

مجموعه های مختلف می توانند یک زیر فضا را بهیمایند. مثلاً، فضای V_2 به وسیله هر یک از مجموعه بردارهای $\{i, j\}$ ، $\{i, j, i + j\}$ ، و $\{i, j, -j, -i + j\}$ ، $\{0, i\}$ پیموده می شود. فضای تمام چند جمله ایها از درجه نایبشتر از n به وسیله مجموعه

$$\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

مرکب از $n + 1$ چند جمله ای پیموده می شود. این فضا به وسیله مجموعه های $\{1, t/2, t^2/3, \dots, t^n/(n+1)\}$ و $\{1, (1+t), (1+t)^2, \dots, (1+t)^n\}$ نیز پیموده می شود. فضای تمام چند جمله ایها به وسیله مجموعه نامتناهی $\{1, t, t^2, \dots\}$ از چند جمله ایها پیموده خواهد شد.

در اینجا طبعاً "چند سوال مطرح می شود. مثلاً، چه فضاهایی به وسیله یک مجموعه متناهی پیموده می شوند؟ اگر یک فضا را بتوان به وسیله مجموعه ای متناهی پیمود، دست

كم چند عنصر براى اين كار لازم است؟ براى بحث در باب اينها و مسائل مربوطه، مفاهيم وابستگى، استقلال، پايه‌ها، و بعد را معرفى مي‌كنيم. با اين مفاهيم در جلد يك در بررسى فضاى بردارى V_n برخوردديم. حال آنها را به فضاهاى خطى كلى تعميم مي‌دهيم.

۷.۱ مجموعه‌هاى وابسته و مستقل در يك فضاى خطى

تعريف. مجموعه S از عناصر در فضاى خطى V را وابسته ناميم هرگاه مجموعه‌اى متناهى از عنصرهاى متمايز در S ، مثلاً " x_1, \dots, x_k "، و مجموعه α نظيرش از اسكالرهاى c_1, \dots, c_k ، كه همه صفر نيستند، وجود داشته باشند بطورى كه

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i = 0.$$

هر معادله به شكل $\sum c_i x_i = 0$ ، كه در آن همه c_i ها صفر نباشند، يك نمايش نابديهى 0 نام دارد. مجموعه S را مستقل ناميم اگر كه وابسته نباشد. در اين حال، به ازاي هر انتخاب از عناصر متمايز x_1, \dots, x_k در S و اسكالرهاى c_1, \dots, c_k ،

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i = 0 \text{ ايجاب مي‌كند كه } c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

با اينكه وابستگى و استقلال از خواص مجموعه‌هاست، ما آنها را براى خود عنصرها نيز به كار مي‌بريم. مثلاً، "عنصرهاى يك مجموعه مستقل را عنصرهاى مستقل خواهيم ناميد.

در حالت متناهى بودن S ، تعريف بالا بر تعريفى كه در جلد يك براى V_n داده شد منطبق است. ليكن تعريف فوق به مجموعه‌هاى متناهى محدود نخواهد شد.

مثال ۱. اگر زير مجموعه T از S وابسته باشد، خود S نيز وابسته است. اين منطقاً معادل آن است كه بگوئيم هر زير مجموعه يك مجموعه مستقل مستقل است.

مثال ۲. اگر عنصرى در S مضرب اسكالرى از ديگرى باشد، S وابسته است.

مثال ۳. اگر $0 \in S$ ، S وابسته است.

مثال ۴. مجموعه تهی مستقل است.

بسیاری از مجموعه‌های وابسته و مستقل از بردارهای V_n در جلد یک بحث شدند. مثالهای زیر این مفهوما را در فضاهای تابعی نشان می‌دهند. در هر حالت، فضای خطی زمینه V مجموعه تمام توابع حقیقی است که برخط حقیقی تعریف شده‌اند.

مثال ۵. فرض کنیم به‌ازای هر t ی حقیقی $u_1(t) = \cos^2 t$ ، $u_2(t) = \sin^2 t$ ، و $u_3(t) = 1$. اتحاد فیثاغورس نشان می‌دهد که $u_1 + u_2 - u_3 = 0$. بنابراین، سه تابع u_1 ، u_2 ، و u_3 وابسته می‌باشند.

مثال ۶. فرض کنیم به‌ازای $k = 0, 1, 2, \dots$ و هر t ی حقیقی $u_k(t) = t^k$. مجموعه $S = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ مستقل است. برای اثبات این مطلب کافی است نشان دهیم به‌ازای هر n ، $n + 1$ چند جمله‌ای u_0, u_1, \dots, u_n مستقل‌اند. گوییم هر رابطه به شکل $\sum c_k u_k = 0$ به این معنی است که به‌ازای هر t ی حقیقی

$$(1.1) \quad \sum_{k=0}^n c_k t^k = 0$$

این، وقتی $t = 0$ ، نتیجه می‌دهد که $c_0 = 0$. با مشتگیری از (۱.۱) و گذاردن $t = 0$ در آن داریم $c_1 = 0$. با تکرار این عمل در می‌یابیم که هر ضریب c_k صفر می‌باشد.

مثال ۷. هرگاه a_1, \dots, a_n اعداد حقیقی متمایزی باشند، n تابع نمایی

$$u_1(x) = e^{a_1 x}, \dots, u_n(x) = e^{a_n x}$$

مستقل خواهند بود. این را می‌توان به استقرای بر n ثابت کرد. نتیجه وقتی $n = 1$ بدیهی است. پس فرض کنیم برای $n - 1$ تابع نمایی درست باشد و اسکالره‌ای c_1, \dots, c_n را قسمی می‌گیریم که

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^n c_k e^{a_k x} = 0.$$

فرض کنیم a_M ماکزیمم n عدد a_1, \dots, a_n باشد. با ضرب طرفین (۲.۱) در $e^{-a_M x}$ داریم

$$(۳.۱) \quad \sum_{k=1}^n c_k e^{(a_k - a_M)x} = 0.$$

اگر $M \neq k$ ، عدد $a_k - a_M$ منفی است. پس، وقتی در (۳.۱) $x \rightarrow +\infty$ ، هر جمله با $M \neq k$ به صفر میل می‌کند و خواهیم داشت $c_M = 0$. حال اگر از (۲.۱) جمله M را حذف کرده فرض استقرا را به کار ببریم، می‌بینیم که هر یک از $n - 1$ ضریب باقیمانده نیز صفر است.

قضیه ۵.۱. فرض کنیم $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ یک مجموعه مستقل از k عنصر در فضای خطی V بوده و $L(S)$ زیر فضای پیموده شده به وسیله آن باشد. در این صورت، هر مجموعه از $k + 1$ عنصر در $L(S)$ وابسته خواهد بود.

برهان. اثبات به استقرا بر k ، یعنی عده عنصرهای S ، صورت می‌گیرد. ابتدا فرض می‌کنیم $k = 1$. پس، طبق فرض، S از یک عنصر مانند x_1 تشکیل شده که، چون S مستقل است، $x_1 \neq 0$. حال دو عنصر متمایز y_1 و y_2 را در $L(S)$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، هر یک ضرب اسکالر x_1 است، مثلاً " $y_1 = c_1 x_1$ و $y_2 = c_2 x_1$ "، که در آنها c_1 و c_2 هر دو ۰ نیستند. با ضرب y_1 در c_2 و y_2 در c_1 و تفریقشان از هم، داریم $c_2 y_1 - c_1 y_2 = 0$.

این یک نمایش نابدیهی 0 است؛ در نتیجه، y_1 و y_2 وابسته هستند. این مطلب قضیه را وقتی $k = 1$ ثابت می‌کند.

حال فرض کنیم قضیه برای $k - 1$ درست باشد، و ثابت می‌کنیم برای k نیز چنین است. مجموعه‌ای مرکب از $k + 1$ عنصر در $L(S)$ ، مثلاً "مجموعه" $T = \{y_1, y_2, \dots, y_{k+1}\}$ را اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم T وابسته است. گوییم چون هر y_i در $L(S)$ است، بازای هر $i = 1, 2, \dots, k + 1$ می‌توان نوشت

$$(۴.۱) \quad y_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j.$$

تمام a_{i1} ها را که در x_1 ضرب شده‌اند امتحان می‌کنیم و برهان را، بنا بر آنکه این اسکالرها همه صفرند یا نه، به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

حالت ۱. بازای هر $i = 1, 2, \dots, k + 1$ ، $a_{i1} = 0$. در این حالت، مجموع (۴.۱)

شامل x_1 نیست؛ در نتیجه، هر y_i در T در پیمای خطی مجموعه $\{x_2, \dots, x_k\}$ است. اما S' مستقل است و از $k-1$ عنصر تشکیل شده است. بنا به فرض استقرا، قضیه برای $k-1$ درست است، پس T وابسته می‌باشد. این قضیه را در حالت ۱ ثابت خواهد کرد.

حالت ۲. همه a_{i1} ها صفر نیستند. فرض کنیم $a_{11} \neq 0$. (در صورت لزوم، می‌توان y ها را مجدداً شماره‌گذاری کرد.) با فرض $i=1$ در (۴.۱) و ضرب دوطرف آن در c_i ، که $c_i = a_{i1}/a_{11}$ ، داریم

$$c_i y_1 = a_{i1} x_1 + \sum_{j=2}^k c_i a_{1j} x_j.$$

اگر از این معادله (۴.۱) را کم کنیم، به‌ازای $i=2, \dots, k+1$ خواهیم داشت

$$c_i y_1 - y_i = \sum_{j=2}^k (c_i a_{1j} - a_{ij}) x_j.$$

این معادله هر یک از k عنصر $c_i y_1 - y_i$ را به‌صورت ترکیبی خطی از $k-1$ عنصر مستقل x_2, \dots, x_k بیان می‌کند. بنا به فرض استقرا، k عنصر $c_i y_1 - y_i$ باید وابسته باشند. پس، به‌ازای اسکالرهایی چون t_2, \dots, t_{k+1} که همه صفر نیستند، داریم

$$\sum_{i=2}^{k+1} t_i (c_i y_1 - y_i) = 0,$$

که از آن خواهیم داشت

$$\left(\sum_{i=2}^{k+1} t_i c_i \right) y_1 - \sum_{i=2}^{k+1} t_i y_i = 0.$$

اما این یک ترکیب خطی نابدیهی از y_1, \dots, y_{k+1} است که عنصر صفر را نمایش می‌دهد. پس عنصرهای y_1, \dots, y_{k+1} باید وابسته باشند. این برهان را تمام خواهد کرد.

۸.۱ پایه‌ها و بعد

تعریف. مجموعه متناهی S از عنصرها در فضای خطی V را یک پایه متناهی V گوئیم هرگاه S مستقل بوده و V را بپیماید. V را با بعد متناهی نامیم هرگاه V پایه متناهی داشته و یا فقط از O تشکیل شده باشد. در غیر این صورت، V با بعد نامتناهی خوانده

خواهد شد .

قضيه ۶.۰۱ . هرگاه V يك فضاى خطى با بعد متناهى باشد ، پايه‌هاى متناهى V يك تعداد عنصر خواهند داشت .

برهان . فرض كنيم S و T دو پايه متناهى از V باشند . همچنين ، S از k عنصر و T از m عنصر تشكيل شده باشد . چون S مستقل است و V را مى‌پيماید ، قضيه ۵.۱ مى‌گويد كه هر مجموعه از $k + 1$ عنصر در V وابسته است ، لذا ، هر مجموعه با بيش از k عنصر در V وابسته مى‌باشد . چون T يك مجموعه مستقل است ، بايد داشته باشيم $m \leq k$. همين استدلال با تعويض S و T با هم نشان مى‌دهد كه $k \leq m$. بنا بر اين ، $k = m$.

تعريف . اگر فضاى خطى V يك پايه n عنصرى داشته باشد ، عدد صحيح n بعد V ناميده مى‌شود ، و مى‌نويسيم $n = \dim V$. چنانچه $V = \{0\}$ ، مى‌گوييم V داراى بعد 0 است .

مثال ۱ . فضاى V_n داراى بعد n است . يك پايه عبارت است از مجموعه n بردار يکه مختصات .

مثال ۲ . فضاى تمام چند جمله‌ايباى $p(t)$ از درجه نايبشتر از n داراى بعد $n + 1$ است . يك پايه عبارت است از مجموعه $n + 1$ چند جمله‌اى $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$. هر چند جمله‌اى از درجه نايبشتر از n يك تركيب خطى از اين $n + 1$ چند جمله‌اى است .

مثال ۳ . فضاى جوابهاى معادله ديفرانسيل $0 = 3y' - 2y''$ داراى بعد 2 است . يك پايه از دو تابع $u_1(x) = e^{-x}$ و $u_2(x) = e^{2x}$ تشكيل شده است . هر جواب تركيبى خطى از اين دو تابع است .

مثال ۴ . فضاى تمام چند جمله‌ايباى $p(t)$ با بعد نامتناهى است . با آنكه مجموعه

نامتناهی $\{1, t, t^2, \dots\}$ این فضا را می‌پیماید، هیچ مجموعه‌متناهی از چند جمله‌ایها فضا را نخواهد پیمود.

قضیه ۷.۱. فرض کنیم V یک فضای خطی با بعد متناهی بوده و $\dim V = n$. در این صورت،

(آ) هر مجموعه از عنصرهای مستقل در V زیر مجموعه‌ای از یک پایه V است؛

(ب) هر مجموعه از n عنصر مستقل یک پایه V می‌باشد.

برهان. برای اثبات (آ)، فرض کنیم $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ مجموعه مستقلی از عناصر V باشد. اگر $L(S) = V$ ، S یک پایه است. در غیر این صورت، عنصری چون y در V وجود دارد که در $L(S)$ نیست. این عنصر را به S می‌افزاییم و مجموعه جدید $S' = \{x_1, \dots, x_k, y\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر این مجموعه وابسته می‌بود، اسکالرهایی چون c_1, \dots, c_{k+1} که همه صفر نیستند وجود می‌داشت بطوری که

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i + c_{k+1} y = 0.$$

اما $c_{k+1} \neq 0$ ، زیرا x_1, \dots, x_k مستقل هستند. پس می‌شد این معادله را نسبت به y حل کرد و دید که $y \in L(S)$ ، متناقض با اینکه y در $L(S)$ نیست. لذا، مجموعه S' مستقل ولی شامل $k+1$ عنصر است. اگر $L(S') = V$ ، S' یک پایسه است و، چون S زیر مجموعه S' است، قسمت (آ) ثابت می‌شود. اگر S' پایه نباشد، می‌توان با S' مثل S استدلال کرد و مجموعه S'' جدید S'' را که $k+2$ عنصر دارد و مستقل است به دست آورد. چنانچه S'' پایه باشد، قسمت (آ) ثابت می‌شود. در غیر این صورت، عمل را ادامه خواهیم داد. در چند مرحله باید به یک پایه برسیم، زیرا در غیر این صورت مالا "مجموعه مستقلی با $n+1$ عنصر به دست می‌آید، که با قضیه ۵.۱ تعارض خواهد داشت. بنابراین، قسمت (آ) ثابت شده است.

برای اثبات (ب)، فرض کنیم S یک مجموعه مستقل با n عنصر باشد. بنابراین قسمت

(آ)، S زیر مجموعه یک پایه، مثلا B ، است. اما، طبق قضیه ۶.۱، B درست

n عنصر دارد؛ در نتیجه، $S = B$.

۹.۱ مولفه‌ها

فرض كنيم V يك فضاى خطى با بعد n باشد، و پايه‌اى را با عنصرهاى e_1, \dots, e_n و با همين ترتيب در نظر مى‌گيريم. اين پایه مرتب را با n تايى (e_1, \dots, e_n) نشان مى‌دهيم. اگر $x \in V$ ، مى‌توان x را به صورت تركيبى خطى از عنصرهاى اين پایه نوشت:

$$(5.1) \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

ضرايب اين معادله n تايى مرتب (c_1, \dots, c_n) از اعداد را كه به طور منحصر بفرديه وسيله x مشخص مى‌شوند معين مى‌كنند. در واقع، اگر نمايش ديگرى از x به صورت تركيبى خطى از e_1, \dots, e_n داشته باشيم، مثلاً $x = \sum_{i=1}^n d_i e_i$ ، با تفريق اين از (5.1) داريم $\sum_{i=1}^n (c_i - d_i) e_i = 0$. اما چون عناصر پایه مستقل‌اند، اين ايجاب مى‌كند كه به ازاي هر i ، $c_i = d_i$ ؛ در نتيجه، خواهيم داشت $(c_1, \dots, c_n) = (d_1, \dots, d_n)$. مولفه‌هاى n تايى مرتب (c_1, \dots, c_n) كه با معادله (5.1) مشخص مى‌شوند مولفه‌هاى x نسبت به پایه مرتب (e_1, \dots, e_n) نام دارند.

۱۰.۱ تمرين

در تمرينهاى ۱ تا ۱۰، فرض كنيد S مجموعه تمام (x, y, z) هاى در V_3 باشد كه مولفه‌هايشان در شرط داده شده صدق مى‌كنند. تعيين كنيد آيا S زير فضاى V_3 هست يا نه. در صورت زير فضا بودن S ، $\dim S$ را حساب كنيد.

۱. $x = 0$. ۲. $x + y = 0$

۳. $x + y + z = 0$. ۴. $x = y$

۵. $x = y = z$. ۶. $x = z$ يا $x = y$

۷. $x^2 - y^2 = 0$. ۸. $x + y = 1$

۹. $z = 3x$ و $y = 2x$. ۱۰. $x - y - z = 0$ و $x + y + z = 0$

فرض كنيد P_n فضاى خطى تمام چند جمله‌اىهاى حقيقى از درجه نايبشتر از n باشد، كه n ثابت است. در تمرينهاى ۱۱ تا ۲۰، S را مجموعه تمام چند جمله‌اىهاى f در P_n بينگاريد كه در شرط داده شده صدق مى‌كنند. تعيين كنيد آيا S زير فضاى P_n هست يا نه. در صورت زير فضا بودن S ، $\dim S$ را حساب كنيد.

۱۱. $f(0) = 0$. ۱۲. $f'(0) = 0$

۱۳. $f''(0) = 0$. ۱۴. $f(0) + f'(0) = 0$.

۱۵. $f(0) = f(1)$. ۱۶. $f(0) = f(2)$.

۱۷. f زوج است . ۱۸. f فرد است .

۱۹. درجه f از k ، که $k < n$ ، نابیشتر است یا $f = 0$.

۲۰. درجه f مساوی k ، که $k < n$ ، است یا $f = 0$.

۲۱. زیر فضایی را در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(t)$ وصف کنید که به وسیله هریک از زیر مجموعه‌های زیر از چند جمله‌ایها پیموده می‌شود، و بعد این زیرفضا را مشخص نمایید:

(\bar{T}) $\{1, t^2, t^4\}$ ؛ (\bar{B}) $\{t, t^3, t^5\}$ ؛ (\bar{P}) $\{t, t^2\}$ ؛ (\bar{T}) $\{1 + t, (1 + t)^2\}$.

۲۲. در این تمرین، $L(S)$ زیر فضایی است که به وسیله زیر مجموعه S از فضای خطی V پیموده می‌شود. احکام (\bar{T}) تا (\bar{J}) را اثبات نمایید.
 (\bar{T}) $S \subseteq L(S)$.

(\bar{B}) اگر $S \subseteq T \subseteq V$ و T زیر فضای V باشد، $L(S) \subseteq T$. این خاصیت این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویند $L(S)$ کوچکترین زیر فضایی از V است که شامل S می‌باشد.

(\bar{P}) زیر مجموعه S از V زیر فضای V است اگر و فقط اگر $L(S) = S$.

(\bar{T}) اگر $S \subseteq T \subseteq V$ ، $L(S) \subseteq L(T)$.

(\bar{S}) اگر S و T زیر فضاهای V باشند، $S \cap T$ نیز چنین است .

(\bar{J}) اگر S و T زیر مجموعه‌های V باشند، $L(S \cap T) \subseteq L(S) \cap L(T)$.

(\bar{C}) مثالی بزنید که در آن $L(S \cap T) \neq L(S) \cap L(T)$.

۲۳. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی باشد که بر خط حقیقی تعریف شده‌اند. تعیین کنید آیا زیر مجموعه‌های زیر از V وابسته‌اند یا مستقل. بعد زیر فضای پیموده شده به وسیله هر مجموعه را حساب کنید.

(\bar{T}) $\{1, e^{ax}, e^{bx}\}$ ، $a \neq b$. (\bar{B}) $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$.

(\bar{P}) $\{1, e^{ax}, xe^{ax}\}$. (\bar{T}) $\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}\}$.

(\bar{S}) $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$. (\bar{J}) $\{\cos x, \sin x\}$.

(\bar{C}) $\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$. (\bar{H}) $\{1, \cos 2x, \sin^2 x\}$.

(\bar{X}) $\{\sin x, \sin 2x\}$. (\bar{D}) $\{e^x \cos x, e^{-x} \sin x\}$.

۲۴. فرض کنید V یک فضای خطی با بعد متناهی باشد، و S را زیرفضایی از V بینگارید. هر یک از احکام زیر را ثابت نمایید:

(آ) S با بعد متناهی است و $\dim S \leq \dim V$ ؛

(ب) $\dim S = \dim V$ اگر و فقط اگر $S = V$ ؛

(پ) هر پایه S بخشی از یک پایه V است؛

(ت) یک پایه V لازم نیست پایه‌ای از S را دربر داشته باشد.

۱۱۰۱ ضربهای داخلی، فضاهاى اقلیدسی. نرمها

در هندسه اقلیدسی معمولی، آن خواصی که به اندازه‌گیری طول پاره‌خطها و زوایای بین خطوط تکیه دارند خواص مترى نامیده می‌شوند. دربررسی ما از V_n ، طولها و زوایا به وسیله ضرب نقطه‌ای تعریف شدند. حال این مفهومها را به فضاهاى خطی کلیتر تعمیم می‌دهیم. ابتدا تعمیم ضرب نقطه‌ای را، که ضرب داخلی نام دارد، معرفی کرده، سپس طول و زاویه را برحسب ضرب داخلی تعریف می‌کنیم.

در جلد یک حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ در

V_n با فرمول

$$(۶.۱) \quad x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

تعریف شد. در فضای خطی کلی، به جای $x \cdot y$ می‌نویسیم (x, y) ، و ضرب را، به عوض بایک فرمول، به‌طور اصل موضوعی تعریف می‌کنیم. یعنی، چند خاصیت را که می‌خواهیم ضربهای داخلی داشته باشند بیان می‌کنیم و آنها را به‌عنوان اصول موضوع در نظر می‌گیریم.

تعریف. گوئیم فضای خطی و حقیقی V ضرب داخلی دارد هرگاه به هر جفت عنصر x و y در V عدد حقیقی منحصر بفردی چون (x, y) مربوط شده باشد که در اصول موضوع زیر به‌مازای هر x, y, z از V و هر اسکالر حقیقی c صدق نماید:

$$(۱) \quad (x, y) = (y, x) \quad (\text{تعویض‌پذیری یا تقارن})$$

$$(۲) \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z) \quad (\text{پخش‌پذیری یا خطی})$$

$$(۳) \quad c(x, y) = (cx, y) \quad (\text{شرکت‌پذیری یا همگنی})$$

$$(۴) \quad (x, x) > 0, \quad x \neq 0 \quad (\text{مثبتی}).$$

یک فضای خطی حقیقی با ضرب داخلی یک فضای اقلیدسی حقیقی نامیده می‌شود.

تذکره. با فرض $c = 0$ در (۳) می‌بینیم که به ازای هر y ، $(O, y) = 0$.

در یک فضای خطی مختلط، حاصل ضرب داخلی (x, y) عدد مختلطی است که در همان اصول موضوعه صادق برای ضرب داخلی حقیقی صدق می‌کند، جز آنکه اصل موضوع تقارن با رابطه^۱

$$(1') \quad (x, y) = \overline{(y, x)} \quad (\text{تقارن هرمیتی}^*)$$

که در آن $\overline{(y, x)}$ مزدوج مختلط (y, x) است، عوض می‌شود. در اصل موضوع همگنی، ضریب اسکالر c می‌تواند هر عدد مختلط باشد. از اصل موضوع همگنی و (۱') رابطه^۱ لنگه^۲

$$(3') \quad (x, cy) = \overline{(cy, x)} = \bar{c}\overline{(y, x)} = \bar{c}(x, y)$$

به دست خواهد آمد.

هر فضای خطی مختلط دارای ضرب داخلی یک فضای اقلیدسی مختلط نام دارد. گاهی اصطلاح فضای یگه‌ای نیز بدان اطلاق می‌شود. (یک مثال فضای برداری مختلط $V_n(C)$ است که در بخش ۱۶.۱۲ جلد یک به اختصار از آن بحث شد.

با آنکه عمدتاً^۳ به فضاهای اقلیدسی حقیقی نظر داریم، قضایای این فصل برای فضاهای اقلیدسی مختلط نیز معتبرند. هرگاه اصطلاح فضای اقلیدسی را بی‌توضیح بیشتر به کار ببریم، فرض است که فضا می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد.

خواننده باید تحقیق کند که هریک از مثالهای زیر در تمام اصول موضوع ضرب داخلی صدق می‌کند.

مثال ۰۱. در V_n فرض می‌کنیم $(x, y) = x \cdot y$ ، یعنی حاصل ضرب نقطه‌ای معمولی x و y ، باشد.

مثال ۰۲. اگر $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ دو بردار در V_2 باشند، (x, y) را با فرمول

* به افتخار شارل هرمیت (Charles Hermite, 1822-1901)، ریاضیدان فرانسوی، که در جبر و آنالیز تحقیقات زیادی کرده است.

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

تعريف مى‌کنيم . اين مثال نشان مى‌دهد که در يك فضاى خطى ممکن است بيش از يك ضرب داخلى وجود داشته باشد .

مثال ۳ . فرض کنيم $C(a, b)$ فضاى خطى تمام توابع حقيقى و پيوسته بر بازه $[a, b]$ باشد .

حاصل ضرب داخلى دو تابع f و g را با فرمول

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

تعريف مى‌کنيم . اين فرمول شبیه معادله (6.1) است ، که حاصل ضرب نقطه‌اى دو بردار در V_n را تعريف مى‌کرد . مقادير تابعى $f(t)$ و $g(t)$ نقش مؤلفه‌هاى x_i و y_i را دارند ، و انتگرالگيرى جای جمعبندي را گرفته است .

مثال ۴ . در فضاى $C(a, b)$ تعريف مى‌کنيم

$$(f, g) = \int_a^b w(t)f(t)g(t) dt,$$

که در آن w تابع مثبت شابتي در $C(a, b)$ است . تابع w تابع وزن ناميده مى‌شود . در

مثال ۳ ، به‌ازای هر t داريم $w(t) = 1$.

مثال ۵ . در فضاى خطى تمام چند جمله‌ايبهاى حقيقى تعريف مى‌کنيم

$$(f, g) = \int_0^{\infty} e^{-t}f(t)g(t) dt.$$

اين انتگرال مجازى ، بخاطر سازه نمایی ، به‌ازای هر دو چند جمله‌اى f و g همگراست .

قضيه ۸.۱ . در فضاى اقليدسى V ، هر ضرب داخلى در نامساوى کشى^۱ - شوارتز^۲ صدق مى‌کند :

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y), \quad V \text{ در } x \text{ و } y$$

بعلاوه ، تساوى برقرار است اگر و فقط اگر x و y وابسته باشند .

برهان . اگر $x = 0$ يا $y = 0$ ، نتيجه واضح است . پس مى‌توان فرض کرد که هر دو x

و y ناصفر باشند. فرض کنیم $z = ax + by$ ، که در آن a و b اسکالرهایی هستند که بعداً "مشخص می‌شوند. به‌ازای هر a و b داریم $(z, z) \geq 0$. هرگاه این نامساوی را برحسب x و y و با انتخاب مناسبی از a و b بنویسیم، نامساوی کُشی - شوارتز را خواهیم داشت.

برای بیان (z, z) برحسب x و y ، از خواص $(1')$ ، (2) ، و $(3')$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(z, z) &= (ax + by, ax + by) = (ax, ax) + (ax, by) + (by, ax) + (by, by) \\ &= a\bar{a}(x, x) + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}(y, x) + b\bar{b}(y, y) \geq 0.\end{aligned}$$

با فرض $a = (y, y)$ و حذف سازه^۶ مثبت (y, y) در این نامساوی داریم

$$(y, y)(x, x) + \bar{b}(x, y) + b(y, x) + b\bar{b} \geq 0.$$

حال فرض می‌کنیم $b = -(x, y)$. در این صورت، $\bar{b} = -(y, x)$ و نامساوی آخر به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$(y, y)(x, x) \geq (x, y)(y, x) = |(x, y)|^2.$$

این نامساوی کُشی - شوارتز را ثابت می‌کند. تساوی در سراسر برهان برقرار است اگر و فقط اگر $z = 0$. این، به نوبه^۷ خود، برقرار است اگر و فقط اگر x و y وابسته باشند.

مثال. با اعمال قضیه^{۸.۱} در مورد $C(a, b)$ مجهز به ضرب داخلی $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$ ، می‌بینیم که نامساوی کُشی - شوارتز به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right).$$

از ضرب داخلی می‌توان برای معرفی مفهوم متری طول در هر فضای اقلیدسی استفاده کرد.

تعریف. در فضای اقلیدسی V ، عدد نامنفی $\|x\|$ ، که با معادله^۹

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

تعریف می‌شود، نرم عنصر x نام دارد.

نامساوی کُشی - شوارتز برحسب نرمها شکل زیر را خواهد یافت:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

چون ضرب داخلی به طرق مختلف تعریف می‌شود، نرم یک عنصر به انتخاب ضرب داخلی بستگی دارد. ما این عدم یکتایی را انتظار داشتیم. این امر مشابه آن است که می‌توان، بسته به انتخاب مقیاس یا واحد اندازه‌گیری، هر عدد را طول یک پاره‌خط دانست. قضیه زیر خواص اساسی نرمها را که به ضرب داخلی انتخاب شده بستگی ندارند به دست می‌دهد.

قضیه ۹.۱. در یک فضای اقلیدسی، هر نرم به‌ازای هر دو عنصر x و y و هر اسکالر c خواص زیر را دارد:

$$(T) \text{ اگر } x = 0, \|x\| = 0;$$

$$(B) \text{ اگر } x \neq 0, \|x\| > 0 \text{ (مثبتی)};$$

$$(P) \|cx\| = |c| \|x\| \text{ (همگنی)};$$

$$(T) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (نامساوی مثلثی)}.$$

در (ت) تساوی در صورتی برقرار است که $x = 0$ یا $y = 0$ یا به‌ازای $c > 0$ ای $y = cx$.

برهان. خواص (T) و (B) و (P) فوراً از اصول موضوع ضرب داخلی نتیجه می‌شوند. برای اثبات (ت) توجه می‌کنیم که

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x)$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)}.$$

مجموع $(x, y) + \overline{(x, y)}$ حقیقی است. نامساوی کوشی - شوارتز نشان می‌دهد که

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \text{ و } |\overline{(x, y)}| \leq \|x\| \|y\|. \text{ در نتیجه، داریم}$$

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

این (ت) را ثابت می‌کند. وقتی $y = cx$ ، که در آن $c > 0$ ، خواهیم داشت

$$\|x + y\| = \|x + cx\| = (1 + c) \|x\| = \|x\| + \|cx\| = \|x\| + \|y\|.$$

تعریف. در فضای اقلیدسی حقیقی V ، زاویه بین دو عنصر ناصفر x و y مساوی عددی مانند θ در بازه $0 \leq \theta \leq \pi$ تعریف می‌شود که در معادله

$$(۷۰۱) \quad \cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

صدق می‌کند .

تذکره . نامساوی کوشی - شوارتز نشان می‌دهد که خارج قسمت سمت راست (۷۰۱) در بازه $[-1, 1]$ واقع است؛ در نتیجه، فقط یک θ در $[0, \pi]$ هست که کسینوس آن مساوی این خارج قسمت است .

۱۲.۱ تعامد در فضای اقلیدسی

تعریف . در فضای اقلیدسی V ، دو عنصر x و y را متعامد گوئیم هرگاه حاصل ضرب داخلی آنها صفر باشد. زیر مجموعه S از V را متعامد نامیم هرگاه به ازای هر جفت عنصر متمایز x و y در S ، $(x, y) = 0$. یک مجموعه متعامد را متعامدیکه نامیم هرگاه هر عنصر آن نرم یک داشته باشد .

عنصر صفر به هر عنصر V متعامد است؛ این تنها عنصری است که به خودش متعامد است. قضیه زیر رابطه تعامد را با استقلال نشان می‌دهد .

قضیه ۱۰.۱ . در فضای اقلیدسی V ، هر مجموعه متعامد از عناصر ناصفر مستقل است. در حالت خاص، در فضای اقلیدسی و با بعد متناهی V که $\dim V = n$ ، هر مجموعه متعامد مرکب از n عنصر ناصفر یک پایه V می‌باشد .

برهان . فرض کنیم S یک مجموعه متعامد از عناصر ناصفر در V بوده، و ترکیبی خطی و متناهی از عناصر S مساوی صفر باشد، مثلا " داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^k c_i x_i = 0,$$

که در آن هر $x_i \in S$. با ضرب داخلی دو طرف این رابطه در x_1 و استفاده از این امر که اگر $i \neq 1$ ، $(x_1, x_i) = 0$ ، خواهیم داشت $c_1(x_1, x_1) = 0$. اما چون $x_1 \neq 0$ ، $(x_1, x_1) \neq 0$ ؛ در نتیجه، $c_1 = 0$. با تکرار این استدلال برای x_j به جای x_1 ، معلوم می‌شود که هر $c_j = 0$. این ثابت می‌کند که S مستقل است. اگر $\dim V = n$ و S از n

عنصر تشکیل شده باشد، قضیه ۷.۰۱ (ب) نشان می‌دهد که S یک پایه V می‌باشد.

مثال. فرض کنیم در فضای خطی و حقیقی $C(0, 2\pi)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ ، مجموعهٔ توابع مثلثاتی $\{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u_0(x) = 1 \text{ و به‌ازای } n = 1, 2, \dots \text{ و } u_{2n-1}(x) = \cos nx \text{ و } u_{2n}(x) = \sin nx$$

اگر $m \neq n$ ، روابط تعامدی

$$\int_0^{2\pi} u_n(x)u_m(x) dx = 0$$

را داریم. در نتیجه، S یک مجموعهٔ متعامد است. چون هیچ عضو S عنصر صفر نیست، S مستقل می‌باشد. نرم هر عنصر S را می‌توان به آسانی حساب کرد. داریم

$$(u_0, u_0) = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \text{ و به‌ازای } n \geq 1$$

$$(u_{2n-1}, u_{2n-1}) = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi, \quad (u_{2n}, u_{2n}) = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

بنابراین $\|u_0\| = \sqrt{2\pi}$ ، و به‌ازای $n \geq 1$ ، $\|u_n\| = \sqrt{\pi}$. با تقسیم هر u_n بر نرمش، مجموعهٔ متعامدیکه $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ به دست می‌آید که در آن $\varphi_n = u_n/\|u_n\|$. لذا، خواهیم داشت

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ و به‌ازای } n \geq 1 \text{ و } \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \text{ و } \varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

در بخش ۱۴.۰۱ ثابت می‌کنیم هر فضای اقلیدسی با بعد متناهی دارای پایهٔ متعامد است. قضیهٔ بعدی طرز محاسبهٔ مولفه‌های یک عنصر را نسبت به این پایه نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۱.۰۱. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی n بوده، و $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایهٔ متعامد V باشد. اگر x به صورت ترکیبی خطی از عناصر پایه بیان شده باشد، مثلاً

$$(۸.۰۱) \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i,$$

مولفه‌های آن نسبت به پایهٔ مرتب (e_1, \dots, e_n) از فرمولها، زیر به دست می‌آیند:

$$(۹.۰۱) \quad c_j = \frac{(x, e_j)}{(e_j, e_j)} \quad \text{به‌ازای } j = 1, 2, \dots, n$$

بخصوص، اگر S یک پایه متعامدیکه باشد، هر c_j از

$$(10.1) \quad c_j = (x, e_j)$$

به دست خواهد آمد.

برهان. با ضرب داخلی دوطرف (۸.۱) در e_j داریم

$$(x, e_j) = \sum_{i=1}^n c_i (e_i, e_j) = c_j (e_j, e_j)$$

چراکه اگر $i \neq j$ ، $(e_i, e_j) = 0$ ، از این (۹.۱) نتیجه می شود، و وقتی $(e_j, e_j) = 1$ ، (۱۰.۱) را خواهیم داشت.

چنانچه $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه متعامدیکه باشد، معادله (۹.۱) را می توان به

شکل

$$(11.1) \quad x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

نوشت.

قضیه زیر نشان می دهد که در یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی و با پایه متعامدیکه، حاصل ضرب داخلی دو عنصر را می توان بر حسب مؤلفه های آنها حساب کرد.

قضیه ۱۲.۱. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی n بوده، و $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه متعامدیکه آن باشد. در این صورت، به ازای هر جفت عنصر x و y در V داریم

$$(12.1) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^n (x, e_i) \overline{(y, e_i)} \quad (\text{فرمول پارسوال}^1)$$

بخصوص، وقتی $x = y$ ، خواهیم داشت

$$(13.1) \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2.$$

برهان. با ضرب دوطرف معادله^۴ (۱۱.۱) در y و استفاده از خاصیت خطی ضرب داخلی، (۱۲.۱) به دست می آید. وقتی $x = y$ ، معادله^۴ (۱۲.۱) به (۱۳.۱) تحویل می شود.

تذکره. معادله^۴ (۱۲.۱) به افتخار پارسوال (حدود ۱۸۳۶ - ۱۷۷۶)، که این نوع فرمول را در یک فضای تابعی خاص به دست آورد، نامگذاری شده است. معادله^۴ (۱۳.۱) تعمیم قضیه فیثاغورس^۱ است.

۱۳.۱ تمرین

۱. فرض کنید $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ بردارهای دلخواهی در V_n باشند. در هر حالت، که (x, y) با فرمولی تعریف شده، معین کنید که (x, y) یک ضرب داخلی برای V_n هست یا نه. در حالتی که نیست، بگویید کدام اصول موضوع برقرار نیستند:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (\text{ب}) \qquad (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i |y_i| \quad (\text{ت})$$

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 \right)^{1/2} \quad (\text{ج}) \qquad (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \quad (\text{د})$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (\text{ه})$$

۲. فرض کنید سه اصل موضوع اول ضرب داخلی حقیقی (تقارن، خطی، همگنی) را نگهداشته و اصل چهارم را با این اصل جدید عوض کرده باشیم: $(x, x) = 0$ ؛ اگر و فقط اگر $x = 0$. ثابت کنید یا به ازای هر $x \neq 0$ ، $(x, x) > 0$ یا به ازای هر $x \neq 0$ ، $(x, x) < 0$.

[راهنمایی. فرض کنید به ازای $x \neq 0$ ی $(x, x) > 0$ و به ازای $y \neq 0$ ی $(y, y) < 0$. در فضای پیموده شده به وسیله^۴ $\{x, y\}$ عنصری مانند $z \neq 0$ بیابید

$$[(z, z) = 0]$$

ثابت کنید که احکام تمرینهای ۳ تا ۷ به ازای هر x و y در یک فضای اقلیدسی

حقیقی معتبرند .

- ۳ . $(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $\|x + y\| = \|x - y\|$
- ۴ . $(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
- ۵ . $(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر به ازای هر c حقیقی $\|x + cy\| \geq \|x\|$
- ۶ . $(x + y, x - y) = 0$ اگر و فقط اگر $\|x\| = \|y\|$
- ۷ . هرگاه عنصرهای ناصفر x و y با هم زاویه θ بسازند ، آنگاه $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$.
- ۸ . در فضای خطی و حقیقی $C(1, e)$ ، ضرب داخلی را با معادله

$$(f, g) = \int_1^e (\log x) f(x) g(x) dx$$

تعریف کنید .

(T) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، f_1 را محاسبه کنید .

(ب) چند جمله‌ای خطی $g(x) = a + bx$ را که به تابع ثابت $f(x) = 1$ متعامد است پیدا کنید .

۹ . در فضای خطی و حقیقی $C(-1, 1)$ قرار دهید $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ ، و سه تابع u_1, u_2, u_3 را که با

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = t, \quad u_3(t) = 1 + t$$

داده شده‌اند در نظر بگیرید . ثابت کنید دوتای آنها متعامدند ، دوتا با هم زاویه $\pi/3$ می‌سازند ، و دوتا با هم زاویه $\pi/6$ می‌سازند .

۱۰ . در فضای خطی P_n مرکب از تمام چند جمله‌ایهای حقیقی با درجه نایبتر از n تعریف کنید

$$(f, g) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$$

(T) ثابت کنید (f, g) یک ضرب داخلی برای P_n است .

(ب) (f, g) را وقتی $f(t) = t$ و $g(t) = at + b$ محاسبه کنید .

(پ) هرگاه $f(t) = t$ ، تمام چند جمله‌ایهای خطی متعامد به f را بیابید .

۱۱ . در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی تعریف کنید $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t) dt$

(T) ثابت کنید این انتگرال مجازی به ازای تمام چند جمله‌ایهای f و g به‌طور

مطلق همگراست .

(ب) اگر به ازای $x_n(t) = t^n$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ ثابت کنید $(x_n, x_m) = (m+n)!$.

(پ) (f, g) را وقتی $f(t) = (t+1)^2$ و $g(t) = t^2 + 1$ محاسبه کنید .

(ت) تمام چند جمله‌ایهای خطی $g(t) = a + bt$ و متعامد به $f(t) = 1 + t$ را پیدا کنید .

۱۲. در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی، تعیین کنید (f, g) که با فرمولی

تعریف شده یک ضرب داخلی هست یا نه. درحالتی که نیست، نشان دهید کدام

اصول نقض شده‌اند. در (پ) f' و g' مشتق هستند:

$$(f, g) = f(1)g(1) \quad (\text{آ}) \quad ; \quad (f, g) = \left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right| \quad (\text{ب})$$

$$(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t) dt \quad (\text{پ}) \quad ; \quad (f, g) = \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 g(t) dt \right) \quad (\text{ت})$$

۱۳. فرض کنید V از تمام دنباله‌های نامتناهی $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی تشکیل شده که به

ازای آنها سری $\sum x_n^2$ همگراست. اگر $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ دو عنصر از V باشند،

تعریف کنید

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n .$$

(آ) ثابت کنید این سری به‌طور مطلق همگراست .

[راهنمایی . با استفاده از نامساوی کوشی - شوارتز، مجموع $\sum_{n=1}^M |x_n y_n|$ را تخمین

بزنید.]

(ب) ثابت کنید V یک فضای خطی با ضرب داخلی (x, y) است .

(پ) هرگاه به ازای $x_n = 1/n$ و $y_n = 1/(n+1)$ ، (x, y) را محاسبه کنید .

(ت) هرگاه به ازای $x_n = 2^n$ و $y_n = 1/n!$ ، (x, y) را محاسبه نمایید .

۱۴. فرض کنید V مجموعه تمام توابع حقیقی و پیوسته f بر $[0, +\infty)$ باشد که انتگرال

$$\int_0^{\infty} e^{-t} f^2(t) dt$$
 همگراست، و تعریف کنید $(f, g) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t)g(t) dt$.

(آ) ثابت کنید انتگرال معرف (f, g) به ازای هر جفت f و g در V به‌طور مطلق

همگراست .

[راهنمایی . با استفاده از نامساوی کوشی - شوارتز، انتگرال $\int_0^M e^{-t} |f(t)g(t)| dt$

را تخمین بزنید.]

(ب) ثابت کنید V یک فضای خطی با ضرب داخلی (f, g) است.

(پ) هرگاه $f(t) = e^{-t}$ و $g(t) = t^n$ که $n = 0, 1, 2, \dots$ را محاسبه کنید.

۱۵. ثابت کنید در هر فضای اقلیدسی مختلط، ضرب داخلی به ازای هر عنصر x, y, z و هر a و b مختلط از خواص زیر برخوردار است:

$$(T) \quad (ax, by) = a\bar{b}(x, y) \quad ; \quad (b) \quad (x, ay + bz) = \bar{a}(x, y) + \bar{b}(x, z)$$

۱۶. ثابت کنید در هر فضای اقلیدسی اتحادهای زیر برقرارند:

$$(T) \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x)$$

$$(b) \quad \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2(x, y) + 2(y, x)$$

$$(پ) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

۱۷. ثابت کنید که اگر در فضای تمام توابع مختلط پیوسته بر بازه $[a, b]$ ضرب داخلی با فرمول

$$(f, g) = \int_a^b w(t)f(t)\overline{g(t)} dt,$$

که در آن w یک تابع مثبت ثابت و پیوسته بر $[a, b]$ است، تعریف شود، این فضا به یک فضای یک‌ای تبدیل می‌شود.

۱۴.۱ ساختن مجموعه‌های متعامد. فرایند گرام-اشمیت^۲

هر فضای خطی با بعد متناهی دارای پایه متناهی است. چنانچه فضا اقلیدسی باشد، همیشه می‌توان یک پایه متعامد را ساخت. این مطلب از یک قضیه کلی نتیجه می‌شود که برهان آن طرز ساختن مجموعه‌های متعامد را در هر فضای اقلیدسی، با بعد متناهی یا نامتناهی، نشان می‌دهد. این ساختن به افتخار گرام (۱۹۱۶ - ۱۸۵۰) و اشمیت (۱۹۲۱ - ۱۸۴۵) فرایند متعامد سازی گرام-اشمیت نامیده شده است.

قضیه ۱۳.۱. قضیه متعامد سازی. فرض کنیم x_1, x_2, \dots دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از عناصرها در فضای اقلیدسی V ، و $L(x_1, \dots, x_k)$ زیر فضای پیموده شده به وسیله k عنصر اول باشد. در این صورت، دنباله‌ای مانند y_1, y_2, \dots از عناصر V هست که به ازای هر عدد صحیح k از خواص زیر برخوردار است:

(\bar{T}) عنصر y_k به هر عنصر زیر فضای $L(y_1, \dots, y_{k-1})$ متعامد است؛

(β) زیر فضای پیموده شده به وسیله y_1, \dots, y_k همان زیر فضای پیموده شده به وسیله x_1, \dots, x_k است؛

$$L(y_1, \dots, y_k) = L(x_1, \dots, x_k);$$

(ρ) دنباله y_1, y_2, \dots ، صرف نظر از سازه‌های اسکالر، منحصر بفرد است؛ یعنی،

هرگاه y'_1, y'_2, \dots دنباله دیگری از عناصر V و دارای خواص (\bar{T}) و (β) به‌ازای هر

k باشد، آنگاه به‌ازای هر k اسکالری مانند c_k هست بطوری که $y'_k = c_k y_k$.

برهان. عنصرهای y_1, y_2, \dots را به‌استقرا می‌سازیم. در شروع، y_1 را مساوی x_1 می‌گیریم. حال فرض کنیم y_1, \dots, y_r را ساخته باشیم بطوری که (\bar{T}) و (β) وقتی

$k = r$ برقرار باشند، و y_{r+1} را با معادله

$$(14.1) \quad y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^r a_i y_i$$

تعریف می‌کنیم، که در آن باید اسکالره‌های a_1, \dots, a_r تعیین شوند. به‌ازای $r \leq j$ ، حاصل ضرب داخلی y_{r+1} در y_j مساوی است با

$$(y_{r+1}, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - \sum_{i=1}^r a_i (y_i, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - a_j (y_j, y_j),$$

چرا که اگر $i \neq j$ ، $(y_i, y_j) = 0$. اگر $y_j \neq 0$ ، می‌توان با فرض

$$(15.1) \quad a_j = \frac{(x_{r+1}, y_j)}{(y_j, y_j)}$$

y_{r+1} را به y_j متعامد ساخت. اگر $y_j = 0$ ، y_{r+1} به‌ازای هر انتخابی از a_j به y_j متعامد است، و در این حالت a_j را صفر اختیار می‌کنیم. پس y_{r+1} تعریف شده است و به هر

عنصر قبلی y_1, \dots, y_r متعامد است. لذا، به هر عنصر زیر فضای

$$L(y_1, \dots, y_r)$$

متعامد می‌باشد. این (\bar{T}) را وقتی $k = r + 1$ ثابت خواهد کرد.

برای اثبات (β) وقتی $k = r + 1$ ، باید نشان داد که اگر

$$L(y_1, \dots, y_{r+1}) = L(x_1, \dots, x_{r+1}), \quad L(y_1, \dots, y_r) = L(x_1, \dots, x_r)$$

اول y_1, \dots, y_r در

$$L(x_1, \dots, x_r)$$

قرار دارند؛ و در نتیجه، در زیر فضای وسیعتر $L(x_1, \dots, x_{r+1})$ واقعند. عنصر جدید y_{r+1} که با (۱۴.۱) داده شده تفاضل دو عنصر در $L(x_1, \dots, x_{r+1})$ است؛ در نتیجه، آن نیز در $L(x_1, \dots, x_{r+1})$ می باشد. این ثابت می کند که

$$L(y_1, \dots, y_{r+1}) \subseteq L(x_1, \dots, x_{r+1}).$$

معادله (۱۴.۱) نشان می دهد که x_{r+1} مجموع دو عنصر در $L(y_1, \dots, y_{r+1})$ است؛ در نتیجه، استدلال مشابهی شمول در جهت دیگر را به ما می دهد:

$$L(x_1, \dots, x_{r+1}) \subseteq L(y_1, \dots, y_{r+1}).$$

این امر (ب) را وقتی $k = r + 1$ ثابت می کند. لذا، (آ) و (ب) به استقرا بر k ثابت شده اند.

بالاخره، (پ) را به استقرا بر k ثابت می کنیم. حالت $k = 1$ واضح است. پس فرض می کنیم (پ) به ازای $k = r$ درست باشد و عنصر y'_{r+1} را در نظر می گیریم. بخاطر (ب)، این عنصر در

$$L(y_1, \dots, y_{r+1})$$

است؛ و در نتیجه، می توان نوشت

$$y'_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} c_i y_i = z_r + c_{r+1} y_{r+1},$$

که در آن $z_r \in L(y_1, \dots, y_r)$ می خواهیم ثابت کنیم $z_r = 0$. گوییم، طبق خاصیت (آ)، هر دو y'_{r+1} و $c_{r+1} y_{r+1}$ به z_r متعامند. پس تفاضلشان، z_r ، نیز به z_r متعام است. به عبارت دیگر، z_r به خودش متعام است؛ و در نتیجه، $z_r = 0$. این برهان قضیه متعام سازی را تمام خواهد کرد.

در ساختن زیر، فرض کنید به ازای r داشته باشیم $y_{r+1} = 0$. در این صورت، از (۱۴.۱) معلوم می شود که x_{r+1} ترکیبی خطی از y_1, \dots, y_r ، و در نتیجه از x_1, \dots, x_r است. پس عنصرهای x_1, \dots, x_{r+1} وابسته می باشند. به عبارت دیگر، اگر k عنصر اول x_1, \dots, x_k مستقل باشند، عنصرهای نظیرشان y_1, \dots, y_k ناصفر هستند. در این حالت ضرایب a_i در (۱۴.۱) از (۱۵.۱) به دست می آیند، و فرمولهای معرف y_1, \dots, y_k شکل زیر را خواهند یافت:

$$(۱۶۰۱) y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^r \frac{(x_{r+1}, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i, \quad r = 1, 2, \dots, k-1; \quad y_1 = x_1$$

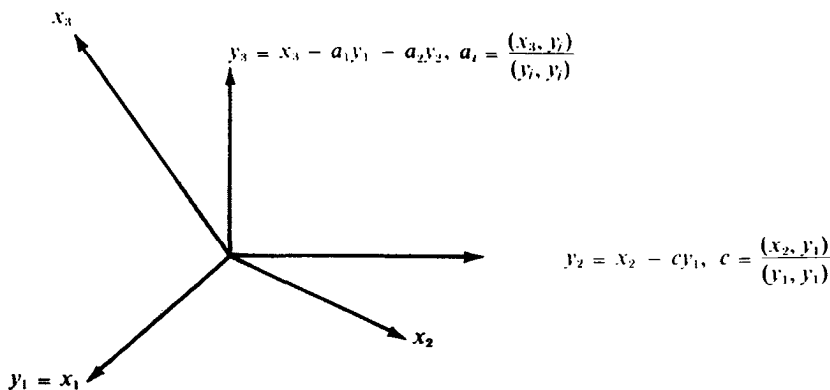
این فرمولها فرایند گرام - اشمیت را برای ساختن یک مجموعه متعامد از عنصرهای ناصفر y_1, \dots, y_k که همان زیر فضای پیموده شده به وسیله مجموعه مستقل x_1, \dots, x_k را می پیماید توصیف می کند. در حالت خاص، اگر x_1, \dots, x_k پایه یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی باشد، y_1, \dots, y_k یک پایه متعامد برای همان فضا می باشد. می توان این پایه را با نرمیده کردن هر عنصر y_i ، یعنی تقسیم آن بر نرمش، به یک پایه متعامد یکه نیز بدل کرد. لذا، به عنوان نتیجه ای از قضیه ۱۳.۰۱، داریم

قضیه ۱۴.۰۱. هر فضای اقلیدسی با بعد متناهی دارای یک پایه متعامد یکه است.

اگر x و y عنصرهای یک فضای اقلیدسی باشند و $y \neq 0$ ، عنصر

$$\frac{(x, y)}{(y, y)} y$$

تصویر x در امتداد y نامیده می شود. در فرایند گرام - اشمیت (۱۶.۰۱)، ما عنصر y_{r+1} را با تفریق تصویر x_{r+1} در امتداد هر y_1, \dots, y_r از x_{r+1} می سازیم. شکل ۱۰.۱ این ساختن را در فضای برداری V_3 به طور هندسی نشان می دهد.



شکل ۱۰.۱ فرایند گرام - اشمیت در V_3 . مجموعه متعامد $\{y_1, y_2, y_3\}$ از مجموعه مستقل $\{x_1, x_2, x_3\}$ ساخته شده است.

مثال ۰۱. در V_4 ، برای زیر فضای پیموده شده به وسیله سه بردار $x_1 = (1, -1, 1, -1)$ ، $x_2 = (5, 1, 1, 1)$ و $x_3 = (-3, -3, 1, -3)$ یک پایه متعامد یکه بیابید.

حل. با استفاده از فرایند گرام-اشمیت داریم

$$y_1 = x_1 = (1, -1, 1, -1),$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x_2 - y_1 = (4, 2, 0, 2),$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = x_3 - y_1 + y_2 = (0, 0, 0, 0).$$

چون $y_3 = 0$ ، سه بردار x_1, x_2, x_3 باید وابسته باشند. اما چون y_1 و y_2 ناصفرند، بردارهای x_1 و x_2 مستقل می‌باشند. لذا، $L(x_1, x_2, x_3)$ یک زیر فضا با بعد 2 است. مجموعه $\{y_1, y_2\}$ یک پایه متعامد برای این زیر فضا است. با تقسیم هریک از y_1 و y_2 بر نرمش به یک پایه متعامد یکه مرکب از دو بردار

$$\frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1) \quad \text{و} \quad \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$$

دست می‌یابیم.

مثال ۰۲. چند جمله‌ایهای لژاندر^۱ در فضای خطی تمام چند جمله‌ایها با ضرب داخلی $(x, y) = \int_{-1}^1 x(t)y(t) dt$ ، دنباله نامتناهی x_0, x_1, x_2, \dots را، که در آن $x_n(t) = t^n$ ، در نظر می‌گیریم. با اعمال قضیه متعامد سازی براین دنباله، دنباله دیگر y_0, y_1, y_2, \dots از چند جمله‌ایها به دست می‌آید که اول بار لژاندر (۱۸۳۳ - ۱۷۵۲)، ریاضیدان فرانسوی، در کارهایش در زمینه نظریه پتانسیل به آن برخورد کرد. چند جمله‌ایهای اول این دنباله به آسانی با فرایند گرام-اشمیت قابل محاسبه‌اند. قبل از همه، داریم $x_0(t) = y_0(t) = 1$ و چون

$$(x_1, y_0) = \int_{-1}^1 t dt = 0 \quad \text{و} \quad (y_0, y_0) = \int_{-1}^1 dt = 2$$

معلوم می‌شود که

$$y_1(t) = x_1(t) - \frac{(x_1, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) = x_1(t) = t.$$

حال، با استفاده از روابط

$$(x_2, y_0) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}, \quad (x_2, y_1) = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0, \quad (y_1, y_1) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

داریم

$$y_2(t) = x_2(t) - \frac{(x_2, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}.$$

به همین ترتیب، معلوم می‌شود که

$$y_3(t) = t^3 - \frac{3}{8}t, \quad y_4(t) = t^4 - \frac{9}{7}t^2 + \frac{3}{8}, \quad y_5(t) = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t.$$

ما با این چند جمله‌ایها مجدداً "در فصل ۶ در بررسی بیشتر معادلات دیفرانسیل برمی‌خوریم، و ثابت خواهیم کرد که

$$y_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

چند جمله‌ایهای P_n ، که از

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} y_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

به دست می‌آیند، به چند جمله‌ایهای لژاندر معروفند، و چند جمله‌ایها در دنباله متعامد یک‌به‌یکه نظیر $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ ، که از $\varphi_n = y_n / \|y_n\|$ به دست می‌آیند، به چند جمله‌ایهای نرمیده لژاندر شهرت دارند. از فرمولهای فوق برای y_0, \dots, y_5 معلوم می‌شود که

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3t^2 - 1), \quad \varphi_3(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5t^3 - 3t),$$

$$\varphi_4(t) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (35t^4 - 30t^2 + 3), \quad \varphi_5(t) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{11}{2}} (63t^5 - 70t^3 + 15t).$$

۱۵.۱ متممهای متعامد. تصویرها

فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و S زیر فضایی با بعد متناهی از آن باشد. مسئله تقریب زیر را مطرح می‌کنیم: به فرض معلوم بودن x در V ، می‌خواهیم عنصری r در

S تعیین کنیم که فاصله اش تا x حتی الامکان کوچک باشد. فاصله بین عنصرهای x و y مساوی نرم $\|x - y\|$ تعریف می شود.

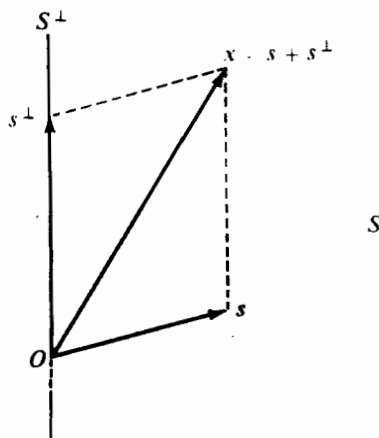
قبل از آنکه مسئله به شکل کلی مطرح شود، حالت خاصی را که در شکل ۲۰۱ نموده شده در نظر می گیریم. در اینجا V فضای برداری V_3 و S یک زیر فضای دوبعدی آن، یعنی یک صفحه ماربر مبدا، است. به فرض معلوم بودن x در V ، مسئله یافتن نقطه s در S است که به x نزدیکترین باشد.

واضح است که اگر $x \in S$ ، $s = x$ جواب است. و اگر x در S نباشد، نزدیکترین نقطه s با وارد کردن عمود از x به صفحه به دست می آید. این مثال ساده راه حل مسئله کلی تقریب را گشوده و ما را به بحث زیر می کشاند.

تعریف. فرض کنیم S یک زیر مجموعه فضای اقلیدسی V باشد. یک عنصر در V را متعامد به S گوئیم هرگاه به هر عنصر S متعامد باشد. مجموعه تمام عناصر متعامد به S را با S^\perp نموده و "عمود بر S " می نامیم.

به آسانی تحقیق می شود که S^\perp ، چه خود S زیر فضای V باشد یا نه، یک زیر فضای V است. درحالتی که S زیر فضاست، S^\perp متمم متعامد S نام دارد.

مثال. اگر، مثل شکل ۲۰۱، S صفحه ای ماربر مبدا باشد، S^\perp خطی است ماربر مبدا



شکل ۲۰۱ تعبیر هندسی قضیه تجزیه متعامد در V_3

و عمود بر این صفحه. این مثال تعبیر هندسی قضیه بعدی نیز خواهد بود.

قضیه ۱۵۰۱. قضیه تجزیه متعامد. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و S یک زیر فضای با بعد متناهی آن باشد. در این صورت، هر عنصر x در V را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به صورت مجموع دو عنصر، یکی در S و یکی در S^\perp ، بیان کرد؛ یعنی، داریم

$$(17.01) \quad x = s + s^\perp, \quad \text{که در آن } s \in S \text{ و } s^\perp \in S^\perp.$$

بعلاوه، نرم x از فرمول فیثاغورس

$$(18.01) \quad \|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^\perp\|^2$$

به دست خواهد آمد.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم تجزیه متعامد (۱۷.۰۱) عملاً وجود دارد. گوییم چون S با بعد متناهی است، S دارای یک پایه متعامد یکه متناهی، مثلاً $\{e_1, \dots, e_n\}$ ، است. به فرض معلوم بودن x ، عنصرهای s و s^\perp را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(19.01) \quad s = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i, \quad s^\perp = x - s.$$

توجه کنید که هر جمله $(x, e_i) e_i$ تصویر x در امتداد e_i است. s مجموع تصاویر x در امتداد هر عنصر پایه است. چون s ترکیبی خطی از عناصر پایه است، s در S قرار دارد. تعریف s^\perp نشان می‌دهد که معادله (۱۷.۰۱) برقرار است. برای اثبات واقع بودن s^\perp در S^\perp ، حاصل ضرب داخلی s^\perp را با هر عنصر پایه e_j در نظر می‌گیریم. داریم

$$(s^\perp, e_j) = (x - s, e_j) = (x, e_j) - (s, e_j).$$

اما از (۱۹.۰۱) درمی‌یابیم که $(s, e_j) = (x, e_j)$ ؛ در نتیجه، s^\perp به e_j متعامد است. بنابراین، s^\perp به هر عنصر در S متعامد است، که به این معنی است که $s^\perp \in S^\perp$. حال ثابت می‌کنیم تجزیه متعامد (۱۷.۰۱) منحصر بفرد است. فرض کنیم x دو نمایش این چنینی، مثلاً

$$x = t + t^\perp \quad \text{و} \quad x = s + s^\perp$$

را داشته باشد، که در آنها s و t در S اند و s^\perp و t^\perp در S^\perp می‌خواهیم ثابت کنیم $s = t$ و $s^\perp = t^\perp$. گوییم از (۲۰.۰۱) داریم $s^\perp - t^\perp = s - t$ ؛ در نتیجه، کافی

است ثابت کنیم $s - t = 0$ اما $s - t \in S$ و $s^\perp - t^\perp \in S^\perp$ ؛ در نتیجه، $s - t$ هم به $s^\perp - t^\perp$ متعامد است و هم با آن مساوی. چون عنصر صفر تنها عنصر متعامد به خود است، بایستی داشته باشیم $s - t = 0$. این نشان می‌دهد که تجزیه منحصر بفرد است.

بالاخره، ثابت می‌کنیم نرم x از فرمول فیثاغورس به دست می‌آید. گوییم داریم

$$\|x\|^2 = (x, x) = (s + s^\perp, s + s^\perp) = (s, s) + (s^\perp, s^\perp),$$

بقیه جملات، بدلیل متعامد بودن s و s^\perp ، صفرند. این (۱۸.۱) را ثابت خواهد کرد.

تعریف. فرض کنیم S یک زیرفضای با بعد متناهی فضای اقلیدسی V بوده، و $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه متعامد یک‌ه‌آ آن باشد. اگر $x \in V$ ، عنصر s که با معادله

$$s = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

تعریف می‌شود تصویر x بر زیر فضای S نامیده می‌شود.

حال ثابت می‌کنیم تصویر x بر S جواب مسئله تقریبی است که در آغاز این بخش مطرح شد.

۱۶.۱ بهترین تقریب عنصرها در یک فضای اقلیدسی به وسیله عنصرهای یک زیرفضای با بعد متناهی

قضیه ۱۶.۱. قضیه تقریب. فرض کنیم S یک زیرفضای با بعد متناهی فضای اقلیدسی V بوده، و x عنصر دلخواهی از V باشد. در این صورت، تصویر x بر S از هر عنصر دیگر s به x نزدیکتر است؛ یعنی، اگر s تصویر x بر S باشد، به ازای هر t در S داریم

$$\|x - s\| \leq \|x - t\|;$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $t = s$.

برهان. بنابر قضیه ۱۵.۱ می‌توان نوشت $x = s + s^\perp$ ، که در آن $s \in S$ و $s^\perp \in S^\perp$.

پس، به‌ازای هر t در S داریم

$$x - t = (x - s) + (s - t).$$

چون $s - t \in S$ و $s - t \in S^\perp$ ، این یک تجزیهٔ متعامد $x - t$ است؛ در نتیجه، نرم آن از فرمول فیثاغورس

$$\|x - t\|^2 = \|x - s\|^2 + \|s - t\|^2$$

به دست می‌آید. اما $\|s - t\|^2 \geq 0$. بنابراین، داریم $\|x - t\|^2 \geq \|x - s\|^2$ ، که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $s = t$. این برهان را تمام خواهد کرد.

مثال ۱. تقریب توابع پیوسته بر $[0, 2\pi]$ به وسیلهٔ چندجمله‌ایهای مثلثاتی. فرض کنیم $V = C(0, 2\pi)$ ، یعنی فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[0, 2\pi]$ باشد، و ضرب داخلی را با معادلهٔ $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ تعریف می‌کنیم. در بخش ۱۲.۱ مجموعهٔ متعامد یکه از توابع مثلثاتی $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ ارائه شد که در آن

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \text{ و به‌ازای } k \geq 1, \varphi_{2k-1}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \text{ و } \varphi_{2k}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad (21.1)$$

$2n + 1$ عنصر $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ زیرفضای S با بعد $2n + 1$ را می‌پیمایند، و عنصرهای S چندجمله‌ایهای مثلثاتی نامیده می‌شوند.

اگر $f_n \in C(0, 2\pi)$ ، f_n را تصویر f بر زیرفضای S می‌انگاریم. در این صورت، داریم

$$(22.1) \quad (f, \varphi_k) = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_k(x) dx, \text{ که در آن } f_n = \sum_{k=0}^{2n} (f, \varphi_k)\varphi_k$$

اعداد (f, φ_k) ضرایب فوریهٔ f نام دارند. با استفاده از این فرمولها در (۲۱.۱)، می‌توان (۲۲.۱) را به شکل

$$(23.1) \quad f_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

نوشت، که در آن به‌ازای $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

قضیه تقریب می‌گوید که چند جمله‌ای مثلثاتی (۲۳.۱) f را بهتر از هر چند جمله‌ای مثلثاتی دیگر در S تقریب می‌کند، در این معنی که نرم $\|f - f_n\|$ حتی المقدور کوچک است.

مثال ۲. تقریب توابع پیوسته بر $[-1, 1]$ به وسیله چند جمله‌ایهای از درجه نایبتر از n . فرض کنیم $V = C(-1, 1)$ ، یعنی فضای توابع پیوسته حقیقی بر $[-1, 1]$ بوده، و $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ و $n + 1$ چند جمله‌ای نرمیده شده لزاندار $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ که در بخش ۱۴.۱ معرفی شد، زیر فضای S با بعد $n + 1$ مرکب از تمام چند جمله‌ایهای از درجه نایبتر از n رامی‌پیمایند. اگر $f \in C(-1, 1)$ ، f_n را تصویر f بر S می‌گیریم. در این صورت، داریم

$$(f, \varphi_k) = \int_{-1}^1 f(t)\varphi_k(t) dt \quad \text{که در } T_n \text{، } f_n = \sum_{k=0}^n (f, \varphi_k)\varphi_k$$

این چند جمله‌ای از درجه نایبتر از n است که به ازای آن $\|f - f_n\|$ کوچکترین است. مثلاً، وقتی $f(x) = \sin \pi x$ ، ضرایب (f, φ_k) از

$$(f, \varphi_k) = \int_{-1}^1 \sin \pi t \varphi_k(t) dt$$

به دست می‌آیند. بخصوص، داریم $(f, \varphi_0) = 0$ و

$$(f, \varphi_1) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} t \sin \pi t dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{\pi}.$$

پس چند جمله‌ای خطی $f_1(t)$ که به $\sin \pi t$ بر $[-1, 1]$ نزدیکترین است عبارت خواهد بود از

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{\pi} \varphi_1(t) = \frac{3}{\pi} t.$$

چون $(f, \varphi_2) = 0$ ، این نزدیکترین تقریب درجه دوم نیز می‌باشد.

۱۷.۱ تمرین

۱. در هر حالت، برای زیر فضایی از V_3 که به وسیله بردارهای زیر پیموده می‌شود یک پایه متعامد یکه بیابید:

$$x_1 = (1, 1, 1), \quad x_2 = (1, 0, 1), \quad x_3 = (3, 2, 3) \quad (T)$$

$$\cdot x_1 = (1, 1, 1), \quad x_2 = (-1, 1, -1), \quad x_3 = (1, 0, 1) \quad (\text{ب})$$

۲. در هر حالت، برای زیر فضایی از V_4 که به وسیله بردارهای زیر پیموده می شود یک پایه متعامد یکه بیابید:

$$\cdot x_1 = (1, 1, 0, 0), \quad x_2 = (0, 1, 1, 0), \quad x_3 = (0, 0, 1, 1), \quad x_4 = (1, 0, 0, 1) \quad (\text{آ})$$

$$\cdot x_1 = (1, 1, 0, 1), \quad x_2 = (1, 0, 2, 1), \quad x_3 = (1, 2, -2, 1) \quad (\text{ب})$$

۳. در فضای خطی حقیقی $C(0, \pi)$ با ضرب داخلی $(x, y) = \int_0^\pi x(t)y(t) dt$ ، فرض کنید به ازای y_0, y_1, y_2, \dots و ثابت کنید تابعهای $x_n(t) = \cos nt$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ که

$$y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt, \quad n \geq 1 \quad \text{و به ازای} \quad y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

یک مجموعه متعامد یکه تشکیل می دهند که همان زیر فضای پیموده شده به وسیله x_0, x_1, x_2, \dots را می پیماید.

۴. در فضای خطی تمام چند جمله ایهای حقیقی با ضرب داخلی $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t) dt$ ، فرض کنید به ازای $x_n(t) = t^n$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ و ثابت کنید تابعهای

$$y_0(t) = 1, \quad y_1(t) = \sqrt{3}(2t - 1), \quad y_2(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)$$

یک مجموعه متعامد یکه تشکیل می دهند که همان زیر فضای پیموده شده به وسیله $\{x_0, x_1, x_2\}$ را می پیماید.

۵. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی و پیوسته f بر $[0, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_0^\infty e^{-t}f^2(t) dt$ به ازای آنها همگراست. تعریف کنید $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t}f(t)g(t) dt$ و فرض کنید y_0, y_1, y_2, \dots مجموعه حاصل از اعمال فرایند گرام - اشمیت بر x_0, x_1, x_2, \dots که $x_n(t) = t^n$ به ازای $n \geq 0$ باشد. ثابت کنید $y_0(t) = 1$

$$\cdot y_3(t) = t^3 - 9t^2 + 18t - 6 \quad \text{و} \quad y_2(t) = t^2 - 4t + 2 \quad \cdot y_1(t) = t - 1$$

۶. در فضای خطی حقیقی $C(1, 3)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_1^3 f(x)g(x) dx$ ، فرض کنید $f(x) = 1/x$ ، و نشان دهید که نزدیکترین چند جمله ای ثابت g به f $g = \frac{1}{2} \log 3$ است. $\|g - f\|^2$ را به ازای این g حساب کنید.

۷. در فضای خطی حقیقی $C(0, 2)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^2 f(x)g(x) dx$ ، فرض کنید $f(x) = e^x$ ، و نشان دهید که نزدیکترین چند جمله ای ثابت g به f $g = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$ است. $\|g - f\|^2$ را به ازای این g حساب کنید.

۸. در فضای خطی حقیقی $C(-1, 1)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ ، فرض

کنید $f(x) = e^x$ ، و نزدیکترین چند جمله‌ای خطی g به f را پیدا کنید .
 $\|g - f\|^2$ را به ازای این g محاسبه نمایید .

۹ . در فضای خطی حقیقی $C(0, 2\pi)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ ، فرض

کنید $f(x) = x$ ، و در زیر فضای پیموده شده به وسیله

$u_0(x) = 1, u_1(x) = \cos x, u_2(x) = \sin x$ ، نزدیکترین چند جمله‌ای مثلثاتی به f را بیابید .

۱۰ . در فضای خطی V تمرین ۵ ، فرض کنید $f(x) = e^{-x}$ ، و نزدیکترین چند جمله‌ای خطی به f را بیابید .

تبدیلات خطی و ماتریسها

۱.۲ تبدیلات خطی

یکی از هدفهای غایی آنالیز بررسی جامع توابعی است که قلمرو و بردشان زیر مجموعه‌هایی از فضاهای خطی اند. این تابعها را تبدیل، نگاشت، یا عملگر می‌نامند، و در این فصل ساده‌ترین آنها، به نام تبدیلات خطی، که در تمام شاخه‌های ریاضی دیده می‌شوند مطرح می‌گردند. خواص تبدیلات کلیتر را اغلب با تقریب آنها به وسیله تبدیلات خطی به دست می‌آورند.

ابتدا چند نماد و اصطلاح مربوط به تابعهای دلخواه را معرفی می‌کنیم. فرض کنیم V و W دو مجموعه باشند. علامت

$$T: V \rightarrow W$$

را برای بیان اینکه T تابعی است که قلمروش V بوده و مقادیرش در W اند به کار می‌بریم. به ازای هر x در V ، عنصر $T(x)$ در W را نقش x تحت T می‌نامیم، و می‌گوییم T ، x را بروی $T(x)$ می‌نگارد. اگر A زیر مجموعه V باشد، مجموعه تمام نقشهای $T(x)$ به ازای x در A نقش A تحت T نام دارد و با $T(A)$ نموده می‌شود. نقش قلمرو V ، یعنی $T(V)$ ، برد T می‌باشد.

حال فرض کنیم V و W فضاهایی خطی و دارای یک مجموعه از اسکالر باشند، و تبدیل خطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف. هرگاه V و W فضاهایی خطی باشند، تابع $T: V \rightarrow W$ در صورتی یک تبدیل خطی از V بتوی W است که از دو خاصیت زیر بهره‌مند باشد:

(ت) به‌ازای هر x و y در V ، $T(x+y) = T(x) + T(y)$ ؛

(ب) به‌ازای هر x در V و هر اسکالر c ، $T(cx) = cT(x)$ ؛

این خواص را می‌توان با لفظ بیان کرد و این‌طور گفت که T جمع و ضرب در اسکالر را حفظ می‌کند. دو خاصیت در یک فرمول خلاصه می‌شوند که می‌گویند به‌ازای هر x و y در V و هر دو اسکالر a و b

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y) .$$

به استقرا، رابطه کلیتر

$$T\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i T(x_i)$$

را به‌ازای هر n عنصر x_1, \dots, x_n در V و هر n اسکالر a_1, \dots, a_n خواهیم داشت.

خواننده می‌تواند به‌آسانی تحقیق کند که مثالهای زیر تبدیلاتی خطی اند.

مثال ۱. تبدیل همانی. تبدیل $T: V \rightarrow V$ ، که به‌ازای هر x در V ، $T(x) = x$ ، تبدیل همانی نام دارد و با I یا I_V نموده می‌شود.

مثال ۲. تبدیل صفر. تبدیل $T: V \rightarrow V$ ، که هر عنصر V را بروی O می‌نگارد، تبدیل صفر نام دارد و با O نموده می‌شود.

مثال ۳. ضرب در اسکالر ثابت c . در اینجا داریم $T: V \rightarrow V$ ، که به‌ازای هر x در V ، $T(x) = cx$ ، وقتی $c = 1$ ، این همان تبدیل همانی است؛ و وقتی $c = 0$ ، تبدیل صفر است.

مثال ۴. معادلات خطی. فرض کنیم $V = V_n$ و $W = V_m$. با معلوم بودن $m \times n$ عدد حقیقی a_{ik} ، که $i = 1, 2, \dots, m$ و $k = 1, 2, \dots, n$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم: T هر بردار $x = (x_1, \dots, x_n)$ در V_n را طبق معادلات زیر بروی بردار $y = (y_1, \dots, y_m)$ در V_m می‌نگارد:

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

مثال ۵. ضرب داخلی در یک عنصر ثابت. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی حقیقی باشد. به ازای عنصر ثابت z در V ، $T: V \rightarrow \mathbf{R}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: اگر $T(x) = (x, z)$ ، یعنی حاصل ضرب داخلی x در z .

مثال ۶. تصویر بر یک زیر فضا. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و S یک زیر فضای بابت متناهی آن باشد. $T: V \rightarrow S$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: اگر $x \in V$ ، $T(x)$ عبارت است از تصویر x بر S .

مثال ۷. عملگر مشتقگیری. فرض کنیم V فضای خطی تمام توابع حقیقی f باشد که بر بازه (a, b) مشتقپذیر است. تبدیل خطی که هر f در V را بروی مشتقش f' می‌نگارد عملگر مشتقگیری نام دارد و با D نموده می‌شود. بنابراین، داریم $D: V \rightarrow W$ ، که به ازای هر f در V ، $D(f) = f'$ ، فضای W از تمام f' ها تشکیل شده است.

مثال ۸. عملگر انتگرالگیری. فرض کنیم V فضای خطی تمام توابع حقیقی و پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد. به ازای $f \in V$ ، $g = T(f)$ را تابعی در V می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

تبدیل T را عملگر انتگرالگیری می‌نامند.

۲۰۲ فضای پوچ و برد

در این بخش، T یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W است.

قضیه ۱۰۲. مجموعه $T(V)$ (برد T) یک زیر فضای W است. بعلاوه، T عنصر صفر V را بروی عنصر صفر W می‌نگارد.

پرهان. برای اثبات اینکه $T(V)$ زیر فضای W است، فقط کافی است اصول موضوع بسته بودن تحقیق شوند. دو عنصر $T(x)$ و $T(y)$ را از $T(V)$ اختیار می‌کنیم. پس $T(x) + T(y) = T(x + y)$ ؛ در نتیجه، $T(x) + T(y)$ در $T(V)$ است. همچنین، به

ازای هراسکالر c داریم $cT(x) = T(cx)$ ؛ در نتیجه، $cT(x)$ در $T(V)$ می‌باشد. بنابراین— این، $T(V)$ یک زیر فضای W است. با اختیار $c = 0$ در $T(cx) = cT(x)$ معلوم می‌شود که $T(O) = O$.

تعریف. مجموعهٔ تمام عناصری از V که به وسیلهٔ T بروی O نگاشته می‌شوند فضای پوچ T نام دارد و با $N(T)$ نموده می‌شود. بنابراین، داریم

$$N(T) = \{x \mid T(x) = O \text{ و } x \in V\}.$$

فضای پوچ گاهی هستهٔ T نیز نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۲.۰۲. فضای پوچ T یک زیر فضای V است.

برهان. هرگاه x و y در $N(T)$ باشند، $x + y$ و cx به‌ازای هراسکالر c نیز چنین‌اند، زیرا

$$T(cx) = cT(x) = O \text{ و } T(x + y) = T(x) + T(y) = O$$

مثالهای زیر، فضاهای پوچ تبدیلات خطی بخش ۱.۰۲ را توصیف می‌کنند.

مثال ۱. تبدیل همانی. فضای پوچ $\{O\}$ است؛ یعنی، زیر فضایی که فقط از عنصر صفر تشکیل شده است.

مثال ۲. تبدیل صفر. چون هر عنصر V بروی صفر نگاشته می‌شود، فضای پوچ خود V است.

مثال ۳. ضرب در اسکالر ثابت c . اگر $c \neq 0$ ، فضای پوچ فقط شامل O است؛ و اگر $c = 0$ ، فضای پوچ V می‌باشد.

مثال ۴. معادلات خطی. فضای پوچ از تمام بردارهای (x_1, \dots, x_n) در V_n تشکیل شده که

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = 0, i = 1, 2, \dots, m \text{ به‌ازای}$$

مثال ۵. ضرب داخلی در عنصر ثابت z . فضای پوچ از تمام عنصرهایی در V تشکیل شده که به z متعامند.

مثال ۶. تصویر بر زیر فضای S . به‌ازای $x \in V$ (بنابر قضیه ۱۵.۱) تجزیه متعام منحصر بفرد $x = s + s^\perp$ را داریم. چون $T(x) = s$ ، اگر $T(x) = 0$ ، فقط اگر $x = s^\perp$ پس فضای پوچ مساوی S^\perp ، یعنی متمم متعام S ، است.

مثال ۷. عملگر مشتگیری. فضای پوچ از تمام توابعی تشکیل شده که بر بازه مفروض ثابت هستند.

مثال ۸. عملگر انتگرالگیری. فضای پوچ فقط از تابع صفر تشکیل شده است.

۳.۲ پوچه و رتبه

مجدداً در این بخش T یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W است. ما به رابطه بین بعدهای V ، فضای پوچ $N(T)$ ، و برد $T(V)$ نظر داریم. اگر V با بعد متناهی باشد، فضای پوچ نیز با بعد متناهی است، چونکه زیر فضای V است. بعد $N(T)$ را پوچه T می‌نامیم. در قضیه زیر ثابت می‌کنیم برد نیز با بعد متناهی است؛ بعدش رتبه T نام دارد.

قضیه ۳.۲. قضیه پوچه بعلاوه رتبه هرگاه V با بعد متناهی باشد، $T(V)$ نیز با بعد متناهی است و داریم

$$\dim N(T) + \dim T(V) = \dim V. \quad (1.2)$$

به عبارت دیگر، پوچه بعلاوه رتبه یک تبدیل خطی مساوی بعد قلمرو آن است.

برهان. فرض کنیم $n = \dim V$ ، e_1, \dots, e_n پایه‌ای از $N(T)$ باشد که

"طبق قضیه ۷.۱، این عنصرها بخشی از یک پایه \mathcal{V} ، مثلا"

$$(۳.۲) \quad e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+r},$$

هستند که $k+r = n$. ثابت می‌کنیم r عنصر

$$(۳.۲) \quad T(e_{k+1}), \dots, T(e_{k+r})$$

یک پایه $T(V)$ را تشکیل می‌دهند؛ و لذا، ثابت می‌شود که $\dim T(V) = r$. چون $k+r = n$ ، این (۱.۲) را نیز ثابت خواهد کرد.

ابتدا نشان می‌دهیم که r عنصر (۳.۲) $T(V)$ را می‌پیمایند. گوییم هرگاه $y \in T(V)$ ، به ازای x در V داریم $y = T(x)$ ، و می‌توانیم بنویسیم $x = c_1 e_1 + \dots + c_{k+r} e_{k+r}$ ، چون $T(e_1) = \dots = T(e_k) = 0$ ،

$$y = T(x) = \sum_{i=1}^{k+r} c_i T(e_i) = \sum_{i=1}^k c_i T(e_i) + \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(e_i) = \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(e_i).$$

این نشان می‌دهد که عنصرهای (۳.۲) $T(V)$ را می‌پیمایند.

حال نشان می‌دهیم که این عنصرها مستقلند. فرض کنیم اسکالرهایی چون

c_{k+1}, \dots, c_{k+r} باشند بطوری که

$$\sum_{i=k+1}^{k+r} c_i T(e_i) = 0.$$

این ایجاب می‌کند که

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{k+r} c_i e_i\right) = 0;$$

در نتیجه، عنصر $x = c_{k+1} e_{k+1} + \dots + c_{k+r} e_{k+r}$ در فضای پوچ $N(T)$ واقع است. این یعنی اسکالرهایی چون c_1, \dots, c_k وجود دارند بطوری که $x = c_1 e_1 + \dots + c_k e_k$ ؛ در نتیجه، داریم

$$x - x = \sum_{i=1}^k c_i e_i - \sum_{i=k+1}^{k+r} c_i e_i = 0.$$

اما، چون عنصرهای (۲.۲) مستقلند، این ایجاب می‌کند که تمام c_i ها صفر باشند. لذا، عنصرهای (۳.۲) مستقل می‌باشند.

تذکر. اگر \mathcal{V} با بعد نامتناهی باشد، دست کم یکی از $N(T)$ یا $T(V)$ با بعد نامتناهی

است. برهان مجمل این مطلب در تمرین ۳۰، بخش ۴۰۲، آمده است.

۴۰۲ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، تبدیل $T: V_2 \rightarrow V_2$ با فرمولی برای $T(x, y)$ ، که (x, y) نقطه دلخواهی از V_2 است، تعریف شده است. در هر حالت تعیین کنید که T خطی است یا نه. در صورت خطی بودن T ، فضای بوج و برد آن را توصیف و بوجه و رتبه آن را محاسبه کنید.

$$1. \quad T(x, y) = (y, x) \quad 2. \quad T(x, y) = (x, -y)$$

$$3. \quad T(x, y) = (x, 0) \quad 4. \quad T(x, y) = (x, x)$$

$$5. \quad T(x, y) = (x^2, y^2) \quad 6. \quad T(x, y) = (e^x, e^y)$$

$$7. \quad T(x, y) = (x, 1) \quad 8. \quad T(x, y) = (x + 1, y + 1)$$

$$9. \quad T(x, y) = (x - y, x + y) \quad 10. \quad T(x, y) = (2x - y, x + y)$$

همین کار را در تمرینهای ۱۱ تا ۱۵ با تبدیل $T: V_2 \rightarrow V_2$ مذکور در آنها انجام

دهید.

۱۱. T هر نقطه را به قدر زاویه φ حول مبدا می چرخاند؛ یعنی، T یک نقطه به مختصات قطبی (r, θ) را به نقطه به مختصات قطبی $(r, \theta + \varphi)$ ، که φ ثابت است، می نگارد. همچنین، T ، O را به خود آن می نگارد.

۱۲. T هر نقطه را به منعکس نسبت به خط ثابتی ماربر مبدا می نگارد.

۱۳. T هر نقطه را به نقطه $(1, 1)$ می نگارد.

۱۴. T هر نقطه به مختصات قطبی (r, θ) را به نقطه به مختصات قطبی $(2r, \theta)$ می نگارد. همچنین، T ، O را به خود آن می نگارد.

۱۵. T هر نقطه به مختصات قطبی (r, θ) را به نقطه به مختصات قطبی $(r, 2\theta)$ می نگارد. همچنین، T ، O را به خود آن می نگارد.

همین کار را در تمرینهای ۱۶ تا ۲۳ با تبدیل $T: V_3 \rightarrow V_3$ که با فرمولی برای $T(x, y, z)$ ، که (x, y, z) نقطه دلخواهی از V_3 است، تعریف شده انجام دهید.

$$16. \quad T(x, y, z) = (z, y, x) \quad 17. \quad T(x, y, z) = (x, y, 0)$$

$$18. \quad T(x, y, z) = (x, 2y, 3z) \quad 19. \quad T(x, y, z) = (x, y, 1)$$

$$20. \quad T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1) \quad 21. \quad T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$$

$$T(x, y, z) = (x + z, 0, x + y) \quad \cdot \quad ۲۳ \quad \cdot \quad T(x, y, z) = (x, y^2, z^3) \quad \cdot \quad ۲۲$$

در هر یک از تصویرهای ۲۴ تا ۲۷، تبدیل $T: V \rightarrow V$ بنحوی توصیف شده است. در هر حالت معین کنید که T خطی است یا نه. در صورت خطی بودن، فضای پوچ و برد آن را توصیف و پوچ و رتبه آن را وقتی متناهی اند حساب کنید.

۲۴. فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ از درجه n یا بیشتر از n باشد. اگر $p \in V$ ، $q = T(p)$ ، یعنی به ازای هر x حقیقی $q(x) = p(x+1)$.

۲۵. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی مشتقپذیر بر بازه $(-1, 1)$ باشد. اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ ، یعنی به ازای هر x در $(-1, 1)$ ، $g(x) = xf'(x)$.

۲۶. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر $[a, b]$ باشد. اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ یعنی

$$g(x) = \int_a^b f(t) \sin(x-t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

به ازای x .

۲۷. فرض کنید V فضای تمام توابع حقیقی دوبار مشتقپذیر بر بازه (a, b) باشد. اگر $y \in V$ ، تعریف کنید $T(y) = y'' + Py' + Qy$ که در آن P و Q ثابت‌های معینی هستند.

۲۸. فرض کنید V فضای خطی تمام دنباله‌های حقیقی همگرا مانند $\{x_n\}$ باشد، و تبدیل $T: V \rightarrow V$ را به این صورت تعریف کنید: هرگاه $x = \{x_n\}$ یک دنباله همگرا با حد a باشد، قرار دهید $T(x) = \{y_n\}$ که در آن به ازای $n \geq 1$ ، $y_n = a - x_n$. ثابت کنید T خطی است و فضای پوچ و برد T را مشخص نمایید.

۲۹. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازه $[-\pi, \pi]$ باشد. همچنین، S را زیر مجموعه V مرکب از جمیع f هایی بگیرید که در سه معادله

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t dt = 0$$

صدق می‌کنند.

(آ) ثابت کنید S یک زیر فضای V است.

(ب) ثابت کنید S شامل $f(x) = \cos nx$ و $f(x) = \sin nx$ به ازای هر $n = 2, 3, \dots$ است.

(پ) ثابت کنید S با بعد نامتناهی است.

فرض کنید تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ به این صورت تعریف شده باشد: اگر $f \in V$ ،
 $g = T(f)$ یعنی

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \cos(x-t)\} f(t) dt.$$

(ت) ثابت کنید $T(V)$ ، یعنی برد T ، با بعد متناهی است ، و پایه‌ای برای $T(V)$ پیدا کنید .

(ث) فضای بوج T را مشخص نمایید .

(ج) جمیع $c \neq 0$ های حقیقی و تمام f های ناصفر در V را که $T(f) = cf$ پیدا کنید . (توجه کنید که چنین f ی در برد T جای دارد .)

۳۰ . فرض کنید $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W باشد . ثابت کنید هرگاه V با بعد نامتناهی باشد ، دست کم یکی از $T(V)$ یا $N(T)$ با بعد نامتناهی است .

[راهنمایی . فرض کنید $\dim T(V) = r$ ، $\dim N(T) = k$ ، e_1, \dots, e_k یک پایه $N(T)$ ، e_{k+1}, \dots, e_{k+n} ، e_1, \dots, e_k ، که $n > r$ ، عنصرهایی مستقل در V باشند .
 عنصرهای $T(e_{k+1}), \dots, T(e_{k+n})$: دلیل $n > r$ واستهاند .
 از این امر تناقض به دست آورید .]

۵.۲ اعمال جبری بر تبدیلات خطی

تابعهایی که مقادیرشان در فضای خطی W اند را می‌توان طبق تعریف زیر با هم جمع و یا در اسکالره‌ای در W ضرب کرد .

تعریف . فرض کنیم $S: V \rightarrow W$ و $T: V \rightarrow W$ دو تابع با قلمرو مشترک V و با مقادیر در فضای خطی W باشند . اگر c یک اسکالر در W باشد ، مجموع $S + T$ و حاصل ضرب cT را به ازای هر x در V با معادلات زیر تعریف می‌کنیم :

$$(4.2) \quad (S + T)(x) = S(x) + T(x), \quad (cT)(x) = cT(x).$$

ما بخصوص به حالتی نظر داریم که در آن V یک فضای خطی است و همان اسکالره‌ای

W را دارد . در این حالت مجموعه تمام تبدیلات خطی از V بتوی W را با $\mathcal{L}(V, W)$ نشان می‌دهیم .

هرگاه S و T دو تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ باشند، به آسانی می توان تحقیق کرد که $S + T$ و cT نیز تبدیلاتی خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ اند. از این بیشتر می توان گفت: با اعمالی که هم اینک تعریف شد، مجموعه $\mathcal{L}(V, W)$ خود یک فضای خطی جدید می شود؛ تبدیل صفر به عنوان عنصر صفر این فضا، و تبدیل $(-1)T$ به عنوان قرینه T عمل می کند. به آسانی می توان تحقیق کرد که هر ده اصل موضوع فضاهای خطی برقرارند. لذا، خواهیم داشت

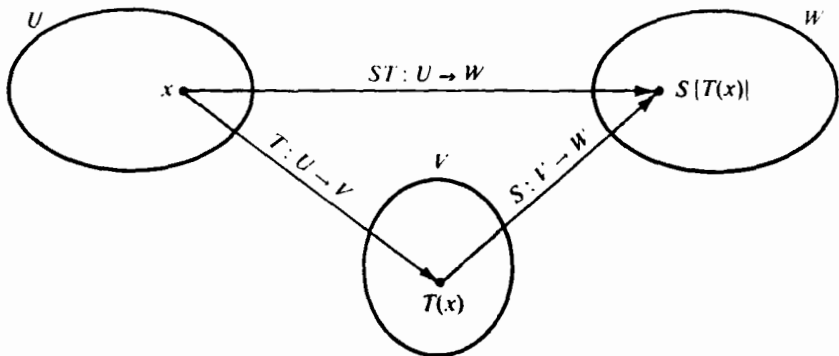
قضیه ۴.۲. مجموعه $\mathcal{L}(V, W)$ مرکب از تمام تبدیلات خطی از V بتوی W با اعمال جمع و ضرب در اسکالر که در (۴.۲) تعریف شد یک فضای خطی است.

عمل جبری جالبتر بر تبدیلات خطی ترکیب یا ضرب تبدیلات است. در این عمل از نهاد جبری یک فضای خطی استفاده نمی شود و می توان آن را کاملاً کلی و به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف. فرض کنیم U, V, W مجموعه باشند $T: U \rightarrow V$ را تابعی با قلمرو U و مقادیر در V ، و $S: V \rightarrow W$ را تابعی با قلمرو V و مقادیر در W می انگاریم. در این صورت، ترکیب ST تابعی است مانند $ST: U \rightarrow W$ که با معادله زیر تعریف می شود:

$$(ST)(x) = S[T(x)]$$

به ازای هر x در U .



شکل ۱.۲ نمایش ترکیب دو تبدیل

بنابراین، برای نگاشتن x به وسیله ST ، ابتدا x را به وسیله T و سپس $T(x)$ را به وسیله S می‌نگاریم. این مطلب در شکل ۱.۲ توضیح شده است. ما در بررسیمان از حساب دیفرانسیل و انتگرال بارها به ترکیب توابع حقیقی برخوردیم، و دیده‌ایم که این عمل در حالت کلی تعویضپذیر نیست. لکن، مثل حالت توابع حقیقی، ترکیب در قانون شرکتپذیری صدق می‌کند.

قضیه ۵.۲. هرگاه $T: U \rightarrow V$ ، $S: V \rightarrow W$ و $R: W \rightarrow X$ سه تابع باشند، آنگاه

$$R(ST) = (RS)T.$$

برهان. توابع $R(ST)$ و $(RS)T$ هر دو دارای قلمرو U و مقادیر در X اند، و به ازای هر x در U داریم

$$[(RS)T](x) = (RS)[T(x)] = R[S[T(x)]] \text{ و } [R(ST)](x) = R[(ST)(x)] = R[S[T(x)]]$$

که $R(ST) = (RS)T$ را ثابت می‌کند.

تعریف. فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ تابعی باشد که V را بتوی آن می‌نگارد. توانهای صحیح T به صورت زیر به استقرا تعریف می‌شوند:

$$T^0 = I; \text{ و به ازای } n \geq 1, T^n = TT^{n-1}.$$

در اینجا I تبدیل همانی است. خواننده می‌تواند تحقیق کند که قانون شرکتپذیری قانون‌نماها، یعنی $T^m T^n = T^{m+n}$ ، را به ازای هر دو عدد صحیح و نامنفی m و n ایجاب می‌کند.

قضیه زیر نشان می‌دهد که ترکیب تبدیلات خطی مجدداً خطی است.

قضیه ۶.۲. هرگاه U, V, W فضاها خطی و دارای یک اسکالر باشند و $T: U \rightarrow V$ و $S: V \rightarrow W$ تبدیلاتی خطی باشند، آنگاه ترکیب $ST: U \rightarrow W$ خطی خواهد بود.

برهان. به ازای هر x و y در U و هر اسکالر a و b داریم

$$(ST)(ax + by) = S[T(ax + by)] = S[aT(x) + bT(y)] = aST(x) + bST(y).$$

از تلفیق ترکیب با اعمال جبری جمع و ضرب اسکالرها در $\mathcal{L}(V, W)$ قضیه زیر به دست می‌آید.

قضیه ۷.۲. فرض کنیم U, V, W فضاها بی خطی و دارای یک اسکالر بوده، S و T در $\mathcal{L}(V, W)$ باشند، و c یک اسکالر دلخواه باشد.

(ا) به ازای هر تابع R با مقادیر در V داریم

$$(cS)R = c(SR) \quad \text{و} \quad (S + T)R = SR + TR$$

(ب) و به ازای هر تبدیل خطی $R: W \rightarrow U$ خواهیم داشت

$$R(cS) = c(RS) \quad \text{و} \quad R(S + T) = RS + RT$$

اثبات، کاربرد مستقیم تعریف ترکیب است و به عنوان تمرین گذارده می‌شود.

۶.۲ معکوسها

ضمن بررسی توابع حقیقی آموختیم که چطور با معکوس کردن توابع یکنوا توابع جدیدی بسازیم. حال می‌خواهیم فرایند معکوس سازی را به رده کلیتری از توابع تعمیم دهیم. به فرض معلوم بودن T ، هدف ما، در صورت امکان، یابش تابع دیگر S است که ترکیبش با T تبدیل همانی باشد. چون ترکیب در حالت کلی تعویض پذیر نیست، باید بین ST و TS فرق گذارده شود. لذا، دو نوع معکوس معرفی می‌کنیم، که ما آنها را معکوسهای چپ و راست خواهیم نامید.

تعریف. فرض کنیم V و W دو مجموعه باشند و $T: V \rightarrow W$ یک تابع. تابع $S: T(V) \rightarrow V$ را در صورتی معکوس چپ T می‌نامیم که به ازای هر x در V ، $S[T(x)] = x$ ؛ یعنی، در صورتی که

$$ST = I_V,$$

که در آن I_V تبدیل همانی بر V است. تابع $R: T(V) \rightarrow V$ را در صورتی معکوس راست T می‌نامیم که به ازای هر y در $T(V)$ ، $T[R(y)] = y$ ؛ یعنی، در صورتی که

$$TR = I_{T(V)},$$

که در آن $I_{T(V)}$ تبدیل همانی بر $T(V)$ می باشد.

مثال. تابع بدون معکوس چپ ولی با دو معکوس راست. فرض کنیم $V = \{1, 2\}$ و $W = \{0\}$.
 $T: V \rightarrow W$ را به این صورت تعریف می کنیم: $T(1) = T(2) = 0$. این تابع دو معکوس
 راست $R: W \rightarrow V$ و $R': W \rightarrow V$ دارد که با

$$R(0) = 1, \quad R'(0) = 2$$

تعریف می شوند. تابع نمی تواند معکوس چپی مثل S داشته باشد، زیرا این ایجاب
 خواهد کرد که

$$1 = S[T(1)] = S(0) \quad \text{و} \quad 2 = S[T(2)] = S(0)$$

این مثال ساده نشان می دهد که معکوسهای چپ الزاما "موجود نیستند و معکوسهای راست
 لزوما" منحصر بفرد نمی باشند.

هر تابع مانند $T: V \rightarrow W$ دست کم یک معکوس راست دارد. در واقع، هر y در
 $T(V)$ به ازای دست کم یک x در V به شکل $y = T(x)$ است. چنانچه یکی از این x ها
 را اختیار و تعریف کنیم $x = R(y)$ ، به ازای هر y در $T(V)$ خواهیم داشت
 $T[R(y)] = T(x) = y$ در نتیجه، R یک معکوس راست است. عدم یکتایی احتمالا"
 پیش می آید، چرا که ممکن است بیش از یک x در V بروی y مفروضی در $T(V)$ نگاشته
 شود. بزودی (در قضیه ۹.۲) ثابت می کنیم که اگر هر y در $T(V)$ نقش دقیقا" یک x در
 V باشد، معکوسهای راست منحصر بفرد می باشند.

ابتدا ثابت می کنیم که اگر معکوس چپ موجود باشد منحصر بفرد است و، در عین
 حال، معکوس راست نیز هست.

قضیه ۸.۲. تابع $T: V \rightarrow W$ می تواند حداکثر یک معکوس چپ داشته باشد. اگر T
 معکوس چپ S را دارا باشد، S معکوس راست نیز خواهد بود.

برهان. فرض کنیم T دو معکوس چپ داشته باشد: $S: T(V) \rightarrow V$ و $S': T(V) \rightarrow V$.
 y دلخواهی در $T(V)$ اختیار و ثابت می کنیم $S(y) = S'(y)$. گوییم به ازای x ی در

V ، $T(x) = y$ ؛ در نتیجه، چون هر دوی S و S' معکوسهای چپاند، داریم

$$S'[T(x)] = x \quad \text{و} \quad S[T(x)] = x$$

پس $S(y) = x$ و $S'(y) = x$ ؛ در نتیجه، به ازای هر y در $T(V)$ ، $S(y) = S'(y)$ ، لذا،

$S = S'$ ، که ثابت می‌کند معکوسهای چپ منحصر بفرد هستند.

حال ثابت می‌کنیم هر معکوس چپ S معکوس راست نیز هست. عنصر دلخواهی

مثل y در $T(V)$ اختیار و ثابت می‌کنیم $T[S(y)] = y$. گوییم چون $y \in T(V)$ ، به ازای

x در V داریم $T(x) = y$. اما S یک معکوس چپ است. پس

$$x = S[T(x)] = S(y).$$

با اعمال T نتیجه می‌شود که $T(x) = T[S(y)]$. اما $T(x) = y$ ؛ در نتیجه، $y = T[S(y)]$ ،

که برهان را تمام خواهد کرد.

قضیه زیر جمیع توابع معکوس چپ دار را توصیف می‌کند.

قضیه ۹.۲. تابع $T: V \rightarrow W$ معکوس چپ دارد اگر و فقط اگر T عنصرهای متمایز V را

به عنصرهای متمایز W بنگارد؛ یعنی، اگر و فقط اگر به ازای هر x و y در V ،

$$x \neq y \quad \text{ایجاب کند که} \quad T(x) \neq T(y) \quad (۵.۲)$$

تذکر. شرط (۵.۲) با عبارت زیر معادل است:

$$T(x) = T(y) \quad \text{ایجاب کند که} \quad x = y \quad (۶.۲)$$

هر تابع مانند T که در (۵.۲) یا (۶.۲) به ازای هر x و y در V صدق کند یک

به یک بر V نامیده می‌شود.

برهان. فرض کنیم T معکوس S داشته و $T(x) = T(y)$. می‌خواهیم ثابت کنیم $x = y$ ،

با اعمال S معلوم می‌شود که $S[T(x)] = S[T(y)]$ ؛ چون $S[T(x)] = x$ و $S[T(y)] = y$ ،

نتیجه می‌شود که $x = y$ ، و این ثابت می‌کند که هر تابع معکوس چپ دار بر قلمرو خود

یک به یک است.

حال عکس قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم T بر V یک به یک باشد. تابعی مانند

$S: T(V) \rightarrow V$ نشان می‌دهیم که معکوس چپ T باشد. گوییم هرگاه $y \in T(V)$ ، به ازای

x ی در V ، $y = T(x)$ بنا بر (۶.۲)، درست یک x در V هست که به ازای آن $y = T(x)$ را مساوی این x تعریف می‌کنیم؛ یعنی، S را بر $T(V)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(y) = x \text{ یعنی } T(x) = y$$

در این صورت، به ازای هر x در V داریم $S[T(x)] = x$ ؛ در نتیجه، $ST = I_V$. لذا، این S یک معکوس چپ T می‌باشد.

تعریف. فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ بر V یک به یک باشد. معکوس چپ منحصر بفرد T (که می‌دانیم معکوس راست نیز هست) با T^{-1} نموده می‌شود. می‌گوییم T معکوس پذیر است، و T^{-1} را معکوس T می‌نامیم.

نتایج این بخش در باب توابع دلخواه است. حال این مفاهیم را برای تبدیلات خطی به کار می‌بریم.

۷.۲ تبدیلات خطی یک به یک

در این بخش، V و W فضاهایی خطی و دارای یک اسکالر هستند، و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ است. خطی بودن T به ما توان بیان خاصیت یک به یک را به چند طریق معادل می‌بخشد.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ باشد. در این صورت، احکام زیر با هم معادل هستند:

(آ) T بر V یک به یک است؛

(ب) T معکوس پذیر است و معکوش $T^{-1}: T(V) \rightarrow V$ خطی است؛

(پ) به ازای هر x در V ، $T(x) = 0$ ایجاب می‌کند که $x = 0$ ؛ یعنی، فضای نپوچ $N(T)$ فقط شامل عنصر صفر V است.

برهان. ثابت می‌کنیم (آ) ایجاب می‌کند (ب) را، (ب) ایجاب می‌کند (پ) را، و (پ) ایجاب می‌کند (آ) را. ابتدا فرض کنیم (آ) برقرار باشد. پس T (بنا بر قضیه ۴

۹۰۲) معکوس دارد، و باید نشان دهیم که T^{-1} خطی است. برای این کار دو عنصر دلخواه u و v را در $T(V)$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، به ازای x و y در V داریم $u = T(x)$ و $v = T(y)$. چون T خطی است، به ازای هر دو اسکالر a و b داریم

$$au + bv = aT(x) + bT(y) = T(ax + by).$$

پس، با اعمال T^{-1} ، داریم

$$T^{-1}(au + bv) = ax + by = aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v);$$

در نتیجه، T^{-1} خطی است. لذا، (T) حکم (ب) را ایجاب می‌کند. حال فرض کنیم (ب) برقرار باشد. x در V اختیار می‌کنیم بطوری که $T(x) = 0$. چون T^{-1} خطی است، با اعمال آن داریم $x = T^{-1}(0) = 0$. لذا، (ب) نیز حکم (پ) را ایجاب می‌کند.

بالاخره، فرض کنیم (پ) برقرار باشد. دو عنصر دلخواه u و v را در V که $T(u) = T(v)$ اختیار می‌کنیم. بنا بر خطی بودن، $T(u - v) = T(u) - T(v) = 0$ ؛ در نتیجه، $u - v = 0$. لذا، T بر V یک به یک است، و برهان قضیه تمام خواهد بود.

زمانی که V با بعد متناهی است، خاصیت یک به یک را می‌توان برحسب استقلال و بعدیت، به صورت آمده در قضیه زیر، تنظیم کرد.

قضیه ۱۱.۰۲. فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ بوده، و V با بعد متناهی باشد، مثلاً $\dim V = n$. در این صورت، احکام زیر با هم معادل هستند:

(A) T بر V یک به یک است؛

(ب) هرگاه e_1, \dots, e_n عنصرهایی مستقل در V باشند، $T(e_1), \dots, T(e_n)$ عنصرهایی مستقل در $T(V)$ اند؛

(پ) $\dim T(V) = n$ ؛

(ت) هرگاه $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه V باشد، $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ یک پایه $T(V)$ می‌باشد.

برهان. ثابت می‌کنیم (A) حکم (ب)، (ب) حکم (پ)، (پ) حکم (ت)، و (ت) حکم (A) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم (A) برقرار باشد. همچنین، e_1, \dots, e_n عنصرهای مستقلی از V بوده و عنصرهای $T(e_1), \dots, T(e_n)$ را در $T(V)$ در نظر می‌گیریم. فرض

کنیم به‌ازای اسکالرهای c_1, \dots, c_p

$$\sum_{i=1}^p c_i T(e_i) = 0 \quad .$$

بنابر خطی بودن، داریم

$$T\left(\sum_{i=1}^p c_i e_i\right) = 0;$$

و در نتیجه، چون T یک به یک است،

$$\sum_{i=1}^p c_i e_i = 0 \quad .$$

اما e_1, \dots, e_p مستقل اند، پس $c_1 = \dots = c_p = 0$. لذا، (T) حکم (ب) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم (ب) برقرار باشد. $\{e_1, \dots, e_n\}$ را یک پایه V می‌انگاریم. بنابر (ب)، n عنصر $T(e_1), \dots, T(e_n)$ در $T(V)$ مستقل اند. بنابر این، $\dim T(V) \geq n$. اما، بنابر قضیه ۳.۲، داریم $\dim T(V) \leq n$. لذا، $\dim T(V) = n$ ؛ و در نتیجه، (ب) نیز حکم (پ) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم (پ) برقرار باشد، و $\{e_1, \dots, e_n\}$ را یک پایه V می‌انگاریم. عنصر دلخواه y را در $T(V)$ اختیار می‌کنیم. پس به‌ازای x در V ، $y = T(x)$ ؛ و در نتیجه، خواهیم داشت

$$y = T(x) = \sum_{i=1}^n c_i T(e_i) \quad \text{و لذا} \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

بنابر این، $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ فضای $T(V)$ را می‌پیماید. اما فرض کرده‌ایم $\dim T(V) = n$ ، پس $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ یک پایه $T(V)$ می‌باشد. بنابر این، (پ) نیز حکم (ت) را ایجاب می‌کند.

بالاخره، فرض کنیم (ت) برقرار باشد. ثابت می‌کنیم $T(x) = 0$ ایجاب می‌کند که $x = 0$. فرض کنیم $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه‌ای از V باشد. اگر $x \in V$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$T(x) = \sum_{i=1}^n c_i T(e_i) \quad \text{و در نتیجه} \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

اگر $T(x) = 0$ ، چون $T(e_1), \dots, T(e_n)$ مستقل اند، $c_1 = \dots = c_n = 0$. بنابر این، $x = 0$ ؛

در نتیجه، T بر V یک به یک است. پس (ت) نیز حکم (آ) را ایجاب می کند، و برهان تمام خواهد بود.

۸.۲ تمرین

۱. فرض کنید $V = \{0, 1\}$ ، و تمام توابع $T: V \rightarrow V$ را توصیف کنید. رویهم چهار تابع وجود دارد. آنها را T_1, T_2, T_3, T_4 نامیده، جدول ضربی بسازید که ترکیب هر جفت از آنها را نشان دهد. کدام توابع بر V یک به یک اند و معکوسهای آنها چیستند؟

۲. فرض کنید $V = \{0, 1, 2\}$ ، و تمام توابع $T: V \rightarrow V$ را که $T(V) = V$ توصیف کنید. رویهم شش تابع وجود دارد. آنها را T_1, \dots, T_6 نامیده، جدول ضربی بسازید که ترکیب هر جفت از آنها را نشان دهد. کدام توابع بر V یک به یک اند و معکوسهای آنها چیستند؟

در تمرینهای ۳ تا ۱۲، تابع $T: V_2 \rightarrow V_2$ با فرمولی تعریف شده که $T(x, y)$ را، که (x, y) نقطه دلخواهی در V_2 است، به دست می دهد. در هر حالت، معین کنید T بر V_2 یک به یک است یا نه. در صورت بودن، برد آن $T(V_2)$ را توصیف کنید. فرض کنید به ازای هر نقطه (u, v) در $T(V_2)$ ، $(x, y) = T^{-1}(u, v)$ ، و فرمولهایی برای تعیین x و y بر حسب u و v ارائه دهید.

$$\cdot T(x, y) = (y, x) \quad \cdot ۳$$

$$\cdot T(x, y) = (x, 0) \quad \cdot ۵$$

$$\cdot T(x, y) = (x^2, y^2) \quad \cdot ۷$$

$$\cdot T(x, y) = (x, 1) \quad \cdot ۹$$

$$\cdot T(x, y) = (x - y, x + y) \quad \cdot ۱۱$$

$$\cdot T(x, y) = (x, -y) \quad \cdot ۴$$

$$\cdot T(x, y) = (x, x) \quad \cdot ۶$$

$$\cdot T(x, y) = (e^x, e^y) \quad \cdot ۸$$

$$\cdot T(x, y) = (x + 1, y + 1) \quad \cdot ۱۰$$

$$\cdot T(x, y) = (2x - y, x + y) \quad \cdot ۱۲$$

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۰، تابع $T: V_3 \rightarrow V_3$ با فرمولی تعریف شده که $T(x, y, z)$ را، که (x, y, z) نقطه دلخواهی در V_3 است، به دست می دهد. در هر حالت، تعیین کنید T بر V_3 یک به یک است یا نه. در صورت بودن، برد آن $T(V_3)$ را توصیف کنید. فرض کنید به ازای هر نقطه (u, v, w) در $T(V_3)$ ، $(x, y, z) = T^{-1}(u, v, w)$ ، و فرمولهایی برای تعیین x ، y ، و z بر حسب u ، v ، و w ارائه دهید.

$$\cdot T(x, y, z) = (z, y, x) \quad \cdot ۱۳$$

$$\cdot T(x, y, z) = (x, y, 0) \quad \cdot ۱۴$$

$$T(x, y, z) = (x, y, x + y + z) \cdot 16 \quad \cdot T(x, y, z) = (x, 2y, 3z) \cdot 15$$

$$\cdot T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3) \cdot 18 \cdot T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1) \cdot 17$$

$$\cdot T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z) \cdot 20 \cdot T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z) \cdot 19$$

۲۱. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ تابعی باشد که V را بتوی آن می نگارد. توانها به استقرا وبا

فرمولهای $T^0 = I$ ؛ به ازای $n \geq 1$ ، $T^n = TT^{n-1}$ ، تعریف می شوند. ثابت کنید

قانون شرکتپذیری برای ترکیب قانون نماها، یعنی $T^m T^n = T^{m+n}$ ، را ایجاب

می کند. اگر T معکوسپذیر باشد، ثابت کنید T^n نیز معکوسپذیر است و

$$\cdot (T^n)^{-1} = (T^{-1})^n$$

در تمرینهای ۲۲ تا ۲۵، S و T تابعهایی هستند با قلمرو V و مقادیر در V . در

حالت کلی، $ST \neq TS$ ، اگر $ST = TS$ ، می گوئیم که S و T تعویض می شوند.

۲۲. ثابت کنید که اگر S و T تعویض شوند، به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ،

$$\cdot (ST)^n = S^n T^n$$

۲۳. ثابت کنید هرگاه S و T معکوسپذیر باشند، ST نیز معکوسپذیر است و

$$\cdot (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

به عبارت دیگر، معکوس ST ترکیب معکوسها، به ترتیب عکس، است.

۲۴. ثابت کنید هرگاه S و T معکوسپذیر باشند و تعویض شوند، معکوسهای آنها نیز

تعویض می شوند.

۲۵. فرض کنید V یک فضای خطی باشد، و ثابت کنید که اگر S و T تعویض شوند،

$$\cdot (S + T)^3 = S^3 + 3S^2T + 3ST^2 + T^3 \quad \text{و} \quad (S + T)^2 = S^2 + 2ST + T^2$$

این فرمولها در صورت $ST \neq TS$ چگونه باید اصلاح شوند؟

۲۶. فرض کنید S و T تبدیلاتی خطی از V_3 بتوی V_3 باشند که با فرمولهای

$$S(x, y, z) = (z, y, x) \quad \text{و} \quad T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$$

که در آنها (x, y, z) نقطه دلخواهی از V_3 است، تعریف شده اند.

(ا) نقش (x, y, z) را تحت هریک از تبدیلات زیر معین کنید:

$$ST, TS, ST - TS, S^2, T^2, (ST)^2, (TS)^2, (ST - TS)^2.$$

(ب) ثابت کنید S و T بر V_3 یک به یک است، و نقش (u, v, w) را تحت هریک از

تبدیلات زیر بیابید:

$$S^{-1}, T^{-1}, (ST)^{-1}, (TS)^{-1}$$

- (پ) نقش (x, y, z) را تحت $(T - I)^n$ به ازای هر $n \geq 1$ بیابید .
۲۷. فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد . همچنین ، D عملگر مشتقگیری ، و T عملگر انتگرالگیری باشد که هر چند جمله‌ای p را بروی چند جمله‌ای q که با $q(x) = \int_0^x p(t) dt$ داده می‌شود می‌نگارد . ثابت کنید $DT = I_V$ ولی $TD \neq I_V$ ، و فضای پوچ و برد TD را توصیف کنید .
۲۸. فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد . همچنین ، D عملگر مشتقگیری بوده ، و T تبدیل خطی باشد که $p(x)$ را بروی $xp'(x)$ می‌نگارد . (آ) فرض کنید $p(x) = 2 + 3x - x^2 + 4x^3$ ، و نقش p را تحت هریک از تبدیلات زیر بیابید :

$$D, T, DT, TD, DT - TD, T^2D^2 - D^2T^2 .$$

(ب) p هایی را در V بیابید که $T(p) = p$.

(پ) p هایی را در V بیابید که $(DT - 2D)(p) = 0$.

(ت) p هایی را در V بیابید که $(DT - TD)^n(p) = D^n(p)$.

۲۹. فرض کنید V و D مثل تمرین ۲۸ باشند ولی T تبدیل خطی باشد که $p(x)$ را بروی $xp(x)$ می‌نگارد . ثابت کنید $DT - TD = I$ ، و به ازای $n \geq 2$ ، $DT^n - T^nD = nT^{n-1}$.
۳۰. فرض کنید T و S در $\mathcal{L}(V, V)$ بوده و $ST - TS = I$. ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$ ، $ST^n - T^nS = nT^{n-1}$.

۳۱. فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد . همچنین ، R, S, T توابعی باشند که چند جمله‌ای دلخواه $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ در V را بروی چند جمله‌ایهای $r(x), s(x), t(x)$ می‌نگارند ، که

$$r(x) = p(0), \quad s(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1}, \quad t(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{k+1}.$$

- (آ) فرض کنید $p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$ ، و نقش p را تحت هریک از تبدیلات زیر بیابید :

$$R, S, T, ST, TS, (TS)^2, T^2S^2, S^2T^2, TRS, RST .$$

- (ب) ثابت کنید R و S و T خطی‌اند ، و فضای پوچ و برد هریک را مشخص کنید .
- (پ) ثابت کنید T بر V یک به یک است ، و معکوس آن را معین کنید .
- (ت) اگر $n \geq 1$ ، $(TS)^n$ و S^nT^n را بر حسب I و R بیان کنید .

۳۲. به تمرین ۲۸ در بخش ۴۰.۲ باز می‌گردیم. آیا T بر V یک به یک است؟ در صورت بودن، معکوس آن را وصف کنید.

۹.۲ تبدیلات خطی با مقادیر مقرر

همانطور که قضیه زیر توضیح داده، اگر V با بعد متناهی باشد، همیشه می‌توان تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ را طوری ساخت که در عنصرهای پایه V مقادیر مقرر داشته باشد.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنیم e_1, \dots, e_n یک پایه فضای خطی و n بعدی V بوده و u_1, \dots, u_n n عنصر دلخواه در فضای خطی W باشد. در این صورت، یک و فقط یک تبدیل خطی مانند $T: V \rightarrow W$ هست که

$$(۷.۲) \quad T(e_k) = u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

این T عنصر دلخواه x در V را به این صورت می‌نگارد:

$$(۸.۲) \quad T(x) = \sum_{k=1}^n x_k u_k, \quad x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

برهان. هر x در V را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به صورت ترکیبی خطی از e_1, \dots, e_n بیان کرد، ضریبهای x_1, \dots, x_n مولفه‌های x نسبت به پایه مرتب (e_1, \dots, e_n) اند. اگر T با (۸.۲) تعریف شود، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که T خطی است. اگر به ازای k ای $x = e_k$ ، تمام مولفه‌های x جز مولفه k ام که یک است، صفرند؛ و در نتیجه، طبق مطلوب، (۸.۲) ایجاب می‌کند که $T(e_k) = u_k$ است. برای اثبات اینکه فقط یک تبدیل خطی صادق در (۷.۲) وجود دارد، فرض کنیم T' تبدیل دیگری باشد و $T'(x)$ را حساب می‌کنیم. داریم

$$T'(x) = T' \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k T'(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k u_k = T(x).$$

چون به ازای هر x در V ، $T'(x) = T(x)$ ، خواهیم داشت $T' = T$ ، که برهان را تمام خواهد کرد.

مثال. تبدیل خطی $T: V_2 \rightarrow V_2$ را طوری معین کنید که عنصرهای پایه $i = (1, 0)$ و

$j = (0, 1)$ را به صورت زیر بنگارند:

$$T(i) = i + j, \quad T(j) = 2i - j.$$

حل. اگر $j = x_1i + x_2j$ عنصر دلخواهی از V_2 باشند، $T(x)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T(x) = x_1T(i) + x_2T(j) = x_1(i + j) + x_2(2i - j) = (x_1 + 2x_2)i + (x_1 - x_2)j$$

۱۰.۲ نمایشهای ماتریسی تبدیلات خطی

قضیه ۱۲.۲ نشان می‌دهد که تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ از فضای خطی V با بعد متناهی V کاملاً با عملش بر مجموعه مفروض e_1, \dots, e_n از بردارهای پایه مشخص می‌شود. حال فرض کنیم فضای W نیز با بعد متناهی بوده، مثلاً $\dim W = m$ و w_1, \dots, w_m پایه‌ای از W باشد.

(بعدهای n و m ممکن است مساوی باشند یا نباشند.) چون T مقادیرش در W است، هر عنصر $T(e_k)$ را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به صورت ترکیبی خطی از عناصر پایه w_1, \dots, w_m نوشت؛ مثلاً، به صورت

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^m t_{ik} w_i,$$

که در آن مولفه‌های $T(e_k)$ نسبت به پایه مرتب (w_1, \dots, w_m) اند. ما m تایی (t_{1k}, \dots, t_{mk}) را به صورت قائم نشان می‌دهیم:

$$(9.2) \quad \begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \vdots \\ t_{mk} \end{bmatrix}.$$

این آرایه یک بردار ستونی یا یک ماتریس ستونی نام دارد. برای هر یک از n عنصر $T(e_1), \dots, T(e_n)$ یک بردار ستونی داریم. با گذاردن نشان در کنار هم و قرار یک جفت کروه در اطرافشان به آرایه مستطیلی شکل زیر دست می‌یابیم:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}.$$

این آرایه یک ماتریس مرکب از m سطر و n ستون نامیده می شود.

ما آن را یک ماتریس m در n و یا یک ماتریس $m \times n$ می نامیم. سطر اول ماتریس

$1 \times n$ ، $(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n})$ است. ماتریس $1 \times m$ (۹.۲) ستون k ام است. اسکالرهای

t_{ik} طوری اندیسه گذاری شده اند که اولین زیرنویس، یعنی i ، اولین سطر، و دومین زیر

نویس، یعنی k ، معرف ستونی است که t_{ik} در آن ظاهر می شود. ما t_{ik} را درایه ik

یا عنصر ik ماتریس می نامیم. نماد فشرده تر

$$(t_{ik}) \quad \text{یا} \quad (t_{ik})_{i,k=1}^{m,n}$$

نیز برای ماتریسی که درایه ik آن t_{ik} است به کار می رود.

پس، هر تبدیل خطی T از فضای n بعدی V بتوی فضای m

بعدی W یک ماتریس $m \times n$ مانند (t_{ik}) را به دست می دهد که ستونهای

آن از مولفه های $T(e_1), \dots, T(e_n)$ نسبت به پایه (w_1, \dots, w_m) تشکیل شده

است. این ماتریس را نمایش ماتریسی T نسبت به پایه مرتب (e_1, \dots, e_n) از V

و (w_1, \dots, w_m) از W می نامیم. به محض دانستن ماتریس (t_{ik}) ، مولفه های هر عنصر

$T(x)$ نسبت به پایه (w_1, \dots, w_m) را می توان بنحوی که در قضیه زیر و صاف شده مشخص کرد.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنیم T یک تبدیل خطی در $\mathcal{L}(V, W)$ باشد، که $\dim V = n$ و

$\dim W = m$. همچنین، (e_1, \dots, e_n) و (w_1, \dots, w_m) پایه های مرتبی از V و W بوده

و (t_{ik}) ماتریس $m \times n$ می باشد که درایه هایش با معادلات زیر مشخص می شود:

$$(10.2) \quad \cdot \quad T(e_k) = \sum_{i=1}^m t_{ik} w_i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

در این صورت، عنصر دلخواه

$$(11.2) \quad x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

در V با مولفه های (x_1, \dots, x_n) نسبت به (e_1, \dots, e_n) به وسیله T بروی عنصر

$$(12.2) \quad T(x) = \sum_{i=1}^m y_i w_i$$

در W با مولفه‌های (y_1, \dots, y_m) نسبت به (w_1, \dots, w_m) نگاشته می‌شود. y_i ها با معادلات خطی زیر به مولفه‌های x مربوط می‌گردند:

$$(13.2) \quad y_i = \sum_{k=1}^n t_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ به‌زای}$$

برهان. با اعمال T در هر طرف (11.2) و استفاده از (10.2) نتیجه می‌شود که

$$T(x) = \sum_{k=1}^n x_k T(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{i=1}^m t_{ik} w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n t_{ik} x_k \right) w_i = \sum_{i=1}^m y_i w_i,$$

که در آن هر y_i از (13.2) به دست می‌آید. این برهان را تمام خواهد کرد.

با اختیار پایه‌های (e_1, \dots, e_n) و (w_1, \dots, w_m) برای V و W ، هر تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ صاحب یک نمایش ماتریسی مانند (t_{ik}) می‌شود. بعکس، اگر از mn اسکالر دلخواه که به شکل ماتریس مستطیلی شکل (t_{ik}) آراسته شده شروع و برای V و W یکجفت پایه مرتب اختیار کنیم، به آسانی می‌توان ثابت کرد که درست یک تبدیل خطی مانند $T: V \rightarrow W$ هست که این نمایش ماتریسی را دارد. برای این کار کافی است T را در عنصرهای پایه V با معادلات (10.2) تعریف کنیم. در این صورت، طبق قضیه 12.2، یک و فقط یک تبدیل خطی مانند $T: V \rightarrow W$ با این مقادیر مقرر وجود دارد. حال نقش $T(x)$ نقطه دلخواه x در V از معادلات (12.2) و (13.2) به دست خواهد آمد.

مثال 1. ساختن تبدیل خطی یک ماتریس 2×3 با

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

شروع کرده، پایه همولی بردارهای یکه مختصات را برای V_3 و اختیار می‌کنیم. پس ماتریس فوق نمایش تبدیل خطی $T: V_3 \rightarrow V_2$ است که بردار دلخواه (x_1, x_2, x_3) در V_3 را طبق معادلات خطی

$$y_1 = 3x_1 + x_2 - 2x_3,$$

$$y_2 = x_1 + 0x_2 + 4x_3$$

بروی بردار (y_1, y_2) در V_2 می نگارد.

مثال ۲. ساختن نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی. فرض کنیم V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد که درجه‌شان از ۳ نایبتر است. این فضا دارای بعد ۴ است، و پایه $(1, x, x^2, x^3)$ را برای آن اختیار می‌کنیم. فرض کنیم D عملگر مشتقگیری باشد که هر چند جمله‌ای $p(x)$ در V را بروی مشتقش $p'(x)$ می‌نگارد. می‌توان D را تبدیلی خطی از V بتوی W گرفت، که W فضای ۳ بعدی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی با درجه نایبتر از ۲ است. در W پایه $(1, x, x^2)$ را اختیار می‌کنیم. برای یافتن نمایش ماتریسی D نسبت به این پایه‌ها، هر عنصر پایه V را تبدیل (مشتق می‌گیریم) و آن را به صورت ترکیبی خطی از عنصرهای پایه W بیان می‌کنیم. لذا، داریم

$$D(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2, \quad D(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2,$$

$$D(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2, \quad D(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2.$$

ضرایب این چند جمله‌ایها ستونهای نمایش ماتریسی D را مشخص می‌کنند. پس نمایش مطلوب ماتریس 4×3 زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

برای تاکید در اینکه نمایش ماتریسی نه فقط به عناصر پایه بلکه به ترتیب آنها نیز بستگی دارد، ترتیب عناصر پایه در W را معکوس و، در عوض، از پایه $(x^2, x, 1)$ استفاده می‌کنیم. در این صورت، عناصر پایه V به همان چند جمله‌ایهای بالا تبدیل می‌شوند، منتها مولفه‌های این چند جمله‌ایها نسبت به پایه جدید $(x^2, x, 1)$ به ترتیب عکس ظاهر می‌شوند. لذا، نمایش ماتریسی D در اینجا

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خواهد شد .

حال ، با استفاده از پایه^۶ $(1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$ برای V و پایه^۷ $(1, x, x^2)$ برای W ، نمایش ماتریسی سومی برای D پیدا می‌کنیم . عناصر پایه^۷ V به صورت زیر تبدیل می‌یابند :

$$D(1) = 0, \quad D(1+x) = 1, \quad D(1+x+x^2) = 1+2x,$$

$$D(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2 ;$$

در نتیجه ، نمایش ماتریسی در این حالت عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۱.۲ ساختن نمایش ماتریسی به شکل قطری

چون از یک تبدیل خطی می‌توان با اختیار پایه‌های مختلف نمایشهای ماتریسی متفاوتی ساخت ، طبیعی است با اختیار پایه‌هایی سعی کنیم ماتریس حاصل شکل ساده‌ای داشته باشد . قضیه^۸ زیر نشان می‌دهد که می‌توان تمام درایه‌ها را ، جز احتمالاً " در امتداد قطری که از گوشه^۹ بالایی چپ ماتریس شروع شده ، 0 گرداند . روی این قطر یک رشته یک داریم که پس از آن صفرها آمده‌اند ، تعداد یکها مساوی رتبه^{۱۰} تبدیل است . ماتریس (t_{ik}) که در آن وقتی $t_{ik} = 0$ ، $i \neq k$ ، یک ماتریس قطری نامیده می‌شود .

قضیه^{۱۱} ۱۴.۲ . فرض کنیم V و W فضاهایی خطی با بعد متناهی باشند ، با $\dim V = n$ و $\dim W = m$ ، همچنین ، $T \in \mathcal{L}(V, W)$ و $r = \dim T(V)$ رتبه^{۱۲} T باشد . در این صورت ، پایه‌ای مانند (e_1, \dots, e_n) از V و پایه‌ای مانند (w_1, \dots, w_m) از W هست بطوری که

$$(14.2) \quad T(e_i) = w_i, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

و

$$(15.2) \quad T(e_i) = 0, \quad i = r+1, \dots, n$$

لذا ، تمام درایه‌های ماتریس (t_{ik}) از T نسبت به این پایه‌ها صفرند جز r درایه^{۱۳} قطری

$$t_{11} = t_{22} = \dots = t_{rr} = 1.$$

برهان. ابتدا برای W یک پایه می‌سازیم. چون $T(V)$ زیر فضای W است و $\dim T(V) = r$ ، فضای $T(V)$ پایه‌ای r عنصری در W ، مثلا w_1, \dots, w_r ، را دارد. طبق قضیه ۷.۱، این عناصر زیر مجموعه‌ای از یک پایه W را تشکیل می‌دهند. پس می‌توان عناصر w_{r+1}, \dots, w_m را به این زیر مجموعه افزود بطوری که

$$(16.2) \quad (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m)$$

یک پایه برای W باشد.

حال برای V یک پایه می‌سازیم. هر یک از r عنصر w_i در (۱۶.۲) نقش دست‌کم یک عنصر در V است. یکی از این عناصر را در V اختیار می‌کنیم و آن را e_i می‌نامیم. پس، به ازای $T(e_i) = w_i$ ، $i = 1, 2, \dots, r$ ، در نتیجه، (۱۴.۲) برقرار است. حال فرض کنیم k بعد فضای بوج $N(T)$ باشد. بنا بر قضیه ۳.۲، داریم $n = k + r$. چون $\dim N(T) = k$ ، فضای $N(T)$ پایه‌ای مرکب از k عنصر در V دارد که آنها را به e_{r+1}, \dots, e_{r+k} نشان می‌دهیم. معادله (۱۵.۲) برای هر یک از این عناصر برقرار است. پس، برای اتمام برهان، باید نشان داد که مجموعه مرتب

$$(17.2) \quad (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{r+k})$$

یک پایه V است. گوئیم چون $\dim V = n = r + k$ ، کافی است نشان دهیم این عناصر مستقل هستند. فرض کنیم ترکیبی خطی از آنها صفر باشد؛ مثلا،

$$(18.2) \quad \sum_{i=1}^{r+k} c_i e_i = 0.$$

با اعمال T و استفاده از معادلات (۱۴.۲) و (۱۵.۲) درمی‌یابیم که

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i T(e_i) = \sum_{i=1}^r c_i w_i = 0.$$

اما w_1, \dots, w_r مستقل اند؛ و در نتیجه، $c_1 = \dots = c_r = 0$. بنابراین، جمله اول (۱۸.۲) صفر هستند، پس (۱۸.۲) به

$$\sum_{i=r+1}^{r+k} c_i e_i = 0$$

تقلیل می‌یابد. اما e_{r+1}, \dots, e_{r+k} مستقل اند، زیرا یک پایه برای $N(T)$ تشکیل می‌دهند؛ و در نتیجه، $c_{r+1} = \dots = c_{r+k} = 0$. لذا، تمام c_i ها در (۱۸.۲) صفر می‌باشند؛ و در

نتیجه، عنصرهای (۱۷۰۲) یک پایه برای V تشکیل می دهند. این برهان را تمام خواهد کرد.

مثال. به مثال ۲ در بخش ۱۰۰۲ باز می گردیم، که در آن D عملگر مشتقگیری است که فضای V مرکب از چند جمله ایهای با درجه نایبتر از ۳ را بتوی فضای W مرکب از چند جمله ایهای با درجه نایبتر از ۲ می نگارد. در این مثال $T(V) = W$ ، پس T دارای رتبه ۳ است. روش اثبات قضیه ۱۴۰۲ را به کار برده، پایه ای برای W ، مثلاً "پایه نگاشته" می شوند عبارت است از $(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{6}x^3)$. این مجموعه را با افزودن چند جمله ای ثابت ۱، که پایه فضای پوچ D است، وسیع می سازیم تا پایه ای برای V به دست آید. لذا، اگر از پایه $(1, x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{6}x^3)$ برای V و پایه $(1, x, x^2)$ برای W استفاده کنیم، نمایش ماتریسی نظیر برای D به شکل قطری

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

خواهد بود.

۱۲۰۲ تمرین

در تمام تمرینهای مربوط به فضای برداری V_n ، پایه معمولی بردارهای یکه مختصات اختیار شود مگر آنکه پایه دیگری تصریح شده باشد. در تمرینهای مربوط به ماتریس تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ که $V = W$ ، در هر دوی V و W یک پایه اختیار شود مگر آنکه انتخابی جز این تصریح شده باشد.

۱. ماتریس هر یک از تبدیلات خطی زیر از V_n بتوی V_n را مشخص کنید:

(آ) تبدیل همانی؛

(ب) تبدیل صفر؛

(پ) ضرب در اسکالر ثابت c .

۲. ماتریس هر یک از تصویرهای زیر را مشخص کنید:

(آ) $T: V_3 \rightarrow V_2$ ، که در آن $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ ؛

(ب) $T: V_3 \rightarrow V_2$ ، که در آن $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$ ؛

۳. $T: V_5 \rightarrow V_3$ (پ) ، که در آن $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4)$ ،
 تبدیل خطی $T: V_2 \rightarrow V_2$ بردارهای پایه i و j را این طور می نگارد :
- $$T(i) = i + j, \quad T(j) = 2i - j .$$
- (ت) $T(3i - 4j)$ و $T^2(3i - 4j)$ را برحسب i و j حساب کنید .
 (ب) ماتریسهای T و T^2 را معین کنید .
 (پ) قسمت (ب) را در حالتی حل کنید که (i, j) با (e_1, e_2) عوض شده باشد ، که در

$$e_1 = i - j, e_2 = 3i + j$$
۴. تبدیل خطی $T: V_2 \rightarrow V_2$ به صورت زیر تعریف شده است : منعکس هر بردار (x, y) را نسبت به محور y به دست آورده بعد طولش را دو برابر می کنیم تا $T(x, y)$ حاصل شود . ماتریسهای T و T^2 را مشخص نمایید .
۵. فرض کنید $T: V_3 \rightarrow V_3$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که
- $$T(k) = 2i + 3j + 5k, \quad T(j + k) = i, \quad T(i + j + k) = j - k .$$
- (ت) $T(i + 2j + 3k)$ را حساب کنید و بوجه و رتبه T را مشخص نمایید .
 (ب) ماتریس T را مشخص کنید .
۶. برای تبدیل خطی تعریف T ، هر دو پایه (e_1, e_2, e_3) را بگیرد که در آن $e_1 = (2, 3, 5)$ ،
 $e_2 = (1, 0, 0)$ ، $e_3 = (0, 1, -1)$ ، و ماتریس T را نسبت به پایه های جدید معین نمایید .
۷. تبدیل خطی $T: V_3 \rightarrow V_2$ بردارهای پایه را به صورت زیر می نگارد :
- $$T(i) = (0, 0), \quad T(j) = (1, 1), \quad T(k) = (1, -1) .$$
- (ت) $T(4i - j + k)$ را حساب کنید و بوجه و رتبه T را مشخص نمایید .
 (ب) ماتریس T را مشخص کنید .
 (پ) از پایه (i, j, k) در V_3 و پایه (w_1, w_2) در V_2 ، که $w_1 = (1, 1)$ ، $w_2 = (1, 2)$ ، استفاده کرده ، ماتریس T را نسبت به این پایه ها مشخص کنید .
 (ت) مبناهای (e_1, e_2, e_3) برای V_3 و (w_1, w_2) برای V_2 را طوری بیابید که ماتریس T نسبت به آنها به شکل قطری باشد .
۸. تبدیل خطی $T: V_2 \rightarrow V_3$ بردارهای پایه را به این صورت می نگارد :
- $$T(i) = (1, 0, 1), \quad T(j) = (-1, 0, 1) .$$
- (ت) $T(2i - 3j)$ را حساب کنید و بوجه و رتبه T را مشخص نمایید .
 (ب) ماتریس T را مشخص کنید .

(پ) پایه‌های (e_1, e_2) را برای V_2 و (w_1, w_2, w_3) را برای V_3 طوری بیابید که ماتریس T نسبت به آنها به شکل قطری باشد.

۹. تمرین ۸ را در حالتی حل کنید که $T(i) = (1, 0, 1)$ و $T(j) = (1, 1, 1)$.

۱۰. فرض کنید V و W فضاهایی خطی هریک با بعد ۲ و هریک با پایه (e_1, e_2) باشند. همچنین، $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که

$$T(e_1 + e_2) = 3e_1 + 9e_2, \quad T(3e_1 + 2e_2) = 7e_1 + 23e_2.$$

(آ) $T(e_2 - e_1)$ را حساب کنید و بوجه و رتبه T را مشخص نمایید.

(ب) ماتریس T را نسبت به پایه مفروض مشخص کنید.

(پ) پایه (e_1, e_2) را برای V به کار برید، و پایه جدیدی برای W به شکل

$$(e_1 + ae_2, 2e_1 + be_2)$$

در فضای خطی تمام توابع حقیقی، هریک از مجموعه‌های زیر مستقل است و یک زیر فضای با بعد متناهی از V را می‌پیماید. مجموع را پایه‌ای از V بگیرید و فرض کنید $D: V \rightarrow V$ عملگر مشتقگیری باشد. در هر حالت، ماتریسهای D و D^2 را نسبت به این پایه پیدا کنید.

$$11. (\sin x, \cos x) \quad 12. (1, x, e^x)$$

$$13. (1, 1 + x, 1 + x + e^x) \quad 14. (e^x, xe^x)$$

$$15. (-\cos x, \sin x) \quad 16. (\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x)$$

$$17. (e^x \sin x, e^x \cos x) \quad 18. (e^{2x} \sin 3x, e^{2x} \cos 3x)$$

۱۹. پایه $(1, x, x_2^2, x_3^3)$ را در فضای خطی V مرکب از همه چندجمله‌ایهای حقیقی از

درجه نایبتر از ۳ اختیار کنید. فرض کنید D عملگر مشتقگیری بوده $V \rightarrow V: T$

تبدیلی خطی باشد که $p(x)$ را بروی $x'p(x)$ می‌نگارد. ماتریس هریک از تبدیلات

زیر را نسبت به پایه داده شده معین کنید: $T(\bar{A})$; DT ; $T(D)$;

$$T^2 - DT \quad (ت) \quad ; \quad T^2 \quad (ث) \quad ; \quad T^2 D^2 - D^2 T^2 \quad (ج)$$

۲۰. به تمرین ۱۹ بازمی‌گردیم. فرض کنید W نقش V تحت TD باشد. برای V و W

پایه‌هایی بیابید که ماتریس DT نسبت به آنها به شکل قطری باشد.

۱۳.۲ فضاهای خطی از ماتریسها

دیدیم که چطور ماتریسها به‌طور طبیعی به‌صورت نمایشهای تبدیلات خطی ظاهر می‌شوند.

ماتریسها را می‌توان اشیائی موجود به ذات خود، بدون آنکه لزوماً " به تبدیلات خطی مربوط باشند، نیز در نظر گرفت. بدین ترتیب، ماتریسها رده‌دیگری از اشیاء ریاضی را تشکیل می‌دهند که بر آنها می‌توان اعمال جبری تعریف کرد. ارتباطشان با تبدیلات خطی می‌تواند انگیزه‌این تعریفها باشد، لکن این ارتباط فعلاً نادیده گرفته می‌شود. فرض کنیم m و n دو عدد صحیح مثبت بوده، و $I_{m,n}$ مجموعه تمام جفت‌های (i, j) از اعداد صحیح باشد که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$. هر تابع مانند A که قلمروش $I_{m,n}$ باشد یک ماتریس $m \times n$ خوانده می‌شود. مقدار تابعی $A(i, j)$ درایه ij یا عنصر ij ماتریس نام دارد و با a_{ij} نیز نموده می‌شود. رسم است که جمیع مقادیر تابعی را در یک آرایه مستطیلی شکل مرکب از m سطرو n ستون نمایش می‌دهند، به این شکل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عناصر a_{ij} می‌توانند اشیاء دلخواهی از هر نوع باشند. معمولاً، این عناصر اعدادی حقیقی یا مختلط هستند، اما گاهی بجاست ماتریسهایی در نظر گرفته شود که عنصرهای آن اشیاء دیگری، مثلاً "تابع"، باشند. ما ماتریسها را با نماد فشرده‌تر

$$A = (a_{ij}) \quad \text{یا} \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

نیز نشان خواهیم داد. اگر $m = n$ ، ماتریس یک ماتریس مربعی نام دارد. هر ماتریس $1 \times n$ یک ماتریس سطری، و هر ماتریس $m \times 1$ یک ماتریس ستونی نامیده می‌شود.

دو تابع مساوی‌اند اگر و فقط اگر دارای یک قلمرو بوده و در هر عنصر از قلمرو یک مقدار را بگیرند. چون ماتریسها تابع هستند، دو ماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مساوی‌اند اگر و فقط اگر تعداد سطرها و ستونهای آنها یکی بوده و به ازای هر جفت (i, j) ، $a_{ij} = b_{ij}$. حال فرض کنیم درایه‌ها اعداد (حقیقی یا مختلط) باشند، و جمع ماتریسها و ضرب در اسکالر را به همان روش معمول برای توابع حقیقی یا مختلط تعریف می‌کنیم.

تعریف. هرگاه $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ دو ماتریس $m \times n$ بوده و c یک اسکالر باشد، ماتریسهای $A + B$ و cA را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad cA = (ca_{ij}).$
مجموع فقط وقتی تعریف می شود که A و B یک اندازه داشته باشند.

مثال. هرگاه

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

داریم

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$(-1)B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

ماتریس صفر O را ماتریس $m \times n$ تعریف می کنیم که تمام عناصر آن 0 اند. با این تعریفها، به آسانی می توان تحقیق کرد که گردآیه تمام ماتریسهای $m \times n$ یک فضای خطی است. این فضای خطی را به $M_{m,n}$ نشان می دهیم. اگر درایه ها اعدادی حقیقی باشند، فضای $M_{m,n}$ یک فضای خطی حقیقی است. و اگر درایه ها مختلط باشند، یک فضای خطی مختلط می باشد. همچنین، به آسانی ثابت می شود که این فضا بعدش mn است. در واقع، یک پایه $M_{m,n}$ از mn ماتریس تشکیل شده که یک درایه مساوی 1 دارند و بقیه مساوی 0 . مثلاً، شش ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

یک پایه برای مجموعه تمام ماتریسهای 2×3 تشکیل می دهند.

۱۴.۲ یکرختی بین تبدیلات خطی و ماتریسها

حال به رابطه بین ماتریسها و تبدیلات خطی باز می گردیم. فرض کنیم V و W فضاهایی خطی با بعد متناهی بوده و $\dim W = m$ و $\dim V = n$. پایه (e_1, \dots, e_n) را برای V و پایه (w_1, \dots, w_m) را برای W اختیار می کنیم. در این بحث، این پایه را ثابت نگه

می‌داریم. فرض کنیم $\mathcal{L}(V, W)$ فضای خطی تمام تبدیلات خطی از V بتوی W باشد. اگر $m(T)$ ، $T \in \mathcal{L}(V, W)$ را ماتریس T نسبت به پایه‌های فوق می‌انگاریم. یادآور می‌شویم که $m(T)$ به این صورت تعریف می‌شود:

نقش هر عنصر پایه مانند e_k به صورت ترکیبی خطی از عناصر پایه W بیان می‌شود:

$$(19.2) \quad T(e_k) = \sum_{i=1}^m t_{ik} w_i, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ به‌ازای}$$

ضریبهای اسکالر t_{ik} در پایه‌های ik ماتریس $m(T)$ هستند. لذا، داریم

$$(20.2) \quad m(T) = (t_{ik})_{i,k=1}^{m,n}.$$

معادله (20.2) تابع جدید m را تعریف می‌کند که قلمروش $\mathcal{L}(V, W)$ بوده و مقادیرش

ماتریسهای $M_{m,n}$ در $M_{m,n}$ اند. چون هر ماتریس $m \times n$ ماتریس $m(T)$ به ازای T ای در $\mathcal{L}(V, W)$ است، برد m مساوی $M_{m,n}$ می‌باشد. قضیه زیر نشان می‌دهد که تبدیل $m: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{m,n}$ خطی و یک به یک است.

قضیه 15.2. قضیه یگریختی. به‌ازای هر S و T در $\mathcal{L}(V, W)$ و هر اسکالر c داریم

$$m(cT) = cm(T) \text{ و } m(S + T) = m(S) + m(T)$$

بعلاوه،

$$m(S) = m(T) \text{ ایجاب می‌کند که } S = T$$

در نتیجه، m بر $\mathcal{L}(V, W)$ یک به یک می‌باشد.

برهان. ماتریس $m(T)$ از ضریبهای t_{ik} در (19.2) تشکیل شده است. همچنین، ماتریس $m(S)$ از ضریبهای s_{ik} در معادلات زیر متشکل است:

$$(21.2) \quad S(e_k) = \sum_{i=1}^m s_{ik} w_i, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ به‌ازای}$$

چون داریم

$$(cT)(e_k) = \sum_{i=1}^m (ct_{ik}) w_i \quad \text{و} \quad (S + T)(e_k) = \sum_{i=1}^m (s_{ik} + t_{ik}) w_i$$

خواهیم داشت $m(cT) = (ct_{ik}) = cm(T)$ و $m(S + T) = (s_{ik} + t_{ik}) = m(S) + m(T)$. این خطی بودن m را ثابت می‌کند.

برای اثبات یک به یک بودن m ، فرض کنیم $m(S) = m(T)$ که در آن $S = (s_{ik})$ و $T = (t_{ik})$. معادلات (۱۹.۲) و (۲۱.۲) نشان می‌دهند که به ازای هر عنصر پایه e_k ، $S(e_k) = T(e_k)$ ؛ در نتیجه، به ازای هر x در V ، $S(x) = T(x)$ ؛ و لذا $S = T$.

تذکره. تابع m یک یگريختی نامیده می‌شود. m ، به ازای پایه‌های مفروضی، یک تناظر یک به یک بین مجموعه تبدیلات خطی $\mathcal{L}(V, W)$ و مجموعه ماتریسهای $m \times n$ ، $M_{m,n}$ برقرار می‌کند. اعمال جمع و ضرب در اسکالرها تحت این تناظر حفظ می‌شوند. فضاهای خطی $\mathcal{L}(V, W)$ و $M_{m,n}$ یگريخت گفته می‌شوند. ضمناً، قضیه ۱۱.۲ نشان می‌دهد که قلمرو یک تبدیل خطی یک به یک بعد برد خود را دارد. بنابراین،

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim M_{m,n} = mn$$

هرگاه $W = V$ و برای V و W یک پایه اختیار کنیم، ماتریس $m(I)$ که نظیر تبدیل همانی $I: V \rightarrow V$ است یک ماتریس قطری $n \times n$ است که هر درایه قطری آن ۱ و بقیه مساوی ۰ اند. این ماتریس ماتریس همانی یا ماتریس یکه نامیده و با I یا I_n نموده می‌شود.

۱۵.۲ ضرب ماتریسها

بعضی از تبدیلات خطی را می‌توان به وسیله ترکیب در هم ضرب کرد. حال ضرب ماتریسها را طوری تعریف می‌کنیم که حاصل ضرب دو ماتریس نظیر ترکیب تبدیلات خطی باشد که آنها را نمایش می‌دهند.

یادآور شویم که اگر $T: U \rightarrow V$ و $S: V \rightarrow W$ تبدیلاتی خطی باشند، ترکیب آنها

$ST: U \rightarrow W$ تبدیلی است خطی که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ST(x) = S[T(x)], \quad U \text{ در } x \text{ به ازای هر } x$$

فرض کنیم U ، V ، و W با بعد متناهی باشند، مثلاً،

$$\dim U = n, \quad \dim V = p, \quad \dim W = m.$$

برای U و V و W پایه‌هایی اختیار می‌کنیم. نسبت به این پایه‌ها، ماتریس $m(S)$ یک ماتریس $m \times p$ ، ماتریس T یک ماتریس $p \times n$ ، و ماتریس ST یک ماتریس $m \times n$ است. با تعریف ضرب ماتریسی زیر می‌توانیم رابطه $m(ST) = m(S)m(T)$ را نتیجه بگیریم.

این رابطه خاصیت یکریختی را به حاصل ضربها تعمیم می دهد .

تعریف . فرض کنیم A یک ماتریس $m \times p$ و B یک ماتریس $p \times n$ ؛ مثلا " ،

$$B = (b_{ij})_{i,j=1}^{p,n} \text{ و } A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$$

در این صورت ، حاصل ضرب AB مساوی ماتریس $m \times n$ ، $C = (c_{ij})$ ، تعریف می شود که درایه ij آن از رابطه

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (22.2)$$

به دست می آید .

تذکر . حاصل ضرب AB را نمی توان تعریف کرد مگر اینکه تعداد ستونهای A مساوی عدده سطرهای B باشد .

اگر سطر i م A را به A_i و ستون j م B را به B^j نشان داده و آنها را بردارهایی p بعدی فرض کنیم ، مجموع (۲۲.۲) چیزی جز حاصل ضرب نقطه ای $A_i \cdot B^j$ نخواهد بود . به عبارت دیگر ، درایه ij ، AB حاصل ضرب نقطه ای سطر i م A با ستون j م B می باشد :

$$AB = (A_i \cdot B^j)_{i,j=1}^{m,n} .$$

بنابراین ، ضرب ماتریسی را می توان تعمیمی از ضرب نقطه ای دانست .

مثال ۱ . فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ چون A ماتریسی 2×3 و

B ماتریسی 3×2 است ، حاصل ضرب AB ماتریس 2×2 زیر می باشد :

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} .$$

درایه های AB به صورت زیر محاسبه می شوند :

$$A_1 \cdot B^1 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 17 ,$$

$$A_1 \cdot B^2 = 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 21,$$

$$A_2 \cdot B^1 = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_2 \cdot B^2 = (-1) \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -7.$$

مثال ۰۲. فرض کنیم

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

در اینجا A ماتریسی 2×3 و B ماتریسی 3×1 است، پس AB ماتریس 2×1 زیر است:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 \\ A_2 \cdot B^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\text{زیرا } A_1 \cdot B^1 = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -9$$

$$\cdot A_2 \cdot B^1 = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 8$$

مثال ۰۳. اگر A و B ماتریسهای مربعی و دارای یک اندازه باشند، AB و BA هر دو تعریف شده‌اند. مثلاً، اگر

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

داریم

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \text{ و } AB = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

این مثال نشان می‌دهد که در حالت کلی $AB \neq BA$. اگر $AB = BA$ ، می‌گوییم A و B تعویض می‌شوند.

مثال ۰۴. اگر I_p ماتریس همانی $p \times p$ باشد، به‌ازای هر ماتریس $p \times n$ مانند A ،

$I_p A = A$ ، و به‌ازای هر ماتریس $m \times p$ مانند B ، $BI_p = B$. به عنوان مثال ،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

حال ثابت می‌کنیم که ماتریس ترکیب ST حاصل ضرب ماتریسهای $m(S)$ و $m(T)$ است .

قضیه ۱۶.۰۲ . فرض کنیم $T: U \rightarrow V$ و $S: V \rightarrow W$ تبدیلاتی خطی باشند ، که U, V, W فضا‌هایی خطی و با بعد متناهی هستند . در این صورت ، به‌ازای پایه‌هایی ثابت ، ماتریسهای S ، T ، و ST با معادله

$$m(ST) = m(S)m(T)$$

به هم مربوط می‌شوند .

برهان . فرض کنیم $\dim U = n$ ، $\dim V = p$ ، $\dim W = m$. همچنین ، (u_1, \dots, u_n) ، (v_1, \dots, v_p) ، (w_1, \dots, w_m) پایه‌های U ، V ، و W باشد . نسبت به این پایه‌ها

داریم $m(S) = (s_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$ ، که در آن به‌ازای $k = 1, 2, \dots, p$ ، $S(v_k) = \sum_{i=1}^m s_{ik} w_i$ ؛ و

$m(T) = (t_{ij})_{i,j=1}^{p,n}$ ، که در آن به‌ازای $j = 1, 2, \dots, n$ ، $T(u_j) = \sum_{k=1}^p t_{kj} v_k$. بنابراین ،

داریم

$$ST(u_j) = S[T(u_j)] = \sum_{k=1}^p t_{kj} S(v_k) = \sum_{k=1}^p t_{kj} \sum_{i=1}^m s_{ik} w_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^p s_{ik} t_{kj} \right) w_i;$$

در نتیجه ، خواهیم داشت

$$m(ST) = \left(\sum_{k=1}^p s_{ik} t_{kj} \right)_{i,j=1}^{m,n} = m(S)m(T)$$

قبلاً دیدیم که ضرب ماتریسی همیشه در قانون تعویضپذیری صدق نمی‌کند . اما

قضیه زیر نشان می‌دهد که در قوانین شرکتپذیری و پخشپذیری صدق می‌کند .

قضیه ۱۷.۲. قوانین شرکتپذیری و پخشپذیری برای ضرب ماتریسی. ماتریسهای A و B و C مفروضند.

(آ) اگر حاصل ضربهای $A(BC)$ و $(AB)C$ معنی داشته باشند، داریم

$$A(BC) = (AB)C \quad (\text{قانون شرکتپذیری}).$$

(ب) فرض کنیم A و B دارای یک اندازه باشند. اگر AC و BC معنی داشته باشند، داریم

$$(A + B)C = AC + BC \quad (\text{قانون پخشپذیری از راست})$$

حال آنکه اگر CA و CB معنی داشته باشند، خواهیم داشت

$$C(A + B) = CA + CB \quad (\text{قانون پخشپذیری از چپ}).$$

برهان. این خواص را می‌توان مستقیماً از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه گرفت، اما ما استدلال زیر را ترجیح می‌دهیم. فضاهای خطی با بعد متناهی U, V, W, X و تبدیلات خطی $S: V \rightarrow W, T: U \rightarrow V, R: W \rightarrow X$ را در نظر می‌گیریم با این خاصیت که به‌ازای پایه‌های ثابتی داشته باشیم

$$A = m(R), \quad B = m(S), \quad C = m(T).$$

بنابراین قضیه ۱۶.۲ داریم $m(RS) = AB$ و $m(ST) = BC$. از قانون شرکتپذیری برای ترکیب معلوم می‌شود که $R(ST) = (RS)T$. اگر قضیه ۱۶.۲ را بار دیگر بر این معادله اعمال کنیم، خواهیم داشت $m(R)m(ST) = m(RS)m(T)$ یا $A(BC) = (AB)C$ که (آ) را ثابت می‌کند. برهان (ب) را می‌توان با گفتار مشابهی بیان داشت.

تعریف. اگر A یک ماتریس مربعی باشد، توانهای صحیح A را به استقرا تعریف می‌کنیم:

$$A^0 = I; \quad \text{به‌ازای } n \geq 1, \quad A^n = AA^{n-1}.$$

۱۶.۲ تمرین

$$1. \quad \text{اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{و } C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{، } B + C, \quad C$$

، CA ، AC ، BA ، AB و $A(2B - 3C)$ را حساب کنید.

۲. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، و تمام ماتریسهای 2×2 مانند B را بیابید که (T)

$$AB = O \quad (\text{ب}) \quad ; \quad BA = O$$

۳. در هر یک از حالات زیر، a, b, c, d را طوری بیابید که در معادله داده شده صدق کنند:

$$: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (T)$$

$$\cdot \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۴. $AB - BA$ را در هر یک از حالات زیر حساب کنید:

$$: A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (T)$$

$$\cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۵. ثابت کنید که اگر A یک ماتریس مربعی باشد، به ازای هر دو عدد صحیح $A^n A^m = A^{m+n}$ ،
 $m \geq 0, n \geq 0$

۶. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. تحقیق کنید که $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، و A^n را محاسبه نمایید.

۷. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. تحقیق کنید که $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ ،

و A^n را محاسبه نمایید.

۸. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. تحقیق کنید که $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، و A^3 و A^4 را

محاسبه نمایید. برای A^n یک فرمول کلی حدس بزنید و آن را به استقرا ثابت کنید.

۹. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. ثابت کنید $A^2 = 2A - I$ ، و A^{100} را محاسبه نمایید.

۱۰. تمام ماتریسهای 2×2 مانند A را بیابید که $A^2 = O$.

۱۱. (\bar{A}) ثابت کنید ماتریس 2×2 ی A با هر ماتریس 2×2 تعویض می شود اگر و فقط اگر با هر یک از چهار ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعویض شود.

(ب) تمام این A ها را پیدا کنید.

۱۲. هر یک از ماتریسهای 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

که در آنها b و c اعداد حقیقی دلخواهی هستند، در معادله $A^2 = I$ صدق می کند.

تمام ماتریسهای 2×2 ی A را بیابید که $A^2 = I$.

۱۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ ، ماتریسهای 2×2 ی C و D را بیابید که

$$DA = B \text{ و } AC = B$$

۱۴. (\bar{A}) تحقیق کنید که اتحادهای جبری

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \text{ و } (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

برای ماتریسهای 2×2 ی $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ برقرار نیستند.

(ب) طرفهای راست این اتحادها را طوری اصلاح کنید که برای تمام ماتریسهای

مربعی A و B برقرار باشند.

(پ) اتحادهای مذکور در (\bar{A}) برای چه ماتریسهای A و B برقرارند؟

۱۷.۲ دستگاههای معادلات خطی

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ از اعداد بوده و c_1, \dots, c_m عدد باشند. هر مجموعه مرکب از m معادله به شکل

$$(۲۳.۲) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ به‌ازای}$$

یک دستگاه m معادله خطی و n مجهول نام دارد. در اینجا x_1, \dots, x_n مجهول گرفته می‌شوند. یک جواب دستگاه یک n تایی مانند (x_1, \dots, x_n) از اعداد است که به‌ازای آن تمام معادلات برقرارند. ماتریس A ماتریس ضرایب دستگاه نامیده می‌شود.

دستگاههای خطی را می‌توان به کمک تبدیلات خطی بررسی کرد. پایه‌های معمولی مرکب از بردارهای یکه مختصات رادر V_n و V_m اختیار می‌کنیم. ماتریس ضرایب A تبدیل خطی $T: V_n \rightarrow V_m$ را مشخص می‌کند که بردار دلخواه $x = (x_1, \dots, x_n)$ در V_n را بروی بردار $y = (y_1, \dots, y_m)$ در V_m می‌نگارد که با m معادله خطی زیر مشخص می‌شود:

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ به‌ازای}$$

فرض کنیم $c = (c_1, \dots, c_m)$ برداری در V_m باشد که مؤلفه‌هایش اعداد آمده در دستگاه (۲۳.۲) اند. این دستگاه را می‌توان به شکل ساده‌تر

$$T(x) = c$$

نوشت. دستگاه جواب دارد اگر و فقط اگر c در برد T باشد. اگر درست یک x در V_n بروی c نگاشته شود، دستگاه دقیقاً "یک جواب دارد. و اگر بیش از یک x بروی c نگاشته شود، دستگاه بیش از یک جواب خواهد داشت.

مثال ۱. یک دستگاه بدون جواب دستگاه $x + y = 1$, $x + y = 2$ جواب ندارد. مجموع دو عدد نمی‌تواند هم 1 و هم 2 باشد.

مثال ۲. یک دستگاه دارای فقط یک جواب. دستگاه $x + y = 1$, $x - y = 0$ درست یک جواب دارد: $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

مثال ۳. یک دستگاه با بیش از یک جواب. دستگاه $x + y = 1$ ، مرکب از یک معادله دو مجهولی، بیش از یک جواب دارد. هر دو عدد که مجموعشان 1 باشد جواب است.

به هر دستگاه خطی (۲۳.۲) می‌توان دستگاه دیگر زیر را مربوط ساخت:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ به ازای}$$

که از تعویض c_i در (۲۳.۲) با 0 به دست می‌آید. این دستگاه را دستگاه همگن نظیر (۲۳.۲) می‌نامند. اگر $c \neq 0$ ، دستگاه (۲۳.۲) یک دستگاه غیر همگن نامیده می‌شود. بردار x در V_n در دستگاه همگن صدق می‌کند اگر و فقط اگر

$$T(x) = 0,$$

که در آن T تبدیل خطی است که به وسیله ماتریس ضرایب مشخص می‌شود. دستگاه همگن همیشه یک جواب، یعنی $x = 0$ ، را دارد، ولی ممکن است جوابهای دیگر نیز داشته باشد. مجموعه جوابهای دستگاه همگن فضای بوج T است. قضیه زیر رابطه بین جوابهای دستگاه همگن و جوابهای دستگاه غیر همگن را وصف می‌کند.

قضیه ۱۸.۲. فرض کنیم دستگاه غیر همگن (۲۳.۲) دارای جوابی، مثلا b ، باشد. (آ) اگر بردار x یک جواب دستگاه غیر همگن باشد، بردار $v = x - b$ یک جواب دستگاه همگن نظیر آن است.

(ب) اگر v یک جواب دستگاه همگن باشد، بردار $x = v + b$ یک جواب دستگاه غیر همگن خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $T: V_n \rightarrow V_m$ تبدیل خطی باشد که به وسیله ماتریس ضرایب، به صورت وصف شده در بالا، مشخص می‌شود. چون b یک جواب دستگاه غیر همگن است، داریم $T(b) = c$. فرض کنیم x و v دو بردار در V_n باشند بطوری که $v = x - b$ در این صورت، داریم

$$T(v) = T(x - b) = T(x) - T(b) = T(x) - c.$$

بنابراین، $T(x) = c$ اگر و فقط اگر $T(v) = 0$ است. این هم (آ) و هم (ب) را ثابت خواهد کرد.

این قضیه نشان می‌دهد که مسئله یافتن تمام جوابهای یک دستگاه غیر همگن طبعاً به دو بخش تقسیم می‌شود: (۱) یافتن تمام جوابهای v دستگاه همگن، یعنی تعیین فضای بوج T ، و (۲) یافتن یک جواب خصوصی b دستگاه غیر همگن. بدین ترتیب، با افزودن b به هر بردار v در فضای بوج T ، تمام جوابهای $x = v + b$ دستگاه غیر همگن به دست خواهد آمد.

فرض کنیم k بعد $N(T)$ (بوجه T) باشد. اگر بتوان k جواب مستقل v_1, \dots, v_k دستگاه همگن را پیدا کرد، این جوابها یک پایه برای $N(T)$ تشکیل می‌دهند، و می‌توان هر v در $N(T)$ را با تشکیل تمام ترکیبات خطی ممکن مانند

$$v = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k,$$

که در آن t_1, \dots, t_k اسکالرهایی هستند، به دست آورد. این ترکیب خطی جواب عمومی دستگاه همگن نامیده می‌شود. اگر b یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن باشد، تمام جوابها از رابطه

$$x = b + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

به دست می‌آیند. این ترکیب خطی جواب عمومی دستگاه غیر همگن نامیده می‌شود. حال قضیه ۱۸.۲ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

قضیه ۱۹.۲. فرض کنیم $T: V_n \rightarrow V_m$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که $T(x) = y$ ، که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، $y = (y_1, \dots, y_m)$ ، و

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

همچنین، فرض کنیم k بوجه T باشد. اگر v_1, \dots, v_k جواب مستقل دستگاه همگن $T(x) = 0$ بوده و b یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن $T(x) = c$ باشد، جواب عمومی دستگاه غیر همگن

$$x = b + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

است، که در آن t_1, \dots, t_k اسکالرهایی هستند.

این قضیه راه یافتن جواب خصوصی b دستگاه غیر همگن و همچنین طرز تعیین جوابهای v_1, \dots, v_k دستگاه همگن را به ما نمی‌گوید. فقط این را می‌گوید که وقت جواب

داشتن دستگاه غیر همگن باید منتظر چه بود. مثال زیر، با اینکه خیلی ساده است، قضیه را توضیح خواهد داد.

مثال. معادله $x + y = 0$ دستگاه همگن مربوط به دستگاه $x + y = 2$ است. پس فضای بوج از تمام بردارهایی در V_2 به شکل $(t, -t)$ تشکیل شده که t دلخواه است. چون $(t, -t) = t(1, -1)$ ، این یک زیر فضای یک بعدی V_2 با پایه $(1, -1)$ می باشد. یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن $(0, 2)$ است. پس جواب عمومی دستگاه غیر همگن عبارت است از

$$x = t, \quad y = 2 - t \quad \text{یا} \quad (x, y) = (0, 2) + t(1, -1)$$

که t دلخواه می باشد.

۱۸.۲ روشهای محاسبه

حال به محاسبه جوابهای یک دستگاه خطی غیر همگن می پردازیم. گرچه برای حل این مسئله روشهای متعددی تعبیه شده، اما اگر دستگاه بزرگ باشد، تمام آنها به محاسبه زیادی نیاز خواهند داشت. مثلاً، حل یک دستگاه ده معادله و به همین تعداد مجهول حتی به کمک یک ماشین حساب رومیزی، چند ساعت وقت خواهد گرفت.

ما روش معروفی را مطرح می کنیم، به نام روش حذف گاوس^۱ - ژردان^۲، که نسبتاً ساده است و می توان آن را برای کامپیوترهای الکترونیکی با سرعت زیاد به آسانی برنامه ریزی کرد. این روش از سه نوع عمل اساسی بر معادلات یک دستگاه خطی تشکیل شده است:

(۱) تعویض دو معادله با هم؛

(۲) ضرب تمام جملات یک معادله در یک اسکالر ناصفر؛

(۳) افزودن مضربی از یک معادله به دیگری.

هر بار که یکی از این اعمال بر دستگاه صورت گیرد، دستگاه جدیدی با همان جوابها به دست می آید. دو دستگاه این طوری معادل نامیده می شوند. با تکرار این اعمال به طرز اصولی، مآلاً، به یک دستگاه معادل می رسیم که می توان آن را با معاینه حل کرد.

ما این روش را با چند مثال خاص توضیح می‌دهیم. این کار طرز استفاده از روش را در حالت کلی روشن می‌سازد.

مثال ۱. یک دستگاه با جواب منحصر بفرد.

دستگاه

$$2x - 5y + 4z = -3$$

$$x - 2y + z = 5$$

$$x - 4y + 6z = 10$$

را در نظر می‌گیریم. این دستگاه خاص جواب منحصر بفرد $x = 124, y = 75, z = 31$ را دارد، که ما آن را با فرایند حذف گاوس-ژردان به دست می‌آوریم. برای کاستن از زحمت کار، حروف x, y, z و علامت تساوی را نمی‌نویسیم، بلکه در عوض با ماتریس افزوده

$$(24.2) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array} \right]$$

کار می‌کنیم، که با الحاق طرفهای راست دستگاه به ماتریس ضرایب به دست می‌آید. سه عمل اساسی مذکور در بالا بر سطرهای ماتریس افزوده اعمال می‌شوند و اعمال سطری نام دارند. در هر مرحله از فرایند می‌توان حروف x, y, z را باز گرداند و علامت تساوی را در امتداد خط قائم گذاشت تا معادلات به دست آیند. هدف نهایی این است که پس از یک سری اعمال سطری به ماتریس افزوده

$$(25.2) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array} \right]$$

برسیم. دستگاه معادلات نظیر عبارت است از $x = 124, y = 75, z = 31$ ، که جواب مطلوب را به دست می‌دهد.

اولین قدم یافتن 1 در گوشه بالایی چپ ماتریس است. این قدم را می‌توان با تعویض سطر اول ماتریس (24.2) با سطر دوم یا سوم برداشت، و یا اینکه سطر اول را در $\frac{1}{2}$ ضرب کرد. با تعویض سطرهای اول و دوم با هم خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array} \right].$$

قدم بعد صفر کردن تمام درایه‌های باقیمانده در ستون اول، بدون دست زدن به سطر اول، است. برای این کار سطر اول را در ۲- ضرب و حاصل را به سطر دوم می‌افزاییم. بعد سطر اول را در ۱- ضرب و نتیجه را به سطر سوم اضافه می‌کنیم. پس از این دو عمل خواهیم داشت

$$(۲۶.۲) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array} \right].$$

حال این عمل را بر ماتریس کوچکتر $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -13 \\ -2 & 5 & 5 \end{array} \right]$ ، که مجاور دو صفر ظاهر

شده، انجام می‌دهیم. می‌توان با ضرب سطر دوم (۲۶.۲) در ۱- در گوشه بالایی چپ آن ۱ به دست آورد. این کار ماتریس

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

را به ما می‌دهد. با ضرب سطر دوم در ۲ و افزودن نتیجه به سطر سوم خواهیم داشت

$$(۲۷.۲) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array} \right].$$

در این مرحله دستگاه معادلات نظیر عبارت است از

$$x - 2y + z = 5$$

$$y - 2z = 13$$

$$z = 31.$$

این معادلات را می‌توان با شروع از سومی و بازگشت به عقب حل کرد تا داشته باشیم

$$z = 31, \quad y = 13 + 2z = 13 + 62 = 75,$$

$$x = 5 + 2y - z = 5 + 150 - 31 = 124.$$

و یا اینکه فرایند گاوس-ژردان را با صفر کردن تمام درایه‌های بالای عناصر قطری در ستونهای دوم و سوم ادامه داد. با ضرب سطر دوم (۲۷۰۲) در ۲ و افزودن نتیجه به سطر اول خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 31 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array} \right].$$

بالاخره، با ضرب سطر سوم در ۳ و افزودن نتیجه به سطر اول، و سپس ضرب سطر سوم در ۲ و اضافه کردن نتیجه به سطر دوم، ماتریس (۲۵۰۲) به دست خواهد آمد.

مثال ۲. یک دستگاه با بیش از یک جواب. دستگاه ۳ معادله و ۵ مجهول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$2x - 5y + 4z + u - v = -3$$

$$x - 2y + z - u + v = 5 \quad (280.2)$$

$$x - 4y + 6z + 2u - v = 10.$$

ماتریس افزوده نظیر عبارت است از

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & -1 & 10 \end{array} \right].$$

ضرایب x, y, z و طرفهای راست مثل مثال ۱ هستند. اگر همان اعمال سطری مثال ۱ را اعمال کنیم، مآلاً "به ماتریس افزوده"

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -16 & 19 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 11 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 31 \end{array} \right]$$

خواهیم رسید. دستگاه معادلات نظیر را می‌توان نسبت به x ، y ، z و برحسب u و v حل کرد، که خواهیم داشت

$$x = 124 + 16u - 19v$$

$$y = 75 + 9u - 11v$$

$$z = 31 + 3u - 4v.$$

اگر فرض کنیم $u = t_1$ و $v = t_2$ ، که در آنها t_1 و t_2 حقیقی و دلخواه هستند، و x, y, z را از این معادلات به دست آوریم، بردار (x, y, z, u, v) در V_5 به صورت $(x, y, z, u, v) = (124 + 16t_1 - 19t_2, 75 + 9t_1 - 11t_2, 31 + 3t_1 - 4t_2, t_1, t_2)$ یک جواب خواهد بود. این بردار را می‌توان با جدا کردن قسمتهای شامل t_1 و t_2 این طور نوشت:

$$(x, y, z, u, v) = (124, 75, 31, 0, 0) + t_1(16, 9, 3, 1, 0) + t_2(-19, -11, -4, 0, 1).$$

این معادله جواب عمومی دستگاه است. بردار $(124, 75, 31, 0, 0)$ جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن (28.2) است. دو بردار $(16, 9, 3, 1, 0)$ و $(-19, -11, -4, 0, 1)$ جوابهای دستگاه همگن نظیر هستند. چون این بردارها مستقل اند، برای فضای تمام جوابهای دستگاه همگن یک پایه تشکیل می‌دهند.

مثال ۳. یک دستگاه بدون جواب. دستگاه

$$2x - 5y + 4z = -3$$

(۲۹.۲)

$$x - 2y + z = 5$$

$$x - 4y + 5z = 10$$

را در نظر می‌گیریم. این دستگاه تقریباً "با دستگاه مثال ۱ یکی است جز اینکه ضریب z در معادله سوم از ۶ به ۵ تغییر کرده است. ماتریس افزوده نظیر عبارت است از

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & 10 \end{array} \right]$$

با استفاده از همان اعمال سطری مثال ۱ برای تبدیل (24.2) به (27.2) ، به ماتریس افزوده^۴

$$(30.2) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{array} \right]$$

خواهیم رسید. سطر پایینی به صورت معادله عبارت است از $0 = 31$. لذا، دستگاه اصلی جواب ندارد، چرا که دو دستگاه (29.2) و (30.2) معادل می‌باشند.

در هر یک از مثالهای پیش، تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر نبود. در حالتی که معادلات از مجهولات بیشتر باشند، باز هم فرایند گاوس-ژردان قابل به‌کار بردن است. مثلاً، دستگاه مثال ۱ را در نظر می‌گیریم، که دارای جواب $x = 124, y = 75, z = 31$ است. اگر به این دستگاه یک معادله جدید که همین سه‌تایی در آن صدق کند، مثلاً "معادله" $2x - 3y + z = 54$ را اضافه کنیم، روش حذف به ماتریس افزوده^۵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

راکه سطری از صفر در پایین دارد منجر می‌شود. اما اگر در معادله جدید سه‌تایی $(124, 75, 31)$ صدق نکند، مثلاً "معادله" $x + y + z = 1$ فرایند حذف به ماتریس افزوده‌ای به شکل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right]$$

ختم می‌شود، که در آن $a \neq 0$. در اینجا آخرین سطر، معادله تضاد دار $0 = a$ را به دست می‌دهد، مبین آنکه دستگاه جواب ندارد.

۱۹.۲ معکوس ماتریسهای مربعی

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. اگر ماتریس $n \times n$ دیگری چون B باشد بطوری که $BA = I$ ، که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است، A نامنفرد و B معکوس چپ A نامیده می شود.

پایه معمولی مرکب از بردارهای یکه مختصات در V_n را اختیار و فرض می کنیم $T: V_n \rightarrow V_n$ تبدیل خطی باشد که ماتریسش $m(T) = A$ است. در این صورت، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۲۰.۲. ماتریس A نامنفرد است اگر و فقط اگر T معکوسپذیر باشد. هرگاه $BA = I$ ، آنگاه $B = m(T^{-1})$.

برهان فرض کنیم A نامنفرد بوده $BA = I$. ثابت می کنیم $T(x) = O$ تساوی $x = O$ را ایجاب می کند. گوئیم فرض کنیم x طوری باشد که $T(x) = O$ ، و X را ماتریس ستونی $1 \times n$ می انگاریم که از مولفه های x تشکیل شده است. چون $T(x) = O$ ، ماتریس حاصل ضرب AX یک ماتریس ستونی $1 \times n$ است که از چند صفر تشکیل شده است؛ در نتیجه، $B(AX)$ نیز یک ماتریس ستونی متشکل از چند صفر است. اما $B(AX) = (BA)X = IX = X$ ، پس هر مولفه x مساوی ۰ است. لذا، T معکوسپذیر است، و معادله $TT^{-1} = I$ ایجاب می کند که $m(T)m(T^{-1}) = I$ یا $Am(T^{-1}) = I$. با ضرب این رابطه از چپ در B خواهیم داشت $m(T^{-1}) = B$. بعکس، اگر T معکوسپذیر باشد، $T^{-1}T$ تبدیل همانی است، پس $m(T^{-1})m(T)$ ماتریس همانی می باشد. بنابراین، A نامنفرد است و $m(T^{-1})A = I$.

تمام خواص تبدیلات خطی معکوسپذیر همتاهایی برای ماتریسهای نامنفرد دارند. بخصوص، معکوسهای چپ (در صورت وجود) منحصر بفردند، و هر معکوس چپ معکوس راست نیز هست. به عبارت دیگر، هرگاه A نامنفرد بوده $BA = I$ ، آنگاه $AB = I$. ما B را معکوس A می نامیم و به A^{-1} نشان می دهیم. A^{-1} نیز نامنفرد است و معکوس آن A خواهد بود.

حال نشان می دهیم که مسئله تعیین درایه های معکوس یک ماتریس نامنفرد معادل

است با حل n دستگاه خطی غیر همگن و مستقل.

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ نامنفرد و $A^{-1} = (b_{ij})$ معکوس آن باشد. درایه‌های A و A^{-1} به وسیله n^2 معادله

$$(۳۱.۲) \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}$$

به هم مربوط می‌شوند، که در آنها اگر $i = j$ ، $\delta_{ij} = 1$ و، اگر $i \neq j$ ، $\delta_{ij} = 0$. به‌ازای هر j ثابت می‌توان این را یک دستگاه غیر همگن مرکب از n معادله خطی و n مجهول $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ گرفت. چون A نامنفرد است، هر یک از این دستگاهها جواب منحصر بفرد دارد، که ستون j م B است. این دستگاهها همه دارای یک ماتریس ضرایب A هستند و فقط در طرفهای راست با هم فرق دارند. مثلاً، " اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، 9 معادله در (۳۱.۲) وجود دارد که می‌توان آنها را به‌صورت 3 دستگاه خطی مستقل با ماتریسهای افزوده زیر بیان کرد:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array} \right].$$

اگر فرایند گاوس-ژردان را به‌کار ببریم، بترتیب به ماتریسهای افزوده زیر خواهیم رسید:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{32} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{33} \end{array} \right].$$

در عمل از اینکه هر سه دستگاه یک ماتریس ضرایب دارند سود جسته و هر سه دستگاه را یکباره با کار بر ماتریس بزرگ شده

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

حل می‌کنیم. در این صورت، فرایند حذف به ماتریس

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array} \right]$$

منجر می‌شود. ماتریس طرف راست خط قائم معکوس مطلوب است، و ماتریس سمت چپ خط ماتریس همانی 3×3 می‌باشد.

لازم نیست نامنفرد بودن A را از پیش بدانیم. در حالتی که A منفرد باشد (نامنفرد نباشد)، باز هم می‌توان روش گاوس-ژردان را به کار برد، اما جایی در عمل یکی از عناصر قطری صفر می‌شود، و امکان اینکه A به ماتریس همانی بدل شود وجود ندارد.

یک دستگاه n معادله خطی و n مجهول، مثلاً

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

را می‌توان به‌طور ساده‌تر و به شکل یک معادله ماتریسی مانند

$$AX = C$$

نوشت، که در آن $A = (a_{ij})$ ماتریس ضرایب است، و X و C ماتریسهای ستونی

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

می‌باشند. چنانچه A نامنفرد باشد، دستگاه جواب منحصر بفرد $X = A^{-1}C$ را خواهد داشت.

۲۰۰۲ تمرین

فرایند حذف گاوس-ژردان را در هر یک از دستگاههای زیر به کار برید. در صورت وجود یک جواب، جواب عمومی را تعیین نمایید.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \quad \cdot \quad \text{۲} \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \quad \cdot \quad ۱ \\ 2x - y + 4z &= 11 \\ -y + z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \quad \cdot \quad \text{۴} \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \quad \cdot \quad \text{۳} \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y - 3z + u &= 5 \quad \cdot \quad \text{۶} \\ 2x - y + z - 2u &= 2 \\ 7x + y - 7z + 3u &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + u &= 1 \quad \cdot \quad \text{۵} \\ x + y - 3z + 2u &= 2 \\ 6x + y - 4z + 3u &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z + 2u &= -2 \quad \cdot \quad \text{۸} \\ 2x + 3y - z - 5u &= 9 \\ 4x - y + z - u &= 5 \\ 5x - 3y + 2z + u &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3u + 4v &= 0 \quad \cdot \quad \text{۷} \\ 2x + 2y + 7z + 11u + 14v &= 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10u + 15v &= 0 \end{aligned}$$

۹. ثابت کنید دستگاه $x + y + 2z = 2$, $2x - y + 3z = 2$, $5x - y + az = 6$ در حالت $a \neq 8$ جواب منحصر بفرد دارد. تمام جوابها را وقتی $a = 8$ بیابید.

۱۰. (۲) جمع جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2 \end{aligned}$$

را مشخص کنید.

(ب) تمام جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

را مشخص کنید.

۱۱. این تمرین طرز تعیین کلیه ماتریسهای 2×2 نامفرد را بازگو می کند. ثابت کنید

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc)I,$$

و نتیجه بگیرید که $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ نامفرد است اگر و فقط اگر $ad - bc \neq 0$ ، که در این

صورت معکوس آن عبارت است از

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

معکوس هریک از ماتریسهای تمرین ۱۲ تا ۱۶ را مشخص کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot 13 \qquad \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot 12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 15 \qquad \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot 14$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 16$$

۲۱.۲ تمرینات گوناگون درباب ماتریسها

۱. ثابت کنید که اگر یک ماتریس مربعی یک سطر یا یک ستون صفر داشته باشد منفرد است.

۲. برای هریک از احکام زیر درباب ماتریسهای $n \times n$ برهان بیاورید و یا مثال نقض بزنید:

(آ) هرگاه $AB + BA = O$ ، $A^2B^3 = B^3A^2$ ؛

(ب) هرگاه A و B نامنفرد باشند ، $A + B$ نامنفرد است ؛

(پ) هرگاه A و B نامنفرد باشند ، AB نامنفرد است ؛

(ت) هرگاه A و B و $A+B$ نامنفرد باشند، $A-B$ نامنفرد است؛

(ث) هرگاه $A^3 = O$ ، $A-I$ نامنفرد است؛

(ج) هرگاه حاصل ضرب k ماتریس، یعنی $A_1 \dots A_k$ ، نامنفرد باشد، هریک از A_i ها نامنفرد است.

۳. هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، ماتریس نامنفرد P را طوری پیدا کنید که $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

۴. ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & i \\ i & b \end{bmatrix}$ ، که در آن $i^2 = -1$ ، $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ، و $b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ ،

دارای این خاصیت است که $A^2 = A$. جمیع ماتریسهای 2×2 ی A با درایه‌های مختلط که $A^2 = A$ را به طور کامل توصیف نمایید.

۵. ثابت کنید که اگر $A^2 = A$ ، $(A+I)^k = I + (2^k - 1)A$.

۶. در نظریهٔ نسیت خاص از مجموعه معادلاتی به شکل

$$x' = a(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = a(t - vx/c^2)$$

استفاده می‌شود. در اینجا v سرعت جسم متحرک، c سرعت نور، و $|v| < c$ که $a = c/\sqrt{c^2 - v^2}$. تبدیل خطی که بردارد و بعدی (x, t) را بروی (x', t') می‌نگارد تبدیل لورنتس^۱ نام دارد. ماتریس آن نسبت به پایه‌های معمولی به $L(v)$ نموده می‌شود و به صورت زیر است:

$$L(v) = a \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -vc^{-2} & 1 \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که $L(v)$ نامنفرد است و $L(0) = I$. ثابت کنید $L(v)L(u) = L(w)$ ، که در آن $w = (u+v)c^2/(uv+c^2)$. به عبارت دیگر، حاصل ضرب دو تبدیل لورنتس یک تبدیل لورنتس است.

۷. هرگاه سطرها و ستونهای ماتریس مستطیلی شکل A با هم عوض شوند، ماتریس به دست آمده ترانهاده^۲ A نام دارد و با A^t نموده می‌شود. مثلاً، هرگاه

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ آنگاه } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

ثابت کنید ترانپوخته‌ها از خواص زیر برخوردارند:

$$(A^t)^t = A \quad (T) \quad ; \quad (A+B)^t = A^t + B^t \quad (ب) \quad ; \quad (cA)^t = cA^t \quad (پ)$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (ث) \quad ; \quad \text{اگر } A \text{ نامنفرد باشد، } (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

۸. ماتریس مربعی A در صورتی یک ماتریس متعامد نامیده می‌شود که $AA^t = I$.

تحقیق کنید که ماتریس 2×2 ی $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ به ازای هر θ حقیقی متعامد

است. ثابت کنید که اگر A یک ماتریس متعامد $n \times n$ باشد، سطرهایش، به‌عنوان بردارهایی در V_n ، یک مجموعه متعامد یکه تشکیل می‌دهند.

۹. برای هر یک از احکام زیر در باب ماتریسهای $n \times n$ یا برهان بیاورید یا مثال نقض:

(T) هرگاه A و B متعامد باشند، $A+B$ نیز متعامد است؛

(ب) هرگاه A و B متعامد باشند، AB نیز متعامد است؛

(پ) هرگاه A و B متعامد باشند، B نیز متعامد است.

۱۰. ماتریسهای هادامار^۱، به نام ژاک هادامار (۱۸۶۳-۱۸۶۵)، ماتریسهای $n \times n$ ی هستند که خواص زیر را دارند:

I. هر درایه 1 یا -1 است؛

II. هر سطر، به‌صورت برداری در V_n ، طولش \sqrt{n} است؛

III. حاصل ضرب نقطه‌ای هر دو سطر متمایز 0 است.

ماتریسهای هادامار در بعضی از مسائل هندسه و نظریه اعداد ظاهر می‌شوند، و اخیراً^۲ از آنها برای ساختن کلمات رمزی بهینه در ارتباطات فضایی استفاده شده است. با وجود سادگی آشکار آنها، مسائل حل نشده بسیاری را موجب شده‌اند. در حال حاضر مسئله حل نشده اساسی تعیین کلیه n هایی است که به‌ازای آنها یک ماتریس هادامار $n \times n$ وجود داشته باشد. این تمرین حل ناقصی از این مسئله را به اجمال شرح می‌دهد.

(T) جميع ماتریسهای هادامار 2×2 را مشخص کنید (دقیقا " 8 تا هستند).
 (ب) این قسمت از تمرین، برهان ساده‌ای از قضیه زیر را به اجمال شرح می‌دهد:
 هرگاه A یک ماتریس هادامار $n \times n$ باشد که $n > 2$ ، آنگاه n مضربی از 4 می‌باشد.
 برهان بر دو لم بسیار ساده زیر در باب بردارهای در فضای n استوار است. این
 لمها را ثابت کنید و با اعمال آنها بر سطرهای ماتریس هادامار قضیه را اثبات
 نمایید.

لم ۰۱. هرگاه X, Y, Z بردارهای متعامدی در V_n باشند، آنگاه داریم

$$(X + Y) \cdot (X + Z) = \|X\|^2.$$

لم ۰۲. می‌نویسیم

$$X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n), Z = (z_1, \dots, z_n).$$

چنانچه مؤلفه‌های x_i, y_i, z_i یا 1 یا -1 باشند، حاصل ضرب $(x_i + y_i)(x_i + z_i)$ یا 0 یا 4 است.

۳

دترمینانها

۱.۳ مقدمه

مفهوم دترمینان در بسیاری از کاربردهای جبر خطی در هندسه و آنالیز نقشی مهم دارد. در این فصل خواص اساسی دترمینانها و بعضی از کاربردهای آنها مطالعه می‌شوند. دترمینانهای مرتبه دو و سه در جلد یک به عنوان نمادهای مناسبی برای بیان فرمولها به شکل فشرده معرفی شدند. به یاد می‌آوریم که یک دترمینان مرتبه دو با فرمول

$$(1.3) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

تعریف شد. علسیرغم تشابه در نماد، دترمینان $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (که با خطوط قائم نوشته

می‌شود) با ماتریس $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (که با گروه نوشته می‌شود) فرق معنی دارد. دترمینان

عدد است که به ماتریس طبق فرمول (۱.۳) مربوط می‌شود. برای تاکید براین ارتباط همچنین می‌نویسیم

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

دترمینانهای مرتبه سه در جلد یک برحسب دترمینانهای مرتبه دو با فرمول زیر

تعریف شده بودند:

$$(۲.۳) \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

در این فصل از حالت کلیتر دترمینان یک ماتریس مربعی از مرتبه n به‌ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ بحث می‌شود. دیدگاه ما این است که دترمینان را تابعی بگیریم که به هر ماتریس مربعی A عددی به‌نام دترمینان A را مربوط می‌کند که با $\det A$ نموده می‌شود. می‌توان این تابع را با یک فرمول صریح که تعمیم یافته (۱.۳) و (۲.۳) است تعریف کرد. این فرمول مجموعی است شامل $n!$ حاصل ضرب از درایه‌های A . اگر n بزرگ باشد، این فرمول خیلی بزرگ است و بندرت در عمل به‌کار می‌رود. به‌نظر می‌رسد که بررسی دترمینانها از دیدگاهی دیگر که روشن‌تر بر خواص اصلی آنها تاکید کند ارجح باشد. این خواص، که درکاربردها اهمیت دارند، اصول موضوع تابع دترمینان گرفته می‌شوند. اصولاً برنامه کار ما از سه قسمت تشکیل می‌شود: (۱) انگیزش انتخاب اصول موضوع؛ (۲) نتیجه‌گیری خواص دیگر دترمینانها از اصول موضوع؛ (۳) اثبات اینکه یک و فقط یک تابع وجود دارد که در اصول موضوع صدق می‌کند.

۲.۳ انگیزه انتخاب اصول موضوع برای تابع دترمینان

در جلد یک ثابت شد که حاصل ضرب سه‌گانه اسکالر سه‌بردار A_1, A_2, A_3 در فضای 3 را می‌توان به صورت دترمینان یک ماتریس که سطرهايش این بردارها باشند بیان کرد؛ یعنی، داریم

$$A_1 \times A_2 \cdot A_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

که در آن $A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ ، $A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ ، $A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ و اگر سطرها مستقل خطی باشند، حاصل ضرب سه‌گانه اسکالر ناصفر است؛ قدرمطلق حاصل ضرب مساوی حجم متوازی‌السطوحی است که به‌وسیله سه بردار A_1, A_2, A_3 معین می‌شود. اگر سطرها وابسته باشند، حاصل ضرب سه‌گانه اسکالر صفر است. در این حالت بردارهای A_1, A_2, A_3 هم‌صفحه‌اند و متوازی‌السطوح به یک شکل مسطح با حجم صفر تباه

می شود .

بعضی از خواص ضرب سه گانه اسکالر به عنوان انگیزش انتخاب اصول موضوع تابع دترمینان در بعدهای بالاتر به کار می روند . برای آنکه این خواص به شکلی مناسب تعمیم بیان شوند ، ضرب سه گانه اسکالر را تابعی از سه بردار سطری A_1, A_2, A_3 می گیریم . این تابع را با d نشان می دهیم . بنا بر این ،

$$d(A_1, A_2, A_3) = A_1 \times A_2 \cdot A_3 .$$

حال توجه خود را به خواص زیر معطوف می کنیم :

(آ) همگنی نسبت به هر سطر . به عنوان مثال ، همگنی نسبت به سطر اول می گوید که

$$: d(tA_1, A_2, A_3) = t d(A_1, A_2, A_3) , \quad t \text{ به ازای هر اسکالر}$$

(ب) جمعیت نسبت به هر سطر . به عنوان مثال ، جمعیت نسبت به سطر دوم می گوید که

$$: d(A_1, A_2 + C, A_3) = d(A_1, A_2, A_3) + d(A_1, C, A_3) , \quad C \text{ به ازای هر بردار}$$

(پ) حاصل ضرب سه گانه اسکالر در صورتی صفر است که دو سطر مساوی باشند ؛

(ت) نرمیده سازی :

$$. \quad i = (1, 0, 0), \quad j = (0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 1) \text{ که در آن } d(i, j, k) = 1$$

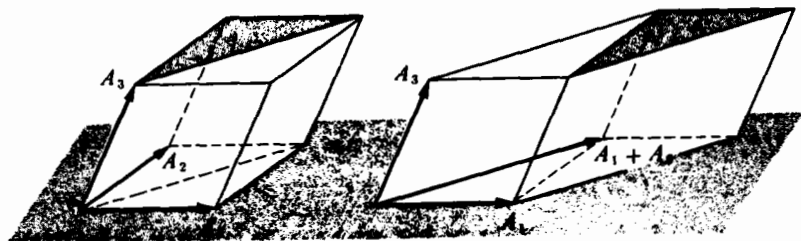
هریک از این خواص را می توان به آسانی از خواص ضرب نقطه ای و خارجی به دست آورد . بعضی از اینها از رابطه هندسی بین حاصل ضرب سه گانه اسکالر و حجم متوازی السطوح معین شده به وسیله بردارهای هندسی A_1, A_2, A_3 ناشی می شوند . معنی هندسی خاصیت جمعیت (ب) در حالتی خاص فایده بخصوصی دارد . اگر در (ب) فرض کنیم $C = A_1$ ، دومین جمله سمت راست بخاطر (پ) صفر است ، و رابطه (ب) خواهد شد

$$(۳.۳) \quad d(A_1, A_2 + A_1, A_3) = d(A_1, A_2, A_3) .$$

این خاصیت در شکل ۱.۳ مجسم شده است ، که یک متوازی السطوح معین شده به وسیله A_1, A_2, A_3 و متوازی السطوح دیگر معین شده به وسیله $A_1, A_1 + A_2, A_3$ را نشان می دهد . معادله (۳.۳) صرفاً " می گوید که این دو متوازی السطوح دارای یک حجم هستند . این امر از نظر هندسی واضح است ، زیرا متوازی السطوحها دارای یک ارتفاع اند و مساحت قاعده های آنها یکی است .

$$\text{حجم} = d(A_1, A_2, A_3)$$

$$\text{حجم} = d(A_1, A_1 + A_2, A_3)$$



شکل ۱.۳

تعبیر هندسی خاصیت $d(A_1, A_2, A_3) = d(A_1, A_1 + A_2, A_3)$ دو متوازی
السطوح دارای یک حجم اند.

۳.۴ مجموعه اصول موضوع برای تابع دترمینان

خواص ضرب سه گانه اسکالر مذکور در بخش پیش را می توان به طرز مناسبی تعمیم داد و به عنوان اصول موضوع برای دترمینانهای مرتبه n به کار برد. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ با درایه های حقیقی یا مختلط باشد، و سطرهاى آن را با A_1, \dots, A_n نشان می دهیم. بنا بر این، سطر i م A برداری است در فضای n که عبارت است از

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}).$$

دترمینان را تابعی از n سطر A_1, \dots, A_n می گیریم و مقادیر آن را با $d(A_1, \dots, A_n)$ یا $\det A$ نشان می دهیم.

تعریف اصل موضوعی تابع دترمینان. تابع حقیقی یا مختلط d ، که به ازای هر n تایی مرتب از بردارهای A_1, \dots, A_n در فضای n تعریف شده است، در صورتی یک تابع دترمینان از مرتبه n نامیده می شود که در اصول موضوع زیر به ازای هر انتخابی از بردارهای A_1, \dots, A_n و C در فضای n صدق کند:

اصل موضوع ۱. همگنی نسبت به هر سطر. اگر سطر k ام A_k در اسکالر t ضرب شود، دترمینان نیز در t ضرب می شود:

$$d(\dots, tA_k, \dots) = t d(\dots, A_k, \dots);$$

اصل موضوع ۲. جمعی نسبت به هر سطر. به ازای هر k داریم

$$d(A_1, \dots, A_k + C, \dots, A_n) = d(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n) + d(A_1, \dots, C, \dots, A_n);$$

اصل موضوع ۳. دترمینان در صورت تساوی دو سطر صفر می شود:

$$d(A_1, \dots, A_n) = 0 \text{ آنگاه } A_i = A_j, \quad i \neq j$$

اصل موضوع ۴. دترمینان ماتریس همانی مساوی ۱ است:

$$d(I_1, \dots, I_n) = 1, \text{ که در آن } I_k \text{ بردار یکهء مختصات } k \text{ ام است.}$$

دو اصل موضوع اول می گویند که دترمینان یک ماتریس تابعی خطی از هر سطر آن است. این را اغلب این طور وصف می کنند که می گویند دترمینان یک تابع چند خطی از سطرهای خودش است. با چند بار استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر اول می توان نوشت

$$d\left(\sum_{k=1}^p t_k C_k, A_2, \dots, A_n\right) = \sum_{k=1}^p t_k d(C_k, A_2, \dots, A_n),$$

که در آن t_1, \dots, t_p اسکالر بوده و C_1, \dots, C_p بردارهای دلخواهی در فضای n می باشند. گاهی شکل ضعیفتر اصل موضوع ۳ را به کار می برند:

اصل موضوع ۳. دترمینان در صورت تساوی دو سطر مجاور صفر می شود:

$$d(A_1, \dots, A_n) = 0 \text{ آنگاه } A_k = A_{k+1} \text{ ای } k = 1, 2, \dots, n-1$$

نکته قابل توجه آن است که، به ازای n داده شده، یک و فقط یک تابع مانند d هست که در اصول موضوع ۱، ۲، ۳، و ۴ صدق می کند. اثبات این امر را، که یکی از نتایج عمده این فصل است، بعداً خواهیم داد. قضیه بعدی خواصی از دترمینانها را می دهد که فقط از اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ نتیجه می شوند. یکی از این خواص اصل موضوع ۳ است. متذکر می شویم که اصل موضوع ۴ در برهان این قضیه به کار نرفته است. این امر بعداً، وقتی یکتایی تابع دترمینان را ثابت می کنیم، مفید خواهد افتاد.

قضیه ۱.۳. تابع دترمینان صادق در اصول موضوع (۱، ۲، و ۳) از خواص زیر نیز بهره‌مند است:

(آ) دترمینان در صورت O بودن سطری از آن صفر است؛

هرگاه به‌ازای k ای $A_k = 0$ ، آنگاه $d(A_1, \dots, A_n) = 0$ ؛

(ب) دترمینان در صورت تعویض دو سطر مجاور با هم تغییر علامت می‌دهد:

$$d(\dots, A_k, A_{k+1}, \dots) = -d(\dots, A_{k+1}, A_k, \dots);$$

(پ) دترمینان در صورت تعویض هر دو سطر A_i و A_j که $i \neq j$ با هم تغییر علامت می‌دهد؛

(ت) دترمینان در صورت تساوی دو سطر آن صفر است:

هرگاه به‌ازای i و j ای که $i \neq j$ ، $A_i = A_j$ ، آنگاه $d(A_1, \dots, A_n) = 0$ ؛

(ث) دترمینان در صورتی که سطرهایش وابسته باشند صفر است.

برهان. برای اثبات (ت) کافی است در اصل موضوع ۱ قرار دهیم $t = 0$. برای اثبات (ب)، فرض کنیم B ماتریسی باشد با همان سطرهای A جز سطر k و $k+1$. فرض کنیم هر دو سطر B_k و B_{k+1} مساوی $A_k + A_{k+1}$ باشند. در این صورت، طبق اصل موضوع ۳، $\det B = 0$. بنابراین، می‌توان نوشت

$$d(\dots, A_k + A_{k+1}, A_k + A_{k+1}, \dots) = 0.$$

با اعمال خاصیت جمعی در مورد سطرهای k و $k+1$ ، می‌توان این معادله را به صورت زیر نوشت:

$$d(\dots, A_k, A_k, \dots) + d(\dots, A_k, A_{k+1}, \dots) + d(\dots, A_{k+1}, A_k, \dots) + d(\dots, A_{k+1}, A_{k+1}, \dots) = 0.$$

جملات اول و چهارم، طبق اصل موضوع ۳، صفرند. لذا، جملات دوم و سوم قرینه‌ء یکدیگرند، که (ب) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (پ) می‌توان فرض کرد $i < j$. سطرهای A_i و A_j را می‌توان با تعویض سطرهای مجاور به تعدادی فرد بار با یکدیگر عوض کرد. ابتدا سطر A_j را متوالیا" با سطرهای مجاور قبلی $A_i, A_{i-2}, A_{i-3}, \dots, A_{i-1}$ عوض می‌کنیم. این مستلزم $j - i$ تعویض است. بعد سطر A_i را متوالیا" با سطرهای مجاور بعدی $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{j-1}$ عوض می‌کنیم. این مستلزم $j - i - 1$ تعویض دیگر است. هر تعویض سطرهای مجاور علامت

دترمینان را عوض می‌کند. چون رویهم $2(j-i) - 1 = (j-i) + (j-i-1)$ تعویض (تعدادی فرد) وجود دارد، دترمینان به تعدادی فرد بار تغییر علامت می‌دهد، که این (پ) را ثابت خواهد کرد.

برای اثبات (ت)، فرض کنیم B ماتریس حاصل از تعویض سطرهای A_i و A_j با هم در A باشد. چون $A_i = A_j$ ، داریم $B = A$ ؛ و در نتیجه، $\det B = \det A$. اما، طبق (پ) $\det B = -\det A$. بنابراین $\det A = 0$.

برای اثبات (ث)، فرض کنیم اسکالرهایی چون c_1, \dots, c_n ، که همه صفر نیستند، وجود داشته باشند بطوری که $\sum_{k=1}^n c_k A_k = 0$. در این صورت، هر سطر A_k که در آن $c_k \neq 0$ را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از سطرهای دیگر نوشت. برای سادگی، فرض کنیم A_1 ترکیبی خطی از سطرهای دیگر باشد؛ مثلاً، $A_1 = \sum_{k=2}^n t_k A_k$. بنا بر خاصیت خطی نسبت به سطر اول داریم

$$d(A_1, A_2, \dots, A_n) = d\left(\sum_{k=2}^n t_k A_k, A_2, \dots, A_n\right) = \sum_{k=2}^n t_k d(A_k, A_2, \dots, A_n).$$

اما هر جمله $d(A_k, A_2, \dots, A_n)$ در مجموع آخر صفر است، زیرا A_k حداقل با یکی از A_2, \dots, A_n مساوی است. بنا بر این، کل مجموع صفر است. چنانچه سطر A_i ترکیبی خطی از سطرهای دیگر باشد، با استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر i م، به همین نحو استدلال می‌کنیم. این امر (ث) را ثابت خواهد کرد.

۴.۳ محاسبه دترمینانها

در این مرحله محاسبه چند دترمینان، فقط با استفاده از اصول موضوع و خواص مذکور در قضیه ۱.۳ و این فرض که توابع دترمینان وجود دارند، ممکن است آموخته باشد. هریک از امثله زیر، از اصل موضوع ۴ تا آخرین مرحله محاسبه استفاده نخواهد شد.

مثال ۱. دترمینان یک ماتریس 2×2 . ثابت می‌کنیم که

$$(۴.۳) \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

بردارهای سطری را به صورت ترکیبهایی خطی از بردارهای یکه مختصات $i = (1, 0)$ و

$$j = (0, 1) \text{ می‌نویسیم} :$$

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}) = a_{11}i + a_{12}j, \quad A_2 = (a_{21}, a_{22}) = a_{21}i + a_{22}j.$$

با استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر اول داریم

$$d(A_1, A_2) = d(a_{11}i + a_{12}j, A_2) = a_{11}d(i, A_2) + a_{12}d(j, A_2).$$

حال با استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر دوم خواهیم داشت

$$d(i, A_2) = d(i, a_{21}i + a_{22}j) = a_{21}d(i, i) + a_{22}d(i, j) = a_{22}d(i, j),$$

زیرا $d(i, i) = 0$ بهمین نحو، به دست می‌آوریم که

$$d(j, A_2) = d(j, a_{21}i + a_{22}j) = a_{21}d(j, i) = -a_{21}d(i, j).$$

لذا، خواهیم داشت

$$d(A_1, A_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})d(i, j).$$

اما، طبق اصل موضوع ۴، $d(i, j) = 1$ ؛ در نتیجه، همانطور که حکم شده،

$$d(A_1, A_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

این استدلال نشان می‌دهد که اگر برای ماتریسهای 2×2 تابع دترمینان وجود داشته باشد، حتماً "باید به شکل (۴.۳) باشد. بعکس، به آسانی ثابت می‌شود که این فرمول معرف یک تابع دترمینان از مرتبه ۲ است. بنابراین، نشان داده‌ایم که یک و فقط یک تابع دترمینان از مرتبه ۲ وجود دارد.

مثال ۲. دترمینان یک ماتریس قطری. هر ماتریس مربعی به شکل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس قطری نامیده می‌شود. هر درایه a_{ij} غیر واقع بر قطر اصلی ($i \neq j$) صفر است. ثابت می‌کنیم دترمینان A مساوی حاصل ضرب عناصر قطری آن است:

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (5.3)$$

سطر k ام A چیزی جز ضرب اسکالر بردار یکه k ام مختصات نیست: $A_k = a_{k1}I_k$.

با استفاده مکرر از خاصیت همگنی برای استخراج سازه‌ها یکی یکی، خواهیم داشت

$$\det A = d(A_1, \dots, A_n) = d(a_{11}I_1, \dots, a_{nn}I_n) = a_{11} \cdots a_{nn} d(I_1, \dots, I_n).$$

این فرمول را می‌توان به شکل

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn} \det I$$

نوشت، که در آن I ماتریس همانی است. اصل موضوع ۴ به ما می‌گوید که $\det I = 1$ ؛ در نتیجه، (۵.۳) به دست خواهد آمد.

مثال ۳. دترمینان ماتریس بالا مثلثی. هر ماتریس مربعی به شکل

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس بالا مثلثی نام دارد. تمام درایه‌های زیر قطر اصلی صفرند. ثابت می‌کنیم دترمینان چنین ماتریسی مساوی حاصل ضرب عناصر قطری آن است:

$$\det U = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn}.$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر یک عنصر قطری مانند u_{ii} مساوی ۰ باشد، $\det U = 0$. اگر آخرین عنصر قطری u_{nn} صفر باشد، سطر آخر ۰ است و، طبق قضیه ۱.۳ (T)، $\det U = 0$. پس فرض کنیم عنصر قطری پیشتری مانند u_{ii} صفر باشد. برای مشخص بودن وضع، مثلاً $u_{22} = 0$. در این صورت، هریک از $n - 1$ بردار سطری U_2, \dots, U_n دارای دو مولفه اول صفر است. از اینرو، این بردارها زیر فضایی با بعد حداکثر $n - 2$ را می‌پیمایند. بنابراین، این $n - 1$ سطر (و در نتیجه، تمام سطرها) وابسته‌اند. پس، بنابر قضیه ۱.۳ (ث)، $\det U = 0$. به همین ترتیب، در می‌یابیم که اگر یکی از عنصرهای قطری صفر باشد، $\det U = 0$.

حال می‌پردازیم به حالت کلی. ابتدا سطر اول U_1 را به صورت مجموعی از دوبردار سطری می‌نویسیم:

$$U_1 = V_1 + V'_1,$$

که در آن $V_1 = [u_{11}, 0, \dots, 0]$ و $V'_1 = [0, u_{12}, u_{13}, \dots, u_{1n}]$. طبق خاصیت خطی نسبت به سطر اول داریم

$$\det U = \det (V_1, U_2, \dots, U_n) + \det (V'_1, U_2, \dots, U_n).$$

اما $\det (V'_1, U_2, \dots, U_n) = 0$ ، زیرا دترمینان یک ماتریس بالامثلثی با یک عنصر قطری 0 است. بنابراین، داریم

$$(۶.۳) \quad \det U = \det (V_1, U_2, \dots, U_n).$$

حال با بردار سطری U_2 همین کار را کرده، آن را به صورت یک مجموع بیان می کنیم:

$$U_2 = V_2 + V'_2,$$

که در آن

$$V_2 = [0, u_{22}, 0, \dots, 0] \quad \text{و} \quad V'_2 = [0, 0, u_{23}, \dots, u_{2n}]$$

با استفاده از اینها در طرف راست (۶.۳) و اعمال خاصیت خطی نسبت به سطر دوم، داریم

$$(۷.۳) \quad \det U = \det (V_1, V_2, U_3, \dots, U_n),$$

زیرا $\det (V_1, V'_2, U_3, \dots, U_n) = 0$. با تکرار استدلال در مورد هر سطر بعدی در طرف راست (۷.۳)، مآلاً "خواهیم داشت

$$\det U = \det (V_1, V_2, \dots, V_n),$$

که در آن (V_1, V_2, \dots, V_n) یک ماتریس قطری با همان عنصرهای قطری U است. لذا، طبق مثال ۲، داریم

$$\det U = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn},$$

که همان مطلوب می باشد.

مثال ۴. محاسبه به وسیله فرایند گاوس-ژردان. فرایند حذف گاوس-ژردان برای حل دستگاههای معادلات خطی نیز یکی از بهترین روشها برای محاسبه دترمینانهاست. به یاد می آوریم که این روش مشتمل بود بر سه نوع عمل در مورد سطرهای یک ماتریس:

(۱) تعویض دو سطر باهم؛

(۲) ضرب تمام عنصرهای یک سطر در یک اسکالر ناصفر؛

(۳) افزودن مضرب اسکالری از یک سطر به سطر دیگر.

با انجام پی در پی این اعمال بنحوی اصولی می توان هر ماتریس مربعی A را به یک ماتریس بالامثلثی U بدل کرد که اینک راه محاسبه دترمینان آن را می دانیم. به آسانی می توان رابطه بین $\det U$ و $\det A$ را مشخص نمود. هر بار که عمل (۱) صورت گیرد،

دترمینان تغییر علامت می‌دهد. هر بار (۲) با اسکالر $c \neq 0$ انجام شود، دترمینان در c ضرب می‌شود. و هر بار (۳) صورت گیرد، دترمینان تغییر نخواهد کرد. بنابراین، هرگاه عمل (۱) p بار انجام شود و c_1, \dots, c_p ضریبهای اسکالر ناصفری باشند که در عمل (۲) به‌کار رفته‌اند، آنگاه خواهیم داشت

$$(۸.۳) \quad \det A = (-1)^p (c_1 c_2 \cdots c_p)^{-1} \det U.$$

مجدداً "ملاحظه می‌شود که این فرمول فقط نتیجه‌ای است از سه اصل موضوع اول، و برهان آن به اصل موضوع ۴ بستگی ندارد.

۵.۳ قضیه یکتایی

در مثال ۳ بخش پیش نشان دادیم که اصول موضوع (۱)، (۲)، و (۳) فرمول $\det U = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn} \det I$ را ایجاب می‌کنند. از تلفیق این با (۸.۳) می‌بینیم که به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A اسکالری چون c (وابسته به A) وجود دارد بطوری که

$$(۹.۳) \quad d(A_1, \dots, A_n) = c d(I_1, \dots, I_n).$$

بعلاوه، این فرمول نتیجه‌ای است فقط از اصول موضوع (۱)، (۲)، و (۳) از این می‌توان به آسانی ثابت کرد که بیش از یک تابع دترمینان نمی‌تواند موجود باشد.

قضیه ۲.۳. قضیه یکتایی برای دترمینانها. فرض کنیم تابع d در هر چهار اصل موضوع تابع دترمینان از مرتبه n صدق کند، و f تابعی دیگر و صادق در اصول موضوع (۱)، (۲)، و (۳) باشد. در این صورت، به‌ازای هر انتخابی از بردارهای A_1, \dots, A_n در فضای n داریم

$$(۱۰.۳) \quad f(A_1, \dots, A_n) = d(A_1, \dots, A_n) f(I_1, \dots, I_n).$$

بخصوص، اگر f در اصل موضوع ۴ نیز صدق کند، خواهیم داشت

$$f(A_1, \dots, A_n) = d(A_1, \dots, A_n).$$

برهان. فرض کنیم

$$g(A_1, \dots, A_n) = f(A_1, \dots, A_n) - d(A_1, \dots, A_n) f(I_1, \dots, I_n).$$

ثابت می‌کنیم به‌ازای هر انتخابی از A_1, \dots, A_n داریم $g(A_1, \dots, A_n) = 0$. گوییم

چون d و f هر دو در اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ صدق می‌کنند، این در مورد g نیز صادق است. لذا، g نیز در معادله* (۹.۳) صدق می‌کند، زیرا این معادله فقط از سه اصل موضوع اول نتیجه شده بود. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$(11.3) \quad g(A_1, \dots, A_n) = cg(I_1, \dots, I_n),$$

که در آن c یک اسکالر وابسته به A است. با اختیار $A = I$ در تعریف g و توجه به این امر که d در اصل موضوع ۴ صدق می‌کند، درمی‌یابیم که

$$g(I_1, \dots, I_n) = f(I_1, \dots, I_n) - f(I_1, \dots, I_n) = 0.$$

بنابراین، معادله* (۱۱.۳) خواهد شد $g(A_1, \dots, A_n) = 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۶.۳ تعریف

در این تعریفها می‌توانید وجود یک تابع دترمینان را دانسته بگیرید. دترمینانهای مرتبه ۳ را می‌توان با معادله* (۲.۳) حساب کرد.

۱. هریک از دترمینانهای زیر را حساب کنید:

$$\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \quad (\Psi) ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad (\Phi) ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (T)$$

۲. هرگاه $\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$ ، دترمینان هریک از ماتریسهای زیر را حساب کنید:

$$\cdot \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix} \quad (\Phi) ; \quad \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (T)$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\Psi)$$

۳. (T) ثابت کنید که $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

(ب) فرمولهای نظیر را برای دترمینانهای

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

پیدا کنید.

۴. دترمینان هر یک از ماتریسهای زیر را با تبدیلهای یک ماتریس بالامثلثی حساب کنید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix} \quad (\varphi) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} \quad (\psi) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\Gamma)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\delta) \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad (\tau)$$

۵. ماتریس پایین مثلثی $A = (a_{ij})$ ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالای قطر

اصلی آن ۰ اند؛ یعنی، هرگاه $i < j$ ، $a_{ij} = 0$. ثابت کنید دترمینان این

ماتریس مساوی حاصل ضرب درایه‌های قطری آن است؛ $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

۶. فرض کنید f_1, f_2, g_1, g_2 چهار تابع مشتق‌پذیر بر بازه (a, b) باشند. به‌ازای هر x در (a, b) تعریف کنید

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

و ثابت کنید

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$$

۷. تعمیم تعریف ۶ را برای دترمینان

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$

بیان و اثبات کنید.

۸. (T) ثابت کنید هرگاه $F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$ نگاه T ، $F'(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) \end{vmatrix}$.

(ب) با فرض برقراری معادله (۲۰۳)، نتیجه متناظر را برای دترمینانهای 3×3 بیان و اثبات کنید.

۹. فرض کنید U و V دو ماتریس $n \times n$ بالامثلثی باشند.

(T) ثابت کنید هر یک از UV و $U + V$ یک ماتریس بالامثلثی است.

(ب) ثابت کنید $\det(UV) = (\det U)(\det V)$.

(پ) هرگاه $\det U \neq 0$ ، ثابت کنید یک ماتریس بالامثلثی مانند U^{-1} هست

بطوری که $UU^{-1} = I$ ، و نتیجه بگیرید که $\det(U^{-1}) = 1/\det U$.

۱۰. $\det(A^{-1})$ ، $\det A$ و A^{-1} را در مورد ماتریس بالامثلثی

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حساب کنید.

۷۰۳ فرمول ضرب برای دترمینانها

در این بخش، با فرض وجود تابع دترمینان، از قضیه یکتایی استفاده کرده ثابت می‌کنیم که دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی مساوی حاصل ضرب دترمینانهای آنهاست:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

به یاد می‌آوریم که حاصل ضرب AB دو ماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ ماتریسی

است چون $C = (c_{ij})$ که درایه i, j آن از فرمول

$$(12.3) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

به دست می‌آید. حاصل ضرب فقط وقتی تعریف می‌شود که تعداد ستونهای سازه سمت چپ، یعنی A ، مساوی تعداد سطرهای سازه سمت راست، یعنی B ، است. این در صورتی که A و B هر دو مربعی و به یک اندازه باشند همواره چنین است. در اثبات فرمول ضرب از رابطه ساده‌ای استفاده می‌شود که بین سطرهای AB و سطرهای A برقرار است. ما آن را به صورت یک لم بیان می‌کنیم. طبق معمول، فرض می‌کنیم A_i سطر i م ماتریس A باشد.

لم ۳.۳. هرگاه A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times p$ باشد، آنگاه داریم

$$(AB)_i = A_i \cdot B.$$

یعنی، سطر i م حاصل ضرب AB مساوی حاصل ضرب ماتریس سطری A_i در B است.

برهان. فرض کنیم B^j ستون j م B بوده و $C = AB$. در این صورت، مجموع (۱۲.۳) را می‌توان حاصل ضرب نقطه‌ای سطر i م A در ستون j م B گرفت؛

$$c_{ij} = A_i \cdot B^j.$$

بنابراین، سطر i م C_i مساوی ماتریس سطری زیر است:

$$C_i = [A_i \cdot B^1, A_i \cdot B^2, \dots, A_i \cdot B^p].$$

اما این نیز نتیجه‌ای است از ضرب ماتریسی ماتریس سطری A_i در B ، زیرا

$$A_i B = [a_{i1}, \dots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = [A_i \cdot B^1, \dots, A_i \cdot B^p].$$

بنابراین، $C_i = A_i B$ ، که لم را ثابت خواهد کرد.

قضیه ۴.۳. فرمول ضرب برای دترمینانها. برای هر دو ماتریس $n \times n$ مانند A و B داریم

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

برهان. چون $(AB)_i = A_i B$ ، باید ثابت کنیم که

$$d(A_1B, \dots, A_nB) = d(A_1, \dots, A_n) d(B_1, \dots, B_n).$$

با استفاده مجدد از لم، نیز داریم $B_i = (IB)_i = I_iB$ ، که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است. بنابراین، $d(B_1, \dots, B_n) = d(I_1B, \dots, I_nB)$ ، و باید ثابت کنیم که

$$d(A_1B, \dots, A_nB) = d(A_1, \dots, A_n) d(I_1B, \dots, I_nB).$$

B را ثابت می‌گیریم و تابع f را با فرمول

$$f(A_1, \dots, A_n) = d(A_1B, \dots, A_nB)$$

تعریف می‌کنیم. معادله‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم این‌طور می‌گوید که

$$(13.3) \quad f(A_1, \dots, A_n) = d(A_1, \dots, A_n) f(I_1, \dots, I_n).$$

اما تحقیق اینکه f در اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ برای تابع دترمینان صدق می‌کند ساده است؛ در نتیجه، طبق قضیه یکتایی، معادله (۱۳.۳) به‌ازای هر ماتریس A برقرار می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

کاربردهای فرمول ضرب در دو بخش بعدی داده شده‌اند.

۸.۳ دترمینان معکوس یک ماتریس نامنفرد

به‌یاد می‌آوریم که ماتریس مربعی A را نامنفرد گوئیم اگر که معکوس چپی چون B داشته باشد بطوری که $BA = I$. اگر معکوس چپ وجود داشته باشد، منحصر بفرد بوده و معکوس راست نیز هست؛ یعنی، $AB = I$. معکوس را با A^{-1} نشان می‌دهیم. رابطه بین $\det A$ و $\det A^{-1}$ به همان اندازه که انتظار می‌رود طبیعی است.

قضیه ۵.۳. هرگاه ماتریس A نامنفرد باشد، آنگاه $\det A \neq 0$ داریم

$$(14.3) \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

برهان. از فرمول ضرب داریم

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I = 1.$$

بنابراین، $\det A \neq 0$ و (۱۴.۳) برقرار است.

قضیه ۵.۳ نشان می‌دهد که صفر نشدن $\det A$ شرطی لازم برای نامنفرد بودن A

است. بعداً ثابت می‌کنیم این شرط کافی نیز هست؛ یعنی، هرگاه $\det A \neq 0$ ، آنگاه A^{-1} وجود خواهد داشت.

۹۰۳ دترمینانها و استقلال بردارها

از قضیه ۵۰۳ می‌توان محک ساده‌ای برای آزمودن استقلال بردارها نتیجه گرفت.

قضیه ۶۰۳. یک مجموعه مرکب از n بردار A_1, \dots, A_n در فضای n مستقل است اگر و فقط اگر $d(A_1, \dots, A_n) \neq 0$.

برهان. قبلاً در قضیه ۲۰۳ (ث) ثابت شد که وابستگی ایجاب می‌کند که $d(A_1, \dots, A_n) = 0$. برای اثبات عکس، فرض کنیم A_1, \dots, A_n مستقل باشند و ثابت می‌کنیم $d(A_1, \dots, A_n) \neq 0$.

فرض کنیم V_n فضای خطی n تاییهای اسکالرها باشد. چون A_1, \dots, A_n ، n عنصر مستقل در فضای n بعدی‌اند، یک پایه برای V_n تشکیل می‌دهند. پس، طبق قضیه ۱۲۰۲، یک تبدیل خطی مانند $T: V_n \rightarrow V_n$ هست که این n بردار را بروی بردارهای یکه مختصات می‌نگارد:

$$T(A_k) = I_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

بنابراین، یک ماتریس $n \times n$ مانند B هست بطوری که

$$A_k B = I_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

اما، طبق لم ۳۰۳، داریم $A_k B = (AB)_k$ ، که در آن A ماتریسی است با سطرهای A_1, \dots, A_n . بنابراین، $AB = I$ ؛ در نتیجه، A نامعکوس است و $\det A \neq 0$.

۱۰۰۳ دترمینان یک ماتریس قطری قالبی

هر ماتریس مربعی C به شکل

$$C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix},$$

که در آن A و B ماتریسهای مربعی بوده و هر O یک ماتریس صفر باشد، یک ماتریس قطری قالبی با دو قالب قطری A و B نامیده می‌شود. یک نمونه ماتریس 5×5

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

است. قالبهای قطری در این حالت عبارتند از

$$. B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیه بعدی نشان می‌دهد که دترمینان یک ماتریس قطری قالبی مساوی حاصل ضرب دترمینانهای قالبهای قطری آن است.

قضیه ۷.۳. برای هر دو ماتریس مربعی A و B داریم

$$(15.3) \quad \det \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B).$$

برهان. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ و B ماتریسی $m \times m$ باشد. ملاحظه می‌شود که ماتریس قطری قالبی را می‌توان به صورت حاصل ضرب

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

نوشت، که در آن I_n و I_m بترتیب ماتریسهای همانی از مرتبه n و m اند. بنابراین، طبق فرمول ضرب برای دترمینانها، داریم

$$(16.3) \quad \det \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

حال دترمینان $\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix}$ را به عنوان تابعی از n سطر A در نظر می‌گیریم. این امر بخاطر قالب صفرها در گوشه راست بالایی میسر است. به آسانی معلوم می‌شود که این تابع در چهار اصل موضوع تابع دترمینان از مرتبه n صدق می‌کند. لذا، طبق قضیه یکتایی، باید داشته باشیم

$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix} = \det A.$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $\det \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & B \end{bmatrix} = \det B$. بنابراین، (۱۶.۳) رابطه (۱۵.۳) را ایجاب خواهد کرد.

۱۱.۳ تمرین

۱. برای هر یک از احکام زیر در مورد ماتریسهای مربعی یا برهان بیاورید یا مثال نقض:

(ا) $\det(A + B) = \det A + \det B$

(ب) $\det\{(A + B)^2\} = \{\det(A + B)\}^2$

(پ) $\det\{(A + B)^3\} = \det(A^2 + 2AB + B^2)$

(ت) $\det\{(A + B)^3\} = \det(A^2 + B^2)$

۲. (آ) قضیه ۷.۳ را به ماتریسهای قطری قالبی با سه قالب قطری تعمیم دهید:

$$\det \begin{bmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det B)(\det C).$$

(ب) تعمیم برای ماتریسهای قطری قالبی با هر تعداد قالب قطری را بیان و اثبات نمایید.

۳. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$ ، و ثابت کنید $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

و $\det B = \det \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}$ و $\det A = \det \begin{bmatrix} c & d \\ g & h \end{bmatrix}$

۴ . تعمیم تمرین ۳ را برای ماتریسهای $n \times n$ بیان و اثبات کنید .

۵ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{bmatrix}$ ، و ثابت کنید $\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} g & h \\ z & w \end{bmatrix}$

۶ . تعمیم تمرین ۵ برای ماتریسهای $n \times n$ به شکل

$$A = \begin{bmatrix} B & O \\ C & D \end{bmatrix}$$

که در آن B, C, D ماتریسهایی مربعی بوده و O ماتریس صفر است ، را بیان و اثبات نمایید .

۷ . با استفاده از قضیه ۶.۳ ، تعیین کنید آیا مجموعه‌های زیر از بردارها وابسته خطی‌اند یا مستقل خطی :

$$(\bar{1}) \quad A_1 = (1, -1, 0), A_2 = (0, 1, -1), A_3 = (2, 3, -1)$$

$$(\bar{2}) \quad A_1 = (1, -1, 2, 1), A_2 = (-1, 2, -1, 0), A_3 = (3, -1, 1, 0), A_4 = (1, 0, 0, 1)$$

$$(\bar{3}) \quad A_1 = (1, 0, 0, 0, 1), A_2 = (1, 1, 0, 0, 0), A_3 = (1, 0, 1, 0, 1), A_4 = (1, 1, 0, 1, 1) \\ A_5 = (0, 1, 0, 1, 0)?$$

۱۲.۳ فرمولهای بسط برای دترمینانها . مینورها و همسازها

ما هنوز ، جز در حالت 2×2 ، نشان نداده‌ایم که یک تابع دترمینان عملاً " وجود دارد . در این بخش از خاصیت خطی و قضیهٔ یکتایی استفاده کرده نشان می‌دهیم که اگر دترمینانها وجود داشته باشند ، می‌توان آنها را با فرمولی حساب کرد که هر دترمینان مرتبه n را به صورت ترکیبی خطی از دترمینانهای مرتبه $n - 1$ بیان می‌کند . معادله (۲.۳) در بخش ۱.۳ نمونه‌ای است از این فرمول در حالت 3×3 . فرمول کلی زوشی را برای اثبات وجود توابع دترمینان به وسیلهٔ استقرا به دست خواهد داد .

هر سطر یک ماتریس $n \times n$ مانند A را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از n بردار یکهٔ مختصات I_1, \dots, I_n بیان کرد . مثلاً ، سطر اول A_1 را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$A_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} I_j .$$

چون دترمینانها نسبت به سطر اول خطی اند، داریم

(۱۷.۳)

$$d(A_1, A_2, \dots, A_n) = d\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} I_j, A_2, \dots, A_n\right) = \sum_{j=1}^n a_{1j} d(I_j, A_2, \dots, A_n).$$

لذا، برای محاسبه $\det A$ کافی است $d(I_j, A_2, \dots, A_n)$ را برای هر بردار یکه مختصات I_j حساب کنیم.

از نماد A'_{1j} برای نمایش ماتریس حاصل از A به وسیله تعویض سطر اول A_1 با بردار یکه I_j استفاده می‌کنیم. مثلاً، اگر $n = 3$ ، سه ماتریس از این نوع وجود دارد:

$$A'_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A'_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

توجه کنید که $\det A'_{1j} = d(I_j, A_2, \dots, A_n)$. حال معادله (۱۷.۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j} \det A'_{1j}. \quad (۱۸.۳)$$

این فرمول یک فرمول بسط نامیده می‌شود؛ این فرمول دترمینان A را به صورت ترکیبی خطی از عناصر سطر اول آن بیان می‌کند.

استدلالی که در اثبات (۱۸.۳) بکار رفت را می‌توان به‌حای سطر اول بر سطر k ام اعمال کرد. نتیجه فرمول بسطی است بر حسب عناصر سطر k ام.

قضیه ۸.۳. بسط نسبت به همسازه‌ها. فرض کنیم ماتریسی باشد که از A به وسیله تعویض سطر k ام با بردار یکه مختصات I_j به دست می‌آید. در این صورت، فرمول بسط

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} \det A'_{kj} \quad (۱۹.۳)$$

را خواهیم داشت، که دترمینان A را به صورت ترکیبی خطی از عناصر سطر k ام بیان می‌کند. عدد $\det A'_{kj}$ همسازه درایه a_{kj} نامیده می‌شود.

در قضیه بعد ثابت می‌کنیم هر همسازه، صرف نظر از علامت بعلاوه یا منها، مساوی دترمینان یک ماتریس از مرتبه $n - 1$ است. این ماتریسهای کوچکتر مینورها نامیده می‌شوند.

تعریف. به فرض معلوم بودن ماتریس مربعی A از مرتبه $n \geq 2$ ، ماتریس مربعی از مرتبه $n-1$ که با حذف سطر k ام و ستون j م از A به دست می‌آید مینور A_{kj} ، A نامیده شده و با A_{kj} نموده می‌شود.

مثال. ماتریس $A = (a_{kj})$ از مرتبه 3 دارای نه مینور است. سه تا از آنها عبارتند از

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

معادله (۲.۳) دترمینان یک ماتریس 3×3 را به صورت ترکیبی خطی از دترمینانهای

این سه مینور بیان می‌کند. این فرمول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}.$$

قضیه بعدی این فرمول را به حالت $n \times n$ به‌زای هر $n \geq 2$ تعمیم می‌دهد.

قضیه ۹.۳. بسط نسبت به مینورهای سطر k ام. به‌زای هر ماتریس $n \times n$ مانند A

که $n \geq 2$ ، همسازه a_{kj} به مینور A_{kj} با فرمول

$$\det A'_{kj} = (-1)^{k+j} \det A_{kj} \quad (۲۰.۳)$$

مربوط می‌شود. بنابراین، بسط $\det A$ نسبت به عنصرهای سطر k ام از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}. \quad (۲۱.۳)$$

برهان. روش اثبات را ابتدا با توجه به حالت خاص $k = j = 1$ نشان می‌دهیم. ماتریس

A'_{11} دارای شکل زیر است:

$$A'_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی از نوع (۳) می‌توان هر درایه^۳ زیر ادرستون اول را، بی‌آنکه درایه‌های دیگر دست بخورند، صفر کرد. مثلاً، اگر سطر اول A'_{11} را $-a_{21}$ ضرب کرده و حاصل را به سطر دوم بیافزاییم، سطر دوم جدید $(0, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n})$ می‌شود. با تکرار این اعمال سطری مقدماتی ماتریس جدیدی خواهیم داشت که آن را با A''_{11} نشان می‌دهیم و دارای شکل زیر است:

$$A''_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

چون اعمال سطری از نوع (۳) دترمینان را تغییر نمی‌دهد، خواهیم داشت

$$(۲۲.۳) \quad \det A''_{11} = \det A'_{11}.$$

اما A''_{11} یک ماتریس قطری قالبی است؛ در نتیجه، طبق قضیه^۴ ۷.۳، داریم

$$\det A''_{11} = \det A_{11},$$

که در آن A_{11} عبارت است از مینور $1, 1$ ماتریس A :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

بنابر این، $\det A'_{11} = \det A_{11}$ ، که (۲۰.۳) را به‌ازای $1 = j = k$ ثابت می‌کند. اکنون حالت خاص $1 = k$ و j دلخواه را در نظر می‌گیریم، و ثابت می‌کنیم

$$(۲۳.۳) \quad \det A'_{1j} = (-1)^{j-1} \det A_{1j}.$$

همینکه (۲۳.۳) ثابت شد، فرمول کلیتر (۲۰.۳) فوراً^۵ نتیجه می‌شود، زیرا ماتریس A'_{kj} را می‌توان با $k - 1$ تعویض‌پی درپی سطرهای مجاور به ماتریسی به شکل B'_{1j} تبدیل کرد. دترمینان در هر تعویض تغییر علامت می‌دهد؛ در نتیجه، داریم

$$(۲۴.۳) \quad \det A'_{kj} = (-1)^{k-1} \det B'_{1j},$$

که در آن B یک ماتریس $n \times n$ است که سطر اول آن I_j بوده و مینور $1, j$ ماتریس B_{1j} ماتریس A_{kj} است. بنا بر (۲۳.۳)، داریم

$$\det B'_{1j} = (-1)^{j-1} \det B_{1j} = (-1)^{j-1} \det A_{kj};$$

در نتیجه، از (۲۴.۳) معلوم می شود که

$$\det A'_{kj} = (-1)^{k-1} (-1)^{j-1} \det A_{kj} = (-1)^{k+j} \det A_{kj}.$$

بنا بر این، اگر (۲۳.۴) را ثابت کنیم، (۲۵.۳) نیز ثابت شده است. حال می پردازیم به اثبات (۲۳.۴). ماتریس A'_{1j} دارای شکل زیر است:

$$A'_{1j} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

با اعمال سطری مقدماتی از نوع (۳)، ستونی از صفر زیر ۱ به وجود آورده و ماتریس را به ماتریس زیر تبدیل می کنیم:

$$A^0_{1j} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

مثل قبل، دترمینان تغییر نمی کند؛ در نتیجه، $\det A^0_{1j} = \det A'_{1j}$ ، مینور $1, j$ ، A_{1j} دارای شکل زیر است:

$$A_{1j} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

حال $\det A^0_{1j}$ را به عنوان تابعی از $n - 1$ سطر A_{1j} در نظر می گیریم؛ مثلاً،

$\det A_{1j}^0 = f(A_{1j})$ تابع f در سه اصل موضوع اول تابع دترمینان از مرتبه $n - 1$ صدق می‌کند. بنابراین، طبق قضیه یکتایی، می‌توانیم بنویسیم

$$f(A_{1j}) = f(J) \det A_{1j}, \quad (25.3)$$

که در آن J ماتریس همانی از مرتبه $n - 1$ است. پس، برای اثبات (23.3) باید نشان دهیم که $f(J) = (-1)^{j-1}$. اما $f(J)$ ، طبق تعریف، دترمینان ماتریس زیر است:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{سطر } j \text{ م}$$

↑
ستون j م

درایه‌ها در امتداد خطوط مایل همه 1 هستند. درایه‌های دیگری که نموده نشده‌اند همه 0 می‌باشند. با تعویض پی در پی سطر اول C با سطرهای $z, 3, \dots, 2$ ، بعد از $j - 1$ تعویض، به ماتریس همانی $n \times n$ ، I می‌رسیم. دترمینان در هر تعویض تغییر علامت می‌دهد؛ در نتیجه، $\det C = (-1)^{j-1}$. بنابراین، $f(J) = (-1)^{j-1}$ ، کسه (23.3)؛ و لذا، (25.3) را ثابت می‌کند.

۱۳.۳ وجود تابع دترمینان

در این بخش با استقرا بر n ، یعنی اندازه یک ماتریس، ثابت می‌کنیم توابع دترمینان از هر مرتبه وجود دارند. قبلاً "به‌ازای $n = 2$ نشان داده‌ایم که تابع دترمینان وجود دارد. حالت $n = 1$ را نیز می‌توان با تعریف $\det [a_{11}] = a_{11}$ سامان داد.

اگر فرض کنیم یک تابع دترمینان از مرتبه $n - 1$ وجود دارد، نامزد مناسب برای تابع دترمینان از مرتبه n یکی از فرمولهای بسط قضیه ۹.۳، مثلاً، "بسط نسبت به

مینورهای سطر اول است. لیکن، اگر فرمولی دیگر ولی مشابه که برحسب مینورهای ستون اول بیان شده است را به کار ببریم، تحقیق اصول موضوع آسانتر خواهد بود.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنیم دترمینانهای مرتبه $n-1$ وجود داشته باشند. به ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند $A = (a_{jk})$ ، فرض کنیم f تابعی باشد که با فرمول

$$(۲۶.۳) \quad f(A_1, \dots, A_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}$$

تعریف شده است. در این صورت، f در چهار اصل موضوع یک تابع دترمینان از مرتبه n صدق می‌کند. بنابراین، به استقرا، دترمینانهای مرتبه n به ازای هر n وجود خواهند داشت.

برهان. هر جمله از مجموع در (۲۶.۳) را تابعی از سطرهای A می‌گیریم و می‌نویسیم

$$f_j(A_1, \dots, A_n) = (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}.$$

اگر ثابت کنیم هر f_j در اصول موضوع ۱ و ۲ صدق می‌کند، این امر برای f نیز درست است.

به اثر ضرب سطر اول A در اسکالر t توجه می‌کنیم. مینور A_{11} تغییری نمی‌کند، زیرا به سطر اول ارتباطی ندارد. ضریب a_{11} در t ضرب شده است؛ در نتیجه، داریم

$$f_1(tA_1, A_2, \dots, A_n) = ta_{11} \det A_{11} = tf_1(A_1, \dots, A_n).$$

اگر $z > 1$ ، سطر اول هر مینور A_{z1} در t ضرب شده است و ضریب a_{z1} تغییر نکرده است؛ در نتیجه، باز خواهیم داشت

$$f_z(tA_1, A_2, \dots, A_n) = tf_z(A_1, A_2, \dots, A_n).$$

بنابراین، هر f_j نسبت به سطر اول همگن است.

اگر سطر k ام A در t ضرب شود، که $k > 1$ ، مینور A_{k1} تغییر نمی‌کند ولی a_{k1} در t ضرب می‌شود؛ در نتیجه، f_k نسبت به سطر k ام همگن می‌باشد. چنانچه $k \neq z$ ، ضریب a_{z1} تغییر نمی‌کند ولی سطر z ام از A_{z1} در t ضرب می‌شود. بنابراین، هر f_j نسبت به سطر k ام همگن می‌باشد.

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که هر f_j نسبت به هر سطر جمعی است؛ در نتیجه،

f در اصول موضوع ۱ و ۲ صدق می‌کند. حال ثابت می‌کنیم f در اصل موضوع ۳، یعنی

شکل ضعیف اصل موضوع ۳، صدق می‌کند، در این صورت، از قضیه ۱۰۳ نتیجه می‌شود که f در اصل موضوع ۳ نیز صدق خواهد کرد.

برای اثبات اینکه f در اصل موضوع ۳ صدق می‌کند، فرض کنیم دو سطر مجاور A مساوی باشند؛ مثلاً، " $A_k = A_{k+1}$ ". در این صورت، جز مینورهای A_{k1} و $A_{k+1,1}$ ، هر مینور A_{j1} دو سطر مساوی دارد؛ در نتیجه، $\det A_{j1} = 0$. لذا، مجموع (۲۶.۳) فقط از دو جمله نظیر به $j = k$ و $j = k + 1$ تشکیل شده است؛

$$(27.3) \quad f(A_1, \dots, A_n) = (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k+1,1} \det A_{k+1,1}.$$

اما $A_{k1} = A_{k+1,1}$ و $a_{k1} = a_{k+1,1}$ ، زیرا $A_k = A_{k+1}$. بنابراین، دو جمله در (۲۷.۳) فقط در علامت فرق دارند؛ در نتیجه، $f(A_1, \dots, A_n) = 0$. بنا بر این، f در اصل موضوع ۳ صدق می‌کند.

بالاخره، ثابت می‌کنیم f در اصل موضوع ۴ صدق می‌کند. گوییم وقتی $A = I$ ، داریم $a_{11} = 1$ و، به‌ازای $z > 1$ ، $a_{z1} = 0$. همچنین، A_{11} ماتریس همانی از مرتبه $n - 1$ است؛ در نتیجه، هر جمله در (۲۶.۳)، جز اولی که مساوی ۱ است، صفر می‌باشد. بنابراین، $f(I_1, \dots, I_n) = 1$ ؛ در نتیجه، f در اصل موضوع ۴ صدق خواهد کرد. در برهان فوق می‌شد از تابع f که بر حسب مینورهای ستون k ام A_{jk} به‌جای مینورهای ستون اول A_{j1} تعریف شده استفاده کرد. در واقع، اگر فرض کنیم

$$(28.3) \quad f(A_1, \dots, A_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} \det A_{jk}.$$

درست همان نوع برهان نشان می‌دهد که این f در هر چهار اصل موضوع تابع دترمینان صدق می‌کند. چون توابع دترمینان منحصر بفرد هستند، فرمولهای بسط در (۲۸.۳) و فرمولهای (۲۱.۳) همه مساوی $\det A$ می‌باشند.

فرمولهای بسط (۲۸.۳) نه فقط وجود توابع دترمینان را ثابت می‌کنند بلکه جنبه جدیدی از نظریه دترمینانها را نیز ظاهر می‌سازند، و آن رابطه بین خواص سطری و خواص ستونی می‌باشد. این ارتباط در بخش بعد بیشتر مطرح می‌شود.

۱۴.۳ دترمینان یک ترانهاد

به هر ماتریس A ماتریس دیگری، به نام ترانهاد A^t ، مربوط است که با A^t نموده می‌شود. سطرهای A^t ستونهای A می‌باشند. مثلاً، هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ آنگاه } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

تعریف صوری آن را می توان به شکل زیر داد :

تعریف ترانهاده. ترانهاده یک ماتریس $m \times n$ مانند $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ ماتریس $n \times m$ است مانند A^t که درایه i, j آن a_{ji} است.

با آنکه تراننش در مورد هر ماتریس مستطیلی شکل قابل انجام است، ما عمدتاً "به ماتریسهای مربعی توجه داریم. اینک ثابت می کنیم که تراننش یک ماتریس مربعی دترمینان آن را تغییر نمی دهد.

قضیه ۱۱.۳. به ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A داریم

$$\det A = \det A^t.$$

پروهان. اثبات به استقرا بر n است. به ازای $n = 1$ و $n = 2$ نتیجه به آسانی حاصل است. پس فرض کنیم قضیه برای ماتریسهای مرتبه $n - 1$ درست باشد. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = A^t = (b_{ij})$. با بسط $\det A$ نسبت به مینورهای ستون اول و $\det B$ نسبت به مینورهای سطر اول، داریم

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}, \quad \det B = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} b_{1j} \det B_{1j}.$$

اما از تعریف ترانهاده داریم $b_{1j} = a_{j1}$ و $B_{1j} = (A_{j1})^t$. چون صحت قضیه برای ماتریسهای مرتبه $n - 1$ فرض شده است، خواهیم داشت $\det B_{1j} = \det A_{j1}$. بنابراین، مجموعهای فوق جمله به جمله مساوی اند؛ در نتیجه، $\det A = \det B$.

۱۵.۳ ماتریس همسازهای

قضیه ۵.۳ نشان داد که هرگاه A نامفرد باشد، آنگاه $\det A \neq 0$. قضیه بعدی عکس آن را ثابت می کند؛ یعنی، هرگاه $\det A \neq 0$ ، آنگاه A^{-1} وجود دارد. بعلاوه، فرمول صریحی برای بیان A^{-1} برحسب ماتریسی که از همسازهای درایه های A تشکیل می شود به

دست می دهد .

در قضیه ۹۰۳ ثابت شد که همسازه^۲ i, j درایه^۳ a_{ij} مساوی $\det A_{ij} (-1)^{i+j}$ است ، که در آن A_{ij} مینور i, j ماتریس A می باشد . این همسازه را با $\text{cof } a_{ij}$ نشان می دهیم . بنابراین ، طبق تعریف ،

$$\text{cof } a_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} .$$

تعریف ماتریس همسازه های . ماتریسی که درایه^۴ i, j آن $\text{cof } a_{ij}$ است ماتریس همسازه های^{*} A نامیده و با $\text{cof } A$ نموده می شود . بنابراین ، داریم

$$\text{cof } A = (\text{cof } a_{ij})_{i,j=1}^n = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{i,j=1}^n .$$

قضیه^۵ بعدی نشان می دهد که حاصل ضرب A و ترانهاده^۶ ماتریس همسازه های آن ، صرف نظر از یک سازه^۷ اسکالر ، ماتریس همانی I است .

قضیه^۸ ۱۲۰۳ . به ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A ، که $n \geq 2$ ، داریم

(۲۹۰۳)

$$A(\text{cof } A)^t = (\det A)I .$$

بخصوص ، اگر $\det A \neq 0$ ، معکوس A وجود دارد و از رابطه^۹

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof } A)^t$$

به دست می آید .

برهان . با استفاده از قضیه^{۱۰} ۹۰۳ ، $\det A$ را بر حسب همسازه های سطر k ام آن با فرمول

(۳۰۰۳)

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{kj} \text{cof } a_{kj}$$

* در بسیاری از نوشتجات ماتریسی انگلیسی ، transpose (ترانهاده) ماتریس همسازه های A *adjugate* ماتریس A نامیده می شود . بعضی از کتب قدیمی تر آن را *adjoint* ماتریس A نامیده اند . لیکن ، فرهنگ جاری انگلیسی اصطلاح *adjoint* را کلاً "به شیء دیگری ، که در بخش ۸۰۵ مطرح می شود ، اختصاص داده است .

بیان می‌کنیم. k را ثابت می‌گیریم و این رابطه را در مورد ماتریس جدید B که سطر i م مساوی سطر k ام A ، به‌ازای $k \neq i$ ، بوده و سطرهاى دیگر آن همان سطرهاى A اند به‌کار می‌بریم. در این صورت ، $\det B = 0$ ، زیرا سطرهاى i م و k ام مساوى‌اند. با نوشتن $\det B$ برحسب همسازه‌هاى سطرى i م خواهیم داشت

$$(31.3) \quad \det B = \sum_{j=1}^n b_{ij} \operatorname{cof} b_{ij} = 0.$$

اما ، چون سطر i م B مساوى سطر k ام A است ،
 به‌ازای هر j ، $b_{ij} = a_{kj}$ ، $\operatorname{cof} b_{ij} = \operatorname{cof} a_{ij}$ ، بنابراین ، (۳۱.۳) می‌گوید که

$$(32.3) \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} \operatorname{cof} a_{ij} = 0 \quad , \quad k \neq i$$

معادلات (۳۰.۳) و (۳۲.۳) را می‌توان با هم به صورت زیر نوشت :

$$(33.3) \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} \operatorname{cof} a_{ij} = \begin{cases} \det A & , \quad i = k \\ 0 & , \quad i \neq k \end{cases}$$

اما مجموع سمت چپ (۳۳.۳) همان درابه k, i حاصل ضرب $A(\operatorname{cof} A)$ است. بنابراین ،
 (۳۳.۳) رابطه (۲۹.۳) را ایجاب خواهد کرد.

به عنوان نتیجه‌ای مستقیم از قضایای ۵.۳ و ۱۲.۳ ، شرط لازم و کافی زیر را برای نامنفرد بودن یک ماتریس مربعی خواهیم داشت .

قضیه ۱۳.۳ . ماتریس مربعی A نامنفرد است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$.

۱۶.۳ قاعده کرامر

قضیه ۱۲.۳ را نیز می‌توان به‌کار برد و فرمولهای صریحی برای جوابهای یک دستگاه معادلات خطی یا ماتریس ضرایب نامنفرد به دست آورد. این فرمولها ، به افتخار ریاضیدان سویسی گابریل کرامر^۱ (۱۷۵۲ - ۱۷۰۴) ، قاعده کرامر نام یافته‌اند .

قضیه ۱۴.۳. قاعده کرامر. هرگاه دستگاه

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

مربک از n معادله خطی و n مجهول x_1, \dots, x_n دارای ماتریس ضرایب نامنفرد $A = (a_{ij})$ باشد، آنگاه برای دستگاه جواب منحصر بفردی وجود دارد که از فرمولهای زیر به دست می آید:

$$(۳۴.۳) \quad x_j = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{cof} a_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

برهان. دستگاه را می توان به صورت یک معادله ماتریسی نوشت:

$$AX = B,$$

که در آن X و B ماتریسهایی ستونی اند: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$ چون A نامنفرد

است، جواب منحصر بفرد X وجود دارد به این صورت

$$(۳۵.۳) \quad X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)'B$$

فرمولهای (۳۴.۳) با متحد گرفتن مولفهها در (۳۵.۳) به دست می آیند.

باید توجه داشت که فرمول مربوط به x_j در (۳۴.۳) را می توان به صورت خارج

قسمت دو درمیان نوشت:

$$x_j = \frac{\det C_j}{\det A},$$

که در آن C_j ماتریسی است که از A با تعویض ستون j م A با ماتریس ستونی B به دست می آید.

$$\cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} (\text{پ}) : \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} (\text{ب}) : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} (\text{ت})$$

۲. معکوس هریک از ماتریسهای نامفرد تمرین ۱ را مشخص نمایید .
 ۳. تمام مقادیر اسکالر λ که به ازای آنها ماتریس $\lambda I - A$ مفرد است را بیابید مشروط بر اینکه A به صورت زیر باشد :

$$\cdot \begin{bmatrix} 11 & -2 & 8 \\ 19 & -3 & 14 \\ -8 & 2 & -5 \end{bmatrix} (\text{پ}) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} (\text{ب}) : \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} (\text{ت})$$

۴. اگر A یک ماتریس $n \times n$ با $n \geq 2$ باشد، هریک از خواص زیر را در مورد ماتریس همسازهای آن ثابت کنید :

$$: (\text{cof } A)^t A = (\det A) I \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \text{cof } (A^t) = (\text{cof } A)^t \quad (\text{ت})$$

۳. $A(\text{cof } A)^t = (\text{cof } A)^t A$ با ترانسهاده ماتریس همسازهای خود تعویض می شود .

۵. دستگاههای زیر را با استفاده از قاعده کرامر حل کنید :

$$: x + 2y + 3z = 8, \quad 2x - y + 4z = 7, \quad -y + z = 1 \quad (\text{ت})$$

$$\cdot x + y + 2z = 0, \quad 3x - y - z = 3, \quad 2x + 5y + 3z = 4 \quad (\text{ب})$$

۶. (ت) بگوئید چرا هریک از معادلات زیر معادله دکارتی خط مستقیمی است در صفحه xy که از دو نقطه متمایز (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می گذرد :

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} = 0; \quad \det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

- (ب) روابط نظیر را برای یک صفحه در فضای ۳ که از سه نقطه متمایز می گذرد بیان و اثبات کنید .

- (پ) روابط نظیر را برای یک دایره در صفحه xy که از سه نقطه غیر واقع بر یک

استقامت بیان و اثبات کنید .

۷ . فرض کنید n^2 تابع f_{ij} داده شده که هر یک بر بازه (a, b) مشتقپذیر است ، و به ازای هر x در (a, b) تعریف کنید $F(x) = \det [f_{ij}(x)]$. ثابت کنید $F'(x)$ مجموع n دترمینان است :

$$F'(x) = \sum_{i=1}^n \det A_i(x),$$

که در آن $A_i(x)$ ماتریسی است که با مشتقگیری از توابع سطر i م $[f_{ij}(x)]$ به دست می‌آید .

۸ . هر ماتریس $n \times n$ از توابع به شکل $W(x) = [u_j^{(i-1)}(x)]$ ، که در آن هر سطر بعد از اولی مشتق سطر قبلی است ، به افتخار ریاضیدان لهستانی رونسکی^۱ (۱۷۷۸ - ۱۸۵۳) ماتریس رونسکی نامیده می‌شود . ثابت کنید مشتق دترمینان $W(x)$ دترمینان ماتریسی است که با مشتقگیری از هر درایه در سطر آخر $W(x)$ به دست می‌آید . [راهنمایی، تمرین ۷ را به‌کار ببرید .]

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه

۱.۴ تبدیلات خطی با نمایشهای ماتریسی قطری

فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی بر فضای خطی با بعد متناهی V باشد. خواصی از T که از هر دستگاه مختصات (پایه) برای V مستقل اند خواص ذاتی T نامیده می‌شوند. جمیع نمایشهای ماتریسی T در این خواص سهیم اند. اگر پایه طوری اختیار شود که ماتریس حاصل شکل ساده‌ای خاصی داشته باشد، احتمالا می‌توان بعضی از خواص ذاتی را مستقیما "از نمایش ماتریسی به دست آورد".

از جمله ساده‌ترین ماتریسها ماتریسهای قطری هستند. لذا، ممکن است بپرسیم آیا هر تبدیل خطی یک نمایش ماتریسی قطری دارد یا نه. در فصل ۲ مسئله یافتن نمایش ماتریسی قطری تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ ، که در آن $\dim V = n$ و $\dim W = m$ ، مطرح شد. در قضیه ۱۴.۴ ثابت کردیم که همیشه پایه‌ای مانند (e_1, \dots, e_n) برای V و پایه‌ای مانند (w_1, \dots, w_m) برای W وجود دارند بطوری که ماتریس T نسبت به این جفت پایه یک ماتریس قطری است. بخصوص، اگر $W = V$ ، ماتریس یک ماتریس قطری مربعی است. حالت جدید در اینجا این است که می‌خواهیم برای V و W یک پایه به کار ببریم. با این قید، یافتن یک نمایش ماتریسی قطری برای T همیشه میسر نیست. لذا، به مسئله تعیین اینکه کدام تبدیلهای دارای نمایش ماتریسی قطری اند می‌پردازیم.

نمادگذاری. اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس قطری باشد، می‌نویسیم

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

به آسانی می‌توان شرط لازم و کافی برای آنکه یک تبدیل خطی نمایش ماتریسی

قطری داشته باشد را بیان کرد.

قضیه ۱۰۴. تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ ، که در آن $\dim V = n$ داده شده است. هرگاه T دارای نمایش ماتریسی قطری باشد، آنگاه مجموعه مستقلی از عنصرهای u_1, \dots, u_n در V و مجموعه نظیرش از اسکالرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ وجود دارند بطوری که

$$T(u_k) = \lambda_k u_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (10.4)$$

بعکس، هرگاه مجموعه مستقلی از عناصر u_1, \dots, u_n در V و مجموعه نظیرش از اسکالرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ صادق در (۱۰۴) وجود داشته باشند، آنگاه ماتریس

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

یک نمایش T نسبت به پایه (u_1, \dots, u_n) می باشد.

برهان. ابتدا فرض می کنیم T یک نمایش ماتریسی قطری مانند $A = (a_{ik})$ نسبت به پایه‌ای چون (e_1, \dots, e_n) داشته باشد. عمل T بر عناصر پایه از فرمول

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i = a_{kk} e_k$$

به دست می آید، زیرا به ازای $i \neq k$ ، $a_{ik} = 0$. این رابطه (۱۰۴) را به ازای $u_k = e_k$ و $\lambda_k = a_{kk}$ ثابت می کند.

حال فرض کنیم عناصر مستقل u_1, \dots, u_n و اسکالرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ صادق در (۱۰۴) وجود داشته باشند. چون u_1, \dots, u_n مستقل اند، پس تشکیل یک پایه برای V می دهند. هرگاه تعریف کنیم $a_{kk} = \lambda_k$ و به ازای $i \neq k$ ، $a_{ik} = 0$ ، آنگاه ماتریس $A = (a_{ik})$ یک ماتریس قطری است که T را نسبت به پایه (u_1, \dots, u_n) نمایش می دهد.

بنابراین، مسئله یافتن نمایش ماتریسی قطری یک تبدیل خطی به مسئله دیگری تبدیل شده است، و آن یافتن عناصر مستقل u_1, \dots, u_n و اسکالرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ صادق در (۱۰۴) است. عنصرهای u_k و اسکالرهای λ_k صادق در (۱۰۴) بترتیب بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه T نام دارند. در بخش بعد، بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه* ←

* بردار ویژه و مقدار ویژه در انگلیسی بترتیب *eigenvector* و *eigenvalue* گفته می شوند،

را در محدودهٔ کلیتری بررسی خواهیم کرد.

۲۰۴ بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه: یک تبدیل خطی

در این بحث، V یک فضای خطی و S زیر فضایی از V است. فضاهای S و V لازم نیست با بعد متناهی باشند.

تعریف. فرض کنیم $T: S \rightarrow V$ یک تبدیل خطی از S بتوی V باشد. اسکالر λ یک مقدار ویژه T نام دارد اگر عنصر ناصفری چون x در S باشد بطوری که

$$(20.4) \quad T(x) = \lambda x.$$

عنصر x را یک بردار ویژه T متعلق به λ می‌نامند. اسکالر λ یک مقدار ویژه نظیر به x نامیده می‌شود.

نظیر به هر بردار ویژه x دقیقاً یک مقدار ویژه وجود دارد. در واقع، هرگاه به ازای $O \neq x$ داشته باشیم $T(x) = \lambda x$ و $T(x) = \mu x$ ، آنگاه $\lambda x = \mu x$ ؛ در نتیجه، $\lambda = \mu$.

تذکر. با اینکه معادله (۲۰۴) همیشه به ازای $x = O$ و هر اسکالر λ برقرار است، تعریف O را به عنوان یک بردار ویژه مستثنی می‌کند. یک دلیل این تبعیض علیه O این است که برای هر بردار ویژه x درست یک مقدار ویژه λ داشته باشیم.

مثالهای زیر معنی این مفهوما را توضیح می‌دهند.

مثال ۱. ضرب در اسکالر ثابت. فرض کنیم $T: S \rightarrow V$ تبدیلی خطی باشد که با معادله $T(x) = cx$ به ازای هر x در S تعریف می‌شود، و در آن c یک اسکالر ثابت

→ که ترجمه‌های ناقص واژه‌های آلمانی *Eigenwert* و *Eigenvektor* می‌باشند. برخی از مولفان انگلیسی زبان از اصطلاحات *characteristic vector* یا *proper vector* به عنوان مترادفهایی برای *eigenvektor* استفاده می‌کنند. *eigenvalues* نیز *characteristic values*، *proper values*، یا *latent roots* نامیده می‌شوند.

می‌باشد. در این مثال هر عنصر ناصفر S یک بردار ویژه متعلق به اسکالر c است.

مثال ۲. فضای ویژه $E(\lambda)$ مرکب از تمام x هایی که $T(x) = \lambda x$. فرض کنیم $T: S \rightarrow V$ یک تبدیل خطی با مقدار ویژه λ باشد. فرض کنیم $E(\lambda)$ مجموعه تمام عنصرهای x در S باشد که $T(x) = \lambda x$. این مجموعه شامل عنصر صفر O و تمام بردارهای ویژه متعلق به λ است. به آسانی ثابت می‌شود که $E(\lambda)$ یک زیرفضای S است، زیرا که اگر x و y در $E(\lambda)$ باشند، به‌ازای هر اسکالر a و b داریم

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y) = a\lambda x + b\lambda y = \lambda(ax + by).$$

بنابراین $(ax + by) \in E(\lambda)$ ؛ در نتیجه، $E(\lambda)$ یک زیرفضا می‌باشد. فضای $E(\lambda)$ فضای ویژه نظیر به λ نامیده می‌شود. این فضا ممکن است با بعد متناهی یا نامتناهی باشد. هرگاه $E(\lambda)$ با بعد متناهی باشد، آنگاه $\dim E(\lambda) \geq 1$ ، زیرا $E(\lambda)$ شامل دست کم یک عنصر ناصفر مانند x نظیر به λ هست.

مثال ۳. وجود مقدارهای ویژه صفر. اگر یک بردار ویژه وجود داشته باشد، بنا به تعریف، نمی‌تواند صفر باشد. اما اسکالر صفر می‌تواند یک مقدار ویژه باشد. در واقع، اگر 0 یک مقدار ویژه برای x باشد، $T(x) = 0x = O$ ؛ در نتیجه، x در فضای پوچ T است. بعکس، اگر فضای پوچ T شامل عناصر ناصفیری باشد، هریک از آنها یک بردار ویژه با مقدار ویژه 0 است. در حالت کلی، $E(\lambda)$ فضای پوچ $T - \lambda I$ می‌باشد.

مثال ۴. انعکاس در صفحه xy . فرض کنیم $S = V_3(\mathbf{R})$ و T یک انعکاس در صفحه xy باشد. یعنی، فرض کنیم T بر بردارهای پایه i, j, k به صورت زیر عمل کند: $T(i) = i, T(j) = j, T(k) = -k$. هر بردار ناصفر در صفحه xy یک بردار ویژه با مقدار ویژه 1 است. بردارهای ویژه باقی به شکل ck اند، که $c \neq 0$ ؛ هریک از آنها دارای مقدار ویژه -1 می‌باشد.

مثال ۵. دوران صفحه به اندازه زاویه ثابت α . این مثال فایده‌بخصی دارد، زیرا نشان می‌دهد که وجود بردارهای ویژه ممکن است به میدان زمینه از اسکالرها بستگی داشته باشد. صفحه‌را می‌توان به دو طریق مختلف یک فضای خطی انگاشت: (۱) به صورت

یک فضای خطی حقیقی 2 بعدی، $V = V_2(\mathbf{R})$ ، با دو عنصر پایه $(1, 0)$ و $(0, 1)$ ، و با اعداد حقیقی به عنوان اسکالرها؛ یا (۲) به صورت یک فضای خطی مختلط 1 بعدی، $V = V_1(\mathbf{C})$ ، با یک عنصر پایه 1 ، و اعداد مختلط به عنوان اسکالرها.

ابتدا تعبیر دوم را در نظر می‌گیریم. هر عنصر $z \neq 0$ از $V_1(\mathbf{C})$ را می‌توان به شکل قطبی، یعنی $z = re^{i\theta}$ ، بیان کرد. هرگاه T ، z را به اندازه α بچرخاند، آنگاه $T(z) = re^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\alpha}z$. لذا، هر $z \neq 0$ یک بردار ویژه با مقدار ویژه $e^{i\alpha} = \lambda$ است. توجه کنید که مقدار ویژه $e^{i\alpha}$ حقیقی نیست مگر آنکه α مضرب صحیحی از π باشد.

حال صفحه را به صورت یک فضای خطی حقیقی، یعنی $V_2(\mathbf{R})$ ، در نظر می‌گیریم. چون اسکالرهای $V_2(\mathbf{R})$ اعدادی حقیقی‌اند، دوران T فقط وقتی مقدارهای ویژه حقیقی دارد که α مضرب صحیحی از π باشد. به عبارت دیگر، هرگاه α مضرب صحیحی از π نباشد، آنگاه T مقدار ویژه حقیقی ندارد؛ و در نتیجه، بردار ویژه نخواهد داشت. بنابراین، وجود بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه ممکن است به انتخاب اسکالرها برای V بستگی داشته باشد.

مثال ۶. عملگر مشتقگیری. فرض کنیم V فضای خطی تمام توابع حقیقی f باشد که بر بازه a باز معلومی از هر مرتبه مشتق دارند. همچنین، D تبدیلی خطی باشد که هر f را بروی مشتقش می‌نگارد، $D(f) = f'$. بردارهای ویژه D ، f های ناصفری هستند که در معادله‌ای به شکل

$$f' = \lambda f$$

به ازای λ ای حقیقی، صدق می‌کنند. این یک معادله دیفرانسل خطی مرتبه اول است. همه جوابهای آن از فرمول

$$f(x) = ce^{\lambda x}$$

به دست می‌آیند، که در آن c ثابت حقیقی دلخواهی است. بنابراین، بردارهای ویژه D تمام توابع نمایی $f(x) = e^{\lambda x}$ ، با $c \neq 0$ می‌باشند. بردار ویژه نظیر به $f(x) = ce^{\lambda x}$ عبارت است از λ . در مثالهایی مثل این که در آنها V یک فضای تابعی است، بردارهای ویژه تابعهای ویژه نامیده می‌شوند.

مثال ۷. عملگر انتگرالگیری. فرض کنیم V فضای خطی جميع توابع حقیقی پیوسته بر

بازه متناهی $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in V$ ، $g = T(f)$ را تابع زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

تابعهای ویژه T (در صورت وجود) f های ناصفری هستند که در معادله‌ای به شکل

$$(3.4) \quad \int_a^x f(t) dt = \lambda f(x).$$

به ازای λ ای حقیقی، صدق می‌کنند. اگر یک تابع ویژه وجود داشته باشد، می‌توان از این معادله مشتق گرفت و رابطه $f(x) = \lambda f'(x)$ را به دست آورد، که از آن، مشروط بر اینکه $\lambda \neq 0$ ، خواهیم داشت $f(x) = ce^{\lambda x}$. به عبارت دیگر، تنها نامزد برای تابعهای ویژه توابع نمایی به شکل $f(x) = ce^{\lambda x}$ است با $c \neq 0$ و $\lambda \neq 0$. اما، اگر در (3.4) قرار دهیم $x = a$ ، به دست می‌آوریم

$$0 = \lambda f(a) = \lambda ce^{\lambda a}.$$

چون $e^{\lambda a}$ هیچگاه صفر نیست، می‌بینیم که معادله $\lambda f = T(f)$ نمی‌تواند به ازای f ناصفر برقرار شود؛ در نتیجه، T تابع ویژه و مقدار ویژه نخواهد داشت.

مثال ۸. زیر فضای پیموده شده به وسیله یک بردار ویژه. فرض کنیم $T: S \rightarrow V$ تبدیلی خطی با مقدار ویژه λ باشد. همچنین، x یک بردار ویژه متعلق به λ بوده و $L(x)$ زیر فضای پیموده شده به وسیله x باشد. یعنی، $L(x)$ مجموعه تمام مضارب اسکالر x باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که T ، $L(x)$ را بتوی خودش می‌نگارد. در واقع، اگر $y = cx$ ، داریم

$$T(y) = T(cx) = cT(x) = c(\lambda x) = \lambda(cx) = \lambda y.$$

هرگاه $c \neq 0$ ، آنگاه $y \neq 0$ ؛ در نتیجه، هر عنصر ناصفر y از $L(x)$ نیز یک بردار ویژه متعلق به λ است.

زیر فضای U از S تحت T پایا است در صورتی که T هر عنصر U را بروی عنصری از U بنگارد. هم اکنون نشان دادیم که زیر فضای پیموده شده به وسیله یک بردار ویژه تحت T پایا است.

۳.۴ استقلال خطی بردارهای ویژه؛ نظیر به مقدارهای ویژه؛ متمایز

یکی از مهمترین خواص مقدارهای ویژه در قضیه زیرتوصیف شده است. مثل قبل، S یک زیرفضای فضای خطی V است.

قضیه ۲.۴. فرض کنیم u_1, \dots, u_k بردارهای ویژه؛ تبدیل خطی $T: S \rightarrow V$ بوده، و مقدارهای ویژه؛ نظیر $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ متمایز باشند. در این صورت، بردارهای ویژه؛ u_1, \dots, u_k مستقل می‌باشند.

برهان. اثبات به استقرا بر k است. نتیجه وقتی $k = 1$ واضح است. پس فرض کنیم نتیجه برای هر مجموعه؛ مرکب از $k - 1$ بردار ویژه ثابت شده باشد. همچنین، u_1, \dots, u_k ، k بردار ویژه؛ متعلق به مقدارهای ویژه؛ متمایز بوده، و اسکالرهای c_i وجود داشته باشند بطوری که

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^k c_i u_i = 0.$$

با اعمال T در دو طرف (۴.۴) و استفاده از این امر که $T(u_i) = \lambda_i u_i$ ، درمی‌یابیم که

$$(5.4) \quad \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i u_i = 0.$$

با ضرب (۴.۴) در λ_k و تفریق آن از (۵.۴)، معادله؛

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i (\lambda_i - \lambda_k) u_i = 0$$

به دست می‌آید. اما چون u_1, \dots, u_{k-1} مستقل اند، باید به ازای هر $i = 1, 2, \dots, k - 1$ داشته باشیم $c_i (\lambda_i - \lambda_k) = 0$. چون مقدارهای ویژه متمایزند، به ازای $i \neq k$ داریم $\lambda_i \neq \lambda_k$ ؛ در نتیجه، به ازای $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ، $c_i = 0$. از (۴.۴) مشاهده می‌شود که c_k نیز ۰ است؛ در نتیجه، بردارهای ویژه؛ u_1, \dots, u_k مستقل می‌باشند. توجه کنید که قضیه ۲.۴ در صورتی که عنصر صفر مجاز به بردار ویژه بودن باشد درست نیست. این دلیل دیگری است برای معاف کردن 0 از بردار ویژه بودن.

تذکار. عکس قضیه ۲.۴ برقرار نیست. یعنی، هرگاه T دارای بردارهای ویژه؛ مستقل

u_1, \dots, u_k باشد، مقدارهای ویژه نظیر $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ را "متمایز نیستند" مثلاً، هرگاه T تبدیل همانی باشد، به ازای هر x ، $T(x) = x$ ، آنگاه هر $x \neq 0$ یک بردار ویژه است اما فقط یک مقدار ویژه وجود دارد، $\lambda = 1$.

قضیه ۲.۴ نناح مهمی در ابعاد متناهی دارد.

قضیه ۳.۴. هرگاه $\dim V = n$ ، هر تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ حداکثر n مقدار ویژه متمایز دارد. هرگاه T درست n مقدار ویژه متمایز داشته باشد، بردارهای ویژه نظیر یک پایه برای V تشکیل می‌دهند و ماتریس T نسبت به این پایه یک ماتریس قطری است که درایدهای قطری آن مقدارهای ویژه می‌باشند.

برهان. هرگاه $n + 1$ مقدار ویژه متمایز وجود می‌داشت، آنگاه، طبق قضیه ۲.۴، V شامل $n + 1$ عنصر مستقل می‌شد. این امر ممکن نیست، زیرا $\dim V = n$. حکم دوم از قضایای ۱.۴ و ۲.۴ نتیجه می‌شود.

تذکر. قضیه ۳.۴ به ما می‌گوید که وجود n مقدار ویژه متمایز شرطی است کافی برای آنکه T نمایش ماتریسی قطری داشته باشد. این شرط لازم نیست. تبدیلاتی خطی وجود دارند با تعداد مقادیر ویژه متمایز کوچکتر از n که می‌توان آنها را با ماتریسهای قطری نمایش داد. تبدیل همانی یک نمونه از آنهاست. همه مقدارهای ویژه آن مساوی یکاند ولی می‌توان آن را با ماتریس همانی نمایش داد. قضیه ۱.۴ به ما می‌گوید که وجود n بردار ویژه مستقل لازم و کافی است برای آنکه T نمایش ماتریسی قطری داشته باشد.

۴.۴ تمرین

- (آ) ثابت کنید که اگر T مقدار ویژه λ داشته باشد، aT مقدار ویژه $a\lambda$ دارد.
- (ب) ثابت کنید که اگر x یک بردار ویژه برای T_1 و T_2 باشد، x یک بردار ویژه برای $aT_1 + bT_2$ نیز هست. مقدارهای ویژه با هم چه ارتباطی دارند؟
- فرض کنید $T: V \rightarrow V$ دارای بردار ویژه x متعلق به مقدار ویژه λ باشد. ثابت کنید x یک بردار ویژه T^2 متعلق به λ^2 است و، بطور کلی، x یک بردار ویژه

T^n متعلق به λ^n است. سپس، با استفاده از تمرین ۱، نشان دهید که هرگاه P یک چند جمله‌ای باشد، x یک بردار ویژه $P(T)$ متعلق به $P(\lambda)$ است.

۳. صفحه را به صورت یک فضای خطی حقیقی در نظر بگیرید، یعنی $V = V_2(\mathbf{R})$ و فرض کنید T دوران V به اندازه $\pi/2$ رادیان باشد. با آنکه T بردار ویژه ندارد، ثابت کنید هر بردار ناصفر یک بردار ویژه برای T^2 است.

۴. هرگاه $T: V \rightarrow V$ این خاصیت را داشته باشد که T^2 دارای مقدار ویژه λ^2 نامنفی باشد، ثابت کنید حداقل یکی از λ یا $-\lambda$ یک مقدار ویژه برای T است.

$$[\text{راهنمایی: } 0 \cdot T^2 - \lambda^2 I = (T + \lambda I)(T - \lambda I)]$$

۵. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی مشتقپذیر بر $(0, 1)$ باشد. اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ را به این صورت تعریف کنید که به ازای هر t در $(0, 1)$ ، $g(t) = tf'(t)$ ثابت کنید هر λ ی حقیقی یک مقدار ویژه برای T است. و تابعهای ویژه، نظیر به λ را معین نمایید.

۶. فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌سهای حقیقی مانند $p(x)$ از درجه n یا بیشتر از n باشد. اگر $p \in V$ ، $q = T(p)$ را به این صورت تعریف کنید که به ازای هر t ی حقیقی $q(t) = p(t+1)$. ثابت کنید T فقط مقدار ویژه 1 را دارد. تابعهای ویژه، متعلق به این مقدار ویژه چیستند؟

۷. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع پیوسته‌ای بر $(-\infty, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ به ازای هر x حقیقی وجود دارد. اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ را با معادله $g(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ تعریف کنید. ثابت کنید هر λ ی مثبت یک مقدار ویژه برای T است و تابعهای ویژه، نظیر به λ را معین نمایید.

۸. فرض کنید V فضای خطی تمام توابع پیوسته‌ای بر $(-\infty, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_{-\infty}^x t f(t) dt$ به ازای هر x حقیقی وجود دارد. اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ را با معادله $g(x) = \int_{-\infty}^x t f(t) dt$ تعریف کنید. ثابت کنید هر λ ی منفی یک مقدار ویژه برای T است و تابعهای ویژه، نظیر به λ را معین نمایید.

۹. فرض کنید $V = C(0, \pi)$ فضای خطی حقیقی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازه $[0, \pi]$ باشد. همچنین، S زیر فضای تمام توابع f ی باشد که دارای مشتق دوم پیوسته به صورت خطی اند و نیز در شرایط کرانه‌های $0 = f(0) = f(\pi)$ صدق می‌کنند. فرض کنید $T: S \rightarrow V$ تبدیلی خطی باشد که هر f را بروی مشتق دوم آن می‌نگارد؛ یعنی،

$T(f) = f^n$. ثابت کنید مقدارهای ویژه T اعدادی به شکل $n^2 - n$ اند، که در آن $n = 1, 2, \dots$ و تابعهای ویژه نظیر به $n^2 - n$ عبارتند از $f(t) = c_n \sin nt$ ، که در آن $c_n \neq 0$.

۱۰. فرض کنید V فضای خطی تمام دنباله‌های همگرای حقیقی مانند $\{x_n\}$ باشد. $T: V \rightarrow V$ را به صورت زیر تعریف کنید: اگر $x = \{x_n\}$ یک دنباله همگرا با حد a باشد، قرار دهید $T(x) = \{y_n\}$ ، که در آن به ازای $n \geq 1$ ، $y_n = a - x_n$. ثابت کنید T فقط دو مقدار ویژه دارد، $\lambda = 0$ و $\lambda = -1$ ، و بردارهای ویژه متعلق به چنین λ ای را معین نمایید.

۱۱. فرض کنید تبدیل خطی T دارای دو بردار ویژه x و y متعلق به مقدارهای ویژه متمایز λ و μ باشد. ثابت کنید که اگر $ax + by$ یک بردار ویژه T باشد، $a = 0$ یا $b = 0$.

۱۲. فرض کنید $T: S \rightarrow V$ یک تبدیل خطی بوده بطوری که هر عنصر ناصفر S یک بردار ویژه باشد. ثابت کنید اسکالری چون c هست بطوری که $T(x) = cx$. به عبارت دیگر، تنها تبدیل واجد این خاصیت ضرب اسکالری از همانی است. [راهنمایی: از تمرین ۱۱ استفاده کنید.]

۵.۴ حالت ابعاد متناهی. چند جمله‌ایهای مشخص

هرگاه $\dim V = n$ ، مسئله یافتن مقدارهای ویژه تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ را می‌توان به کمک دترمینانها حل کرد. می‌خواهیم آن اسکالرها λ را بیابیم که معادله $T(x) = \lambda x$ دارای جواب $x \neq 0$ باشد. معادله $T(x) = \lambda x$ را می‌توان به شکل

$$(\lambda I - T)(x) = 0$$

نوشت، که در آن I تبدیل همانی است. هرگاه فرض کنیم $T_\lambda = \lambda I - T$ ، آنگاه λ یک بردار ویژه است اگر و فقط اگر معادله

$$T_\lambda(x) = 0 \quad (۶.۴)$$

دارای جواب ناصفری چون x باشد، که در آن حالت T_λ (بخاطر قضیه ۱۰.۲) معکوسپذیر نیست. لذا، طبق قضیه ۲۰.۲، یک جواب ناصفر از (۶.۴) وجود دارد اگر و فقط اگر ماتریس T_λ منفرد باشد. هرگاه A یک نمایش ماتریسی T باشد، آنگاه $\lambda I - A$ یک نمایش ماتریسی T_λ است. بنابراین قضیه ۱۳.۲، ماتریس $\lambda I - A$ منفرد است اگر و فقط اگر

$\det(\lambda I - A) = 0$. بنابراین، اگر λ یک مقدار ویژه T باشد، در معادله

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (۷.۴)$$

صدق می‌کند. بعکس، هر λ در میدان زمینه از اسکالرهای که در (۷.۴) صدق کند یک مقدار ویژه است. این امر ما را به بررسی دترمینان $\det(\lambda I - A)$ به عنوان تابعی از λ وامی‌دارد.

قضیه ۷.۴. هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ بوده و I ماتریس همانی $n \times n$ باشد، تابع f تعریف شده با

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

یک چندجمله‌ای از λ و از درجه n است. علاوه، جمله با بالاترین درجه λ^n است، و جمله ثابت $f(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$ می‌باشد.

برهان. رابطه $f(0) = \det(-A)$ فوراً از تعریف f نتیجه می‌شود. ثابت می‌کنیم f فقط در حالت $n \leq 3$ یک چندجمله‌ای از درجه n است. اثبات در حالت کلی را می‌توان به استقرا انجام داد و به عنوان تمرین باقی می‌ماند. (ر.ک. تمرین ۹ در بخش ۸.۴)

به‌ازای $n = 1$ دترمینان چندجمله‌ای خطی $f(\lambda) = \lambda - a_{11}$ است. به‌ازای $n = 2$

داریم

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \end{aligned}$$

که یک چندجمله‌ای درجه دوم از λ است. به‌ازای $n = 3$ خواهیم داشت

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} -a_{21} & -a_{23} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} -a_{21} & \lambda - a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix}.$$

دو جمله آخر چند جمله‌ایهایی خطی از λ اند. جمله اول یک چند جمله‌ای درجه سه است، جمله با بالاترین درجه λ^3 است.

تعریف. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، دترمینان

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

چند جمله‌ای مشخص A نامده می‌شود.

ریشه‌های چند جمله‌ای مشخص A اعدادی مختلطاند، و بعضی از آنها ممکن است حقیقی باشند. چنانچه F میدان حقیقی \mathbf{R} یا میدان مختلط \mathbf{C} باشد، قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۵.۴. فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد، که در آن V اسکالرهایش در F بوده و $\dim V = n$. همچنین، A یک نمایش ماتریسی T باشد. در این صورت، مجموعه مقادیر ویژه T از آن ریشه‌های چند جمله‌ای مشخص A که در F اند تشکیل شده است.

برهان. بحث قبل از قضیه ۴.۴ نشان می‌دهد که هر مقدار ویژه T در معادله $\det(\lambda I - A) = 0$ صدق می‌کند و هر ریشه چند جمله‌ای مشخص A که در F باشد یک مقدار ویژه T است.

ماتریس A به انتخاب پایه برای V بستگی دارد، اما مقادیر ویژه T بی‌توسل به یک پایه تعریف شده بودند. از اینرو، مجموعه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخص A باید از انتخاب پایه مستقل باشد. از این بیشتر می‌شود گفت. در یکی از بخشهای آتی ثابت می‌کنیم که چند جمله‌ای مشخص خود از انتخاب پایه مستقل است. حال می‌پردازیم به محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در حالت ابعاد متناهی.

۶.۴ محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در حالت ابعاد متناهی

در حالت ابعاد متناهی، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تبدیل خطی T مقادیر ویژه

و بردارهای ویژه هر نمایش ماتریسی T نیز نامیده می‌شوند. بنابراین، مقدارهای ویژه ماتریس مربعی A ریشه‌های چند جمله‌ای مشخص $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ است. بردارهای ویژه نظیر به مقدار ویژه λ آن بردارهای ناصفر $X = (x_1, \dots, x_n)$ هستند که به صورت ماتریسهای ستونی $n \times 1$ در معادله ماتریسی

$$AX = \lambda X \quad \text{یا} \quad (\lambda I - A)X = O$$

صدق می‌کنند. این یک دستگاه مرکب از n معادله خطی برای مولفه‌های x_1, \dots, x_n است. به محض دانستن λ ، می‌توان بردارهای ویژه را با حل این دستگاه به دست آورد. این امر را با سه مثال که کیفیات مختلفی را نشان می‌دهند توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. ماتریس با مقدارهای ویژه متمایز. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

دارای چند جمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

است؛ در نتیجه، سه مقدار ویژه متمایز وجود دارند: 1 ، -1 ، و 3 . برای یافتن بردارهای ویژه نظیر به $\lambda = 1$ ، دستگاه $AX = X$ ، یا

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

را حل می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$2x_1 + x_2 + x_3 = x_1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = x_2$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 = x_3,$$

که می‌توان آن را به صورت

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

نوشت. با افزودن معادلات اول و سوم خواهیم داشت $x_3 = 0$ ؛ و در این صورت، هر سه معادله به $x_1 + x_2 = 0$ تحویل می‌شوند. بنابر این، بردارهای ویژه نظیر به $\lambda = 1$ عبارتند از $X = t(1, -1, 0)$ ، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است.

با محاسباتی مشابه، بردارهای ویژه $X = t(0, 1, -1)$ نظیر به $\lambda = -1$ ، و $X = t(2, 3, -1)$ نظیر به $\lambda = 3$ ، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است، را خواهیم یافت. چون مقادیر ویژه متمایزند، بردارهای ویژه نظیر، یعنی $(1, -1, 0)$ ، $(0, 1, -1)$ ، و $(2, 3, -1)$ ، مستقل می‌باشند. نتایج را می‌توان در یک جدول به صورت زیر خلاصه کرد. در ستون سوم بعد فضای ویژه $E(\lambda)$ را قید کرده‌ایم.

مقدار ویژه λ	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
1	$t(1, -1, 0), t \neq 0$	1
-1	$t(0, 1, -1), t \neq 0$	1
3	$t(2, 3, -1), t \neq 0$	1

مثال ۲. ماتریس با مقادیر ویژه مکرر. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

دارای چند جمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

است. مقادیر ویژه عبارتند از 2، 2، و 4. (ذکر مقدار ویژه 2 دوبرابر برای

و بردارهای ویژه هر نمایش ماتریسی T نیز نامیده می‌شوند. بنابراین، مقدارهای ویژه ماتریس مربعی A ریشه‌های چند جمله‌ای مشخص $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ است. بردارهای ویژه نظیر به مقدار ویژه λ آن بردارهای ناصفر $X = (x_1, \dots, x_n)$ هستند که به صورت ماتریسهای ستونی $n \times 1$ در معادله ماتریسی

$$(\lambda I - A)X = 0 \quad \text{یا} \quad AX = \lambda X$$

صدق می‌کنند. این یک دستگاه مرکب از n معادله خطی برای مولفه‌های x_1, \dots, x_n است. به محض دانستن λ ، می‌توان بردارهای ویژه را با حل این دستگاه به دست آورد. این امر را با سه مثال که کیفیات مختلفی را نشان می‌دهند توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. ماتریس با مقدارهای ویژه متمایز. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

دارای چند جمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

است؛ در نتیجه، سه مقدار ویژه متمایز وجود دارند: 1 ، -1 ، و 3 . برای یافتن بردارهای ویژه نظیر به $\lambda = 1$ ، دستگاه $AX = X$ ، یا

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

را حل می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$2x_1 + x_2 + x_3 = x_1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = x_2$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 = x_3,$$

که می‌توان آن را به صورت

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

نوشت. با افزودن معادلات اول و سوم خواهیم داشت $x_3 = 0$ ؛ و در این صورت، هر سه معادله به $x_1 + x_2 = 0$ تحویل می‌شوند. بنابراین، بردارهای ویژه نظیر به $\lambda = 1$ عبارتند از $X = t(1, -1, 0)$ ، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است.

با محاسباتی مشابه، بردارهای ویژه $X = t(0, 1, -1)$ نظیر به $\lambda = -1$ ، و $X = t(2, 3, -1)$ نظیر به $\lambda = 3$ ، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است، را خواهیم یافت. چون مقادیر ویژه متمایزند، بردارهای ویژه نظیر، یعنی $(1, -1, 0)$ ، $(0, 1, -1)$ ، و $(2, 3, -1)$ ، مستقل می‌باشند. نتایج را می‌توان در یک جدول به صورت زیر خلاصه کرد. در ستون سوم بعد فضای ویژه $E(\lambda)$ را قید کرده‌ایم.

<u>مقدار ویژه λ</u>	<u>بردارهای ویژه</u>	<u>$\dim E(\lambda)$</u>
1	$t(1, -1, 0), t \neq 0$	1
-1	$t(0, 1, -1), t \neq 0$	1
3	$t(2, 3, -1), t \neq 0$	1

مثال ۲. ماتریس با مقادیر ویژه مکرر. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

دارای چند جمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

است. مقادیر ویژه عبارتند از 2، 2، و 4. (ذکر مقدار ویژه 2 دوبار برای

تاکید در آن است که ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای مشخص می‌باشد. برای یافتن بردارهای ویژه نظیر به $\lambda = 2$ ، دستگاه $AX = 2X$ را حل می‌کنیم، که به دستگاه

$$-x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

تحویل می‌شود. این دستگاه دارای جواب $x_2 = x_3 = -x_1$ است؛ در نتیجه، بردارهای ویژه نظیر به $\lambda = 2$ عبارتند از $t(-1, 1, 1)$ ، که در آنها $t \neq 0$. بهمین نحو، بردارهای ویژه $t(1, -1, 1)$ ، نظیر به مقدار ویژه $\lambda = 4$ ، را به دست می‌آوریم. نتایج را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

مقدار ویژه	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
2, 2	$t(-1, 1, 1), t \neq 0$	1
4	$t(1, -1, 1), t \neq 0$	1

مثال ۳. ماتریس دیگر با مقدارهای ویژه مکرر. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص $(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 7)$ است. وقتی $\lambda = 7$ ، دستگاه $AX = 7X$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$5x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0.$$

این معادله دارای جواب $x_2 = 2x_1, x_3 = 3x_1$ است؛ در نتیجه، بردارهای ویژه نظیر به $\lambda = 7$ عبارتند از $t(1, 2, 3)$ ، که در آنها $t \neq 0$. به‌ازای مقدار ویژه $\lambda = 1$ ، دستگاه $AX = X$ تکرار سه بار معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

است. برای حل این معادله می‌توان فرض کرد $x_1 = a, x_2 = b$ ، که در آنها a و b

دلخواهند ، و سپس $x = -a - b$ را اختیار نمود . لذا ، هر بردار ویژه نظیر به $\lambda = 1$ به شکل

$$(a, b, -a - b) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$$

است ، که در آن $a \neq 0$ یا $b \neq 0$. این یعنی بردارهای $(1, 0, -1)$ و $(0, 1, -1)$ یک پایه برای $E(1)$ تشکیل می دهند . بنابراین ، وقتی $\lambda = 1$ ، $\dim E(\lambda) = 2$. نتایج را می توان به صورت زیر خلاصه کرد :

<u>مقدار ویژه</u>	<u>بردارهای ویژه</u>	<u>$\dim E(\lambda)$</u>
7	$t(1, 2, 3), t \neq 0$	1
1, 1	$a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$ و a و b هر دو 0 نیستند	2

توجه کنید که در اس مثال سه بردار ویژه مستقل ولی فغظ دو مقدار ویژه متمایز وجود دارند .

۷.۴ اثریک ماتریس

فرض کنیم $f(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخص یک ماتریس $n \times n$ مانند A باشد . n ریشه $f(\lambda)$ را با $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ نشان می دهیم ، بطوری که هر ریشه به قدر ضریب تکرارش آمده است . در این صورت ، تجزیه

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

را خواهیم داشت . می توان $f(\lambda)$ را برحسب توانهای نزولی از λ به صورت زیر نیز نوشت :

$$f(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

از مقایسه این با شکل تجزیه شده معلوم می شود که جمله ثابت c_0 و ضریب λ^{n-1} از فرمولهای

$$c_{n-1} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \text{ و } c_0 = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

به دست می آیند . چون نیز داریم $c_0 = (-1)^n \det A$ ، ملاحظه می شود که

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A.$$

یعنی ، حاصل ضرب ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص A مساوی دترمینان A است .

مجموع ریشه‌های $f(\lambda)$ اثر A نامیده و با $\text{tr } A$ نموده می شود . لذا ، طبق تعریف ،

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

ضریب λ^{n-1} از رابطه $c_{n-1} = -\text{tr } A$ به دست می‌آید. همچنین، می‌توان این ضریب را از شکل دترمینانی $f(\lambda)$ حساب کرد و به دست آورد که

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \dots + a_{nn}).$$

(اثبات این فرمول در تمرین ۱۲ از بخش ۸.۴ خواسته شده است). دو فرمول برای c_{n-1} نشان می‌دهند که

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

یعنی، اثر A مساوی مجموع عناصر قطری A نیز هست.

چون محاسبهٔ مجموع عناصر قطری آسان است، می‌توان از آن به عنوان یک امتحان عددی در محاسبات مقدارهای ویژه استفاده کرد. خواص دیگر اثر در مجموعه تمرینات زیر توصیف شده‌اند.

۸.۴ تمرین

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه هرک از ماتریسهای تمرینات ۱ تا ۳ را معین کنید. همچنین، بازای هر مقدار ویژه λ ، بعد فضای ویژه $E(\lambda)$ را محاسبه نمایید.

$$1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\bar{1}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (-), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\bar{1}), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (t)$$

$$2. \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}, \quad a > 0, b > 0$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

۴. ماتریسهای

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

در نظریهٔ مکانیک کوانتمی چرخش الکترون می‌آیند و، به افتخار ولفگانگ پاولی^۱

(۱۹۵۸ - ۱۹۵۰) فیزیکدان، ماتریسهای چرخش پاولی سامیده می شوند. تحقیق کنید که همه این ماتریسها دارای مقدارهای ویژه 1 و -1 هستند. سپس، تمام ماتریسهای 2×2 با درایه های مختلط که دارای دو مقدار ویژه 1 و -1 هستند را مشخص نمایید.

۵. جميع ماتریسهای 2×2 با درایه های حقیقی را معین کنید که مقدارهای ویژه آنها (\bar{A}) حقیقی و متمایز باشند؛ (B) حقیقی و مساوی باشند؛ (P) مزدوج مختلط باشند.

۶. با این فرض که بردارهای $(1, 1, 1)$ ، $(1, 0, -1)$ ، و $(1, -1, 0)$ بردارهای ویژه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

هستند، a, b, c, d, e, f را معین نمایید.

۷. مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه هر یک از ماتریسهای زیر را حساب کنید. همچنین، بعد فضای ویژه $E(\lambda)$ را به ازای هر مقدار ویژه λ محاسبه نمایید:

$$\cdot \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} (پ) : \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix} (ب) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix} (\bar{A})$$

۸. مقدارهای ویژه هر یک از پنج ماتریس زیر را حساب کنید:

$$\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (پ) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (ب) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\bar{A})$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (ث) : \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} (ت)$$

این ماتریسها را، به افتخار پیل دیراک^۱ (۱۹۰۲ -)، فیزیکدان انگلیسی، ماتریسهای دیراک می نامند. این ماتریسها در حل معادله نسبی موج در مکانیک کوانتوم ظاهر می شوند.

۹. هرگاه A و B ماتریسهای $n \times n$ باشند، و B یک ماتریس قطری باشد، (به استقرا) ثابت کنید که در مینان $f(\lambda) = \det(\lambda B - A)$ یک چند جمله ای از λ است، بطوری که $f(0) = (-1)^n \det A$ و ضریب λ^n مساوی حاصل ضرب درایه های قطری B می باشد.

۱۰. ثابت کنید که ماتریس قطری A و ترانسپوز آن A^t یک چند جمله ای مشخص دارند.

۱۱. هرگاه A و B ماتریسهای $n \times n$ باشند، و A نامنفرد باشد، ثابت کنید که AB و BA دارای یک مجموعه از مقدارهای ویژه اند. تذکر. می توان نشان داد که AB و BA ، حتی اگر A منفرد باشد، یک چند جمله ای مشخص دارند، اما لازم نیست این را ثابت کنید.

۱۲. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با چند جمله ای مشخص $f(\lambda)$ باشد. (به استقرا) ثابت کنید که ضریب λ^{n-1} در $f(\lambda)$ مساوی $-\text{tr } A$ است.

۱۳. فرض کنید A و B ماتریسهای $n \times n$ بوده و $\det A = \det B$ و $\text{tr } A = \text{tr } B$. ثابت کنید که اگر $n = 2$ ، A و B یک چند جمله ای مشخص دارند، اما این مطلب در حالت $n > 2$ الزاما درست نیست.

۱۴. هریک از احکام زیر را در مورد اثر ثابت کنید:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\text{tr}(cA) = c \text{tr } A \quad (\bar{\cup})$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (\bar{\cup})$$

$$\text{tr } A^t = \text{tr } A \quad (\bar{\tau})$$

۹.۴ ماتریسهای که یک تبدیل خطی را نمایش می دهند. ماتریسهای متشابه

در این بخش ثابت می کنیم که دو نمایش ماتریسی مختلف یک تبدیل خطی دارای یک چند جمله ای مشخص اند. برای این کار رابطه بین ماتریسهای که نمایشگر یک تبدیل اند را دقیقتر بررسی می کنیم.

به یاد می‌آوریم که نمایشهای ماتریسی چگونه تعریف شده‌اند. فرض کنیم $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی از فضای n بعدی V بتوی فضای m بعدی W باشد. همچنین، (e_1, \dots, e_n) و (w_1, \dots, w_m) بترتیب پایه‌هایی مرتب برای V و W باشند. نمایش ماتریسی T نسبت به این پایه‌ها ماتریس $n \times m$ ای است که ستونهایش از مؤلفه‌های $T(e_1), \dots, T(e_n)$ نسبت به پایه (w_1, \dots, w_m) تشکیل شده است. با انتخاب پایه‌های مختلف نمایشهای ماتریسی مختلف به دست می‌آیند.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $V = W$ ، و برای V و W یک پایه مرتب (e_1, \dots, e_n) اختیار می‌کنیم. فرض کنیم $A = (a_{ik})$ ماتریس T نسبت به این پایه باشد. این یعنی که چنین داریم:

$$(۸۰۴) \quad T(e_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

حال پایه مرتب دیگر (u_1, \dots, u_n) را برای V و W اختیار کرده و فرض می‌کنیم $B = (b_{kj})$ ماتریس T نسبت به این پایه جدید باشد. در این صورت، چنین خواهیم داشت:

$$(۹۰۴) \quad T(u_j) = \sum_{k=1}^n b_{kj} u_k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

چون هر u_j در فضای پیموده شده به وسیله e_1, \dots, e_n است، می‌توان به ازای اسکالرهای c_{kj} چنین نوشت:

$$(۱۰۰۴) \quad u_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} e_k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ماتریس $n \times n$ $C = (c_{kj})$ معین شده به وسیله این اسکالرها نامنفرد است، زیرا تبدیل خطی را نمایش می‌دهد که یک پایه V را بروی پایه دیگر V می‌نگارد. با اعمال T در دو طرف (۱۰۰۴) معادلات زیر را نیز خواهیم داشت:

$$(۱۱۰۴) \quad T(u_j) = \sum_{k=1}^n c_{kj} T(e_k), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

دستگاههای معادلات در (۸۰۴) تا (۱۱۰۴) را می‌توان، با معرفی ماتریسها با درایه‌های برداری، ساده‌تر به شکل ماتریسی نوشت. فرض کنیم

$$U = [u_1, \dots, u_n] \quad \text{و} \quad E = [e_1, \dots, e_n]$$

ماتریسهای سطری $1 \times n$ ی باشند که درایه‌های آنها عنصرهای پایه مورد سوال باشند. در این صورت، مجموعه معادلات در (۱۰.۴) را می‌توان به صورت یک معادله ماتریسی نوشت:

$$U = EC. \quad (12.4)$$

بهین نحو، اگر معرفی کنیم

$$U' = [T(u_1), \dots, T(u_n)] \quad \text{و} \quad E' = [T(e_1), \dots, T(e_n)]$$

معادلات (۸.۴)، (۹.۴) و (۱۱.۴) بترتیب خواهند شد

$$E' = EA, \quad U' = UB, \quad U' = E'C. \quad (13.4)$$

همچنین، از (۱۲.۴) داریم

$$E = UC^{-1}.$$

برای یافتن رابطه بین A و B ، U' را به دو طریق بر حسب U بیان می‌کنیم. از

(۱۳.۴) داریم

$$U' = UB$$

و

$$U' = E'C = EAC = UC^{-1}AC.$$

بنابراین، $UB = UC^{-1}AC$. اما هر درایه در این معادله ماتریسی ترکیبی خطی از بردارهای پایه u_1, \dots, u_n است. چون u_i ها مستقل‌اند، باید داشته باشیم

$$B = C^{-1}AC.$$

بنابراین، قضیه زیر را ثابت کرده‌ام.

قضیه ۶.۴. هرگاه دو ماتریس $n \times n$ ، A و B یک تبدیل خطی T را نمایش دهند، آنگاه ماتریس نامفردی چون C هست بطوری که

$$B = C^{-1}AC.$$

بعلاوه، هرگاه A ماتریس T نسبت به پایه $E = [e_1, \dots, e_n]$ و B ماتریس T نسبت به پایه $U = [u_1, \dots, u_n]$ باشد، آنگاه می‌توان ماتریس نامفرد C را طوری اختیار کرد که دو پایه را برطبق معادله ماتریسی $U = EC$ بهم ربط دهد.

قضیه ۷.۴. فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند که با معادله‌ای به شکل $B = C^{-1}AC$ بهم مربوطند، که در آن C یک ماتریس $n \times n$ نامعرد است. در این صورت، A و B یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند.

برهان. پایه $E = [e_1, \dots, e_n]$ را برای فضای n بعدی V اختیار می‌کنیم. فرض کنیم u_1, \dots, u_n بردارهایی باشد که با معادلات زیر معین می‌شوند:

$$(14.4) \quad u_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} e_k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

که در آن اسکالرهای c_{kj} در پایه‌های C می‌باشند. چون C نامعرد است، یک تبدیل خطی معکوسپذیر را نمایش می‌دهد؛ در نتیجه، $U = [u_1, \dots, u_n]$ نیز یک پایه V است، و داریم $U = EC$.

فرض کنیم T تبدیل خطی باشد که دارای نمایش ماتریسی A نسبت به پایه E است، و S تبدیلی باشد که دارای نمایش ماتریسی B نسبت به پایه U است. در این صورت، چنین خواهیم داشت:

$$(15.4) \quad T(e_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

و

$$(16.4) \quad S(u_j) = \sum_{k=1}^n b_{kj} u_k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

با نشان دادن اینکه به ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$ ، ثابت می‌کنیم که $S = T$. معادلات (۱۵.۴) و (۱۶.۴) را می‌توان ساده‌تر و به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$[T(e_1), \dots, T(e_n)] = EA, \quad [S(u_1), \dots, S(u_n)] = UB.$$

همچنین، با اعمال T بر (۱۴.۴) رابطه $T(u_j) = \sum c_{kj} T(e_k)$ به دست می‌آید، یا اینکه

$$[T(u_1), \dots, T(u_n)] = EAC.$$

اما داریم

$$UB = ECB = EC(C^{-1}AC) = EAC,$$

که نشان می‌دهد که به ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$. بنابراین، به ازای هر x در V ،

ماتریسهای سطری $n \times 1$ ی باشند که درایه‌های آنها عنصرهای پایه مورد سؤال باشند. در این صورت، مجموعه معادلات در (۱۰.۴) را می‌توان به صورت یک معادله ماتریسی نوشت:

$$U = EC. \quad (12.4)$$

به همین نحو، اگر معرفی کنیم

$$U' = [T(u_1), \dots, T(u_n)] \quad \text{و} \quad E' = [T(e_1), \dots, T(e_n)]$$

معادلات (۸.۴)، (۹.۴) و (۱۱.۴) بترتیب خواهند شد

$$E' = EA, \quad U' = UB, \quad U' = E'C. \quad (13.4)$$

همچنین، از (۱۲.۴) داریم

$$E = UC^{-1}.$$

برای یافتن رابطه بین A و B ، U' را به دو طریق بر حسب U بیان می‌کنیم. از

(۱۳.۴) داریم

$$U' = UB$$

و

$$U' = E'C = EAC = UC^{-1}AC.$$

بنابراین، $UB = UC^{-1}AC$. اما هر درایه در این معادله ماتریسی ترکیبی خطی از بردارهای پایه u_1, \dots, u_n است. چون u_i ها مستقل اند، باید داشته باشیم

$$B = C^{-1}AC.$$

بنابراین، قضیه زیر را ثابت کرده‌ام.

قضیه ۶.۴. هرگاه دو ماتریس $n \times n$ ، A و B یک تبدیل خطی T را نمایش دهند، آنگاه ماتریس نامنفردی چون C هست بطوری که

$$B = C^{-1}AC.$$

بعلاوه، هرگاه A ماتریس T نسبت به پایه $E = [e_1, \dots, e_n]$ و B ماتریس T نسبت به پایه $U = [u_1, \dots, u_n]$ باشد، آنگاه می‌توان ماتریس نامنفرد C را طوری اختیار کرد که دو پایه را برطبق معادله ماتریسی $U = EC$ بهم ربط دهد.

عکس قضیه ۶.۴ نیز درست است.

قضیه ۷.۴. فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند که با معادله‌ای به شکل $B = C^{-1}AC$ بهم مربوطند، که در آن C یک ماتریس $n \times n$ نامعزود است. در این صورت، A و B یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند.

برهان. پایه $E = [e_1, \dots, e_n]$ را برای فضای n بعدی V اختیار می‌کنیم. فرض کنیم u_1, \dots, u_n بردارهایی باشد که با معادلات زیر معین می‌شوند:

$$(14.4) \quad u_j = \sum_{k=1}^n c_{kj} e_k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

که در آن اسکالرهای c_{kj} درایه‌های C می‌باشند. چون C نامعزود است، یک تبدیل خطی معکوسپذیر را نمایش می‌دهد؛ در نتیجه، $U = [u_1, \dots, u_n]$ نیز یک پایه V است، و داریم $U = EC$.

فرض کنیم T تبدیل خطی باشد که دارای نمایش ماتریسی A نسبت به پایه E است، و S تبدیلی باشد که دارای نمایش ماتریسی B نسبت به پایه U است. در این صورت، چنین خواهیم داشت:

$$(15.4) \quad T(e_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

و

$$(16.4) \quad S(u_j) = \sum_{k=1}^n b_{kj} u_k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

با نشان دادن اینکه به ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$ ، ثابت می‌کنیم که $S = T$. معادلات (۱۵.۴) و (۱۶.۴) را می‌توان ساده‌تر و به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$[T(e_1), \dots, T(e_n)] = EA, \quad [S(u_1), \dots, S(u_n)] = UB.$$

همچنین، با اعمال T بر (۱۴.۴) رابطه $T(u_j) = \sum c_{kj} T(e_k)$ به دست می‌آید، یا اینکه

$$[T(u_1), \dots, T(u_n)] = EAC.$$

اما داریم

$$UB = ECB = EC(C^{-1}AC) = EAC,$$

که نشان می‌دهد که به ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$. بنابراین، به ازای هر x در V ،

$T(x) = S(x)$ ؛ در نتیجه، $T = S$. به عبارت دیگر، ماتریسهای A و B یک تبدیل خطی را نمایش می دهند.

تعریف. دو ماتریس $n \times n$ مانند A و B را متشابه گویند در صورتی که ماتریس نامنفردی چون C باشد بطوری که $B = C^{-1}AC$.

با تلفیق فضای ۶۰۴ و ۷۰۴ می توان قضیه زیر را به دست آورد.

قضیه ۸۰۴. دو ماتریس $n \times n$ متشابه اند اگر و فقط اگر هر دو یک تبدیل خطی را نمایش دهند.

ماتریسهای متشابه در خواص زیادی سهیم هستند. مثلاً، دارای یک دترمینان اند،

زیرا

$$\det(C^{-1}AC) = \det(C^{-1})(\det A)(\det C) = \det A.$$

این خاصیت قضیه زیر را به ما خواهد داد.

قضیه ۹۰۴. ماتریسهای متشابه دارای یک چندجمله ای مشخص، و لذا مقدارهای ویژه مساوی، می باشند.

برهان. اگر A و B متشابه باشند، ماتریس نامنفردی چون C هست بطوری که

$$B = C^{-1}AC \quad \text{بنابر این، داریم}$$

$$\lambda I - B = \lambda I - C^{-1}AC = \lambda C^{-1}IC - C^{-1}AC = C^{-1}(\lambda I - A)C.$$

این نشان می دهد که $\lambda I - B$ و $\lambda I - A$ متشابه اند؛ در نتیجه،

$$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A).$$

قضایای ۸۰۴ و ۹۰۴ با هم نشان می دهند که تمام نمایشهای ماتریسی تبدیل خطی

T یک چندجمله ای مشخص دارند. این چندجمله ای چندجمله ای مشخص T نیز نامیده

می شود.

قضیه بعدی ترکیبی است از قضایای ۵.۴، ۲.۴، و ۶.۴ در قضیه ۱۰.۴،
 F یا میدان حقیقی \mathbf{R} است یا میدان مختلط \mathbf{C} .

قضیه ۱۰.۴. فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ تبدیلی خطی باشد، که در آن V اسکالرهایش
 در F بوده و $\dim V = n$. همچنین، چند جمله‌ای مشخص T دارای ریشه‌های متمایز
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ در F باشد. در این صورت، خواهیم داشت

(آ) بردارهای ویژه u_1, \dots, u_n نظیر یک پایه برای V تشکیل می‌دهند؛

(ب) ماتریس T نسبت به پایه مرتب $U = [u_1, \dots, u_n]$ ماتریس قطری Λ است که
 مقادیر ویژه را به عنوان درایه‌های قطری دارد:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n);$$

(پ) هرگاه A ماتریس T نسبت به پایه دیگر $E = [e_1, \dots, e_n]$ باشد، آنگاه

$$\Lambda = C^{-1}AC,$$

که در آن C ماتریس نامنفردی است که دو پایه را با معادله

$$U = EC$$

به هم مربوط می‌کند.

برهان. طبق قضیه ۵.۴، هر ریشه λ_i یک مقدار ویژه است. چون n ریشه متمایز
 وجود دارد، قضیه ۲.۴ می‌گوید که بردارهای ویژه u_1, \dots, u_n نظیر مستقل می‌باشند.
 لذا، تشکیل یک پایه برای V می‌دهند. این (آ) را ثابت می‌کند. چون $T(u_i) = \lambda_i u_i$ ،
 ماتریس T نسبت به U ماتریس قطری Λ است، که (ب) را ثابت می‌کند. برای اثبات
 (پ) از قضیه ۶.۴ استفاده می‌کنیم.

تذکره. ماتریس نامنفرد C در قضیه ۱۰.۴ یک ماتریس قطری ساز نامیده می‌شود.
 هرگاه (e_1, \dots, e_n) پایه بردارهای یکبه‌یک مختصات (I_1, \dots, I_n) باشد. آنگاه معادله
 $U = EC$ در قضیه ۱۰.۴ نشان می‌دهد که ستون k ام C از مولفه‌های بردار ویژه u_k
 نسبت به (I_1, \dots, I_n) تشکیل شده است.

هرگاه مقادیر ویژه A متمایز باشند، A با یک ماتریس قطری متشابه است. هرگاه
 مقادیر ویژه متمایز نباشند، A باز هم ممکن است متشابه یک ماتریس قطری باشد. این

رخ می‌دهد اگر فقط اگر k بردار ویژه مسنقل نظیر به هر مقدار ویژه با ضریب تکرار k وجود داشته باشد. مثالهایی در مجموعه تمرینات زیر خواهند آمد.

۱۰۰۴ تمرین

۱. ثابت کنید که ماتریسهای $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ دارای مقدارهای ویژه مساوی‌اند اما متشابه نیستند.

۲. در هر حالت، ماتریس نامنفرد C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد با توضیح دهید چرا چنین C ای وجود ندارد:

$$(\bar{A}) : A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (-) : A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad (پ) : A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(ت) : A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۳. سه پایه در صفحه داده شده است. یک نقطه نسبت به این پایه‌ها بترتیب دارای مولفه‌های (x_1, x_2) ، (y_1, y_2) ، و (z_1, z_2) است. فرض کنید $[x_1, x_2]A = [y_1, y_2]$ ، $[z_1, z_2] = [x_1, x_2]B$ و $[z_1, z_2] = [y_1, y_2]C$ ، که در آنها A, B, C ماتریسهایی 2×2 می‌باشند. C را برحسب A و B بیان کنید.

۴. در هر حالت، نشان دهید که مقدارهای ویژه A متمایز نیستند، اما A سه بردار ویژه مستقل دارد. ماتریس نامنفرد C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد:

$$(\bar{A}) : A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (-) : A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵. نشان دهید که هیچک از ماتریسهای زیر با یک ماتریس قطری متشابه نیست، اما هریک با یک ماتریس مثلثی شکل به صورت $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ ، که در آن λ یک مقدار ویژه است، متشابه می‌باشد:

$$(\bar{A}) : \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (-) : \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

۶. مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ را تعیین کنید و،

بدینوسیله، نشان دهید که این ماتریس با یک ماتریس قطری متشابه نیست.

۷. (آ) ثابت کنید ماتریس مربعی A نامنفرد است اگر و فقط اگر 0 یک مقدار ویژه A نباشد.

(ب) ثابت کنید که اگر A نامنفرد باشد، مقدارهای ویژه A^{-1} معکوسهای مقادیر ویژه A می‌باشند.

۸. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد بطوری که $A^2 = -I$ ، و احکام زیر را در مورد A ثابت کنید:

(آ) A نامنفرد است؛

(ب) n زوج است؛

(پ) A مقدار ویژه حقیقی ندارد؛

(ت) $\det A = 1$

مقدارهای ویژه عملگرهایی

که بر فضاهای اقلیدسی :

عمل می کنند

۱.۵ مقدارهای ویژه و ضربهای داخلی

در این فصل چند خاصیت مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه، تبدیلاتی خطی که بر فضاهای اقلیدسی، یعنی فضاهایی خطی که ضرب داخلی دارند، عمل می کنند را توصیف می کنیم. ابتدا خواص اساسی ضربهای داخلی را یادآور می شویم.

در یک فضای اقلیدسی حقیقی، حاصل ضرب داخلی (x, y) دو عنصر x و y عددی است حقیقی که دارای خواص زیر است :

$$(1) \quad (x, y) = (y, x) \quad (\text{تقارن}) ;$$

$$(2) \quad (x + z, y) = (x, y) + (z, y) \quad (\text{خطی}) ;$$

$$(3) \quad (cx, y) = c(x, y) \quad (\text{همگنی}) ;$$

$$(4) \quad \text{اگر } x \neq 0, \quad (x, x) > 0 \quad (\text{مثبتی}).$$

در یک فضای اقلیدسی مختلط، حاصل ضرب داخلی عددی است مختلط و برخوردار

از همان خواص، با این تفاوت که تقارن با تقارن هرمیتی عوض می شود :

$$(1') \quad (x, y) = \overline{(y, x)},$$

که در آن خط افقی نشانگر مزدوج مختلط است. در (۳) اسکالر c مختلط است. از (۱') و (۳) خواهیم داشت

$$(3') \quad (x, cy) = \bar{c}(x, y),$$

مبین آنکه اسکالرها، وقتی از سازه دوم خارج می شوند، مزدوج خواهند شد. با فرض $x = y$ در (۱')، می بینیم که (x, x) حقیقی است؛ در نتیجه، خاصیت (۴) در حالتی که فضا مختلط است معنی دارد.

وقتی اصطلاح فضای اقلیدسی را بدون توضیح اضافی به کار می‌بریم فرض این است که فضا می‌تواند هم حقیقی و هم مختلط باشد. با آنکه اغلب کاربردهای ما در فضاهای با بعد متناهی است، این فید را در آغاز لازم نمی‌دانیم. اولین قضیه نشان می‌دهد که مقادیرهای ویژه را (در صورت وجود) می‌توان برحسب حاصل ضرب داخلی بیان کرد.

قضیه ۱۰۵. فرض کنیم E یک فضای اقلیدسی بوده، V زیر فضایی از E باشد، و $T: V \rightarrow E$ تبدیلی خطی دارای مقدار ویژه λ با بردار ویژه x باشد. در این صورت، خواهیم داشت

$$(1.5) \quad \lambda = \frac{(T(x), x)}{(x, x)}.$$

برهان. چون $T(x) = \lambda x$ ، داریم

$$(T(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x).$$

و چون $x \neq 0$ ، می‌توان با تقسیم بر (x, x) رابطه (۱۰۵) را به دست آورد.

از معادله (۱۰۵) به آسانی چند خاصیت از مقادیرهای ویژه نتیجه می‌شود. مثلاً، از تقارن هرمیتی ضرب داخلی فرمول لنگه

$$(2.5) \quad \bar{\lambda} = \frac{(x, T(x))}{(x, x)}$$

را برای مزدوج مختلط $\bar{\lambda}$ داریم. از (۱۰۵) و (۲۰۵) می‌بینیم که λ حقیقی است ($\lambda = \bar{\lambda}$) اگر و فقط اگر $(T(x), x)$ حقیقی باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر

$$(T(x), x) = (x, T(x)), \quad x$$

(این شرط در یک فضای اقلیدسی حقیقی بدهانتا "برقرار است). همچنین، λ موهومی محض است ($\lambda = -\bar{\lambda}$) اگر و فقط اگر $(T(x), x)$ موهومی محض باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر

$$(T(x), x) = -(x, T(x)), \quad x$$

۲۰۵ تبدیلات هرمیتی و هرمیتی اریب

در این بخش دو نوع مهم از عملگرهای خطی را که بر فضاهای اقلیدسی عمل می‌کنند معرفی

می‌کنیم. این عملگرها، بسته به اینکه فضای اقلیدسی زمینه ضرب داخلی حقیقی یا مختلط داشته باشد، دو دسته اسم مختلف دارند. در حالت حقیقی، تبدیلیها **متقارن و متقارن اریب** خوانده می‌شوند؛ و در حالت مختلط، آنها را **هرمیتی و هرمیتی اریب** می‌نامند. این تبدیلات در کاربردهای مختلف بسیار ظاهر می‌شوند. مثلاً، عملگرهای هرمیتی بر فضاها با بعد نامتناهی نقش مهمی در مکانیک کوانتم دارند. ما عمدتاً "حالت مختلط را مورد بحث قرار می‌دهیم، زیرا این حالت مشکلات اضافی به بار نخواهد آورد.

تعریف. فرض کنیم E یک فضای اقلیدسی بوده و V زیر فضایی از E باشد. تبدیل خطی $T: V \rightarrow E$ بر V **هرمیتی** نامیده می‌شود اگر که

$$\cdot (T(x), y) = (x, T(y)), \quad V \text{ در } x \text{ و } y$$

عملگر T بر V **هرمیتی اریب** خوانده می‌شود اگر که

$$\cdot (T(x), y) = -(x, T(y)), \quad V \text{ در } x \text{ و } y$$

به عبارت دیگر، عملگر هرمیتی T را می‌توان از یک سازه^۱ یک حاصل ضرب داخلی به سازه^۲ دیگر بدون تغییر مقدار حاصل ضرب انتقال داد، ولی انتقال در یک عملگر هرمیتی اریب علامت حاصل ضرب را تغییر خواهد داد.

تذکره. همانطور که قبلاً ذکر شد، اگر E یک فضای اقلیدسی حقیقی باشد، تبدیلات هرمیتی **متقارن** نیز نامیده می‌شوند؛ تبدیلات هرمیتی اریب **متقارن اریب** نیز نام دارند.

مثال ۱. **تقارن و تقارن اریب در فضای $C(a, b)$.** فرض کنیم $C(a, b)$ فضای تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازه^۳ بسته^۴ $[a, b]$ با ضرب داخلی حقیقی

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

باشد. فرض کنیم V یک زیر فضای $C(a, b)$ باشد. هرگاه $T: V \rightarrow C(a, b)$ یک تبدیل خطی باشد، آنگاه $(f, T(g)) = \int_a^b f(t)Tg(t) dt$ ، که در آن به جای $T(g)(t)$ نوشته‌ایم $Tg(t)$. بنابراین، شرطهای تقارن و تقارن اریب به صورت زیر درمی‌آیند:

$$(۳.۵) \quad \text{اگر } T \text{ متقارن باشد،} \quad \int_a^b \{f(t)Tg(t) - g(t)Tf(t)\} dt = 0$$

و اگر T متقارن اریب باشد، $(۴.۵) \quad \int_a^b \{f(t)Tg(t) + g(t)Tf(t)\} dt = 0$

مثال ۲. ضرب در یک تابع ثابت. در فضای $C(a, b)$ مثال ۱، تابع ثابت p را اختیار و تعریف می‌کنیم $T(f) = pf$ ، یعنی مساوی حاصل ضرب p و f . به ازای این T ، معادله^۶ (۳.۵) برای هر f و g در $C(a, b)$ برقرار است، چونکه انتگرالده^۶ آن صفر است. لذا، ضرب در یک تابع ثابت یک عملگر متقارن می‌باشد.

مثال ۳. عملگر مشتقگیری. در فضای $C(a, b)$ مثال ۱، فرض کنیم V زیر فضای مرکب از تمام توابعی چون f باشد که در بازه^۶ باز (a, b) مشتق پیوسته دارند و در شرط کرانه‌ای $f(a) = f(b)$ نیز صدق می‌کنند. همچنین، $D: V \rightarrow C(a, b)$ عملگر مشتقگیری باشد که با $D(f) = f'$ داده می‌شود. به آسانی ثابت می‌شود که D متقارن اریب است. در این حالت، انتگرالده در (۴.۵) مشتق حاصل ضرب fg است؛ در نتیجه، انتگرال مساوی

$$\int_a^b (fg)'(t) dt = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

می‌باشد. چون هر دو f و g در شرط کرانه‌ای صدق می‌کنند، داریم $f(b)g(b) - f(a)g(a) = 0$. لذا، شرط کرانه‌ای تقارن اریب D را ایجاب خواهد کرد. تنها توابع ویژه در زیر فضای V توابع ثابت هستند. اینها به مقدار ویژه^۶ 0 تعلق دارند.

مثال ۴. عملگرهای اشتروم^۱ - لیوویل^۲. این مثال در نظریه^۶ معادلات دیفرانسیل مرتبه^۶ دوم خطی اهمیت دارد. فضای $C(a, b)$ مثال ۱ را دیگر بار به کار برده، فرض می‌کنیم V زیر فضای تمام f هایی باشد که در $[a, b]$ مشتق دوم پیوسته دارد و نیز در دو شرط کرانه‌ای

$$(۵.۵) \quad p(a)f(a) = 0, \quad p(b)f(b) = 0$$

صدق می‌کند، که در آنها p یک تابع ثابت در $C(a, b)$ با مشتق پیوسته بر $[a, b]$ است. فرض کنیم q تابع ثابت دیگری در $C(a, b)$ بوده و $T: V \rightarrow C(a, b)$ عملگری باشد که با معادله^۶

$$T(f) = (pf)' + qf$$

تعریف می شود. این عملگر را عملگر اشتروم - لیوویل می نامند. برای آزمودن تقارن آن، ملاحظه می کنیم که $fT(g) - gT(f) = f(pg)' - g(pf)'$ و (۳.۵) و انتگرالگیری از $\int_a^b f \cdot (pg)' dt$ و $\int_a^b g \cdot (pf)' dt$ به طریقه جزء به جزء، درمی یابیم که

$$\int_a^b \{fT(g) - gT(f)\} dt = fpg' \Big|_a^b - \int_a^b pg'f' dt - gpf' \Big|_a^b + \int_a^b pf'g' dt = 0,$$

زیرا f و g هر دو در شرایط کرانه‌های (۵.۵) صدق می کنند. لذا، T بر V متقارن می باشد. تابعهای ویژه T ، f های ناصفری هستند که، به ازای λ ای حقیقی، در یک معادله دیفرانسیل به شکل

$$(pf)' + qf = \lambda f$$

بر $[a, b]$ ، و نیز در شرایط کرانه‌های (۵.۵)، صدق می کنند.

۳.۵ مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه عملگرهای هرمیتی و هرمیتی اریب
با توجه به مفادیر ویژه، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲.۵. فرض کنیم T مقدار ویژه λ را دارا باشد. در این صورت، خواهیم داشت
(آ) هرگاه T هرمیتی باشد، λ حقیقی است: $\lambda = \bar{\lambda}$ ؛
(ب) هرگاه T هرمیتی اریب باشد، λ موهومی محض می باشد: $\lambda = -\bar{\lambda}$.

برهان. فرض کنیم x یک بردار ویژه نظیر به λ باشد. در این صورت، داریم

$$\bar{\lambda} = \frac{(x, T(x))}{(x, x)} \quad \text{و} \quad \lambda = \frac{(T(x), x)}{(x, x)}$$

هرگاه T هرمیتی باشد، داریم $(T(x), x) = (x, T(x))$ ؛ در نتیجه، $\lambda = \bar{\lambda}$. هرگاه T هرمیتی اریب باشد، خواهیم داشت $(T(x), x) = -(x, T(x))$ ؛ در نتیجه، $\lambda = -\bar{\lambda}$.

تذکر. اگر T متقارن باشد، قضیه ۲.۵ چیزنوی در باب مفادیر ویژه T نمی گوید، چرا که اگر حاصل ضرب داخلی حقیقی باشد، تمام مقدارهای ویژه باید حقیقی باشند. اگر T متقارن اریب باشد، مقدارهای ویژه T باید هم حقیقی و هم موهومی محض باشند.

بنابراین، تمام مقادیر ویژه، یک عملگر متقارن اریب (در صورت وجود) باید صفر باشند.

۴.۵. تعامد بردارهای ویژه نظیر به مقدارهای ویژه متمایز

مقادیر ویژه متمایز هر تبدیل خطی (طبق قضیه ۲.۴) نظیرند به بردارهای ویژه مستقل. در مورد تبدیلات هرمیتی و هرمیتی اریب سخن بیشتر است:

۳.۵. فرض کنیم T یک تبدیل هرمیتی یا هرمیتی اریب بوده، و λ و μ مقدارهای ویژه متمایز T با بردارهای ویژه نظیر x و y باشند. در این صورت، x و y متعامد می‌باشند؛ یعنی، $(x, y) = 0$.

برهان. می‌نویسیم $T(x) = \lambda x$ ، $T(y) = \mu y$ ، و دو حاصل ضرب داخلی $(T(x), y)$ و $(x, T(y))$ را با هم مقایسه می‌کنیم. داریم $(T(x), y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ و $(x, T(y)) = (x, \mu y) = \bar{\mu}(x, y)$. این، در صورتی که T هرمیتی باشد، نتیجه می‌دهد که $\lambda(x, y) = \bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y)$ ، زیرا $\mu = \bar{\mu}$. بنابراین، $(x, y) = 0$ ، زیرا $\lambda \neq \mu$. اگر T هرمیتی اریب باشد، خواهیم داشت $\lambda(x, y) = -\bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y)$ ، که باز ایجاب می‌کند که $(x, y) = 0$.

مثال. قضیه ۳.۵ را در مورد توابع ناصغری که در یک معادله دیفرانسیل به شکل

$$(pf') + qf = \lambda f \quad (۶.۵)$$

بر بازه‌های چون $[a, b]$ صادق بوده و در شرایط کرانه‌ای $p(a)f(a) = p(b)f(b) = 0$ صدق می‌کنند به کار می‌بریم. نتیجه می‌شود که هر دو جواب f و g نظیر به مقادیر متمایز از λ متعامدند. مثلاً، معادله دیفرانسیل حرکت توافقی ساده را در نظر می‌گیریم:

$$f'' + k^2 f = 0$$

بر بازه $[0, \pi]$ ، که در آن $k \neq 0$. این معادله به شکل (۶.۵) است با فرض $p = 1$ ، $q = 0$ ، و $\lambda = -k^2$. همه جوابها از $f(t) = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$ به دست می‌آیند. شرط کرانه‌ای $f(0) = 0$ ایجاب می‌کند که $c_1 = 0$. شرط کرانه‌ای دوم، یعنی $f(\pi) = 0$ ، ایجاب می‌کند که $c_2 \sin k\pi = 0$. چون در یک جواب ناصفر $c_2 \neq 0$ ، باید داشته باشیم $\sin k\pi = 0$ ، به این معنی که k یک عدد صحیح می‌باشد. به عبارت دیگر، جوابهای

ناصر صادق در شرایط کرانه‌ای وجود دارند اگر و فقط اگر k یک عدد صحیح باشد. این جوابها عبارتند از $f(t) = \sin nt, n = \pm 1, \pm 2, \dots$. حال شرط تعامد ناشی از قضیه ۳.۵ به رابطه آشنای

$$\int_0^{\pi} \sin nt \sin mt dt = 0,$$

در صورتی که m^2 و n^2 اعداد صحیح متمایزی باشند، تبدیل می‌شود.

۵.۵ تمرین

۱. فرض کنید E یک فضای اقلیدسی، V یک زیر فضا، و $T: V \rightarrow E$ یک تبدیل خطی معلوم باشد. همچنین، λ یک اسکالر و x عنصر ناصفری از V باشد. ثابت کنید λ یک مقدار ویژه T با x به عنوان یک بردار ویژه است اگر و فقط اگر به ازای هر y در E ، $(T(x), y) = \lambda(x, y)$.
۲. فرض کنید به ازای هر x در فضای خطی V ، $T(x) = cx$ ، که در آن c یک اسکالر ثابت است. ثابت کنید T در صورتی متقارن است که V یک فضای اقلیدسی حقیقی باشد.
۳. فرض کنید $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل هرمیتی باشد. (\bar{A}) ثابت کنید T^n به ازای هر عدد صحیح و مثبت n هرمیتی است، و T^{-1} در صورتی که T معکوسپذیر باشد هرمیتی می‌باشد.
- (ب) اگر T هرمیتی اریب باشد، در باب T^n و T^{-1} چه نتایجی می‌توان گرفت؟
۴. فرض کنید $T_2: V \rightarrow E$ و $T_1: V \rightarrow E$ دو تبدیل هرمیتی باشند. (\bar{A}) ثابت کنید $aT_1 + bT_2$ به ازای هر دو اسکالر حقیقی a و b هرمیتی است. (ب) ثابت کنید حاصل ضرب (ترکیب) T_1T_2 در صورتی که T_1 و T_2 تعویض شوند هرمیتی است؛ یعنی، هرگاه $T_1T_2 = T_2T_1$.
۵. فرض کنید $V = V_3(\mathbb{R})$ با ضرب نقطه‌ای معمولی به عنوان ضرب داخلی باشد. همچنین، T انعکاس نسبت به صفحه xy باشد؛ یعنی، $T(j) = j$ ، $T(i) = -i$ ، و $T(k) = -k$. ثابت کنید T متقارن است.
۶. فرض کنید $C(0, 1)$ فضای خطی حقیقی تمام توابع پیوسته حقیقی بر $[0, 1]$ با ضرب داخلی

همچنین ، V زیرفضای تمام f هایی باشد که $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ فرض کنید $T: V \rightarrow C(0, 1)$ عملگر انتگرالگیری باشد که با $\int_0^1 f(t) dt = 0$ $Tf(x) = \int_0^x f(t) dt$ تعریف می شود . ثابت کنید T متقارن اریب می باشد .

۷ . فرض کنید V فضای اقلیدسی حقیقی تمام چند جمله ایهای حقیقی با ضرب داخلی $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ باشد . معین کنید از تبدیلات $T: V \rightarrow V$ زیر کدامها متقارن کدامها متقارن اریب اند :

$$(A) Tf(x) = f(-x) \quad (-) \quad Tf(x) = f(x)f(-x) \quad (\varphi) \quad Tf(x) = f(x) + f(-x)$$

$$(B) Tf(x) = f(x) - f(-x) \quad (?)$$

۸ . به مثال ۴ در بخش ۲.۵ بازگشته ، ضرب داخلی را به صورت

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)w(t) dt$$

تغییر دهید ، که در آن w یک تابع ثابت مثبت در $C(a, b)$ است ، و عملگر اشتروم - لیوویل T را به صورت

$$T(f) = \frac{(pf')' + qf}{w}$$

تعریف کنید . ثابت کنید که عملگر تغییر یافته بر زیر فضای V متقارن است .

۹ . فرض کنید V یک زیرفضای فضای اقلیدسی مختلط E باشد . همچنین $T: V \rightarrow E$ یک تبدیل خطی بوده ، و تابع اسکالر Q را بر V به صورت زیر تعریف کنید :

بمازای هر x در V ، $Q(x) = (T(x), x)$.

(A) ثابت کنید که اگر T بر V هرمیتی باشد ، $Q(x)$ بمازای هر x حقیقی می باشد .
 (B) ثابت کنید که اگر T هرمیتی اریب باشد ، $Q(x)$ بمازای هر x موهومی محض است .

(C) ثابت کنید بمازای هر اسکالر r ، $Q(rx) = r\bar{r}Q(x)$.

(D) ثابت کنید که $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + (T(x), y) + (T(y), x)$ ، و فرمول نظیر را برای $Q(x+iy)$ پیدا نمایید .

(E) ثابت کنید که اگر بمازای هر x ، $Q(x) = 0$ ، بمازای هر x ، $T(x) = 0$.

(F) ثابت کنید که اگر بمازای هر x ، $Q(x)$ حقیقی باشد ، T هرمیتی می باشد .

[راهنمایی . از اینکه $Q(x+iy)$ بمازای هر اسکالر r مساوی مزدوجش است استفاده

[نماید .

۱۰ . این تمرین نشان می‌دهد که چند جمله‌ایهای لژاندر (که در بخش ۱۴۰۱ معرفی شدند) تابعهای ویژه یک عملگر اشتروم - لیوویل هستند . چند جمله‌ایهای لژاندر با معادلات زیر تعریف می‌شوند :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} f_n^{(n)}(t) \text{ ، که در آن } f_n(t) = (t^2 - 1)^n .$$

$$(A) \text{ تحقیق کنید که } 2nt f_n'(t) = (t^2 - 1) f_n''(t) .$$

(ب) با مشتگیری از معادله قسمت (A) $n + 1$ بار و استفاده از فرمول لایب نیتز^۱ (ر.ک. ص ۲۷۵ ، جلد یک) ، نتیجه بگیرید که

$$(t^2 - 1) f_n^{(n+2)}(t) + 2t(n+1) f_n^{(n+1)}(t) + n(n+1) f_n^{(n)}(t) = 2n f_n^{(n+1)}(t) + 2n(n+1) f_n^{(n)}(t) .$$

(پ) نشان دهید که معادله قسمت (ب) را می‌توان به شکل

$$[(t^2 - 1) P_n'(t)]' = n(n+1) P_n(t)$$

نیز نوشت . این نشان می‌دهد که $P_n(t)$ یک تابع ویژه عملگر اشتروم - لیوویل است که بر بازه $[-1, 1]$ با رابطه $T(f) = (pf)'$ ، که در آن $p(t) = t^2 - 1$ ، داده می‌شود . تابع ویژه $P_n(t)$ متعلق به مقدار ویژه $\lambda = n(n+1)$ است . در این مثال ، شرایط کرانه‌های تقارن خودبخود برقرارند ، زیرا $p(1) = p(-1) = 0$.

۶۰۵ وجود یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای ویژه برای عملگرهای هرمیتی و هرمیتی اریب که بر فضاهای با بعد متناهی عمل می‌کنند

هر دو قضیه ۳۰۵ و ۳۰۵ مبتنی بر این فرض‌اند که T مقدار ویژه دارد . همانطور که میدانیم ، مقادیر ویژه لزوماً وجود ندارند . اما ، هرگاه T بر یک فضای مختلط با بعد متناهی عمل کند ، مقادیرهای ویژه همیشه وجود دارند ، زیرا ریشه‌های چند جمله‌ای مشخص می‌باشند . اگر T هرمیتی باشد ، همه مقادیر ویژه حقیقی‌اند و اگر T هرمیتی اریب باشد ، همه مقادیر ویژه موهومی محض می‌باشند . همچنین ، می‌دانیم که دو مقدار ویژه متمایز در صورتی متعلق به بردارهای ویژه متعامدند که T هرمیتی یا هرمیتی اریب باشد . با استفاده از این خاصیت می‌توان ثابت

کرد که T مجموعه‌ای متعامدیکه از بردارهای ویژه دارد که تمام فضا را می‌پیماید. (به یاد می‌آوریم که یک مجموعه متعامد را متعامد بیکه نامند در صورتی که نرم عنصرهایش ۱ باشد.)

قضیه ۴.۵. فرض کنیم $\dim V = n$ و $T: V \rightarrow V$ هرمیتی یا هرمیتی اریب باشد. در این صورت، n بردار ویژه u_1, \dots, u_n از T هست که یک پایه متعامد بیکه برای V تشکیل می‌دهند. بنابراین، ماتریس T نسبت به این پایه ماتریس قطری $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ است، که در آن λ_k مقدار ویژه متعلق به u_k می‌باشد.

برهان. از استقرا بر بعد n استفاده می‌کنیم. هرگاه $n = 1$ ، آنگاه T دقیقاً یک مقدار ویژه دارد. هر بردار ویژه u_1 با نرم ۱ یک پایه متعامد بیکه برای V می‌باشد.

حال فرض کنیم قضیه برای هر فضای اقلیدسی با بعد $n - 1$ درست باشد. برای اثبات اینکه برای V نیز درست است، یک مقدار ویژه مانند λ_1 برای T و یک بردار ویژه u_1 نظیر آن با نرم ۱ را اختیار می‌کنیم. در این صورت، $T(u_1) = \lambda_1 u_1$ و $\|u_1\| = 1$. فرض کنیم S زیر فضای پیموده شده به وسیله u_1 باشد. فرض استقرا را بر زیر فضای S^\perp مرکب از تمام عناصری در V که متعامد به u_1 اند، یعنی

$$S^\perp = \{x \mid x \in V, (x, u_1) = 0\},$$

اعمال می‌کنیم. برای این کار لازم است بدانیم که $\dim S^\perp = n - 1$ و T را بتوی خودش می‌نگارد.

از قضیه ۷.۱ (آ) می‌دانیم که u_1 جزئی از یک پایه V ، مثلاً پایه (u_1, v_2, \dots, v_n) است. می‌توان، بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود، فرض کرد این یک پایه متعامد بیکه است. (اگر نباشد، با اعمال فرایند گرام-اشمیت و با ثابت گرفتن u_1 به عنوان عنصر اول پایه، آن را به یک پایه متعامد بیکه تبدیل می‌کنیم.) حال x دلخواهی در S^\perp اختیار کرده و می‌نویسیم

$$x = x_1 u_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n.$$

در این صورت، $x_1 = (x, u_1) = 0$ ، زیرا پایه متعامد بیکه است؛ در نتیجه، x در فضای پیموده شده به وسیله v_2, \dots, v_n می‌باشد. بنابراین، $\dim S^\perp = n - 1$.

حال نشان می‌دهیم که T ، S^\perp را بتوی خودش می‌نگارد. فرض کنیم T هرمیتی باشد. اگر $x \in S^\perp$ ، داریم

$$(T(x), u_1) = (x, T(u_1)) = (x, \lambda_1 u_1) = \lambda_1(x, u_1) = 0;$$

در نتیجه، $T(x) \in S^\perp$. چون T بر S^\perp هرمیتی است، می‌توان با اعمال فرض استقرا دریافت که T دارای $n - 1$ بردار ویژه u_2, \dots, u_n است که یک پایه متعامد یکه برای S^\perp تشکیل می‌دهند. بنابراین، مجموعه متعامد u_1, \dots, u_n یک پایه متعامد یکه V است. این قضیه را در حالتی که T هرمیتی است ثابت می‌کند. حالتی که در آن T هرمیتی اریب است با استدلالی مشابه ثابت می‌شود.

۷.۵ نمایشهای ماتریسی برای عملگرهای هرمیتی و هرمیتی اریب

در این بخش فرض می‌کنیم V یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی باشد. یک تبدیل هرمیتی یا هرمیتی اریب را می‌توان برحسب عملش بر عناصرهای یک پایه مشخص کرد.

قضیه ۵.۵. فرض کنیم (e_1, \dots, e_n) یک پایه V بوده و $T: V \rightarrow V$ تبدیلی خطی باشد. در این صورت،

$$(A) \quad T \text{ هرمیتی است اگر و فقط اگر به‌ازای هر } i \text{ و } j, (T(e_j), e_i) = (e_j, T(e_i));$$

$$(B) \quad T \text{ هرمیتی اریب است اگر و فقط اگر به‌ازای هر } i \text{ و } j,$$

$$(T(e_j), e_i) = -(e_j, T(e_i)).$$

برهان. دو عنصر دلخواه x و y را در V اختیار و هر یک را برحسب عناصر پایه، مثلاً " به صورت $x = \sum x_j e_j$ و $y = \sum y_i e_i$ بیان می‌کنیم. در این صورت، داریم

$$(T(x), y) = \left(\sum_{j=1}^n x_j T(e_j), \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_{j=1}^n x_j \left(T(e_j), \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j y_i (T(e_j), e_i).$$

بهین نحو، خواهیم داشت

$$(x, T(y)) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j y_i (e_j, T(e_i)).$$

حکهای (A) و (B) فوراً از این معادلات نتیجه می‌شوند.

حال این مفومها را برحسب یک نمایش ماتریسی T توصیف می‌کنیم.

قضیه ۶.۵. فرض کنیم (e_1, \dots, e_n) یک پایه متعامد یکه V بوده، و $A = (a_{ij})$

نمایش ماتریسی تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ نسبت به این پایه باشد. در این صورت،

$$(آ) \quad T \text{ هرمیتی است اگر و فقط اگر بهازای هر } i \text{ و } j, \quad a_{ij} = \bar{a}_{ji} ;$$

$$(ب) \quad T \text{ هرمیتی اریب است اگر و فقط اگر بهازای هر } i \text{ و } j, \quad a_{ij} = -\bar{a}_{ji} .$$

برهان. چون A ماتریس T است، داریم $T(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$. با ضرب داخلی $T(e_j)$ در e_i و استفاده از خاصیت خطی ضرب داخلی، خواهیم داشت

$$(T(e_j), e_i) = \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} e_k, e_i \right) = \sum_{k=1}^n a_{kj} (e_k, e_i).$$

اما $(e_k, e_i) = 0$ مگر اینکه $k = i$ ؛ در نتیجه، مجموع آخر به $a_{ij}(e_i, e_i) = a_{ij}$ ساده می‌شود، زیرا $(e_i, e_i) = 1$. لذا، چنین داریم:

$$. \quad a_{ij} = (T(e_j), e_i), \quad i, j \text{ بهازای هر}$$

با تعویض نقش i و j ، مزدوج گرفتن و استفاده از تقارن هرمیتی ضرب داخلی، در می‌یابیم که

$$. \quad \bar{a}_{ji} = (e_j, T(e_i)), \quad i, j \text{ بهازای هر}$$

حال با اعمال قضیه ۵.۵ برهان تمام خواهد شد.

۸.۵ ماتریسهای هرمیتی و هرمیتی اریب. الحاقی یک ماتریس

تعریف زیر را قضیه ۶.۵ القا می‌کند.

تعریف. ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ را هرمیتی نامند در صورتی که بهازای هر i و j ،

$$. \quad a_{ij} = \bar{a}_{ji} .$$

$$. \quad a_{ij} = -\bar{a}_{ji} .$$

قضیه ۶.۵ بیان می‌کند که تبدیل T بر فضای V با بعد متناهی V ، بسته به اینکه ماتریسش نسبت به یک پایه متعامد بیکه هرمیتی یا هرمیتی اریب باشد، هرمیتی یا هرمیتی اریب است.

این ماتریسها را می‌توان به طریق دیگر نیز وصف کرد. فرض کنیم \bar{A} ماتریس حاصل از تعویض هر درایه A با مزدوج مختلط خود باشد. ماتریس \bar{A} مزدوج A نامیده می‌شود.

ماتریس A هرمیتی است اگر و فقط اگر مساوی ترانهاده^۴ مزدوج خود باشد؛ یعنی، $A = \bar{A}^t$.
 هرمیتی اربب است اگر که $A = -\bar{A}^t$.
 ترانهاده^۴ مزدوج خود نامی خاص دارد:

تعریف الحاقی یک ماتریس. به ازای هر ماتریس A ، ترانهاده^۴ مزدوج آن، یعنی \bar{A}^t ،
 الحاقی A نیز نامیده و با A^* نموده می شود.

بنابراین، ماتریس مربعی A هرمیتی است در صورتی که $A = A^*$ ، و هرمیتی اربب
 است در صورتی که $A = -A^*$. یک ماتریس هرمیتی خود الحاقی نیز نامیده می شود.

تذکره. در بسیاری از کتب قدیمی تر انگلیسی در باب ماتریسها، از اصطلاح *adjoint* (به
 معنی الحاقی) برای ترانهاده^۴ ماتریس همسازهای، که مفهوم کاملاً متفاوتی است، استفاده
 شده است. تعریف ما در اینجا همساز با فرهنگ جاری در نظریه^۴ عملگرهای خطی است.

۹.۵ قطری سازی یک ماتریس هرمیتی یا هرمیتی اربب

قضیه^۴ ۷.۵. هر ماتریس $n \times n$ هرمیتی یا هرمیتی اربب A با ماتریس قطری

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ از مقدارهای ویژه^۴ آن متشابه است. بعلاوه، داریم

$$\Lambda = C^{-1}AC,$$

که در آن C یک ماتریس نامنفرد است که معکوسش الحاقی آن می باشد، $C^{-1} = C^*$.

برهان. فرض کنیم V فضای n تاییها از اعداد مختلط باشد، و (e_1, \dots, e_n) را پایه^۴
 متعامد بیکه از بردارهای بیکه^۴ مختصات می گیریم. اگر $x = \sum x_i e_i$ و $y = \sum y_i e_i$ ، حاصل
 ضرب داخلی آنها را $(x, y) = \sum x_i \bar{y}_i$ فرض می کنیم. به ازای ماتریس معلوم A ، فرض
 می کنیم T تبدیلی باشد که نسبت به پایه^۴ متعامد بیکه از بردارهای ویژه^۴ (u_1, \dots, u_n)
 دارای نمایش ماتریسی قطری $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ است، که در آن λ_k مقدار ویژه^۴
 متعلق به u_k است. چون A و Λ هر دو T را نمایش می دهند، پس متشابهند؛ در نتیجه،
 داریم $\Lambda = C^{-1}AC$ ، که در آن $C = (c_{ij})$ ماتریس نامنفردی است که دو پایه را بهم
 مربوط می کند:

$$[u_1, \dots, u_n] = [e_1, \dots, e_n]C.$$

این معادله نشان می‌دهد که ستون j م C از مولفه‌های u_j نسبت به (e_1, \dots, e_n) تشکیل شده است. بنابراین، c_{ij} مولفه i م u_j است. حاصل ضرب داخلی u_i و u_j از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(u_j, u_i) = \sum_{k=1}^n c_{kj} \bar{c}_{ki}.$$

چون $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک مجموعه متعامد یکه است، این نشان می‌دهد که $CC^* = I$ ؛ در نتیجه، $C^{-1} = C^*$.

تذکره. برهان قضیه ۷.۵ طرز مشخص کردن ماتریس قطری ساز C را نیز بازگو می‌کند. یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای ویژه u_1, \dots, u_n را پیدا می‌کنیم و بعد از مولفه‌های u_j (نسبت به پایه بردارهای یکه مختصات) به عنوان درایه‌های ستون j م C استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. ماتریس هرمیتی حقیقی $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ دارای مقدرهای ویژه $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 6$ است. بردارهای ویژه متعلق به 1 عبارتند از $(2, -1)$ ، که $t \neq 0$. و بردارهای ویژه متعلق به 6 عبارتند از $(1, 2)$ ، که $t \neq 0$. دو بردار ویژه $u_1 = t(2, -1)$ و $u_2 = t(1, 2)$ به ازای $t = 1/\sqrt{5}$ یک مجموعه متعامد یکه تشکیل می‌دهند. بنابراین، ماتریس

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس قطری ساز برای A است. در این حالت، $C^* = C'$ ، زیرا C حقیقی است.

$$C'AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ که با آسانی تحقیق می‌شود.}$$

مثال ۲. هرگاه A از قبل یک ماتریس قطری باشد، ماتریس قطری ساز C در قضیه ۷.۵ یا A را بی‌تغییر می‌گذارد و یا فقط درایه‌های قطری را تغییر آرایش می‌دهد.

۱۰.۵ ماتریسهای یکه‌ای. ماتریسهای متعامد

تعریف. ماتریس مربعی A یکه‌ای نام دارد اگر که $AA^* = I$. و آن را متعامد خوانند اگر که $AA^t = I$.

تذکره. هر ماتریس یکه‌ای حقیقی متعامد است، زیرا $A^* = A^t$.

قضیه ۷.۵ می‌گوید که یک ماتریس هرمیتی یا هرمیتی اریب را همیشه می‌توان به وسیله یک ماتریس قطری حقیقی قطری کرد. این امر برای ماتریسهای هرمیتی اریب حقیقی درست نیست. (ر.ک. تمرین ۱۱ در بخش ۰۱۱.۵)
ما مفاهیم مربوطه زیر را نیز داریم.

تعریف. ماتریس مربعی A با درایه‌های حقیقی یا مختلط متقارن نامیده می‌شود اگر که $A = A^t$ ؛ متقارن اریب است اگر که $A = -A^t$.

مثال ۳. هرگاه A حقیقی باشد، الحاقی آن مساوی ترانهاده آن است، $A^* = A^t$. بنابراین، هر ماتریس هرمیتی حقیقی متقارن است، اما یک ماتریس متقارن لزوماً "هرمیتی نیست".

مثال ۴. هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ 3-i & 4i \end{bmatrix}$ ، آنگاه $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 3+i & -4i \end{bmatrix}$

و $A^t = \begin{bmatrix} 1+i & 3-i \\ 2 & 4i \end{bmatrix}$ ، $A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 3+i \\ 2 & -4i \end{bmatrix}$

مثال ۵. دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ هرمیتی‌اند. اولی متقارن است، ولی

دومی نیست.

مثال ۶. دو ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} i & -2 \\ 2 & 3i \end{bmatrix}$ هرمیتی اریب‌اند. اولی متقارن اریب است،

ولی دومی نیست .

مثال ۷ . همه عناصر قطری یک ماتریس هرمیتی حقیقی اند ، همه عناصر قطری یک ماتریس هرمیتی اریب موهومی محض اند ، و همه عناصر قطری یک ماتریس متقارن اریب صفر می باشند .

مثال ۸ . به ازای هر ماتریس مربعی و دلخواه A ، ماتریس $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ هرمیتی است ، و ماتریس $C = \frac{1}{2}(A - A^*)$ هرمیتی اریب می باشد . مجموع آنها A است . پس ، هر ماتریس مربعی A را می توان به صورت مجموعی چون $A = B + C$ نوشت ، که در آن B هرمیتی و C هرمیتی اریب باشد . به آسانی تحقیق می شود که این تجزیه منحصر بفرد است . همچنین ، هر ماتریس مربعی A را می توان به طور منحصر بفرد به صورت مجموعی از یک ماتریس متقارن ، یعنی $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ، و یک ماتریس متقارن اریب ، یعنی $\frac{1}{2}(A - A^t)$ ، بیان کرد .

مثال ۹ . اگر A متعامد باشد ، داریم

$$1 = \det(AA^t) = (\det A)(\det A^t) = (\det A)^2 ;$$

در نتیجه ، $\det A = \pm 1$.

۱۱.۵ تمرین

۱ . از ماتریسهای زیر کدامها متقارن ، کدامها متقارن اریب ، کدامها هرمیتی ، و کدامها هرمیتی اریب اند :

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{array} \right) \text{ (پ)} \quad ; \quad \left(\begin{array}{ccc} 0 & i & 2 \\ i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 4i \end{array} \right) \text{ (ب)} \quad ; \quad \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \text{ (ت)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{array} \right) \text{ (ث)} \quad ?$$

۲ . (\bar{T}) تحقیق کنید که ماتریس 2×2 ، $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ یک ماتریس متعامد

است .

(ب) فرض کنید T تبدیل خطی با ماتریس A ی فوق نسبت به پایه معمولی $\{i, j\}$ باشد . ثابت کنید T هر نقطه در صفحه با مختصات قطبی (r, α) را بروی نقطه با مختصات قطبی $(r, \alpha + \theta)$ می نگارد . لذا ، T یک دوران صفحه حول مبدأ است ، θ زاویه دوران می باشد .

۳ . فرض کنید V فضای 3 حقیقی با بردارهای پایه معمولی i, j, k باشد . ثابت کنید هر یک از ماتریسهای زیر متعامد است و تبدیل نموده شده را نمایش می دهد :

$$(\bar{T}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (انعکاس نسبت به صفحه } xy \text{)} ;$$

$$(ب) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (انعکاس نسبت به محور } x \text{)} ;$$

$$(\bar{\pi}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (انعکاس نسبت به مبدأ)} ;$$

$$(\bar{\tau}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ (دوران حول محور } x \text{)} ;$$

$$(\bar{\tau}) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ (دوران حول محور } x \text{ و پس از آن انعکاس نسبت به صفحه } yz \text{)} .$$

۴ . ماتریس متعامد و حقیقی A را سره نامند اگر که $\det A = 1$ ، و ناسره خوانند اگر $\det A = -1$.

(\bar{T}) ثابت کنید که اگر A یک ماتریس 2×2 سره باشد ، به ازای θ ای

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} .$$

می دهد .

(ب) ثابت کنید که $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریسهای ناسره‌اند. ماتریس اول

نمایشگر یک انعکاس صفحه xy نسبت به محور x است؛ دومی نمایشگر یک انعکاس نسبت به محور y می‌باشد. جمع ماتریسهای 2×2 ناسره را پیدا کنید.

در تمرینهای ۵ تا ۸، (\bar{A}) یک مجموعه متعامد از بردارهای ویژه برای A بیابید، و (ب) ماتریس یک‌های C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \quad \cdot 5 \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \cdot 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdot 7 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \cdot 8$$

۹. از ماتریسهای زیر کدامها یک‌های اند و کدامها متعامد (a, b, θ) حقیقی‌اند):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad (\gamma) \quad ; \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\delta) \quad ; \quad \begin{bmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{ib} \end{bmatrix} \quad (\bar{T})$$

۱۰. در نظریه نسبیت خاص از معادلات

$$x' = a(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = a(t - vx/c^2)$$

استفاده می‌شود. در اینجا v سرعت جسم متحرک، c سرعت نور، و

$a = c/\sqrt{c^2 - v^2}$ است. تبدیل خطی که (x, y, z, t) را بروی (x', y', z', t') می‌نگارد

تبدیل لورنتس نام دارد.

(\bar{T}) فرض کنید $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$ و $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = (x', y', z', ict')$

نشان دهید که چهار معادله را می‌توان به صورت یک معادله ماتریسی نوشت:

$$[x'_1, x'_2, x'_3, x'_4] = [x_1, x_2, x_3, x_4] \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -iav/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iav/c & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

(ب) ثابت کنید که ماتریس 4×4 قسمت (\bar{T}) متعامد است ولی یک‌های نیست.

۱۱. فرض کنید a یک عدد حقیقی ناصفرو A ماتریس متقارن اریب $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ باشد.

(آ) برای A یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای ویژه بیابید.

(ب) ماتریس یکهای C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد.

(پ) ثابت کنید ماتریس متعامد حقیقی مانند C نیست که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد.

۱۲. ثابت کنید که اگر مقادیرهای ویژه ماتریس هرمیتی یا هرمیتی اریب A همه مساوی c باشند، $A = cI$.

۱۳. ثابت کنید که اگر A یک ماتریس متقارن اریب حقیقی باشد، هر دوی $I - A$ و $I + A$ نامنفردند و $(I - A)(I + A)^{-1}$ متعامد می باشد.

۱۴. برای هر یک از احکام زیر در باب ماتریسهای $n \times n$ برهان بیاورید یا مثال نقض:

(آ) هرگاه A و B یکهای باشند، $A + B$ نیز یکهای است؛

(ب) هرگاه A و B یکهای باشند، AB نیز یکهای است.

(پ) هرگاه A و AB یکهای باشند، B نیز یکهای است؛

(ت) هرگاه A و B یکهای باشند، $A + B$ یکهای نیست.

۱۲.۵ فرمهای درجه دوم

فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی حقیقی بوده و $T: V \rightarrow V$ یک عملگر متقارن باشد. این یعنی T را می توان از یک سازه یک حاصل ضرب داخلی به سازه دیگر انتقال داد:

$$(T(x), y) = (x, T(y)) \quad \forall x, y \in V$$

با معلوم بودن T ، تابع حقیقی Q را بر V با معادله

$$Q(x) = (T(x), x)$$

تعریف می کنیم. تابع Q فرم درجه دوم مربوط به T نامیده می شود. اصطلاح "درجه دوم" راقصیه زیر القا می کند، که نشان می دهد که، در حالت ابعاد متناهی، $Q(x)$ یک چند جمله ای درجه دوم از مولفه های x است.

۸.۵ قضیه فرض کنیم (e_1, \dots, e_n) یک پایه متعامد یکه برای فضای اقلیدسی

حقیقی V باشد. همچنین، $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل متقارن بوده، و $A = (a_{ij})$ ماتریس T نسبت به این پایه باشد. در این صورت، فرم درجه دوم $Q(x) = (T(x), x)$ با A به صورت زیر مربوط می شود:

$$(۷.۵) \quad Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

برهان. بنا بر خاصیت خطی داریم $T(x) = \sum x_i T(e_i)$. بنابراین،

$$Q(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i T(e_i), \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (T(e_i), e_j).$$

این (۷.۵) را ثابت می کند، زیرا $a_{ij} = (T(e_i), e_j)$.

مجموع مذکور در (۷.۵)، حتی اگر A متقارن هم نباشد، با معنی است.

تعریف. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی حقیقی با پایه متعامدیکه (e_1, \dots, e_n) بوده، و $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ از اسکالرها باشد. تابع اسکالر Q که در هر عنصر $x = \sum x_i e_i$ از V با مجموع مضاعف

$$(۸.۵) \quad Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

تعریف می شود، فرم درجه دوم مربوط به A نامیده می شود.

هرگاه A یک ماتریس قطری باشد، آنگاه به ازای $i \neq j$ ، $a_{ij} = 0$ ؛ در نتیجه،

مجموع (۸.۵) فقط شامل جملات مربع است و می توان آن را ساده تر و به صورت

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2$$

نوشت. در این حالت، فرم درجه دوم یک فرم قطری نام دارد.

مجموع مضاعف (۸.۵) را می توان به صورت حاصل ضرب سه ماتریس نیز بیان کرد.

قضیه ۹.۵. فرض کنیم $X = [x_1, \dots, x_n]$ یک ماتریس سطری $1 \times n$ بوده، و

با $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت، XAX^t یک ماتریس 1×1 با درایه

$$(9.5) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

می باشد.

برهان. حاصل ضرب XA یک ماتریس $1 \times n$ است: $XA = [y_1, \dots, y_n]$ ، که در آن درایه y_j حاصل ضرب نقطه‌ای X با ستون j م A است:

$$y_j = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij}.$$

بنابراین، حاصل ضرب XAX^t یک ماتریس 1×1 است که تنها درایه‌اش حاصل ضرب نقطه‌ای

$$\sum_{j=1}^n y_j x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

می باشد.

تذکره. رسم است که ماتریس 1×1 ، XAX^t را با مجموع (9.5) یکی می‌گیرند و حاصل ضرب XAX^t را یک فرم درجه دوم می‌نامند. معادله (8.5) به صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$Q(x) = XAX^t.$$

مثال 1. فرض کنیم $X = [x_1, x_2]$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ در این صورت، داریم

$$XA = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = [x_1 - 3x_2, -x_1 + 5x_2];$$

و در نتیجه،

$$XAX^t = [x_1 - 3x_2, -x_1 + 5x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 3x_2x_1 - x_1x_2 + 5x_2^2.$$

مثال 2. فرض کنیم $X = [x_1, x_2]$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ در این صورت، داریم

$$XBX^t = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_1x_2 + 5x_2^2.$$

در دو مثال ۱ و ۲، مجموع دو جمله حاصل ضرب مخلوط می شود $-4x_1x_2$ ؛ در نتیجه، $XAX^t = XBX^t$. این مثالها نشان می دهند که ماتریسهای مختلف می توانند به یک فرم درجه دوم ختم شوند. توجه کنید که یکی از این ماتریسها متقارن است. این امر در قضیه بعدی توضیح شده است.

قضیه ۱۰۰۵. بازای هر ماتریس $n \times n$ ، A ، و هر ماتریس سطری $1 \times n$ ، X داریم $XAX^t = XBX^t$ ، که در آن B ماتریس متقارن $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ است.

برهان. چون XAX^t یک ماتریس 1×1 است، پس مساوی ترانهاده خودش است، $XAX^t = (XAX^t)^t$. اما ترانهاده یک حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ترانهادها به ترتیب عکس است؛ در نتیجه، داریم $(XAX^t)^t = XA^tX^t$. بنابراین، $XAX^t = \frac{1}{2}XAX^t + \frac{1}{2}XA^tX^t = XBX^t$.

۱۳۰۵ تحویل یک فرم درجه دوم حقیقی به شکل قطری

هر ماتریس متقارن و حقیقی A هرمیتی است. بنابراین، طبق قضیه ۷۰۵، با ماتریس قطری $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ از مقدارهای ویژه اش متشابه است. علاوه، داریم $\Lambda = C^tAC$ ، که در آن C یک ماتریس متعامد می باشد. حال نشان می دهیم که می توان، با استفاده از C ، فرم درجه دوم XAX^t را به یک فرم قطری بدل کرد.

قضیه ۱۱۰۵. فرض کنیم XAX^t فرم درجه دوم مربوط به ماتریس متقارن و حقیقی A بوده، و C یک ماتریس متعامد باشد که A را به ماتریس قطری $\Lambda = C^tAC$ تبدیل می کند. در این صورت، داریم

$$XAX^t = Y\Lambda Y^t = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2,$$

که در آن $Y = [y_1, \dots, y_n]$ ماتریس سطری $Y = XC$ است، و $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقدارهای

ویژه A می‌باشند .

برهان . چون C متعامد است ، داریم $C^{-1} = C'$. بنابراین ، معادله $Y = XC$ ایجاب می‌کند که $X = YC'$ ، و خواهیم داشت

$$XAX' = (YC')A(YC')' = Y(C'AC)Y' = Y\Lambda Y'.$$

تذکره . قضیه ۱۱.۵ این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویید تبدیل خطی $Y = XC$ فرم درجه دوم XAX' را به فرم قطری $Y\Lambda Y'$ تحویل می‌کند .

مثال ۱ . فرم درجه دوم متعلق به ماتریس همانی مساوی است با

$$XIX' = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|X\|^2;$$

یعنی ، مساوی مربع طول بردار $X = (x_1, \dots, x_n)$. تبدیل خطی $Y = XC$ ، که در آن C یک ماتریس متعامد است ، فرم درجه دوم جدید $Y\Lambda Y'$ را به دست می‌دهد که $\Lambda = C'CC' = CC' = I$. چون $XIX' = YIY'$ ، داریم $\|X\|^2 = \|Y\|^2$ ؛ در نتیجه ، Y همان طول X را دارد . یک تبدیل خطی که طول هر بردار را حفظ کند یک یکمتری نامیده می‌شود . این تبدیلات با تفصیل بیشتر در بخش ۱۹.۵ مطرح می‌شوند .

مثال ۲ . ماتریس متعامد C را طوری تعیین کنید که فرم درجه دوم

$$Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

را به یک فرم قطری تحویل کند .

حل . می‌نویسیم $Q(x) = XAX'$ ، که در آن $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. این ماتریس متقارن در

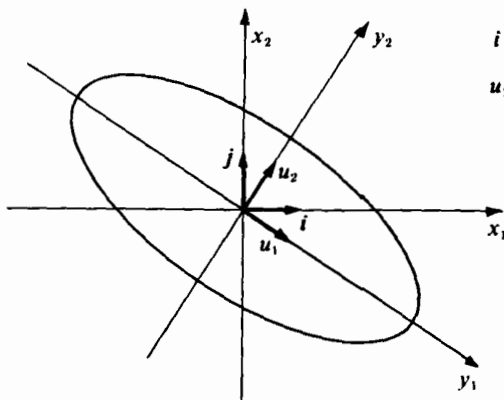
مثال ۱ بعد از قضیه ۷.۵ قطری شده بود . مقدارهای ویژه اش $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 6$ هستند ، و یک مجموعه متعامد بیکه از بردارهای ویژه عبارت است از u_1 ، u_2 ، که

$$u_1 = t(2, -1), u_2 = t(1, 2), t = 1/\sqrt{5}.$$

یک ماتریس قطری ساز متعامد $C = t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ است . فرم قطری نظیر خواهد بود

$$YAY^t = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = y_1^2 + 6y_2^2.$$

نتیجه مثال ۲ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد که در شکل ۱۰.۵ مجسم شده است. تبدیل خطی $Y = XC$ را می‌توان یک دوران دانست که پایه i, j را بروی پایه جدید u_1, u_2 می‌نگارد. یک نقطه به مختصات (x_1, x_2) نسبت به پایه اول دارای مختصات جدید (y_1, y_2) نسبت به پایه دوم است. چون $XAX^t = YAY^t$ ، مجموعه نقاط (x_1, x_2) صادق در معادله $XAX^t = c$ به ازای c ای، با مجموعه نقاط (y_1, y_2) صادق در $YAY^t = c$ یکی است. معادله دوم، نوشته شده به صورت $y_1^2 + 6y_2^2 = c$ ، معادله دگارتی یک بیضی است اگر $c > 0$.



(x_1, x_2) نسبت به پایه i, j

(y_1, y_2) نسبت به پایه u_1, u_2

شکل ۱۰.۵ دوران محورها به وسیله یک ماتریس متعامد بیضی در دستگاه x_1x_2 دارای معادله دگارتی $XAX^t = 9$ ، و در دستگاه y_1y_2 دارای معادله $YAY^t = 9$ است.

بنابراین، معادله $XAX^t = c$ ، نوشته شده به صورت $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = c$ ، همان بیضی در دستگاه مختصات اصلی را نمایش می‌دهد. شکل ۱۰.۵ نشان می‌دهد که بیضی نظیر است به $c = 9$.

۱۴.۵ چند کاربرد در هندسه تحلیلی

با استفاده از تحویل یک فرم درجه دوم به یک فرم قطری می‌توان مجموعه تمام نقاط

(x, y) در صفحه که در یک معادلهٔ دکارتی به شکل

$$(10.5) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

صدق می‌کنند را شناسایی کرد. در خواهیم یافت که این مجموعه همیشه یک مقطع مخروطی است؛ یعنی، یک بیضی، هذلولی، سهمی، یا یکی از حالات تباها شده آنها (مجموعهٔ تهی، یک نقطه تنها، یا یک یا دو خط مستقیم) است. نوع مخروطی را جملات درجه دوم تعیین می‌کنند؛ یعنی، به وسیلهٔ فرم درجه دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ معین می‌شود. برای همسازی با نمادگذاری قبلی، به جای x می‌نویسیم x_1 ، به جای y می‌نویسیم x_2 ، و این فرم درجه دوم را به صورت یک حاصل ضرب ماتریسی بیان می‌کنیم:

$$XAX' = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2,$$

که در آن $X = [x_1, x_2]$ و $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$. این فرم را با دوران $Y = XC$ به یک فرم

قطری $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ تحویل می‌کنیم، که در آن λ_1, λ_2 مقدارهای ویژهٔ A هستند. یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژهٔ u_1, u_2 محورهای مختصات جدیدی را مشخص می‌کند، که معادلهٔ دکارتی (10.5) نسبت به آنها خواهد شد

$$(11.5) \quad \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d'y_1 + e'y_2 + f = 0,$$

با ضرایب جدید d' و e' در جملات خطی. در این معادله جمله حاصل ضرب مخلوط $y_1 y_2$ وجود ندارد؛ در نتیجه، نوع مخروطی را می‌توان به آسانی با بررسی مقدارهای ویژهٔ λ_1 و λ_2 مشخص کرد. هرگاه مخروطی تباها شده نباشد، معادله (11.5) نمایشگر یک بیضی است اگر λ_1, λ_2 یک علامت داشته باشند، یک هذلولی است اگر λ_1, λ_2 مختلف علامه باشند، و یک سهمی است اگر λ_1 یا λ_2 صفر باشد. سه حالت نظیر به $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ، $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ، و $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ می‌باشند. این امر را با چند مثال خاص توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y - \frac{1}{4} = 0$. این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(12.5) \quad 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1 + 13x_2 - \frac{1}{4} = 0.$$

فرم درجه دوم $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ همانی است که در مثال ۲ بخش پیش از آن بحث شد. ماتریس آن دارای مقدارهای ویژهٔ $\lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 6$ است، و یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه $u_1 = t(2, -1)$ ، $u_2 = t(1, 2)$ می‌باشد، که $t = 1/\sqrt{5}$. یک ماتریس

قطری ساز متعامد $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ است. این ماتریس قسمت درجه دوم (۱۲.۵) را

به شکل $y_1^2 + 6y_2^2$ تحویل می‌کند. برای تعیین اثر آن بر قسمت حقیقی، معادله دوران $Y = XC$ را به شکل $X = YC^t$ می‌نویسیم و به دست می‌آوریم که

$$[x_1, x_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} [y_1, y_2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-y_1 + 2y_2).$$

بنابراین، قسمت حقیقی $4x_1 + 13x_2$ به

$$\frac{4}{\sqrt{5}} (2y_1 + y_2) + \frac{13}{\sqrt{5}} (-y_1 + 2y_2) = -\sqrt{5} y_1 + 6\sqrt{5} y_2$$

تبدیل می‌شود. معادله دکارتی تبدیل شده خواهد شد

$$y_1^2 + 6y_2^2 - \sqrt{5} y_1 + 6\sqrt{5} y_2 - \frac{1}{4} = 0.$$

با کامل کردن مربعا نسبت به y_1 و y_2 ، این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{5})^2 + 6(y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{5})^2 = 9.$$

این معادله یک بیضی است به مرکز $(\frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\sqrt{5})$ در دستگاه $y_1 y_2$. همانطور که شکل ۲.۵ نشان داده، جهت‌های مثبت محورهای y_1 و y_2 به وسیله بردارهای ویژه u_1 و u_2 معین می‌شوند.

این معادله را می‌توان با نوشتن

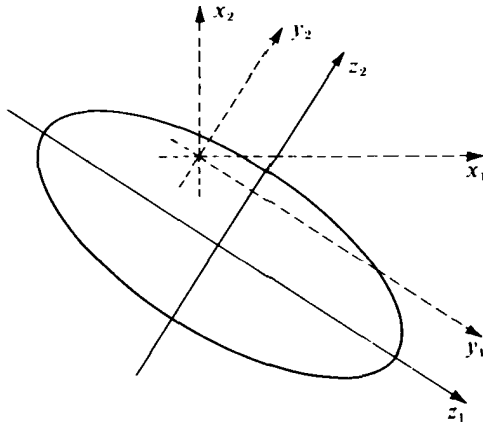
$$z_1 = y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad z_2 = y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

ساده‌تر کرد. از نظر هندسی، این یعنی محورهای مختصات جدیدی انتخاب کنیم موازی محورهای $y_1 y_2$ ولی مبدأ جدید در مرکز بیضی باشد. در دستگاه $z_1 z_2$ ، معادله بیضی فقط خواهد بود

$$\frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{3/2} = 1 \quad \text{یا} \quad z_1^2 + 6z_2^2 = 9$$

این بیضی و هر سه دستگاه مختصات در شکل ۲.۵ نموده شده است.

مثال ۲. $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0$. این معادله را به صورت زیر



شکل ۲۰۵ دوران و انتقال محورهای مختصات.

پس از دوران $Y = XC$ انتقال $z_1 = y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $z_2 = y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ آمده است.

می‌نویسیم:

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 + 10x_2 - 13 = 0.$$

قسمت درجه دوم XAX' است، که در آن $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. این ماتریس مقدارهای

ویژه $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ را دارد. یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای ویژه عبارت است از $u_1 = t(2, -1)$, $u_2 = t(1, 2)$ که $t = 1/\sqrt{5}$. یک ماتریس قطری ساز متعامد

$$C = t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

می‌باشد. معادله دوران $X = YC'$ نتیجه می‌دهد که

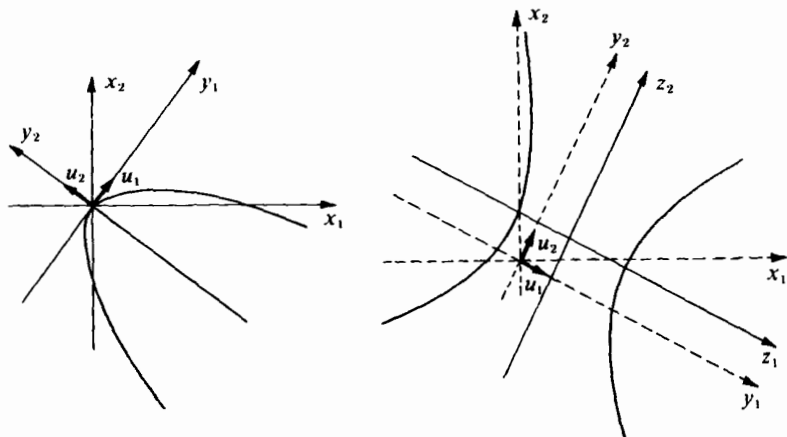
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2).$$

بنابراین، معادله تبدیل شده خواهد شد

$$3y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2) + \frac{10}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2) - 13 = 0$$

یا

$$3y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{18}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{16}{\sqrt{5}}y_2 - 13 = 0.$$



(آ) هذلولی: $3z_1^2 - 2z_2^2 = 12$ (ب) سهمی: $y_1^2 + y_2 = 0$

شکل ۳.۵ منحنیها در مثالهای ۲ و ۳

با کامل کردن مربعها نسبت به y_1 و y_2 ، معادله

$$3(y_1 - \frac{3}{8}\sqrt{5})^2 - 2(y_2 - \frac{4}{8}\sqrt{5})^2 = 12$$

به دست می آید، که نمایش یک هذلولی به مرکز $(\frac{3}{8}\sqrt{5}, \frac{4}{8}\sqrt{5})$ در دستگاه $y_1 y_2$ است. انتقال

این معادله را ساده تر خواهد کرد: $z_1 = y_1 - \frac{3}{8}\sqrt{5}$, $z_2 = y_2 - \frac{4}{8}\sqrt{5}$

$$\frac{z_1^2}{4} - \frac{z_2^2}{6} = 1 \quad \text{یا} \quad 3z_1^2 - 2z_2^2 = 12$$

هذلولی در شکل ۳.۵ (آ) نشان داده شده است. بردارهای ویژه u_1 و u_2 جهت های محورهای مثبت y_1 و y_2 را معین خواهند کرد.

مثال ۳. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$. این معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 20x_1 + 15x_2 = 0.$$

ماتریس متقارن برای قسمت درجه دوم مساوی است با $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$. مقادارهای ویژه

آن عبارتند از $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$. یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای ویژه

$$C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ یک ماتریس قطری ساز متعامد } u_1 = \frac{1}{5}(3, 4), u_2 = \frac{1}{5}(-4, 3)$$

می باشد. معادله دوران $X = YC^t$ نتیجه می دهد که

$$x_1 = \frac{1}{3}(3y_1 - 4y_2), \quad x_2 = \frac{1}{3}(4y_1 + 3y_2).$$

بنابر این، معادله دکارتی تبدیل شده خواهد شد

$$25y_1^2 - 20(3y_1 - 4y_2) + \frac{1}{9}(4y_1 + 3y_2) = 0.$$

این معادله به $y_1^2 + y_2 = 0$ ساده می شود، معادله یک سهمی که رأسش در مبدأ است.

این سهمی در شکل ۳۰۵ (ب) نموده شده است.

مثال ۴. حالات تباہ شده. اطلاعاتی فقط از مقدارهای ویژه، این امر را که معادله

دکارتی یک مقطع مخروطی تباہ شده را نمایش می دهد یا نه مشخص نمی کند. مثلاً، سه

معادله $x^2 + 2y^2 = 1$ ، $x^2 + 2y^2 = 0$ ، و $x^2 + 2y^2 = -1$ همه دارای مقدارهای

ویژه یکسانند؛ اولی نمایشگر یک بیضی تباہ نشده است، دومی فقط نقطه $(0, 0) = (x, y)$

صادق در خود را دارد؛ و سومی نمایشگر مجموعه تهی است. دو حالت اخیر را می توان

حالات تباہ شده ای از بیضی دانست.

نمودار معادله $y^2 = 0$ محور x است. معادله $y^2 - 1 = 0$ دو خط موازی $y = 1$

و $y = -1$ را نمایش می دهد. اینها را می توان حالات تباہ شده ای از سهمی گرفت. معادله

$x^2 - 4y^2 = 0$ نمایشگر دو خط متقاطع است، زیرا در صورتی برقرار است که $x - 2y = 0$

یا $x + 2y = 0$. این را می توان حالت تباہ شده ای از هذلولی دانست.

بهرحال، اگر معادله دکارتی $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ نمایشگر

یک مقطع مخروطی تباہ نشده باشد، نوع مخروطی را می توان کاملاً آسان معین کرد. چند

جمله ای مشخص ماتریس فرم درجه دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ عبارت است از

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - a & -b/2 \\ -b/2 & \lambda - c \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - \frac{1}{4}b^2) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

پس، حاصل ضرب مقدارهای ویژه مساوی است با

$$\lambda_1 \lambda_2 = ac - \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}(4ac - b^2).$$

چون نوع مخروطی را علامت جبری حاصل ضرب $\lambda_1 \lambda_2$ تعیین می کند، ملاحظه می کنیم که

مخروطی، بسته به اینکه $4ac - b^2$ مثبت، منفی، یا صفر باشد، بیضی، هذلولی، یا

سهمی خواهد بود. عدد $4ac - b^2$ مبین فرم درجه دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ نامیده می شود. در مثالهای ۱، ۲، و ۳، مبین بترتیب دارای مقادیر ۳۴، -۲۴، و ۰ است.

۱۵۰۵ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۷، (آ) برای فرم درجه دوم یک ماتریس متقارن مانند A بیابید؛ (ب) مقدارهای ویژه A را پیدا کنید؛ (پ) یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای ویژه بیابید؛ (ت) یک ماتریس قطری ساز متعامد مانند C پیدا کنید.

$$1. \quad 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \quad 2. \quad x_1x_2$$

$$3. \quad x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 \quad 4. \quad 34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2$$

$$5. \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \quad 6. \quad 2x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2$$

$$7. \quad 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$$

در تمرینهای ۸ تا ۱۸، مقطع مخروطی نموده شده با معادله دکارتی را شناسایی کرده و آن را بکشید.

$$8. \quad y^2 - 2xy + 2x^2 - 5 = 0 \quad 9. \quad y^2 - 2xy + 5x = 0$$

$$10. \quad y^2 - 2xy + x^2 - 5x = 0 \quad 11. \quad 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6 = 0$$

$$12. \quad 19x^2 + 4xy + 16y^2 - 212x + 104y = 356$$

$$13. \quad 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 52x + 14y = 6$$

$$14. \quad 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2 = 0$$

$$15. \quad x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$$

$$16. \quad 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x - y - 4 = 0$$

$$17. \quad x^2 + 4xy - 2y^2 - 12 = 0$$

$$18. \quad xy + y - 2x - 2 = 0$$

۱۹. به ازای چه مقدار (یا مقادیری) از c ، نمودار معادله دکارتی $2xy - 4x + 7y + c = 0$ یک جفت خط است؟

۲۰. ثابت کنید که اگر معادله $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ نمایش یک بیضی باشد، مساحت

ناحیه محدود به آن مساوی $2\pi/\sqrt{4ac - b^2}$ است. این امر به مبین $4ac - b^2$ معنی

هندسی می بخشد.

* ۱۶۰۵ مقدارهای ویژه یک تبدیل متقارن به عنوان مقادیر فرم درجه دوم آن حال شرط اینکه V با بعد متناهی باشد را حذف می‌کنیم و رابطه بین مقدارهای ویژه یک عملگر متقارن و فرم درجه دوم آن را به دست می‌آوریم.

فرض کنیم x یک بردار ویژه با نرم 1 متعلق به مقدار ویژه λ باشد. در این صورت،

$$T(x) = \lambda x \quad \text{در نتیجه، داریم}$$

$$Q(x) = (T(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = \lambda, \quad (۱۳۰۵)$$

زیرا $(x, x) = 1$. مجموعه تمام x های در V صادق در $(x, x) = 1$ را گره یکه در V می‌نامند. معادله (۱۳۰۵) قضیه زیر را ثابت می‌کند.

قضیه ۱۲۰۵. فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل متقارن بر فضای اقلیدسی حقیقی V بوده، و $Q(x) = (T(x), x)$. در این صورت، مقدارهای ویژه T (در صورت وجود) در میان مقادیری است که Q برگره یکه در V می‌گیرد.

مثال. فرض کنیم $V = V_2(\mathbb{R})$ با پایه معمولی (i, j) و ضرب نقطه‌ای معمولی به عنوان

ضرب داخلی باشد. همچنین، T تبدیل متقارن با ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ باشد. در این

صورت، فرم درجه دوم T عبارت است از

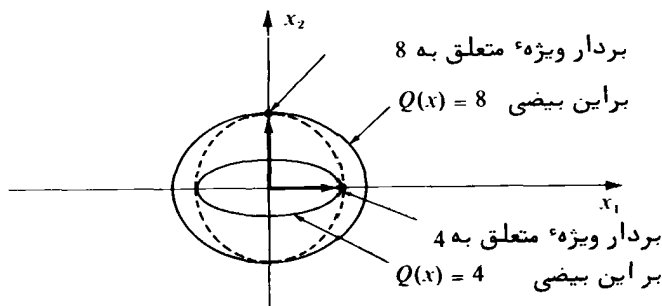
$$Q(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_i x_j = 4x_1^2 + 8x_2^2.$$

مقدارهای ویژه T عبارتند از $\lambda_1 = 4$ ، $\lambda_2 = 8$. به آسانی معلوم می‌شود که این مقدارهای ویژه به ترتیب مینیمم و ماکزیممی است که Q بر دایره یکه $x_1^2 + x_2^2 = 1$ می‌گیرد. در واقع، برای دایره داریم

$$Q(x) = 4(x_1^2 + x_2^2) + 4x_2^2 = 4 + 4x_2^2,$$

که در آن $-1 \leq x_2 \leq 1$. این کوچکترین مقدار خود، یعنی 4، را وقتی دارد که $x_2 = 0$ ، و بزرگترین مقدار خود، یعنی 8، را وقتی دارد که $x_2 = \pm 1$.

* بخشهای ستاره دار را می‌توان، بی‌تنگ به تسلسل مطلب خللی وارد شود، حذف کرد یا به تعویق انداخت.



شکل ۴۰۵ رابطه هندسی بین مقادیر ویژه T و مقادیر Q بر کره یک با یک مثال دوبعدی مجسم شده است.

شکل ۴۰۵ دایره یک‌دو بیضی را نشان می‌دهد. بیضی داخلی دارای معادله دکارتی $4x_1^2 + 8x_2^2 = 4$ است، و از تمام نقاط $x = (x_1, x_2)$ در صفحه تشکیل شده که در $Q(x) = 4$ صدق می‌کنند. بیضی خارجی دارای معادله دکارتی $4x_1^2 + 8x_2^2 = 8$ است، و از جمیع نقاط صادق در $Q(x) = 8$ متشکل است. نقاط $(\pm 1, 0)$ ، که در آن‌ها بیضی داخلی با دایره یک‌تماس دارد، بردارهای ویژه متعلق به مقدار ویژه 4 هستند. نقاط $(0, \pm 1)$ واقع بر بیضی خارجی بردارهای ویژه متعلق به مقدار ویژه 8 می‌باشند.

مثال پیش‌خواص اکستریمی مقادیر ویژه را که به‌طور کلی برقرارند توصیف می‌کند. در بخش بعد ثابت می‌کنیم که کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه (در صورت وجود) همیشه مینیمم و ماکزیمم Q بر کره یک‌تماس است. در بحث ما از این خواص اکستریمی از قضیه زیر در باب فرمهای درجه دوم استفاده می‌شود. باید توجه داشت که در این قضیه لازم نیست V با بعد متناهی باشد.

قضیه ۱۳۰۵. فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل متقارن بر فضای اقلیدسی حقیقی V با فرم درجه دوم $Q(x) = (T(x), x)$ باشد. همچنین، Q بر V تغییر علامت ندهد. در این صورت، اگر برای x در V ، $Q(x) = 0$ ، نیز خواهیم داشت $T(x) = 0$. به عبارت دیگر، اگر Q تغییر علامت ندهد، فقط بر فضای پوچ T صفر خواهد شد.

برهان. فرض کنیم به ازای x در V ، $Q(x) = 0$ ، و y عنصری در V باشد. t حقیقی و دلخواه را اختیار کرده و $Q(x + ty)$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از خاصیت خطی T ، خاصیت خطی ضرب داخلی، و تقارن T ، داریم

$$\begin{aligned} Q(x + ty) &= (T(x + ty), x + ty) = (T(x) + tT(y), x + ty) \\ &= (T(x), x) + t(T(x), y) + t(T(y), x) + t^2(T(y), y)) \\ &= Q(x) + 2t(T(x), y) + t^2Q(y) = at + bt^2, \end{aligned}$$

که $a = 2(T(x), y)$ و $b = Q(y)$. اگر Q بر V نامنفی باشد، نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$at + bt^2 \geq 0, \text{ حقیقی } t \text{ به ازای هر } t$$

به عبارت دیگر، چند جمله‌ای درجه دوم $p(t) = at + bt^2$ مینیمم خود را در $t = 0$ دارد. لذا، $p'(0) = 0$. اما $p'(0) = a = 2(T(x), y)$ ؛ در نتیجه، $(T(x), y) = 0$ چون y دلخواه بود، می‌توان در حالت خاص $y = T(x)$ را اختیار کرد و به دست آورد که $(T(x), T(x)) = 0$. این ثابت می‌کند که $T(x) = 0$.

اگر Q بر V نامثبت باشد، به ازای هر t خواهیم داشت $p(t) = at + bt^2 \leq 0$ ؛ در نتیجه، p ماکزیمم خود را در $t = 0$ دارد؛ و در نتیجه، مثل قبل، $p'(0) = 0$.

* ۱۷.۵ خواص اکستریمال مقدارهای ویژه: یک تبدیل متقارن

حال ثابت می‌کنیم که مقادیر اکستریمال یک فرم درجه دوم بر کره^۱ یکه مقدارهای ویژه می‌باشند.

قضیه ۱۴.۵. فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ یک تبدیل خطی متقارن بر فضای اقلیدسی حقیقی V بوده، و $Q(x) = (T(x), x)$. فرض کنیم در میان تمام مقادیری که Q بر کره^۱ یکه می‌گیرد یک اکستریمم* (ماکزیمم یا مینیمم) در نقطه^۲ u که $(u, u) = 1$ وجود داشته باشد. در این

* اگر V با بعد نامتناهی باشد، فرم درجه دوم Q لزوماً "بر کره^۱ یکه اکستریمم ندارد. این حالتی است که T مقدار ویژه ندارد. در حالت ابعاد متناهی، Q همیشه جایی بر کره^۱ یکه ماکزیمم و مینیمم دارد. این امر نتیجه‌ای است از یک قضیه^۳ کلیدر در باب مقادیر اکستریمم توابع پیوسته. برای حالت خاصی از این قضیه، ر.ک. بخش ۱۶.۹.

صورت، u یک بردار ویژه برای T است؛ مقدار ویژه نظیر $Q(u)$ است، یعنی مقدار اکستريم Q برگرفته يکه.

برهان. فرض کنیم Q در u مینیمم داشته باشد. در این صورت، چنین داریم:

$$(14.5) \quad \text{بهازای هر } x \text{ که } (x, x) = 1, Q(x) \geq Q(u).$$

فرض کنیم $\lambda = Q(u)$. اگر $(x, x) = 1$ ، داریم $Q(u) = \lambda(x, x) = \lambda(x, x)$ ؛ در نتیجه، نامساوی (14.5) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(15.5) \quad (T(x), x) \geq (\lambda x, x)$$

مشروط بر اینکه $(x, x) = 1$. حال ثابت می کنیم (15.5) بهازای هر x در V معتبر است. فرض کنیم $\|x\| = a$. پس $x = ay$ ، که در آن $\|y\| = 1$. بنابراین،

$$(\lambda x, x) = a^2(\lambda y, y) \quad \text{و} \quad (T(x), x) = (T(ay), ay) = a^2(T(y), y)$$

اما $(T(y), y) \geq (\lambda y, y)$ ، زیرا $(y, y) = 1$. با ضرب دو طرف این نامساوی در a^2 ، (15.5) بهازای $x = ay$ به دست می آید.

چون

$$(T(x), x) - (\lambda x, x) = (T(x) - \lambda x, x)$$

می توان نامساوی (15.5) را به شکل $(T(x) - \lambda x, x) \geq 0$ نوشت، یا

$$(16.5) \quad (S(x), x) \geq 0, \quad \text{که در آن } S = T - \lambda I.$$

وقتی $x = u$ ، نامساوی (14.5)، و در نتیجه (16.5)، را داریم. تبدیل خطی S متقارن است. نامساوی (16.5) می گوید که فرم درجه دوم $Q_1(x) = (S(x), x)$ ، که با $Q_1(u) = 0$ ، $Q_1(u) = 0$ ، لذا، طبق قضیه 13.5، باید داشته باشیم $S(u) = 0$. به عبارت دیگر، $T(u) = \lambda u$ ؛ در نتیجه، u یک بردار ویژه برای T است، و $Q(u) = \lambda$ مقدار ویژه نظیر می باشد. این برهان را در صورتی که Q در u مینیمم داشته باشد تمام می کند.

اگر در u ماکزیمم وجود داشته باشد، نامساویهای برهان قبلی عکس می شوند و قضیه 13.5 را در مورد فرم درجه دوم نامثبت Q_1 به کار می بریم.

* 18.5 حالت ابعاد متناهی

حال فرض کنیم $\dim V = n$. در این صورت، T دارای n مقدار ویژه حقیقی است که

می توان آنها را به ترتیب صعودی آراست :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

طبق قضیه ۱۴.۵، کوچکترین مقدار ویژه λ_1 مینیمم Q برکره^{*} یکه است، و بزرگترین مقدار ویژه ماکزیمم Q برکره^{*} یکه می باشد. حال نشان می دهیم که مقادیر ویژه^{*} میانی نیز به عنوان مقادیر اکستریم Q ، که به زیر مجموعه های معینی از کره^{*} یکه محدود شده، ظاهر می شوند.

فرض کنیم u_1 یک بردار ویژه برکره^{*} یکه باشد که Q را مینیمم می سازد. در این صورت، $\lambda_1 = Q(u_1)$. اگر λ یک مقدار ویژه غیر از λ_1 باشد، هر بردار ویژه^{*} متعلق به λ باید متعامد به u_1 باشد. لذا، طبیعی است که این بردار ویژه را در متمم متعامد زیر فضای پیموده شده به وسیله u_1 جستجو کنیم.

فرض کنیم S زیر فضای پیموده شده به وسیله u_1 باشد. متمم متعامد S^\perp از تمام عناصری در V تشکیل شده که به u_1 متعامدند. بخصوص، S^\perp از تمام بردارهای ویژه^{*} متعلق به مقادیر ویژه^{*} $\lambda_1 \neq \lambda$ تشکیل شده است. به آسانی تحقیق می شود که $\dim S^\perp = n - 1$ و S^\perp ، T را بتوی خود آن می نگارد. ^{*} فرض کنیم S_{n-1} کره^{*} یکه در زیر فضای $(n-1)$ بعدی S^\perp باشد. (کره^{*} یکه S_{n-1} زیر مجموعه^{*} کره^{*} یکه در V است.) با اعمال قضیه^{*} ۱۴.۵ در مورد زیر فضای S^\perp ، درمی یابیم که $\lambda_2 = Q(u_2)$ ، که در آن u_2 نقطه ای است که Q را بر S_{n-1} مینیمم می کند.

بردار ویژه^{*} بعدی λ_3 را می توان به همین نحو به صورت مقدار مینیمم Q برکره^{*} یکه^{*} S_{n-2} در فضای $(n-2)$ بعدی مرکب از تمام عناصر متعامد به u_1 و u_2 به دست آورد. با ادامه^{*} این کار معلوم می شود که هر مقدار ویژه^{*} λ_k مقدار مینیممی است که Q بر کره^{*} یکه^{*} S_{n-k+1} در یک زیر فضای با بعد $n-k+1$ می گیرد. ماکزیمم این مینیممها نیز مقدار ماکزیممی است که Q بر هر کره^{*} S_{n-k+1} می گیرد. مجموعه^{*} بردارهای ویژه^{*} u_1, \dots, u_n نظیر یک پایه^{*} متعامد یکه برای V تشکیل می دهند.

۱۹.۵ تبدیلات یکه ای

این فصل را با بحثی مختصر از رده^{*} مهم دیگری از تبدیلات به نام تبدیلات یکه ای به

* این اثبات در برهان قضیه^{*} ۴.۵، بخش ۶.۵، صورت گرفت.

پایان می‌بریم. این تبدیلات در حالت ابعاد متناهی با ماتریسهای یکه‌ای نمایش داده می‌شوند.

تعریف. فرض کنیم E یک فضای اقلیدسی و V زیر فضایی از E باشد. تبدیل خطی $T: V \rightarrow E$ بر V یکه‌ای نام دارد اگر که

$$(17.5) \quad (T(x), T(y)) = (x, y), \quad V \text{ در } x \text{ و } y$$

وقتی E یک فضای اقلیدسی حقیقی است، تبدیل یکه‌ای تبدیل متعامد نیز نامیده می‌شود.

معادله (17.5) این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویند T حاصل ضربهای داخلی را حفظ می‌کند. بنابراین، طبیعی است منتظر باشیم که T تعامد و نرمها را نیز حفظ کند، چرا که اینها از ضرب داخلی مشتق می‌شوند.

قضیه 15.5. هرگاه $T: V \rightarrow E$ یک تبدیل یکه‌ای بر V باشد، آنگاه به ازای هر x و y در V

$$(آ) \quad (x, y) = 0 \text{ ایجاب می‌کند که } (T(x), T(y)) = 0 \text{ تعامد را حفظ می‌کند.} ;$$

$$(ب) \quad \|T(x)\| = \|x\| \text{ (نرمها را حفظ می‌کند).} ;$$

$$(پ) \quad \|x - y\| = \|T(x) - T(y)\| \text{ (فواصل را حفظ می‌کند).} ;$$

$$(ت) \quad T \text{ معکوسپذیر است، و } T^{-1} \text{ بر } T(V) \text{ یکه‌ای می‌باشد.}$$

برهان. قسمت (آ) فوراً "از معادله" (17.5) نتیجه می‌شود. قسمت (ب) با فرض $x = y$ در (17.5) به دست می‌آید. قسمت (پ) از (ب) حاصل می‌شود، زیرا

$$T(x) - T(y) = T(x - y).$$

برای اثبات (ت)، (ب) را به کار می‌بریم که نشان می‌دهد که $T(x) = 0$ تساوی

$x = 0$ را ایجاب می‌کند؛ در نتیجه، T معکوسپذیر می‌باشد. هرگاه $x \in T(V)$ و $y \in T(V)$ ،

می‌توانیم بنویسیم $x = T(u)$ ، $y = T(v)$ ؛ در نتیجه، خواهیم داشت

$$(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) = (u, v) = (T(u), T(v)) = (x, y).$$

لذا، T^{-1} بر $T(V)$ یکه‌ای می‌باشد.

با توجه به مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۶.۵. فرض کنیم $T: V \rightarrow E$ یک تبدیل یک‌کای بر V باشد.

(آ) هرگاه T دارای بردار ویژه λ باشد، آنگاه $|\lambda| = 1$.

(ب) هرگاه x و y بردارهای ویژه متعلق به مقادیر ویژه متمایز λ و μ باشند، آنگاه x و y متعامد می‌باشند.

(پ) هرگاه $V = E$ ، $\dim V = n$ ، و V یک فضای مختلط باشد، آنگاه بردارهای ویژه‌ای چون u_1, \dots, u_n از T وجود دارند که یک پایه متعامد یک‌کای برای V می‌سازند. ماتریس T نسبت به این پایه ماتریس قطری $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ است، که در آن λ_k مقدار ویژه متعلق به u_k می‌باشد.

برهان. برای اثبات (آ) فرض کنیم x یک بردار ویژه متعلق به λ باشد. پس $x \neq 0$

و $T(x) = \lambda x$. با اختیار $y = x$ در معادله (۱۷.۵) خواهیم داشت

$$\lambda \bar{\lambda}(x, x) = (x, x) \quad \text{یا} \quad (\lambda x, \lambda x) = (x, x)$$

چون $(x, x) > 0$ و $|\lambda|^2 = \lambda \bar{\lambda}$ ، این ایجاب می‌کند که $|\lambda| = 1$.

برای اثبات (ب) می‌نویسیم $T(x) = \lambda x$ ، $T(y) = \mu y$ ، و حاصل ضرب داخلی

$(T(x), T(y))$ را به دو راه حساب می‌کنیم. چون T یک‌کای است، داریم

$$(T(x), T(y)) = (x, y).$$

و نیز، چون x و y بردارهای ویژه‌اند، خواهیم داشت

$$(T(x), T(y)) = (\lambda x, \mu y) = \lambda \bar{\mu}(x, y).$$

بنابراین، $(x, y) = \lambda \bar{\mu}(x, y)$ ؛ در نتیجه، $(x, y) = 0$ مگر آنکه $\lambda \bar{\mu} = 1$. اما، بنابر

(آ)، $\lambda \bar{\lambda} = 1$ ؛ در نتیجه، اگر می‌داشتیم $\lambda \bar{\mu} = 1$ ، نیز خواهیم داشت

$\lambda \bar{\lambda} = \lambda \bar{\mu}$ ، $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$ ، $\lambda = \mu$ ، که با فرض متمایز بودن λ و μ در تضاد است. بنابراین،

$$(x, y) = 0 \quad \text{و} \quad \lambda \bar{\mu} \neq 1$$

قسمت (پ) به استقرا بر n و خیلی شبیه به اثبات قضیه ۴.۵، که نتیجه نظیر

برای عملگرهای هرمیتی است، ثابت می‌شود. تنها تغییر لازم در آن قسمت از برهان

است که نشان می‌دهد T ، S^\perp را بتوی خودش می‌نگارد، که

$$S^\perp = \{x \mid x \in V, (x, u_1) = 0\}.$$

در اینجا u_1 یک بردار ویژه T با مقدار ویژه λ_1 است. از معادله $T(u_1) = \lambda_1 u_1$ معلوم می شود که

$$u_1 = \lambda_1^{-1} T(u_1) = \bar{\lambda}_1 T(u_1),$$

زیرا $|\lambda_1| = |\bar{\lambda}_1| = 1$. حال x دلخواهی در S^\perp اختیار و توجه می کنیم که

$$(T(x), u_1) = (T(x), \bar{\lambda}_1 T(u_1)) = \lambda_1 (T(x), T(u_1)) = \lambda_1 (x, u_1) = 0.$$

بنابراین، اگر $x \in S^\perp$ ، $T(x) \in S^\perp$ ؛ در نتیجه، T ، S^\perp را بتوی خودش می نگارد. قیه برهان مثل برهان قضیه ۴.۵ است؛ لذا، جزئیات را تکرار نمی کنیم.

دو قضیه بعدی خواص تبدیلات یک‌های بریک فضای با بعد متناهی را توصیف می کنند. ما فقط نکات مهم برهانها را ذکر می کنیم.

قضیه ۱۷.۵. فرض کنیم $\dim V = n$ ، و $E = (e_1, \dots, e_n)$ یک پایه ثابت V باشد.

در این صورت، تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ یک‌های است اگر و فقط اگر

$$(18.05) \quad (T(e_i), T(e_j)) = (e_i, e_j), \quad i, j \text{ هر یک}$$

بخصوص، اگر E متعامد یک باشد، T یک‌های است اگر و فقط اگر T ، E را بروی یک پایه متعامد یکه بنگارد.

شرح برهان. می نویسیم $y = \sum y_j e_j$ ، $x = \sum x_i e_i$. در این صورت، داریم

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j),$$

و

$$(T(x), T(y)) = \left(\sum_{i=1}^n x_i T(e_i), \sum_{j=1}^n y_j T(e_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (T(e_i), T(e_j)).$$

حال (x, y) را با $(T(x), T(y))$ مقایسه می کنیم.

قضیه ۱۸.۵. فرض کنیم $\dim V = n$ ، و (e_1, \dots, e_n) یک پایه متعامد یکه V باشد.

همچنین، $A = (a_{ij})$ نمایش ماتریسی تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ نسبت به این پایه باشد.

در این صورت، T یک‌های است اگر و فقط اگر A یک‌های باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر

$$(19.05) \quad A^* A = I.$$

طرح برهان. چون (e_i, e_j) درایه ij ماتریس همانی است، معادله (۱۹۰۵) ایجاب می‌کند که

$$(20.5) \quad (e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \bar{a}_{kj}.$$

چون A ماتریس T است، خواهیم داشت $T(e_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k$ ، $T(e_j) = \sum_{r=1}^n a_{rj} e_r$ در نتیجه،

$$(T(e_i), T(e_j)) = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} e_k, \sum_{r=1}^n a_{rj} e_r \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n a_{ki} \bar{a}_{rj} (e_k, e_r) = \sum_{k=1}^n a_{ki} \bar{a}_{kj}.$$

حال این را با (۲۰۰۵) مقایسه و از قضیه ۱۷۰۵ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۹۰۵. هر ماتریس یگهای A دارای خواص زیر است:

(آ) A نامنفرد است و $A^{-1} = A^*$ ؛

(ب) هر یک از A' ، \bar{A} ، و A^* یک ماتریس یگهای است؛

(پ) مقدارهای ویژه A اعدادی مختلط با قدر مطلق یک‌اند؛

(ت) $|\det A| = 1$ ؛ هرگاه A حقیقی باشد، آنگاه $\det A = \pm 1$.

اثبات قضیه ۱۹۰۵ تمرین و به عهده خواننده است.

۲۰۰۵ تمرین

۱. (آ) فرض کنیم $T: V \rightarrow V$ تبدیل $T(x) = cx$ باشد، که در آن c یک ثابت

معین است. ثابت کنید T یگهای است اگر و فقط اگر $|c| = 1$.

(ب) ثابت کنید که اگر V یک بعدی باشد، تنها تبدیلات یگهای بر V همانهای

وصف شده در (آ) هستند. بخصوص، اگر V یک فضای حقیقی یک بعدی باشد،

فقط دو تبدیل متعامد وجود دارند: $T(x) = x$ و $T(x) = -x$.

۲. احکام زیر را در مورد ماتریس متعامد حقیقی $n \times n$ ، A ثابت کنید:

(آ) هرگاه λ یک مقدار ویژه حقیقی A باشد، آنگاه $\lambda = 1$ یا $\lambda = -1$ ؛

(ب) هرگاه λ یک مقدار ویژه مختلط A باشد، آنگاه مزدوج مختلط $\bar{\lambda}$ نیز یک

مقدار ویژه A است. به عبارت دیگر، مقدارهای ویژه غیر حقیقی A به صورت

جفت‌های مزدوج ظاهر می‌شوند :

(پ) هرگاه n فرد باشد، آنگاه A دست کم یک مقدار ویژه حقیقی دارد .

۳ . فرض کنید V یک فضای اقلیدسی حقیقی با بعد n باشد. تبدیل متعامد $T: V \rightarrow V$ با دترمینان 1 یک دوران نامیده می‌شود. ثابت کنید که اگر n فرد باشد، 1 یک مقدار ویژه برای T است. این نشان می‌دهد که هر دوران یک فضای فرد بعدی دارای یک محور ثابت است. [راهنمایی . از تمرین ۲ استفاده نمایید .]

۴ فرض کنید A یک ماتریس متعامد حقیقی با مقدار ویژه -1 و از درجه k تکرار k باشد. ثابت کنید که $\det A = (-1)^k$.

۵ . ثابت کنید که اگر T خطی و نرم نگهدار باشد، T یکه‌ای است .

۶ . ثابت کنید که اگر $T: V \rightarrow V$ یکه‌ای و هرمیتی باشد، $T^2 = I$.

۷ . فرض کنید (e_1, \dots, e_n) و (u_1, \dots, u_n) دو پایه متعامد یکه برای فضای اقلیدسی V باشند. ثابت کنید یک تبدیل یکه‌ای مانند T هست که یکی از این پایه‌ها را بروی دیگری می‌نگارد .

۸ . a ی حقیقی را طوری بیابید که ماتریس زیر یکه‌ای باشد :

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}a(2i-1) \\ ia & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}a(1-i) \\ a & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}a(2-i) \end{bmatrix} .$$

۹ . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس هرمیتی اریب باشد، $I - A$ و $I + A$ هر دو منفردند و $(I - A)(I + A)^{-1}$ یکه‌ای می‌باشد .

۱۰ . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس یکه‌ای بوده و $I + A$ نامنفرد باشد، $(I - A)(I + A)^{-1}$ هرمیتی اریب است .

۱۱ . ثابت کنید که اگر A هرمیتی باشد، $A - iI$ نامنفرد است و $(A - iI)^{-1}(A + iI)$ یکه‌ای .

۱۲ . ثابت کنید هر ماتریس یکه‌ای را می‌توان به وسیله یک ماتریس یکه‌ای قطری کرد .

۱۳ . یک ماتریس مربعی را نرمال گویند اگر که $AA^* = A^*A$. از انواع ماتریسهای زیر کدامها نرمال‌اند :

(آ) ماتریسهای هرمیتی؛

(ب) ماتریسهای هرمیتی اریب؛

(پ) ماتریسهای متقارن؛

(ت) ماتریسهای متقارن اریب؛

(ث) ماتریسهای یکه‌ای؛

(ج) ماتریسهای متعامد؟

۱۴. ثابت کنید که اگر A یک ماتریس نرمال بوده $(AA^* = A^*A)$ و U یک ماتریس یکه‌ای باشد، U^*AU نرمال است.

معادلات دیفرانسیل خطی

۱۰۶ مقدمه تاریخی

سرآغاز معادلات دیفرانسیل: قرن هفدهم میلادی است، و آن زمانی است که نیوتن^۱، لایب نیتز، و برنولیه‌ها^۲ موفق به حل چند معادله^۳ دیفرانسیل مراتب اول و دوم ساده که از هندسه و مکانیک ناشی شده بودند گردیدند. این کشفیات اولیه، که شروعشان حدود ۱۶۹۰ بود، ظاهراً^۴ این فکر را پیش آورد که جواب همه^۵ معادلات دیفرانسیل مبتنی بر مسائل هندسی و فیزیکی را می‌توان برحسب توابع مقدماتی آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان کرد. از اینرو، اغلب کارهای اولیه در جهت دستیابی به روشهای ابتکاری برای حل معادلات دیفرانسیل به‌وسیله^۶ ابزارهای مقدماتی، یعنی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، ترکیب، و انتگرالگیری، است که تعدادی متناهی بار بر توابع آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت می‌گیرند.

چند روش خاص نظیر جدا سازی متغیرها و استفاده از سازه‌های انتگرالگیری قبل از پایان قرن هفدهم بیش و کم به‌طور تصادفی طرح شده بودند. در قرن هجدهم روندهایی اصولی‌تر، عمدتاً^۷ به‌وسیله^۸ اویلر^۹، لاگرانژ^{۱۰}، و لاپلاس^{۱۱}، ارائه شدند. سرعت معلوم شد که معادلات دیفرانسیل نسبتاً^{۱۲} کمی را می‌توان با ابزارهای مقدماتی حل کرد. ریاضیدانان رفته رفته دریافته‌اند که تلاش در کشف روشهایی برای حل همه^{۱۳} معادلات دیفرانسیل بی‌پایه است. در عوض، پرسش در این باب که یک معادله^{۱۴} دیفرانسیل جواب دارد یا نه، و در صورت داشتن، سعی دریافتن خواص جواب از خود معادله^{۱۵} دیفرانسیل

بیشتر مفید است. در این چارچوب، ریاضیدانان معادلات دیفرانسیل را منابع جدیدی از توابع یافتند. یک دوره مهم در تاریخ این نظریه اوایل قرن نوزدهم بود، که سیک کلی کار با روش دقیقتری در حساب دیفرانسیل و انتگرال همسو شد. در سالهای ۱۸۲۰ تا ۱۸۳۰، کشی اولین "قضیه وجودی" معادلات دیفرانسیل را به دست آورد. وی ثابت کرد که هر معادله مرتبه اول به شکل

$$y' = f(x, y),$$

در صورتی که طرف راست آن $f(x, y)$ در شرایط عمومی معینی صدق کند، دارای جواب است. یک نمونه مهم معادله ریکاتی^۱ است:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

که در آن P ، Q ، و R توابعی معلوم اند. کارهای کشی وجود جواب معادله ریکاتی در هر بازه باز مانند $(-r, r)$ حول مبدأ، در صورتی که P ، Q ، و R در $(-r, r)$ بسط به صورت سری توانی داشته باشند، را ایجاب می کنند. در سال ۱۸۴۱، ژوزف لیوویل (۱۸۸۲-۱۸۰۹) نشان داد که در بعضی حالات نمی توان این جواب را با واسایل مقدماتی به دست آورد. تجربه نشان داده که جز در مواردی، به دست آوردن نتایج با عمومیت بسیار در باب جوابهای معادلات دیفرانسیل مشکل است. در بین این معادلات، معادلات دیفرانسیل خطی هستند، که با تنوع بسیار در مسائل علمی ظاهر می شوند. چند نوع ساده آن در جلد یک مطرح شدند - معادلات خطی مرتبه اول و معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت. بخش زیر مروری است بر نتایج اصلی مربوط به این معادلات.

۲.۶ مرور نتایج مربوط به معادلات خطی مراتب اول و دوم

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول معادله ای است به شکل

$$(1.6) \quad y' + P(x)y = Q(x),$$

که در آن P و Q توابعی معلوم اند. در جلد یک برای این معادله یک قضیه وجودی یکتایی ثابت کردیم (قضیه ۳.۸)، که محدداً آن را در اینجا بیان می کنیم.

قضیه ۱.۶. فرض کنیم P و Q بر بازه J پیوسته باشند. نقطه a را در J اختیار کرده، فرض می کنیم b عدد حقیقی دلخواهی باشد. در این صورت، یک و فقط یک تابع

مانند $y = f(x)$ هست که در معادلهٔ دیفرانسیل (۱.۶) و شرط اولیهٔ $f(a) = b$ صدق می‌کند. این تابع با فرمول صریح

$$(۲.۶) \quad f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)} dt$$

داده می‌شود، که در آن

$$A(x) = \int_a^x P(t) dt .$$

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم معادلاتی به شکل زیر می‌باشند:

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x).$$

اگر ضرایب P_0, P_1, P_2 و طرف راست R بر بازه‌ای چون J پیوسته بوده، و P_0 بر J هرگز صفر نباشد، قضیهٔ وجودی (مذکور در بخش ۵.۶) همیشه وجود جوابها را روی بازهٔ J تضمین خواهد کرد. با این وجود، فرمولی کلی شبیه به (۲.۶) برای بیان این جوابها برحسب P_0, P_1, P_2 ، و R وجود ندارد. از اینرو، حتی در این تعمیم نسبتاً "ساده" (۱.۶)، نظریهٔ جز در حالات خاص خیلی ناقص است. چنانچه ضرایب ثابت بوده و R صفر باشد، همهٔ جوابها را می‌توان به‌طور صریح برحسب توابع چند جمله‌ای، نمایی، و مثلثاتی به‌وسیلهٔ قضیهٔ زیر که در جلد یک ثابت شد (قضیهٔ ۷.۸) معین کرد.

قضیهٔ ۲.۶. معادلهٔ دیفرانسیل

$$(۳.۶) \quad y'' + ay' + by = 0$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن a و b ثابتهای حقیقی معلومی هستند. فرض کنیم $d = a^2 - 4b$. در این صورت، هر جواب (۳.۶) بر بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ به شکل

$$(۴.۶) \quad y = e^{-ax/2} [c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)]$$

است، که در آن c_1 و c_2 ثابت بوده، و توابع u_1 و u_2 طبق علامت جبری d به صورت زیر تعیین می‌شوند:

(آ) هرگاه $d = 0$ ، آنگاه $u_1(x) = 1$ و $u_2(x) = x$ ؛

(ب) هرگاه $d > 0$ ، آنگاه $u_1(x) = e^{kx}$ و $u_2(x) = e^{-kx}$ ، که در آنها $k = \frac{1}{2}\sqrt{d}$ ؛

(پ) هرگاه $d < 0$ ، آنگاه $u_1(x) = \cos kx$ و $u_2(x) = \sin kx$ ، که در آنها $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$.

عدد $d = a^2 - 4b$ مبین معادلهٔ درجهٔ دوم

$$(۵۰۶) \quad r^2 + ar + b = 0$$

است. این معادله معادله مشخص معادله دیفرانسیل (۳۰۶) است. ریشه‌های آن عبارتند از

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{d}}{2}, \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{d}}{2}.$$

علامت جبری d سرشت این ریشه‌ها را تعیین می‌کند. اگر $d > 0$ ، هر دو ریشه حقیقی اند و جواب (۴۰۶) را می‌توان به شکل

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

بیان کرد. اگر $d < 0$ ، ریشه‌های r_1 و r_2 اعداد مختلط مزدوج می‌باشند. هریک از توابع نمایی مختلط $f_1(x) = e^{r_1 x}$ و $f_2(x) = e^{r_2 x}$ یک جواب مختلط معادله دیفرانسیل (۳۰۶) است. جوابهای حقیقی را با معاینه قسمت‌های حقیقی و موهومی f_1 و f_2 به دست می‌آوریم. چنانچه بنویسیم $r_1 = -\frac{1}{2}a + ik$ ، $r_2 = -\frac{1}{2}a - ik$ ، که در آن $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$ داریم،

$$f_1(x) = e^{r_1 x} = e^{-ax/2} e^{ikx} = e^{-ax/2} \cos kx + i e^{-ax/2} \sin kx$$

و

$$f_2(x) = e^{r_2 x} = e^{-ax/2} e^{-ikx} = e^{-ax/2} \cos kx - i e^{-ax/2} \sin kx.$$

جواب عمومی به شکل معادله (۴۰۶) ترکیبی خطی از قسمت‌های حقیقی و موهومی $f_1(x)$ و $f_2(x)$ است.

۳۰۶ تمرین

این تمرینها از فصل ۸ در جلد یک انتخاب شده است تا مروری باشد بر مطالب مقدماتی معادلات دیفرانسیل خطی مراتب اول و دوم. معادلات خطی مرتبه اول. در تمرینهای ۱، ۲، ۳، مسئله با مقدار اولیه را بر بازه داده شده حل کنید.

۱. $y' - 3y = e^{2x}$ بر $(-\infty, +\infty)$ ، با $y = 0$ وقتی $x = 0$.

۲. $xy' - 2y = x^5$ بر $(0, +\infty)$ ، با $y = 1$ وقتی $x = 1$.

۳. $y' + y \tan x = \sin 2x$ بر $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ ، با $y = 2$ وقتی $x = 0$.

۴. اگر تعدادی از یک نوع باکتری بمیزانی متناسب با تعداد آنها در هر لحظه رشد کنند و عده آنها در هر ساعت دو برابر گردد، افزایش آنها پس از دو ساعت چه خواهد بود؟
۵. یک منحنی با معادله دکارتی $y = f(x)$ از مبدأ می‌گذرد. خطوط برسوم از یک

نقطه دلخواه منحنی به موازات محورهای مختصات یک مستطیل می سازند ، که دو ضلعش بر محورها قرار دارند . منحنی هرچنین مستطیلی را به دو ناحیه A و B تقسیم می کند ، که یکی مساحتی n برابر دیگری دارد . تابع f را پیدا نمایید .

۶ . (آ) فرض کنید u یک جواب ناصفر معادله مرتبه دوم $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد . نشان دهید که جانشانی $y = uv$ معادله

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

را به یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به v تبدیل می کند .

(ب) یک جواب ناصفر معادله $y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 0$ را با معاینه به دست آورده ، با استفاده از روش قسمت (آ) ، جوابی از معادله

$$y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 2xe^{-x^2/3}$$

را بیابید که . وقتی $x = 0$ ، $y = 0$ و $y' = 4$.

معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت . در تمرینهای ۷ تا ۱۰ ، همه جوابهای بر $(-\infty, +\infty)$ را پیدا نمایید .

$$y'' - 4y = 0 \quad . ۷ \quad y'' + 4y = 0 \quad . ۸$$

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \quad . ۹ \quad y'' + 2y' + y = 0 \quad . ۱۰$$

۱۱ . تمام مقادیر ثابت k را طوری بیابید که معادله دیفرانسیل $y'' + ky = 0$ یک جواب نابدیهی مانند $y = f_k(x)$ داشته باشد که $f_k(0) = f_k(1) = 0$. به ازای هر مقدار مجاز از k ، جواب نظیر $y = f_k(x)$ را مشخص کنید . هم مقادیر مثبت و هم منفی k را در نظر بگیرید .

۱۲ . ثابت کنید که اگر (a, b) یک نقطه در صفحه بوده و m عددی حقیقی باشد ، معادله دیفرانسیل $y'' + k^2y = 0$ دقیقاً یک جواب دارد که نمودارش از نقطه (a, b) گذشته و در آن دارای شیب m باشد . حالت $k = 0$ را جداگانه بررسی کنید .

۱۳ . در هر حالت ، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بیابید که u_1 و u_2 در آن صدق کنند .

$$(آ) \quad u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = e^{-x} \quad (ب) \quad u_1(x) = xe^{2x}, \quad u_2(x) = e^{2x}$$

$$(پ) \quad u_1(x) = e^{-x/2} \cos x, \quad u_2(x) = e^{-x/2} \sin x$$

$$(ت) \quad u_1(x) = \sin(2x + 1), \quad u_2(x) = \sin(2x + 2)$$

$$(ث) \quad u_1(x) = \cosh x, \quad u_2(x) = \sinh x$$

۱۴ . جسمی دارای حرکت توافقی ساده است . تغییر مکان اولیه آن ۱ ، سرعتش ۱ ، و شتابش ۱۲- است . تغییر مکان و شتاب را وقتی سرعت $\sqrt{8}$ است حساب کنید .

۴.۶ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n معادله‌ای است به شکل

$$(۶.۶) \quad P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = R(x).$$

توابع P_0, P_1, \dots, P_n که در مشتقات مختلف تابع مجهول y ضرب شده‌اند ضرایب معادله نامیده می‌شوند. در بحث کلی ما از معادله خطی، فرض این است که تمام ضرایب بر بازه‌ای چون J پیوسته‌اند. واژه "بازه" اشاره به یک بازه کراندار یا بازه بی‌کران دارد. در معادله دیفرانسیل (۶.۶)، ضریب پیشرو P_0 نقشی خاص دارد، چرا که مرتبه

معادله را مشخص می‌کند. نقاطی که در آنها $P_0(x) = 0$ نقاط منفرد معادله نامیده می‌شوند. نقاط منفرد گاهی مسائلی ایجاد می‌کنند که نیاز به بررسی خاص دارند. برای احتراز از این مسائل، فرض می‌کنیم تابع P_0 هرگز بر J صفر نمی‌شود. در این صورت، می‌توان دوطرف معادله (۶.۶) را بر P_0 تقسیم کرد و معادله دیفرانسیل را به شکلی با ضریب پیشرو 1 نوشت. بنابراین، در بحث کلی ما، فرض می‌شود که معادله دیفرانسیل به شکل

$$(۷.۶) \quad y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = R(x)$$

می‌باشد.

بحث معادلات خطی را می‌توان با استفاده از نماد عملگر ساده کرد. فرض کنیم $\mathcal{L}(J)$ فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازه J باشد. فرض کنیم $\mathcal{L}^n(J)$ زیر فضای مرکب از تمام توابع f باشد که n مشتق اول آن $f^{(n)}, f^{(n-1)}, \dots, f', f$ بر J موجود و پیوسته‌اند. فرض کنیم P_1, \dots, P_n ، n تابع در $\mathcal{L}(J)$ باشند، و عملگر $L: \mathcal{L}^n(J) \rightarrow \mathcal{L}(J)$ را که با

$$L(f) = f^{(n)} + P_1 f^{(n-1)} + \dots + P_n f$$

داده شده است در نظر می‌گیریم. خود عملگر L را گاهی به صورت

$$L = D^n + P_1 D^{n-1} + \dots + P_n$$

می‌نویسیم، که در آن D^k عملگر مشتق k ام می‌باشد. با نماد عملگر، معادله دیفرانسیل (۷.۶) به صورت ساده

$$(۸.۶) \quad L(y) = R$$

نوشته می‌شود. یک جواب این معادله تابع y در $\mathcal{L}^n(J)$ است که بر بازه J در (۸.۶) صدق کند.

به آسانی تحقیق می‌شود که $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ ، و نیز، به ازای هر ثابت

$cL(y) = cL(y)$ ، بنا براین، L یک عملگر خطی است. به این دلیل، معادله $L(y) = R$ را یک معادله خطی می نامند. عملگر L یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه n نامیده می شود.

به هر معادله خطی $L(y) = R$ می توان معادله

$$L(y) = 0$$

را مربوط کرد، که در آن طرف راست با صفر عوض شده است. این معادله معادله همگن نظیر به $L(y) = R$ نام دارد. وقتی R متحد صفر نباشد، معادله $L(y) = 0$ یک معادله غیرهمگن نامیده می شود. خواهیم دید که همیشه، وقتی معادله همگن نظیر قابل حل باشد، معادله غیر همگن نیز قابل حل است. از اینرو، بررسی خود را با معادله همگن آغاز می کنیم.

مجموعه جوابهای معادله همگن فضای بوج $N(L)$ عملگر L است. این فضا، فضای جواب معادله نیز نام دارد. فضای جواب یک زیر فضای $\mathcal{C}^n(J)$ است. با اینکه $\mathcal{C}^n(J)$ با بعد نامتناهی است، ثابت می شود که فضای جواب $N(L)$ همیشه با بعد متناهی است. در واقع، ثابت خواهیم کرد که

$$\dim N(L) = n, \quad (9.6)$$

که در آن n مرتبه عملگر L می باشد. معادله (۹.۶) قضیه بعدیت برای عملگرهای دیفرانسیل خطی نام دارد. قضیه بعدیت از قضیه وجودی - یکتایی، که در زیر مطرح می شود، نتیجه خواهد شد.

۵.۶ قضیه وجودی - یکتایی

قضیه ۳.۶. قضیه وجودی - یکتایی برای معادلات خطی مرتبه n . فرض کنیم P_1, P_2, \dots, P_n توابع پیوسته ای بر بازه J بوده، و L عملگر دیفرانسیل خطی

$$L = D^n + P_1 D^{n-1} + \dots + P_n$$

باشد. هرگاه $x_0 \in J$ و k_0, k_1, \dots, k_{n-1} عدد حقیقی باشند، آنگاه یک و فقط یک تابع مانند $y = f(x)$ هست که در معادله دیفرانسیل همگن $L(y) = 0$ بر J و نیز در شرایط اولیه

$$f(x_0) = k_0, f'(x_0) = k_1, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

صدق می کند.

تذکره. بردار $(f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0))$ در فضای n بردار مقدار اولیه f در x_0 خوانده می‌شود. قضیه ۳.۶ به ما می‌گوید که اگر نقطه x_0 را در J و یک بردار را در فضای n اختیار کنیم، معادله $L(y) = 0$ دقیقاً یک جواب $y = f(x)$ بر J با این بردار به عنوان بردار مقدار اولیه در x_0 دارد. مثلاً، وقتی $n = 2$ ، دقیقاً یک جواب با مقدار مقرر $f(x_0)$ و مشتق مقرر $f'(x_0)$ در نقطه مقرر x_0 وجود خواهد داشت.

برهان قضیه وجودی - یکتایی نتیجه‌ای است از قضایای وجودی - یکتایی کلیتر که در فصل ۷ مطرح می‌شود. برهانی دیگر برای حالت معادلات یا ضرایب ثابت در بخش ۹.۷ داده شده است.

۶.۶ بعد فضای جواب یک معادله خطی همگن

قضیه ۴.۶. قضیه بعدیت. فرض کنیم $L: \mathcal{C}^n(J) \rightarrow \mathcal{C}(J)$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه n باشد که با

$$L = D^n + P_1 D^{n-1} + \dots + P_n \quad (10.6)$$

داده شده است. در این صورت، فضای جواب معادله $L(y) = 0$ دارای بعد n می‌باشد.

برهان. فرض کنیم V_n فضای خطی n بعدی n تاییها از اسکالرها باشد. همچنین، T تبدیل خطی باشد که هر تابع f در فضای جواب $N(L)$ را بروی بردار مقدار اولیه f در x_0 می‌نگارد؛ یعنی،

$$T(f) = (f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0)),$$

که در آن x_0 یک نقطه ثابت در J است. قضیه یکتایی می‌گوید که $T(f) = 0$ ایجاب می‌کند که $f = 0$. از اینرو، طبق قضیه ۱۰.۲، T بر $N(L)$ یک به یک می‌باشد. بنابراین، T^{-1} نیز یک به یک است و V_n را بروی $N(L)$ می‌نگارد، و قضیه ۱۱.۲ نشان می‌دهد که

$$\dim N(L) = \dim V_n = n.$$

حال که می‌دانیم هر فضای جواب بعدش n است، هر مجموعه از n جواب مستقل یک پایه می‌باشد. لذا، به عنوان نتیجه‌ای از قضیه بعدیت، داریم

قضیه ۵.۶. فرض کنیم $L: \mathcal{C}^n(J) \rightarrow \mathcal{C}(J)$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه n باشد. هرگاه u_1, \dots, u_n جواب مستقل معادله دیفرانسیل همگن $L(y) = 0$ بر J باشد، آنگاه هر جواب $f(x) = \gamma$ بر J را می توان به شکل

$$(11.6) \quad f(x) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)$$

بیان کرد، که در آن c_1, \dots, c_n ثابت می باشند.

تذکره. چون همه جوابهای معادله دیفرانسیل $L(y) = 0$ از فرمول (۱۱.۶) به دست می آیند، ترکیب خطی سمت راست، با ثابتهای دلخواه c_1, \dots, c_n ، را گاهی جواب عمومی معادله دیفرانسیل می نامند.

قضیه بعدیت به ما می گوید که فضای جواب یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه n همیشه یک پایه مرکب از n جواب دارد، اما طرز تعیین این پایه را به ما نمی گوید. در واقع، برای تعیین یک پایه از جوابهای یک معادله خطی روش سادهای وجود ندارد. بهرحال، روشهای خاصی برای معادلات خاص تعبیه شده اند. از جمله این معادلات، معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت اند، که اینک به آنها می پردازیم.

۷.۶ جبر عملگرهای ثابت ضریب

یک عملگر ثابت ضریب A عملگری است خطی به شکل

$$(12.6) \quad A = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n,$$

که در آن D عملگر مشتق بوده و a_0, a_1, \dots, a_n ثابتهایی حقیقی می باشند. اگر $a_0 \neq 0$ ، گوئیم عملگر دارای مرتبه n است. عملگر A را می توان بر هر تابع مانند y که بر بازه ای n مشتق دارد اعمال کرد؛ نتیجه تابعی است مانند $A(y)$ که با

$$A(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y$$

داده می شود. در این بخش، نظرمات معطوف تابعی است که بر $(-\infty, +\infty)$ از هر مرتبه مشتق دارند. مجموعه تمام چنین توابع را با \mathcal{C}^∞ نشان داده و آن را رده توابع بی نهایت بار مشتق پذیر می نامیم. هرگاه $y \in \mathcal{C}^\infty$ ، آنگاه $A(y)$ نیز در \mathcal{C}^∞ می باشد. اعمال جبری معمول بر تبدیلات خطی (جمع، ضرب در اسکالر، و ترکیب یا ضرب)

را می‌توان، در حالت خاص، بر عملگرهای ثابت ضریب اعمال کرد. فرض کنیم A و B دو عملگر ثابت ضریب (نه لزوماً از یک مرتبه) باشند. چون مجموع $A + B$ و مضارب اسکالر λA نیز عملگرهایی ثابت ضریب‌اند، مجموعهٔ تمام عملگرهای ثابت ضریب یک فضای خطی می‌باشد. حاصل ضرب A و B (باهر ترتیب) نیز یک عملگر ثابت ضریب است. بنابراین، مجموعه‌ها، حاصل‌ضربها، و مضارب اسکالر عملگرهای ثابت ضریب در قوانین معمولی تعویض‌پذیری، شرکت‌پذیری، و پخش‌پذیری صادق به‌وسیلهٔ تمام تبدیلات خطی صدق می‌کنند. همچنین، از آنجا که به‌ازای هر دو عدد صحیح و مثبت r و s داریم $D^r D^s = D^s D^r$ ، هر دو عملگر ثابت ضریب تعویض خواهند شد: $AB = BA$

به‌هر عملگر ثابت ضریب A چند جمله‌ه p_A به نام چند جمله‌ای مشخص A را مربوط می‌کنیم. اگر A با (12.6) داده شده باشد، p_A چند جمله‌ایی است که همان ضرایب A را دارد. یعنی، به‌ازای هر عدد حقیقی r ، داریم

$$p_A(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n.$$

بعکس، اگر چند جمله‌ای حقیقی p معلوم باشد، عملگر نظیری مانند A هست که ضرایبش با ضرایب p یکسان است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این ارتباط بین عملگرها و چند-جمله‌ایها یک تناظر یک به یک است. بعلاوه، این تناظر به مجموعه‌ها، حاصل‌ضربها، و مضارب اسکالر عملگرها بترتیب مجموعه‌ها، حاصل‌ضربها، و مضارب اسکالر چند جمله‌ایهای مشخص آنها را مربوط می‌نماید.

قضیهٔ ۱۲.۶. فرض کنیم A و B عملگرهایی ثابت ضریب با چند جمله‌ایهای مشخص p_A و p_B بوده، و λ یک عدد حقیقی باشد. در این صورت،

$$(A) \quad A = B \text{ اگر و فقط اگر } p_A = p_B;$$

$$(B) \quad p_{A+B} = p_A + p_B;$$

$$(C) \quad p_{AB} = p_A \cdot p_B;$$

$$(D) \quad p_{\lambda A} = \lambda \cdot p_A.$$

برهان. ابتدا به قسمت (A) می‌پردازیم. فرض کنیم $p_A = p_B$. می‌خواهیم ثابت کنیم که، به‌ازای هر λ در \mathbb{C}^∞ ، $A(\lambda) = B(\lambda)$. چون $p_A = p_B$ ، هر دو چند جمله‌ای درجه

و ضرایب یکسان دارند. بنابراین، A و B مرتبه و ضرایب یکسان خواهند داشت؛ در نتیجه، به ازای هر $y \in \mathcal{C}^\infty$ ، $A(y) = B(y)$.

حال ثابت می‌کنیم $A = B$ رابطه $p_A = p_B$ را ایجاب می‌کند. رابطه $A = B$ یعنی، به ازای هر $y \in \mathcal{C}^\infty$ ، $A(y) = B(y)$. فرض کنیم $y = e^{rx}$ ، که در آن r یک ثابت است. چون به ازای هر $k \geq 0$ ، $y^{(k)} = r^k e^{rx}$ ، داریم

$$A(y) = p_A(r)e^{rx} \quad \text{و} \quad B(y) = p_B(r)e^{rx}$$

معادله $A(y) = B(y)$ ایجاب می‌کند که $p_A(r) = p_B(r)$. چون r دلخواه است، باید داشته باشیم $p_A = p_B$. این برهان قسمت (آ) را کامل می‌کند.

قسمتهای (ب)، (پ)، و (ت) فوراً از تعریف چندجمله‌ای مشخص نتیجه خواهند شد.

از قضیه ۶.۶ نتیجه می‌شود که هر رابطه جبری مربوط به مجموعها، حاصل ضربها، و مضارب اسکالر چند جمله‌ایهای p_A و p_B در مورد عملگرهای A و B نیز برقرارند. بالاخص، اگر بتوان چندجمله‌ای مشخص p_A را به حاصل ضربی از دو یا چند چندجمله‌ای تجزیه کرد، هر سازه باید چندجمله‌ای مشخص یک عملگر ثابت ضرب باشد؛ در نتیجه، بنابر قضیه ۶.۶، تجزیه‌ای نظیر برای عملگر A وجود دارد. مثلاً، هرگاه $p_A(r) = p_B(r)p_C(r)$ ، آنگاه $A = BC$. هرگاه $p_A(r)$ به صورت حاصل ضربی از n سازه خطی قابل تجزیه باشد، مثلاً

$$p_A(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n), \quad (13.6)$$

آنگاه تجزیه نظیر از A شکل

$$A = a_0(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n)$$

را خواهد داشت.

قضیه اساسی جبر به ما می‌گوید که هر چند جمله‌ای $p_A(r)$ از درجه $n \geq 1$ دارای

تجزیه‌ای است به شکل (۱۳.۶)، که در آن r_1, r_2, \dots, r_n ریشه‌های معادله

$$p_A(r) = 0,$$

به نام معادله مشخص A ، می‌باشند. هر ریشه به قدر درجه تکرار آن نوشته می‌شود. ریشه‌ها ممکن است حقیقی یا مختلط باشند. چون $p_A(r)$ ضرایب حقیقی دارد، ریشه‌های مختلط بصورت جفت‌های مزدوج می‌باشند، $\alpha - i\beta$ ، $\alpha + i\beta$ ، اگر $\beta \neq 0$. دوسازه خطی نظیر

بهر جفت این جنینی را می توان در یک سازه^۶ درجه دوم $\alpha^2 + 2\alpha r - 2r^2$ با ضرایب حقیقی تلفیق کرد. بنابراین، هر چند جمله ای $p_A(r)$ را می توان به صورت حاصل ضربی از چند جمله ایهای خطی و درجه^۶ دوم با ضرایب حقیقی تجزیه نمود. این تجزیه تجزیه نظیری از عملگر A به دست می دهد که حاصل ضربی است از عملگرهای ثابت ضریب مرتبه^۶ اول و مرتبه^۶ دوم با ضرایب حقیقی.

مثال ۱. فرض کنیم $A = D^2 - 5D + 6$. چون چند جمله ای مشخص $p_A(r)$ دارای تجزیه^۶ $(r - 2)(r - 3) = r^2 - 5r + 6$ است، عملگر A دارای تجزیه^۶ $D^2 - 5D + 6 = (D - 2)(D - 3)$ می باشد.

مثال ۲. فرض کنیم $A = D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1$. چند جمله ای مشخص $p_A(r)$ دارای تجزیه^۶

$$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = (r - 1)(r - 1)(r^2 + 1)$$

است؛ در نتیجه، A تجزیه^۶ $(D - 1)(D - 1)(D^2 + 1)$ را خواهد داشت.

۸.۶ تعیین یک پایه از جوابها برای معادلات خطی با ضرایب ثابت به وسیله^۶ تجزیه^۶ عملگرها

قضیه^۶ زیر نشان می دهد که چگونه تجزیه^۶ عملگرهای ثابت ضریب در حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت یاری دهنده است.

قضیه^۶ ۷.۶. فرض کنیم L یک عملگر ثابت ضریب باشد که بتوان آن را به صورت حاصل ضربی از عملگرهای ثابت ضریب، مثلاً^۶

$$L = A_1 A_2 \cdots A_k,$$

تجزیه کرد. در این صورت، فضای جواب معادله^۶ دیفرانسیل خطی $L(y) = 0$ شامل فضای جواب هر معادله^۶ دیفرانسیل $A_i(y) = 0$ است. به عبارت دیگر،

$$(14.6) \quad N(A_i) \subseteq N(L), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

برهان. اگر u در فضای پوچ آخرین سازه A_k باشد، داریم $A_k(u) = 0$ ؛ در نتیجه،

$$L(u) = (A_1 A_2 \cdots A_k)(u) = (A_1 \cdots A_{k-1}) A_k(u) = (A_1 \cdots A_{k-1})(0) = 0.$$

از اینرو، فضای پوچ L شامل فضای پوچ آخرین سازه A_k است. اما، چون عملگرهای ثابت ضرب تعویض می‌شوند، می‌توان سازه‌ها را طوری آراست که هریک از آنها آخرین سازه باشد. این (۱۴.۶) را ثابت خواهد کرد.

اگر $L(u) = 0$ ، عملگر L را صفرساز u می‌نامند. قضیه ۷.۶ می‌گوید که اگر سازه A_i از L ، u را صفر کند، L نیز u را صفر خواهد ساخت.

نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان، با استفاده از این قضیه، معادلات دیفرانسیل همگن یا ضرایب ثابت را حل کرد. مثالهای مختلفی می‌زنیم تا کیفیات مختلف مربوط به سرشت ریشه‌های معادله مشخص را نشان دهند.

حالت ۱. ریشه‌های متمایز حقیقی

مثال ۱. برای معادله دیفرانسیل

$$(D^3 - 7D + 6)y = 0 \quad (15.6)$$

یک پایه از جوابها پیدا کنید.

حل. این معادله به شکل $L(y) = 0$ است با

$$L = D^3 - 7D + 6 = (D - 1)(D - 2)(D + 3).$$

فضای پوچ $D - 1$ شامل $u_1(x) = e^x$ است، از آن $D - 2$ شامل $u_2(x) = e^{2x}$ است، و از آن

$D + 3$ شامل $u_3(x) = e^{-3x}$ می‌باشد. در فصل ۱ (ص ۱۵) ثابت کردیم که u_1, u_2, u_3

مستقل هستند. چون سه جواب مستقل یک معادله مرتبه سوم یک پایه برای فضای جواب

تشکیل می‌دهند، جواب عمومی (۱۵.۶) با

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$$

داده می‌شود.

به روشی که در حل مثال ۱ به کار رفت، می‌توان برای فضای جواب هر عملگر ثابت

ضرب که قابل تجزیه به سازه‌های خطی متمایز است یک پایه به دست آورد.

قضیه ۸.۶. فرض کنیم L یک عملگر ثابت ضریب باشد که معادله مشخصه $p_L(r) = 0$ دارای n ریشه حقیقی و متمایز r_1, r_2, \dots, r_n است. در این صورت، جواب عمومی معادله دیفرانسیل $L(y) = 0$ برای بازه $(-\infty, +\infty)$ از فرمول

$$y = \sum_{k=1}^n c_k e^{r_k x} \quad (16.6)$$

به دست می آید.

برهان. تجزیه زیر را داریم:

$$L = a_0(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n).$$

چون فضای بوج $(D - r_k)$ شامل $u_k(x) = e^{r_k x}$ است، فضای بوج L شامل n تابع

$$(17.6) \quad u_1(x) = e^{r_1 x}, \quad u_2(x) = e^{r_2 x}, \dots, u_n(x) = e^{r_n x}$$

می باشد. در فصل ۱ (ص ۱۵) ثابت شد که این توابع مستقل هستند. بنابراین، اینها یک پایه برای فضای جواب معادله $L(y) = 0$ تشکیل می دهند؛ در نتیجه، جواب عمومی با (۱۶.۶) داده خواهد شد.

حالت II. ریشه های حقیقی، که بعضی تکرار شده اند.

اگر تمام ریشه ها حقیقی بوده ولی متمایز نباشند، توابع (۱۷.۶) مستقل نیستند؛ و در نتیجه، یک پایه برای فضای جواب تشکیل نمی دهند. اگر ریشه r از درجه m تکرار m باشد، $(D - r)^m$ یک سازه L خواهد بود. قضیه زیر طرز به دست آوردن m جواب مستقل در فضای بوج این سازه را نشان می دهد.

قضیه ۹.۶. m تابع

$$u_1(x) = e^{rx}, \quad u_2(x) = xe^{rx}, \dots, u_m(x) = x^{m-1}e^{rx}$$

m عنصر مستقل اند که به وسیله عملگر $(D - r)^m$ صفر می شوند.

برهان. استقلال این توابع از استقلال چند جمله ایهای $1, x, x^2, \dots, x^{m-1}$ نتیجه می شود. برای اثبات اینکه u_1, u_2, \dots, u_m به وسیله $(D - r)^m$ صفر می شوند، بر m استقرا می کنیم.

اگر $m = 1$ ، فقط یک تابع وجود دارد ، $u_1(x) = e^{rx}$ ، که بوضوح توسط $(D - r)$ صفر می‌شود . پس فرض کنیم قضیه به ازای $m - 1$ درست باشد . این یعنی توابعی چون u_1, \dots, u_{m-1} وجود دارند که به وسیله $(D - r)^{m-1}$ صفر می‌شوند . چون

$$(D - r)^m = (D - r)(D - r)^{m-1} ,$$

توابع u_1, \dots, u_{m-1} نیز به وسیله $(D - r)^m$ صفر می‌شوند . برای تکمیل برهان ، باید نشان دهیم که $(D - r)^m$ نیز u_m را صفر می‌سازد . لذا ، رابطه زیر را در نظر می‌گیریم :

$$(D - r)^m u_m = (D - r)^{m-1} (D - r)(x^{m-1} e^{rx}) .$$

داریم

$$\begin{aligned} (D - r)(x^{m-1} e^{rx}) &= D(x^{m-1} e^{rx}) - r x^{m-1} e^{rx} \\ &= (m - 1)x^{m-2} e^{rx} + x^{m-1} r e^{rx} - r x^{m-1} e^{rx} \\ &= (m - 1)x^{m-2} e^{rx} = (m - 1)u_{m-1}(x) . \end{aligned}$$

وقتی $(D - r)^{m-1}$ را در دو طرف معادله اخیر اعمال کنیم ، در طرف راست 0 به دست می‌آوریم ، زیرا $(D - r)^{m-1} u_{m-1}$ را صفر می‌سازد . بنابراین ، $(D - r)^m u_m = 0$ ؛ در نتیجه ، u_m به وسیله $(D - r)^m$ صفر می‌شود . این برهان را تمام خواهد کرد .

مثال ۲ . جواب عمومی معادله دیفرانسیل $L(y) = 0$ ، که در آن

$$L = D^3 - D^2 - 8D + 12 ,$$

را پیدا کنید .

حل . عملگر L دارای تجزیه

$$L = (D - 2)^2(D + 3)$$

است . طبق قضیه ۹.۶ ، دو تابع

$$u_1(x) = e^{2x}, \quad u_2(x) = x e^{2x}$$

در فضای بوج $(D - 2)^2$ هستند . تابع $u_3(x) = e^{-3x}$ در فضای بوج $(D + 3)$ است . چون

u_1, u_2, u_3 مستقل اند (ر.ک. تمرین ۱۷ از بخش ۹.۶) ، یک پایه برای فضای بوج L

تشکیل می‌دهند ؛ در نتیجه ، جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-3x} .$$

قضیه ۹.۶ طرز یافتن یک پایه از جوابها برای هر معادله خطی مرتبه n م با ضرایب ثابت که معادله مشخص آن فقط ریشه‌های حقیقی، و برخی تکراری، دارد را بازگو می‌کند. اگر ریشه‌های متمایز r_1, r_2, \dots, r_k بوده و بترتیب از درجات تکرار m_1, m_2, \dots, m_k باشند، آن بخش از پایه که نظیر به r_p است با m_p تابع

$$u_{p,q}(x) = x^{q-1} e^{r_p x} \quad q = 1, 2, \dots, m_p$$

وقتی p مقادیر $1, 2, \dots, k$ را می‌گیرد، رویهم $m_1 + \dots + m_k$ تابع خواهیم داشت. در تمرین ۱۷ از بخش ۹.۶ با برهانی به اختصار نشان دادیم که همه این تابعها مستقل هستند. چون مجموع درجات تکرار $m_1 + \dots + m_k$ مساوی n ، یعنی مرتبه معادله، است، توابع $u_{p,q}$ یک پایه برای فضای جواب معادله تشکیل می‌دهند.

مثال ۳. معادله $(D^6 + 2D^5 - 2D^3 - D^2)y = 0$ را حل کنید.

حل. داریم $D^6 + 2D^5 - 2D^3 - D^2 = D^2(D-1)(D+1)^3$. بخشی از پایه که نظیر به سازه D^2 است مساوی است با $u_1(x) = 1, u_2(x) = x$ ؛ بخشی که نظیر به سازه $(D-1)$ است مساوی $u_3(x) = e^x$ است؛ و بخشی که نظیر به سازه $(D+1)^3$ است مساوی $u_4(x) = e^{-x}, u_5(x) = xe^{-x}, u_6(x) = x^2e^{-x}$ می‌باشد. شش تابع u_1, \dots, u_6 مستقل هستند؛ در نتیجه، جواب عمومی معادله عبارت خواهد بود از

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^x + (c_4 + c_5x + c_6x^2)e^{-x}.$$

حالت III. ریشه‌های مختلط

اگر نمایه‌های مختلط به کار رفته باشند، لازم نیست بین ریشه‌های حقیقی و مختلط معادله مشخص معادله دیفرانسیل $L(y) = 0$ فرق گذارده شود. اگر جوابهای حقیقی مطلوب باشند، عملگر L را به سازه‌های خطی و درجه دوم یا ضرایب حقیقی تجزیه می‌کنیم. هر جفت ریشه مختلط مزدوج مانند $\alpha - i\beta, \alpha + i\beta$ به یک سازه درجه دوم مانند

$$(18.6) \quad D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2$$

نظیر است. فضای بوج این عملگر مرتبه دوم شامل دو تابع مستقل $u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ و $v(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ است. اگر جفت ریشه‌های $\alpha \pm i\beta$ از درجه m تکرار باشند، سازه درجه دوم به توان m خواهد بود. فضای بوج عملگر

$$[D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2]^m$$

شامل $2m$ تابع مستقل

$$u_q(x) = x^{q-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad v_q(x) = x^{q-1}e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad q = 1, 2, \dots, m$$

است. این مطلب را می‌توان به آسانی و به استقرا بر m ثابت کرد. (برهانها در تمرین ۲۰ از بخش ۹.۶ به اختصار بیان شده‌اند.) مثالهای زیر چند حالت را توضیح می‌دهند.

مثال ۴. $y''' - 4y'' + 13y' = 0$. معادله مشخص، یعنی $r^3 - 4r^2 + 13r = 0$ ، دارای ریشه‌های $0, 2 \pm 3i$ است؛ پس جواب عمومی عبارت خواهد بود از

$$y = c_1 + e^{2x}(c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x).$$

مثال ۵. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$. معادله مشخص مساوی است با

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = (r - 2)(r^2 + 4) = 0;$$

ریشه‌هایش عبارتند از $2, 2i, -2i$ ؛ در نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x.$$

مثال ۶. $y^{(5)} - 9y^{(4)} + 34y''' - 66y'' + 65y' - 25y = 0$. معادله مشخص را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(r - 1)(r^2 - 4r + 5)^2 = 0;$$

ریشه‌هایش عبارتند از $1, 2 \pm i, 2 \pm i$ ؛ در نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل خواهد شد

$$y = c_1 e^x + e^{2x}[(c_2 + c_3 x) \cos x + (c_4 + c_5 x) \sin x].$$

۹.۶ تمرین

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل تمرینهای ۱ تا ۱۲ را پیدا کنید.

$$1. \quad y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad 2. \quad y''' - y' = 0$$

$$3. \quad y''' + 4y'' + 4y' = 0 \quad 4. \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$5. \quad y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0 \quad 6. \quad y^{(4)} - 16y = 0$$

$$y''' - y = 0 \quad \cdot ۸ \qquad \cdot y^{(4)} + 16y = 0 \quad \cdot ۹$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \quad \cdot ۱۰ \quad \cdot y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0 \quad \cdot ۹$$

$$y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0 \quad \cdot ۱۲ \qquad \cdot y^{(6)} + 4y^{(4)} + 4y'' = 0 \quad \cdot ۱۱$$

۱۳. هرگاه m یک ثابت مثبت باشد، جواب خصوصی $y = f(x)$ معادله دیفرانسیل

$$y''' - my'' + m^2y' - m^2y = 0$$

که در شرط $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 1$ صدق می کند را پیدا نمایید.

۱۴. یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت دارای معادله مشخص $f(r) = 0$ است.

ثابت کنید اگر تمام ریشه های معادله مشخص منفی باشند، هر جواب معادله دیفرانسیل،

وقتی $x \rightarrow +\infty$ به صفر نزدیک می شود. اگر تمام ریشه های معادله مشخص نامثبت

باشند، چه نتیجه ای در باب رفتار تمام جوابها بر $[0, +\infty)$ حاصل می شود؟

۱۵. در هر حالت زیر، یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بیابید که توابع

داده شده در آن صدق کنند:

$$u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = e^{-x}, \quad u_3(x) = e^{2x}, \quad u_4(x) = e^{-2x} \quad (\text{ا})$$

$$u_1(x) = e^{-2x}, \quad u_2(x) = xe^{-2x}, \quad u_3(x) = x^2e^{-2x} \quad (\text{ب})$$

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x, \quad u_3(x) = e^x, \quad u_4(x) = xe^x \quad (\text{پ})$$

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = e^x, \quad u_3(x) = xe^x \quad (\text{ت})$$

$$u_1(x) = x^2, \quad u_2(x) = e^x, \quad u_3(x) = xe^x \quad (\text{ث})$$

$$u_1(x) = e^{-2x} \cos 3x, \quad u_2(x) = e^{-2x} \sin 3x, \quad u_3(x) = e^{-2x}, \quad u_4(x) = xe^{-2x} \quad (\text{ج})$$

$$u_1(x) = \cosh x, \quad u_2(x) = \sinh x, \quad u_3(x) = x \cosh x, \quad u_4(x) = x \sinh x \quad (\text{چ})$$

$$u_1(x) = \cosh x \sin x, \quad u_2(x) = \sinh x \cos x, \quad u_3(x) = x \quad (\text{ح})$$

۱۶. فرض کنید n, r_1, \dots, r_n عدد حقیقی متمایز بوده، و Q_1, \dots, Q_n, n چند-

حمله ای باشند که هیچکدام چندجمله ای صفر نباشد. ثابت کنید n تابع

$$u_1(x) = Q_1(x)e^{r_1x}, \dots, u_n(x) = Q_n(x)e^{r_nx}$$

مستقل می باشند.

طرح برهان. از استقرا بر n استفاده کنید. به ازای $n = 1$ و $n = 2$ نتیجه به

آسانی تحقیق می شود. فرض کنید حکم به ازای $n = p$ درست بوده، c_1, \dots, c_{p+1}

$p + 1$ اسکالر حقیقی باشند بطوری که

$$\sum_{k=1}^{p+1} c_k Q_k(x) e^{r_k x} = 0.$$

دوطرف این رابطه را در $e^{-r_{p+1}x}$ ضرب کرده از معادله حاصل مشتق بگیرید. بعد، با استفاده از فرض استقرا، نشان دهید که همه c_k ها صفرند. می‌توان برهانی دیگر بر مبنای مرتبه بزرگی، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، بصورتی که در مثال ۷ از بخش ۷.۱ (ص ۱۲) شد، ارائه داد.

۱۷. فرض کنید m_1, m_2, \dots, m_k ، k عدد صحیح مثبت بوده، r_1, r_2, \dots, r_k ، k عدد حقیقی متمایز باشند، و $n = m_1 + \dots + m_k$. به ازای هر جفت عدد صحیح p, q صادق در $1 \leq p \leq k, 1 \leq q \leq m_p$ قرار دهید

$$u_{q,p}(x) = x^{q-1} e^{r_p x}.$$

به عنوان مثال، وقتی $p = 1$ ، توابع نظیر عبارت خواهند بود از

$$u_{1,1}(x) = e^{r_1 x}, \quad u_{2,1}(x) = x e^{r_1 x}, \dots, u_{m_1,1}(x) = x^{m_1-1} e^{r_1 x}.$$

ثابت کنید که n تابع $u_{q,p}$ مستقل می‌باشند. [راهنمایی. از تمرین ۱۶ استفاده کنید.]

۱۸. فرض کنید L یک عملگر دیفرانسیل خطی ثابت ضریب مرتبه n با چند جمله‌ای مشخص $p(r)$ باشد. همچنین، L' عملگر ثابت ضریبی باشد که چند جمله‌ای مشخص آن مساوی مشتق $p'(r)$ است. مثلاً، "اگر $L = 2D^2 - 3D + 1$ ، $L' = 4D - 3$. بطور کلی، مشتق m $L^{(m)}$ را عملگری تعریف می‌کنیم که چند جمله‌ای مشخص آن مشتق m $p^{(m)}(r)$ باشد. (عملگر $L^{(m)}$ را نباید با توان m L^m خلط کرد.)

(آ) ثابت کنید که اگر u دارای n مشتق باشد،

$$L(u) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(0)}{k!} u^{(k)}.$$

(ب) ثابت کنید که اگر u دارای $n - m$ مشتق باشد،

$$L^{(m)}(u) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{p^{(k+m)}(0)}{k!} u^{(k)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n$$

که در آن $L^{(0)} = L$ ،

۱۹. به نمادهای تمرین ۱۸ بازمی‌گردیم. ثابت کنید که اگر u و v دارای n مشتق باشند،

$$L(uv) = \sum_{k=0}^n \frac{L^{(k)}(u)}{k!} v^{(k)}.$$

[راهنمایی . از تمرین ۱۸ به همراه فرمول لایب‌نیتز برای مشتق k ام حاصل ضرب ، یعنی

$$(uv)^{(k)} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} u^{(k-r)} v^{(r)},$$

استفاده نمایید .]

۲۵ . (آ) فرض کنید $p(t) = q(t)^m r(t)$ ، که در آن q و r چندجمله‌ای بوده و m عدد صحیح مثبتی می‌باشد . ثابت کنید $p'(t) = q(t)^{m-1} s(t)$ ، که در آن s یک چندجمله‌ای است .

(ب) فرض کنید L یک عملگر ثابت ضریب باشد که u را صفر می‌کند ، که u تابع معلومی از x است . فرض کنید $M = L^m$ ، یعنی توان m م L ، که $m > 1$. ثابت کنید هریک از مشتقات $M', M'', \dots, M^{(m-1)}$ نیز u را صفر می‌سازد .

(پ) با استفاده از قسمت (ب) و تمرین ۱۹ ، ثابت کنید M هریک از توابع $u, xu, \dots, x^{m-1}u$ را صفر می‌کند .

(ت) با استفاده از قسمت (پ) ، نشان دهید که عملگر $m^2 + \alpha^2 - 2\alpha D$ (D^2) هریک از توابع $x^q e^{\alpha x} \sin \beta x$ و $x^q e^{\alpha x} \cos \beta x$ ، به ازای $q = 1, 2, \dots, m-1$ ، را صفر می‌کند .

۲۱ . فرض کنید L یک عملگر ثابت ضریب مرتبه n با چندجمله‌ای مشخص $p(r)$ باشد . ثابت کنید اگر α ثابت بوده و u دارای n مشتق باشد ،

$$L(e^{\alpha x} u(x)) = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} u^{(k)}(x).$$

۱۰.۶ رابطه بین معادلات همگن و غیرهمگن

حال به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n کلی با ضرایبی که لزوماً ثابت نیستند باز می‌گردیم . قضیه زیر رابطه بین جوابهای معادله همگن $L(y) = 0$ و جوابهای معادله غیرهمگن $L(y) = R(x)$ را توضیح می‌دهد .

قضیه ۱۰.۶ . فرض کنیم $L: \mathcal{C}_n(J) \rightarrow \mathcal{C}(J)$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه n باشد . همچنین ، u_1, \dots, u_n ، n جواب مستقل معادله همگن $L(y) = 0$ بوده ، و y_1 یک جواب

خصوصی معادله غیرهمگن $L(y) = R$ باشد، که در آن $R \in \mathcal{C}(J)$. در این صورت، هر جواب $y = f(x)$ معادله غیرهمگن به شکل

$$(19.6) \quad f(x) = y_1(x) + \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)$$

است، که در آن c_1, \dots, c_n ثابت می‌باشند.

برهان. بنا بر خاصیت خطی، داریم

$$L(f - y_1) = L(f) - L(y_1) = R - R = 0.$$

از اینرو، $f - y_1$ فضای جواب معادله همگن $L(y) = 0$ است؛ در نتیجه، $f - y_1$ ترکیبی خطی از u_1, \dots, u_n است؛ مثلاً، " $f - y_1 = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ ". این (19.6) را ثابت می‌کند.

چون همه جوابهای $L(y) = R$ در (19.6) بیافت می‌شوند، مجموع سمت راست (19.6) (با ثابتهای دلخواه c_1, c_2, \dots, c_n) جواب عمومی معادله غیرهمگن نامیده می‌شود. قضیه 10.6 می‌گوید که جواب عمومی معادله غیرهمگن با افزودن جواب عمومی معادله همگن به y_1 به دست می‌آید.

تذکر. قضیه 10.6 مشابه هندسی ساده‌ای دارد که در آگاهی از معنی آن یاری دهنده است. برای تعیین تمام نقاط یک صفحه، یک نقطه خاص روی آن اختیار کرده و تمام نقاط صفحه ماربر مبداء و موازی آن را به این نقطه می‌افزاییم. برای یافتن تمام جوابهای $L(y) = R$ ، یک جواب خصوصی را یافته و تمام جوابهای معادله همگن $L(y) = 0$ را بدان می‌افزاییم. مجموعه جوابهای معادله غیرهمگن شبیه به یک صفحه ماربر یک نقطه خاص است. فضای جواب معادله همگن شبیه صفحه‌ای است ماربر مبداء و موازی با آن.

برای آنکه از قضیه 10.6 عملاً استفاده کنیم، باید دو مسئله را حل کنیم: (۱) جواب عمومی معادله همگن $L(y) = 0$ را پیدا کرده، و (۲) یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن $L(y) = R$ را بیابیم. در بخش بعد نشان می‌دهیم که همیشه، اگر بتوان مسئله (۱) را حل کرد، مسئله (۲) نیز قابل حل است.

۱۱.۶ تعیین یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن. روش تغییر پارامتر

حال به مسئله تعیین یک جواب خصوصی y_1 معادله غیرهمگن $L(y) = R$ می پردازیم. روشی را توضیح می دهیم، به نام تغییر پارامتر، که به ما طرز تعیین y_1 ، در صورتی که n جواب مستقل u_1, \dots, u_n معادله همگن $L(y) = 0$ را بدانیم، را بازگو می کند. این روش جوابی خصوصی به شکل

$$(20.6) \quad y_1 = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$$

به دست می دهد، که در آن v_1, \dots, v_n توابعی هستند که می توان آنها را بر حسب u_1, \dots, u_n و طرف راست R حساب کرد. این روش به دستگامی مرکب از n معادله جبری خطی منجر می شود که مشتقات v'_1, \dots, v'_n در آن صدق می کنند. این دستگاه همیشه قابل حل است، زیرا دارای ماتریس ضرایب ناصفر است. پس انتگرالگیری از مشتقات، توابع مطلوب v_1, \dots, v_n را خواهد داد. این روش برای اولین بار توسط یوهان برنولی^۱ برای حل معادلات خطی مرتبه اول به کار رفت، و سپس لاگرانژ آن را در ۱۷۷۴ برای حل معادلات خطی مرتبه دوم به کار گرفت.

در حالت مرتبه n ، m ، جزئیات را می توان با استفاده از نمادهای بردار و ماتریس

ساده کرد. طرف راست (۲۰.۶) را می توان به صورت حاصل ضرب داخلی، یعنی

$$(21.6) \quad y_1 = (v, u),$$

نوشت، که در آن v و u توابعی از بردارهای n بعدی هستند به صورت

$$v = (v_1, \dots, v_n), \quad u = (u_1, \dots, u_n).$$

v را طوری اختیار می کنیم که حاصل ضرب داخلی معرف y_1 ، با فرض $L(u) = 0$ که $L(u) = (L(u_1), \dots, L(u_n))$ ، در معادله $L(y) = R$ صدق کند.

ابتدا به محاسبه مشتق اول y_1 می پردازیم. داریم

$$(22.6) \quad y'_1 = (v, u') + (v', u).$$

n تابع v_1, \dots, v_n داریم که بایستی معین شوند؛ پس باید بتوان n شرط بر آنها گذارد. اگر این شرط را بگذاریم که دومین جمله سمت راست (۲۲.۶) باید صفر شود، فرمول مربوط به y'_1 ،

در صورتی که $(v', u) = 0$ ، به $y'_1 = (v, u')$ ساده می شود.

با مشتقگیری از رابطه^۶ مربوط به y_1' ، درمی یابیم که

$$y_1'' = (v, u'') + (v', u').$$

اگر v را بتوان طوری اختیار کرد که $(v', u') = 0$ ، فرمول مربوط به y_1'' نیز ساده شده و،

$$y_1'' = (v, u''), \quad (v', u') = 0$$

اگر به همین نحو برای $n - 1$ مشتق اول y_1 ادامه دهیم، در خواهیم یافت که،

$$y_1^{(n-1)} = (v, u^{(n-1)}), \quad (v', u^{(n-2)}) = 0$$

تا اینجا $n - 1$ شرط بر v گذارده ایم. اگر یکبار دیگر مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$y_1^{(n)} = (v, u^{(n)}) + (v', u^{(n-1)}).$$

این بار شرط $R(x) = (v', u^{(n-1)})$ را قابل شده ایم، و آخرین معادله،

$$y_1^{(n)} = (v, u^{(n)}) + R(x), \quad (v', u^{(n-1)}) = R(x)$$

حال فرض کنیم بتوان n شرط برای v برقرار کرد. فرض کنیم

$$L = D^n + P_1(x)D^{n-1} + \dots + P_n(x).$$

وقتی L را بر y_1 اعمال کنیم، درمی یابیم که

$$\begin{aligned} L(y_1) &= y_1^{(n)} + P_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y_1 \\ &= \{(v, u^{(n)}) + R(x)\} + P_1(x)(v, u^{(n-1)}) + \dots + P_n(x)(v, u) \\ &= (v, L(u)) + R(x) = (v, 0) + R(x) = R(x). \end{aligned}$$

بنابراین، $L(y_1) = R(x)$ ؛ در نتیجه، y_1 یک جواب معادله^۶ غیرهمگن است.

این روش، در صورتی که بتوان n شرط گذارده شده بر v را برقرار کرد، موفق

خواهد بود. این شرطها می گویند که، به ازای $k = 0, 1, \dots, n - 2$ ، $(v', u^{(k)}) = 0$ ،

و $(v', u^{(n-1)}) = R(x)$. این n معادله را می توان به صورت یک معادله^۶ ماتریسی واحد

نوشت:

$$(23.6) \quad W(x)v'(x) = R(x) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

که در آن $v'(x)$ یک ماتریس ستونی $n \times 1$ گرفته شده، و W یک تابع ماتریسی $n \times n$ است که سطرهایش از مولفه های u و مشتقات پی در پی آن تشکیل شده اند:

$$W = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

ماتریس W ، بخاطر ج. ا. م. ا. چ. رونسکی (۱۸۵۳-۱۷۷۸)، ماتریس رونسکی u_1, \dots, u_n نامیده می‌شود.

دربخش بعد ثابت می‌کنیم که ماتریس رونسکی نامفرد است. بنابراین، می‌توان دوطرف (۲۳.۶) را در $W(x)^{-1}$ ضرب کرده به‌دست آورد که

$$v'(x) = R(x)W(x)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

دو نقطه c و x را درباره J مورد نظر اختیار می‌کنیم و از این معادله برداری روی بازه c تا x انتگرال می‌گیریم تا رابطه زیر به‌دست آید:

$$v(x) = v(c) + \int_c^x R(t)W(t)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = v(c) + z(x),$$

که در آن

$$z(x) = \int_c^x R(t)W(t)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt.$$

حال فرمول $y_1 = (u, v)$ برای جواب خصوصی خواهد شد

$$y_1 = (u, v) = (u, v(c) + z) = (u, v(c)) + (u, z).$$

اولین جمله $(u, v(c))$ در معادله همگن صدق می‌کند، چرا که ترکیبی خطی از u_1, \dots, u_n است. بنابراین، می‌توان این جمله را حذف و از جمله دوم (u, z) به‌عنوان یک جواب

خصوصی معادله غیرهمگن استفاده نمود. به عبارت دیگر، یک جواب خصوصی $L(y) = R$ با حاصل ضرب داخلی

$$(u(x), z(x)) = \left(u(x), \int_c^x R(t)W(t)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt \right)$$

داده می شود. توجه کنید که لازم نیست تابع R بر بازه J پیوسته باشد. آنچه لازم است این است که R بر $[c, x]$ انتگرالپذیر باشد.

نتایج این بخش را می توان در قضیه زیر خلاصه کرد.

قضیه ۱۱.۶. فرض کنیم u_1, \dots, u_n ، جواب مستقل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ، $L(y) = 0$ ، بر بازه J باشد. در این صورت، یک جواب خصوصی y_1 معادله غیرهمگن $L(y) = R$ از فرمول

$$y_1(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)v_k(x)$$

به دست می آید، که در آن v_1, \dots, v_n درایه های ماتریس ستونی $n \times 1$ ، v است که از معادله

$$(24.6) \quad v(x) = \int_c^x R(t)W(t)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt$$

مشخص می شوند. در این فرمول، W ماتریس رونسکی u_1, \dots, u_n است، و c نقطه دلخواهی در J می باشد.

تذکر. انتگرال معین (۲۴.۶) را می توان با هر انتگرال نامعین

$$\int R(x)W(x)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dx$$

عوض کرد .

مثال ۱ . جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' - y = \frac{2}{1 + e^x}$$

را برپایه $(-\infty, +\infty)$ پیدا کنید .

حل . معادله همگن $(D^2 - 1)y = 0$ دو جواب مستقل $u_1(x) = e^x$ ، $u_2(x) = e^{-x}$ ، د. د. ماتریس رونسکی u_1 و u_2 عبارت است از

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix}.$$

چون $\det W(x) = -2$ ، ماتریس نامعکوس است و معکوسش مساوی است با

$$W(x)^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^x & e^x \end{bmatrix}.$$

بنابراین،

$$W(x)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-x} \\ e^x \end{bmatrix}$$

و داریم

$$R(x)W(x)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{2}{1 + e^x} \begin{bmatrix} -e^{-x} \\ e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-x}}{1 + e^x} \\ \frac{-e^x}{1 + e^x} \end{bmatrix}.$$

با انتگرالگیری از هر مؤلفه بردار سمت راست . داریم یابیم که

$$v_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{1 + e^x} dx = \int \left(e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx = -e^{-x} - x + \log(1 + e^x)$$

و

$$v_2(x) = \int \frac{-e^x}{1 + e^x} dx = -\log(1 + e^x).$$

بنابراین، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + v_1(x) u_1(x) + v_2(x) u_2(x) \\ = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1 - x e^x + (e^x - e^{-x}) \log(1 + e^x).$$

۱۲.۶ نامنفردی ماتریس رونسکی n جواب مستقل یک معادلهٔ خطی همگن

در این بخش ثابت می‌کنیم که ماتریس رونسکی W مرکب از n جواب مستقل u_1, \dots, u_n معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ نامنفرد است. این کار را با اثبات اینکه دترمینان W یک تابع سمایی است که هرگز بر بازهٔ J موردنظر صفر نیست انجام می‌دهیم.

فرض کنیم به‌ازای هر x در J ، $w(x) = \det W(x)$ ، و معادلهٔ دیفرانسیل برقرار

با u_1, \dots, u_n به‌شکل

$$(25.6) \quad y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = 0$$

باشد. در این صورت، داریم

قضیهٔ ۱۲.۶. دترمینان رونسکی در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$(26.6) \quad w' + P_1(x)w = 0$$

بر J صدق می‌کند. بنابراین، اگر $c \in J$ ، داریم

$$(27.6) \quad w(x) = w(c) \exp \left[- \int_c^x P_1(t) dt \right] \quad (1) \text{ فرمول آبل}$$

بعلاوه، به‌ازای هر x در J ، $w(x) \neq 0$.

برهان. فرض کنیم u بردار سطری $u = (u_1, \dots, u_n)$ باشد. چون هر مولفهٔ u در

معادلهٔ دیفرانسیل (۲۵.۶) صدق می‌کند، u نیز چنین خواهد کرد. سطرهای ماتریس

رونسکی W بردارهای $u, u', \dots, u^{(n-1)}$ هستند. بنابراین، می‌توان نوشت

$$w = \det W = \det(u, u', \dots, u^{(n-1)}).$$

مشتق w دترمینان ماتریسی است که با مشتقگیری از سطر آخر W به‌دست می‌آید (ر.ک.

تمرین ۸ از بخش ۱۷.۳): یعنی،

$$w' = \det(u, u', \dots, u^{(n-2)}, u^{(n)}).$$

با ضرب سطر آخر w در $P_1(x)$ ، نیز داریم

$$P_1(x)w = \det(u, u', \dots, u^{(n-2)}, P_1(x)u^{(n-1)}).$$

با افزودن دو معادله اخیر، درمی یابیم که

$$w' + P_1(x)w = \det(u, u', \dots, u^{(n-2)}, u^{(n)} + P_1(x)u^{(n-1)}).$$

اما سطرهای این دترمینان آخر وابسته اند، زیرا u در معادله دیفرانسیل (۲۵.۶) صدق می کند. بنابراین، دترمینان صفر است، که به معنی آن است که w در (۲۶.۶) صدق می نماید. با حل (۲۶.۶) فرمول آبل (۲۷.۶) به دست خواهد آمد.

حال ثابت می کنیم به ازای c ای در J ، $w(c) \neq 0$. این عمل را به برهان خلف انجام می دهیم. فرض کنیم به ازای هر t در J ، $w(t) = 0$. t ی ثابتی در J ، مثلاً " $t = t_0$ "، اختیار کرده، دستگاه خطی

$$W(t_0)X = 0$$

از معادلات جبری، که در آن X یک بردار ستونی است، را در نظر می گیریم. چون $\det W(t_0) = 0$ ، ماتریس $W(t_0)$ منفرد است؛ در نتیجه، این دستگاه یک جواب ناصفر، مثلاً " $(0, \dots, 0) \neq X = (c_1, \dots, c_n)$ "، دارد. با استفاده از مولفه های این بردار ناصفر، فرض کنیم f ترکیب خطی

$$f(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

باشد. تابع f تعریف شده به این صورت در $L(f) = 0$ بر J صدق می کند، زیرا ترکیبی خطی از u_1, \dots, u_n است. معادله ماتریسی $W(t_0)X = 0$ ایجاب می کند که

$$f(t_0) = f'(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

از اینرو، f در $t = t_0$ دارای بردار مقدار اولیه O است؛ در نتیجه، طبق قضیه یکتایی، f جواب صفر است. این یعنی $c_1 = \dots = c_n = 0$ ، که یک تناقض می باشد. بنابراین، به ازای t ای در J ، $w(t) \neq 0$. با اختیار c مساوی این t در فرمول آبل، ملاحظه می کنیم که به ازای هر x در J ، $w(x) \neq 0$. این برهان قضیه ۱۲.۶ را کامل خواهد کرد.

۱۳۰۶ روشهای خاص برای تعیین یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن. تحویل به یک دستگاه معادلات خطی مرتبه اول

اگرچه تغییر پارامتر روشی کلی برای تعیین یک جواب خصوصی $L(y) = R$ است، اما روشهای خاصی نیز هستند که اغلب، وقتی معادلات شکلهای خاص دارند، آسانتر به کار میروند. مثلاً، اگر معادله ضرایب ثابت داشته باشد، می توان مسئله را به حل رشته‌ای از معادلات خطی مرتبه اول تحویل کرد. روش عمومی را با یک مثال ساده به بهترین وجه نشان می دهیم.

مثال ۱. یک جواب خصوصی معادله

$$(28.06) \quad (D - 1)(D - 2)y = xe^{x+x^2}$$

را بیابید.

حل. فرض کنیم $u = (D - 2)y$. در این صورت، معادله خواهد شد

$$(D - 1)u = xe^{x+x^2}.$$

این یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به u است، که می توان آن را با استفاده از قضیه ۱۰۶ حل کرد. یک جواب خصوصی برابر است با

$$u = \frac{1}{2}e^{x+x^2}.$$

با جانشانی این در معادله $u = (D - 2)y$ داریم

$$(D - 2)y = \frac{1}{2}e^{x+x^2},$$

که یک معادله خطی مرتبه اول نسبت به y است. با حل این به وسیله قضیه ۱۰۶،

درمی یابیم که یک جواب خصوصی (با $y_1(0) = 0$) عبارت خواهد بود از

$$y_1(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \int_0^x e^{t^2-t} dt.$$

با اینکه انتگرال رانمی توان برحسب توابع مقدماتی حساب کرد، ما آن را حل شده محسوب می کنیم، چرا که جواب برحسب انتگرالهای توابع آشنا بیان شده است. جواب عمومی

(۲۸.۰۶) عبارت است از

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} \int_0^x e^{t^2-t} dt.$$

۱۴.۶ روش صفرساز برای تعیین یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن

حال روشی را توضیح می‌دهیم که از آن می‌توان، در صورتی که معادله $L(y) = R$ ضرایب ثابت داشته و طرف راست R به وسیله یک عملگر ثابت ضرب صفر شود، یعنی $A(R) = 0$ ، استفاده نمود. این روش، در اصل، خیلی ساده است. عملگر A را در دو طرف معادله دیفرانسیل $L(y) = R$ به کار می‌بریم و معادله جدید $AL(y) = 0$ را به دست می‌آوریم که تمام جوابهای معادله اصلی باید در آن صدق کنند. چون عملگر ثابت ضرب دیگری است، می‌توان فضای بوج آن را با محاسبه ریشه‌های معادله مشخص AL معین کرد. پس، مسئله‌ای که می‌ماند انتخاب تابع خاصی چون y_1 از این فضای بوج است که در $L(y_1) = R$ صدق نماید. مثالهای زیر طرز عمل را نشان خواهند داد.

مثال ۱. یک جواب خصوصی معادله

$$(D^4 - 16)y = x^4 + x + 1$$

را بیابید.

حل. طرف راست، که یک چند جمله‌ای درجه ۴ است، به وسیله عملگر D^5 صفر می‌شود. بنابراین، هر جواب معادله فوق یک جواب معادله

$$(29.6) \quad D^5(D^4 - 16)y = 0$$

است. ریشه‌های معادله مشخص عبارتند از $0, 0, 0, 0, 2, -2, 2i, -2i$ ؛ در نتیجه، همه جوابهای (۲۹.۶) در ترکیب خطی

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6e^{2x} + c_7e^{-2x} + c_8 \cos 2x + c_9 \sin 2x$$

قرار دارند. می‌خواهیم c_i را طوری اختیار کنیم که $L(y) = x^4 + x + 1$ ، که در آن $L = D^4 - 16$. چون چهار جمله آخر به وسیله L صفر می‌شوند، می‌توان فرض کرد

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = 0$$

$$L(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4) = x^4 + x + 1.$$

به عبارت دیگر، جواب خصوصی y_1 را جستجو می‌کنیم که یک چند جمله‌ای درجه ۴ باشد که در $L(y_1) = x^4 + x + 1$ صدق نماید. برای آنکه اعمال ساده شوند، می‌نویسیم

$$16y_1 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

این ایجاب می‌کند که $16y_1^{(4)} = 24a$ ؛ در نتیجه، $y_1^{(4)} = 3a/2$. با جانشانی در معادله

دیفرانسیل $L(y_1) = x^4 + x + 1$ ، باید a, b, c, d, e را طوری تعیین کنیم که در

$$\frac{3}{2}a - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e = x^4 + x + 1$$

صدق کند. با متحد گرفتن ضرایب همتوان x ، خواهیم داشت

$$a = -1, \quad b = c = 0, \quad d = -1, \quad e = -\frac{5}{2};$$

در نتیجه، جواب خصوصی y_1 عبارت خواهد بود از

$$y_1 = -\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x - \frac{5}{2}.$$

مثال ۲. معادله دیفرانسیل $6y'' - 5y' + y = xe^x$ را حل کنید.

حل. این معادله دیفرانسیل به شکل

$$L(y) = R \quad (30.6)$$

است، که در آن $R(x) = xe^x$ و $L = D^2 - 5D + 6$. معادله همگن نظیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(D - 2)(D - 3)y = 0;$$

این معادله جوابهای مستقل $u_1(x) = e^{2x}$ ، $u_2(x) = e^{3x}$ را دارد. حال یک جواب خصوصی y_1 معادله نیرهمگن را جستجو می‌کنیم. تابع $R(x) = xe^x$ را یک جواب معادله همگن

$$(D - 1)^2 y = 0$$

می‌گیریم. بنابراین، اگر عملگر $(D - 1)^2$ را در دو طرف (30.6) اعمال کنیم، درمی‌یابیم که هر تابع صادق در (30.6) باید در معادله

$$(D - 1)^2(D - 2)(D - 3)y = 0$$

نیز صدق نماید. این معادله دیفرانسیل دارای ریشه‌های منحص $1, 1, 2, 3$ است؛ در نتیجه، تمام جوابهایش در ترکیب خطی

$$y = ae^x + bxe^x + ce^{2x} + de^{3x},$$

که در آن a, b, c, d ثابت‌اند، یافت می‌شوند. می‌خواهیم a, b, c, d را طوری اختیار کنیم که جواب حاصل y_1 در $L(y_1) = xe^x$ صدق نماید. چون به‌ازای هر c و d ،

$$L(ce^{2x} + de^{3x}) = 0$$

فقط کافی است a و b طوری اختیار شوند که $L(ae^x + bxe^x) = xe^x$ و اگر قرار دهیم

$$y_1 = ae^x + bxe^x,$$

داریم

$$D(y_1) = (a + b)e^x + bxe^x, \quad D^2(y_1) = (a + 2b)e^x + bxe^x;$$

در نتیجه، معادله $(D^2 - 5D + 6)y_1 = xe^x$ خواهد شد

$$(2a - 3b)e^x + 2bxe^x = xe^x.$$

با حذف e^x و متحد کردن ضرایب همتوان x ، درمی یابیم که $a = \frac{3}{4}$ ، $b = \frac{1}{2}$ ، بنابراین،

$$L(y) = R \text{ عمومی } y_1 = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x$$

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x$$

داده می شود.

روش به کار رفته در امثله، بیش روش صفرساز نامیده می شود. این روش همیشه، در صورتی که بتوان یک عملگر ثابت ضریب مانند A یافت که R را صفر کند، بکار است. از معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، می دانیم که تنها توابع حقیقی که به وسیله عملگرهای ثابت ضریب صفر می شوند ترکیبات خطی از جملاتی هستند به شکل

$$x^{m-1}e^{\alpha x}, \quad x^{m-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x^{m-1}e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

که در آنها m یک عدد صحیح مثبت بوده و α و β ثابتهای حقیقی می باشند. تابع $y = x^{m-1}e^{\alpha x}$ جواب یک معادله دیفرانسیل با یک ریشه مشخص α از درجه تکرار m است.بنابراین، این تابع دارای صفرساز $(D - \alpha)^m$ است. هریک از توابع $y = x^{m-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$ و $y = x^{m-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$ جواب یک معادله دیفرانسیل با ریشه های مشخص مختلط $\alpha \pm i\beta$

جدول ۱۰۶

تابع	صفر ساز
$y = x^{m-1}$	D^m
$y = e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
$y = x^{m-1}e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^m$
$y = \cos \beta x$ یا $y = \sin \beta x$	$D^2 + \beta^2$
$y = x^{m-1} \cos \beta x$ یا $y = x^{m-1} \sin \beta x$	$(D^2 + \beta^2)^m$
$y = e^{\alpha x} \cos \beta x$ یا $y = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)$
$y = x^{m-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$ یا $y = x^{m-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$	$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$

است، که هر یک از درجه‌ها تکرار m می‌باشد؛ در نتیجه، اینها به وسیله عملگر $[D^2 - 2xD + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$ صفر می‌شوند. بخاطر سهولت در ارجاع، این صفرسازها را در جدول ۱۰۶، همراه با چند حالت خاص از آنها، ذکر می‌کنیم.

با آنکه روش صفرساز عملاً "خیلی کاراست، اما به معادلاتی محدود می‌شود که طرف راست آنها R دارای یک صفرساز ثابت ضریب است. اگر $R(x)$ به شکل $e^{\alpha x}$ ، $\log x$ ، یا $\tan x$ باشد، روش کار نخواهد کرد؛ در این صورت، برای یافتن یک جواب خصوصی باید از روش تغییر پارامتر یا روشی دیگر استفاده کرد.

۱۵۰۶ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، جواب عمومی را بر بازه $(-\infty, +\infty)$ پیدا کنید.

$$1. \quad y'' - y' = x^2 \quad 2. \quad y'' - 4y = e^{2x}$$

$$3. \quad y'' + 2y' = 3xe^x \quad 4. \quad y'' + 4y = \sin x$$

$$5. \quad y'' - 2y' + y = e^x + e^{2x} \quad 6. \quad y'' - y' = e^x$$

$$7. \quad y''' - y' = e^x + e^{-x} \quad 8. \quad y''' + 3y'' + 3y' + y = xe^{-x}$$

$$9. \quad y'' + y = xe^x \sin 2x \quad 10. \quad y^{(4)} - y = x^2 e^{-x}$$

۱۱. نشان دهید که اگر عملگر ثابت ضریب A ، f ، g ، و عملگر ثابت ضریب B ، g را صفر کند، حاصل ضرب AB ، $f + g$ را صفر خواهد کرد.

۱۲. فرض کنید A یک عملگر ثابت ضریب با چند جمله‌ای مشخص p_A باشد.

(A) با استفاده از روش صفرساز، ثابت کنید معادله دیفرانسیل $A(y) = e^{zx}$ در

صورتی یک جواب خصوصی به شکل

$$y_1 = \frac{e^{zx}}{p_A(x)}$$

دارد که α یک صفر چند جمله‌ای p_A نباشد.

(ب) ثابت کنید که اگر α یک صفر ساده p_A (از درجه تکرار ۱) باشد، معادله

$$A(y) = e^{zx}$$

$$y_1 = \frac{xe^{zx}}{p_A'(x)}$$

را خواهد داشت.

(پ) نتایج (T) و (ب)، وقتی α یک صفر p_A از درجه m تکرار است، رانعمیم دهید.

۱۳. دو عملگر ثابت ضریب A و B داده شده است که چند جمله‌ایهای مشخص آنها صفر مشترک ندارند، و فرض کنید $C = AB$.

(T) ثابت کنید هر جواب معادله دیفرانسیل $C(y) = 0$ به شکل $y = y_1 + y_2$ است، که در آن $A(y_1) = 0$ و $B(y_2) = 0$.

(ب) ثابت کنید توابع y_1 و y_2 قسمت (T) به طور منحصر بفرد مشخص اند؛ یعنی، به ازای y صادق در $C(y) = 0$ ، فقط یک جفت y_1, y_2 با خواص قسمت (T) وجود دارد.

۱۴. اگر $L(y) = y'' + ay' + by$ ، که در آن a و b ثابت اند، f را آن جواب خصوصی $L(y) = 0$ بگیرید که در شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می‌کند. نشان دهید که یک جواب خصوصی $L(y) = R$ از فرمول

$$y_1(x) = \int_0^x f(x-t)R(t) dt,$$

به ازای انتخابی از c ، به دست می‌آید. بالاخص، اگر ریشه‌های معادله مشخص مساوی باشند، مثلا $r_1 = r_2 = m$ ، نشان دهید که فرمول مربوط به $y_1(x)$ خواهد شد

$$y_1(x) = e^{mx} \int_0^x (x-t)e^{-mt}R(t) dt.$$

۱۵. فرض کنید Q عملگر "ضرب در x " باشد؛ یعنی، به ازای هر y در رده \mathcal{C}^∞ و هر x حقیقی، $Q(y)(x) = x \cdot y(x)$. فرض کنید I عملگر همانی باشد، که به ازای هر y در \mathcal{C}^∞ با $I(y) = y$ تعریف می‌شود.

$$(T) \text{ ثابت کنید که } DQ - QD = I$$

(ب) نشان دهید که $D^2Q - QD^2$ یک عملگر ثابت ضریب مرتبه اول است، و این عملگر را صریحا "به صورت یک چند جمله‌ای خطی از D مشخص نمایید.

(پ) نشان دهید که $D^3Q - QD^3$ یک عملگر ثابت ضریب مرتبه دوم است، و این عملگر را صریحا "به صورت یک چند جمله‌ای درجه دوم از D مشخص نمایید.

(ت) تعمیم مربوط به عملگر $D^nQ - QD^n$ را حدس بزنید، و حدس خود را به استقرا ثابت کنید.

در تمرینهای ۱۶ تا ۲۰، جواب عمومی معادله دیفرانسیل را در بازه داده شده بیابید.

$$y'' - y = 1/x, \quad (0, +\infty) \quad ۱۶$$

$$y'' + 4y = \sec 2x, \quad \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \quad ۱۷$$

$$y'' - y = \sec^3 x - \sec x, \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad ۱۸$$

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}(e^x - 1)^2, \quad (-\infty, +\infty) \quad ۱۹$$

$$y''' - 7y'' + 14y' - 8y = \log x, \quad (0, +\infty) \quad ۲۰$$

۱۶.۶ تمرینات گوناگون در باب معادلات دیفرانسیل خطی

۱. منحنی انتگرال $y = u(x)$ معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' - 4y = 0$ منحنی انتگرال $y = v(x)$ معادله دیفرانسیل $y'' + 4y' - 5y = 0$ را در مبدأ قطع می‌کند. توابع u و v را در حالتی معین کنید که دو منحنی در مبدأ یک شیب داشته و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[v(x)]^4}{u(x)} = \frac{5}{6}.$$

۲. منحنی انتگرال $y = u(x)$ معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 29y = 0$ منحنی انتگرال $y = v(x)$ معادله دیفرانسیل $y'' + 4y' + 13y = 0$ را در مبدأ قطع می‌کند. دو منحنی در مبدأ دارای یک شیب هستند. u و v را در صورتی تعیین کنید که
- $$u'(\pi/2) = 1$$

۳. فرض کنید معادله دیفرانسیل $y'' + 4xy' + Q(x)y = 0$ دو جواب به شکل $y_1 = u(x)$ و $y_2 = xu(x)$ ، که $u(0) = 1$ ، داشته باشد. $Q(x)$ و $u(x)$ را صریحاً بر حسب x معین کنید.

۴. فرض کنید $L(y) = y'' + P_1y' + P_2y = R$ برای حل معادله غیرهمگن $L(y) = R$ به وسیله تغییر پارامتر، نیاز است که دو جواب مستقل خطی از معادله همگن را بدانیم. این تمرین نشان می‌دهد که اگر یک جواب u_1 از $L(y) = 0$ معلوم باشد، و u_1 هرگز بر بازه‌ای چون J صفر نشود، جواب دوم u_2 معادله همگن از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$u_2(x) = u_1(x) \int_c^x \frac{Q(t)}{[u_1(t)]^2} dt,$$

که در آن $Q(x) = e^{-\int P_1(x) dx}$ ، و c نقطه دلخواهی در J است. این دو جواب بر J مستقل می‌باشند.

(آ) ثابت کنید تابع u_2 در $L(y) = 0$ صدق می‌کند.

(ب) ثابت کنید u_1 و u_2 بر J مستقل هستند.

۵. جواب عمومی معادله

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3 e^{2x}.$$

به‌ازای $x > 0$ ، را با این فرض که معادله همگن جوابی به شکل $y = e^{mx}$ دارد بیابید.

۶. یک جواب ناصفر معادله دیفرانسیل

$$(y'' - 4y') + x^2(y' - 4y) = 0$$

را با تحقیق به دست آورده و، سپس، جواب عمومی معادله را پیدا نمایید.

۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$4x^2 y'' + 4xy' - y = 0$$

را، با این فرض که یک جواب خصوصی به شکل $y = x^m$ به‌ازای $x > 0$ دارد، پیدا نمایید.

۸. در معادله

$$x(1-x)y'' - (1-2x)y' + (x^2 - 3x + 1)y = (1-x)^3$$

یک جواب معادله همگن را با امتحان به دست آورده و، سپس، جواب عمومی معادله فوق را پیدا نمایید.

۹. جواب عمومی معادله

$$(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0$$

را، با این فرض که جوابی به صورت یک چندجمله‌ای از x دارد، پیدا نمایید.

۱۰. جواب عمومی معادله

$$x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = x^2$$

را، با این فرض که معادله همگن جوابی به شکل $y = x^c$ دارد، پیدا کنید.

۱۱. فرض کنید اگر $x > 0$ ، $g(x) = \int_1^x e^t dt$ ، (لازم نیست این انتگرال را حساب کنید.)

تمام مقادیر ثابت a را طوری بیابید که تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{2x}$$

در معادلهٔ دیفرانسیل خطی

$$x^2 y'' + (3x - x^2) y' + (1 - x - e^{2x}) y = 0$$

صدق نماید. با استفاده از این اطلاعات، جواب عمومی معادله را بر بازه $(0, +\infty)$ معین نمایید.

۱۷.۶ معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب تحلیلی

گوئیم تابع f بر بازه $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی است اگر که f در این بازه بسط به صورت سری توانی داشته باشد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

که به ازای $|x - x_0| < r$ همگراست. اگر ضرایب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = 0$$

در بازه $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی باشند، می‌توان نشان داد n جواب مستقل مانند u_1, \dots, u_n وجود دارند که هر یک بر همان بازه تحلیلی می‌باشند. این قضیه را برای معادلات مرتبهٔ دوم ثابت می‌کنیم و، سپس، مثال مهمی را که در بسیاری از کاربردها ظاهر می‌شود مورد بحث قرار می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۳.۶. فرض کنیم P_1 و P_2 بر بازهٔ باز $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی باشند؛ مثلاً،

$$P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

در این صورت، معادلهٔ دیفرانسیل

$$(31.6) \quad y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

دو جواب مستقل u_1 و u_2 دارد که بر همان بازه تحلیلی می‌باشند.

برهان. جوابی پیدا می‌کنیم به صورت سری توانی به شکل

$$(32.6) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

که در بازه داده شده همگرا باشد. برای این کار، سری فوق را به جای P_1 و P_2 در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم و، بعد، روابطی را به دست می‌آوریم که ضرایب a_n باید در آنها صدق کنند تا تابع y داده شده با (۳۲.۶) در معادله صدق نماید.

مشتقات y' و y'' را می‌توان با مشتقگیری جمله به جمله از سری توانی برای y به دست آورد (ر.ک. قضیه ۹.۱۱ در جلد یک). این نتیجه می‌دهد که

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x - x_0)^n.$$

حاصل ضربهای $P_1(x)y'$ و $P_2(x)y$ از سریهای توانی *

$$P_1(x)y' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right) (x - x_0)^n$$

و

$$P_2(x)y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} \right) (x - x_0)^n$$

به دست می‌آیند. وقتی این سریها را در معادله دیفرانسیل (۳۱.۶) می‌گذاریم، در می‌یابیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1) a_{n+2} + \sum_{k=0}^n [(k+1) a_{k+1} b_{n-k} + a_k c_{n-k}] \right\} (x - x_0)^n = 0.$$

بنابراین، معادله دیفرانسیل برقرار است اگر ضرایب a_n را طوری اختیار کنیم که در فرمول بازگشتی

$$(۳۳.۶) \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} = - \sum_{k=0}^n [(k+1) a_{k+1} b_{n-k} + a_k c_{n-k}],$$

به‌ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ صدق نمایند. این فرمول a_{n+2} را برحسب ضرایب پیشتر a_0, a_1, \dots, a_{n+1} و ضرایب توابع معلوم P_1 و P_2 بیان می‌کند. برای دوضرب اول a_0 و

* خواننده ناآشنا با ضرب سریهای توانی می‌تواند به تمرین ۷ در بخش ۲.۶ (مراجعه کند).

a_1 مقادیر دلخواه اختیار کرده و، با استفاده از فرمول بازگشتی، بقیه ضرایب a_2, a_3, \dots را برحسب a_0 و a_1 تعریف می‌نماییم. این صدق سری توانی (۳۲.۶) در معادله دیفرانسیل (۳۱.۶) را تضمین خواهد کرد. قدم بعدی در برهان این است که نشان دهیم که سری که به این صورت تعریف شده به ازای هر x در بازه $(x_0 - r, x_0 + r)$ همگرا می‌باشد. این کار با تحت تسلط درآوردن سری (۳۲.۶) به وسیله سری توانی دیگری که همگرایی اش معلوم است صورت می‌گیرد. بالاخره، نشان می‌دهیم که می‌توان a_0 و a_1 را طوری اختیار کرد که دو جواب مستقل داشته باشیم.

حال ثابت می‌کنیم سری (۳۲.۶)، که ضرایبش با (۳۳.۶) تعریف می‌شوند، در بازه مطلوب همگرا است.

نقطه ثابت $x_0 \neq x_1$ را در بازه $(x_0 - r, x_0 + r)$ اختیار کرده قرار می‌دهیم $t = |x_1 - x_0|$. چون سریهای مربوط به P_1 و P_2 به ازای $x = x_1$ به طور مطلق همگرایی دارند، جملات این سریها کراندار می‌باشند؛ مثلاً، "به ازای $M_1 > 0, M_2 > 0$ ای،

$$|b_k| t^k \leq M_1 \quad \text{و} \quad |c_k| t^k \leq M_2$$

فرض کنیم M ماکزیمم M_1 و M_2 باشد. در این صورت، داریم

$$|b_k| \leq \frac{M}{t^k} \quad \text{و} \quad |c_k| \leq \frac{M}{t^{k+1}}$$

فرمول بازگشتی نامساوی زیر را ایجاب می‌کند:

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)|a_{n+2}| &\leq \sum_{k=0}^n \left\{ (k+1)|a_{k+1}| \frac{M}{t^{n-k}} + |a_k| \frac{M}{t^{n-k+1}} \right\} \\ &= \frac{M}{t^{n+1}} \left\{ \sum_{k=0}^n (k+1)|a_{k+1}| t^{k+1} + \sum_{k=0}^n |a_{k+1}| t^{k+1} + |a_0| - |a_{n+1}| t^{n+1} \right\} \\ &\leq \frac{M}{t^{n+1}} \left\{ \sum_{k=0}^n (k+2)|a_{k+1}| t^{k+1} + |a_0| \right\} = \frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)|a_k| t^k. \end{aligned}$$

حال فرض کنیم $A_0 = |a_0|, A_1 = |a_1|, A_2, A_3, \dots$ را متوالیای "با فرمول

بازگشتی

$$(34.6) \quad (n+2)(n+1)A_{n+2} = \frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)A_k t^k$$

به ازای $n \geq 0$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، به ازای هر $n \geq 0, |a_n| \leq A_n$ ؛ در نتیجه،

سری $\sum a_n(x - x_0)^n$ تحت تسلط سری $\sum A_n|x - x_0|^n$ است. حال، با استفاده از آزمون نسبت، نشان می‌دهیم که، اگر $|x - x_0| < t$ ، $\sum A_n|x - x_0|^n$ همگرا می‌باشد. از تعویض n با $n - 1$ در (۳۴.۶) و تفریق t^{-1} برابر معادله حاصل از (۳۴.۶)، درمی‌یابیم که $M(n + 2)A_{n+1} = t^{-1}(n + 1)nA_{n+1} - (n + 2)A_{n+2}$. بنابراین،

$$A_{n+2} = A_{n+1} \frac{(n + 1)n + (n + 2)Mt}{(n + 2)(n + 1)t},$$

و معلوم می‌شود که، وقتی $n \rightarrow \infty$ ،

$$\frac{A_{n+2}|x - x_0|^{n+2}}{A_{n+1}|x - x_0|^{n+1}} = \frac{(n + 1)n + (n + 2)Mt}{(n + 2)(n + 1)t} |x - x_0| \rightarrow \frac{|x - x_0|}{t}.$$

این حد، اگر $|x - x_0| < t$ ، از یک کمتر است. بنابراین، اگر $|x - x_0| < t$ ، $\sum a_n(x - x_0)^n$ همگرا می‌باشد. اما، چون $t = |x_1 - x_0|$ و x_1 نقطه دلخواهی در بازه $(x_0 - r, x_0 + r)$ بود، سری $\sum a_n(x - x_0)^n$ به ازای هر x در $(x_0 - r, x_0 + r)$ همگرا می‌باشد.

دو ضریب اول a_0 و a_1 مقادیر اولیه y و مشتق آن در x_0 را نمایش می‌دهند.

هرگاه u_1 جواب به صورت سری توانی با $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$ باشد، در نتیجه

$$u_1'(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad u_1(x_0) = 1$$

و u_2 جواب با $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ باشد، در نتیجه

$$u_2'(x_0) = 1 \quad \text{و} \quad u_2(x_0) = 0$$

آنگاه جوابهای u_1 و u_2 مستقل خواهند بود. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۸.۶ معادله لژاندر

در این بخش، جوابهای معادله لژاندر

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad (۳۵.۶)$$

که در آن α ثابت حقیقی دلخواه است، را به صورت سری توانی به دست می‌آوریم. این معادله در مسائل جذب و جریان گرما با تقارن کروی ظاهر می‌شود. وقتی α عدد صحیح مثبتی باشد، درمی‌یابیم که معادله جوابهای چند جمله‌ای، به نام چند جمله‌ایهای لژاندر، دارد. اینها همان چند جمله‌ایهایی هستند که قبلاً در رابطه با فرایند

گرام - اشمیت (فصل ۱، صفحه ۳۴) به آنها برخوردیم.
معادله لژاندر را می توان به صورت

$$[(x^2 - 1)y']' = \alpha(\alpha + 1)y$$

نوشت، که به شکل

$$T(y) = \lambda y$$

است، که در آن T یک عملگر اشتروم-لیوویل می باشد، $T(f) = (pf)'$ ، با $p(x) = x^2 - 1$ و $\lambda = \alpha(\alpha + 1)$. بنابراین، جوابهای ناصفر معادله لژاندر توابع ویژه T متعلق به مقدار ویژه $\alpha(\alpha + 1)$ می باشند. چون $p(x)$ در شرایط کرانه ای

$$p(1) = p(-1) = 0$$

صدق می کند، عملگر T نسبت به ضرب داخلی

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

متقارن می باشد. نظریه عمومی عملگرهای متقارن می گوید که توابع ویژه متعلق به مقادیر ویژه متمایز متعامد هستند (قضیه ۳.۵).

در معادله دیفرانسیل مذکور در قضیه ۱۳.۶، ضریب y'' مساوی یک است. معادله

لژاندر را می توان با تقسیم بر $1 - x^2$ به این شکل درآورد. از (۳۵.۶) داریم

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

که در آن، اگر $x^2 \neq 1$ ،

$$P_2(x) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2} \quad \text{و} \quad P_1(x) = -\frac{2x}{1 - x^2}$$

چون به ازای $|x| < 1$ ، $1/(1 - x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ ، هر دوی P_1 و P_2 در بازه $(-1, 1)$ بسط به صورت سری توانی دارند؛ در نتیجه، قضیه ۱۳.۶ قابل اعمال می باشد. برای یافتن فرمول بازگشتی برای ضریبها، ساده تر آن است که معادله را به شکل (۳۵.۶) رها کرده، سعی کنیم یک جواب به صورت سری توانی به شکل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

که در بازه $(-1, 1)$ معتبر است بیابیم. با مشتگیری جمله به جمله از این سری، داریم

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \quad \text{و} \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

لذا، خواهیم داشت

$$2xy' = \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n,$$

و

$$\begin{aligned} (1-x^2)y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n] x^n. \end{aligned}$$

اگر این سریها را در معادله دیفرانسیل (۳۵.۶) بگذاریم، می بینیم که معادله برقرار است اگر و فقط اگر ضرایب در رابطه

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \alpha(\alpha+1)a_n = 0$$

بمازای هر $n \geq 0$ صدق نمایند. این معادله همان معادله

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-\alpha)(n+1+\alpha)a_n = 0,$$

یا

$$(۳۶.۶) \quad a_{n+2} = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n,$$

است. با این رابطه می توان a_2, a_4, a_6, \dots را متوالیا " برحسب a_0 معین کرد. بهمین نحو، می توان a_3, a_5, a_7, \dots را برحسب a_1 حساب نمود. برای ضرایب با زیرنویسهای زوج داریم

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} a_0,$$

$$a_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{3 \cdot 4} a_2 = (-1)^2 \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} a_0,$$

و، بطور کلی،

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-2) \cdots (\alpha-2n+2) \cdot (\alpha+1)(\alpha+3) \cdots (\alpha+2n-1)}{(2n)!} a_0.$$

این رابطه را می توان به استقرا ثابت کرد. برای ضرایب با زیرنویسهای فرد خواهیم داشت

$$(۴۰.۶) \quad u_1(x) = 1 + \frac{(m!)^2}{(2m)!} \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{(2m+2k)!}{(m-k)!(m+k)!(2k)!} x^{2k}.$$

به عنوان مثال، وقتی $\alpha = 0, 2, 4, 6$ ($m = 0, 1, 2, 3$) چند جمله‌ایهای نظیر خواهند بود

$$u_1(x) = 1, \quad 1 - 3x^3, \quad 1 - 10x^2 + \frac{3}{5}x^4, \quad 1 - 21x^2 + 63x^4 - \frac{2}{5}x^6.$$

سری مربوط به $u_2(x)$ ، وقتی α زوج باشد، یک چند جمله‌ای نیست، زیرا ضریب x^{2n+1} هرگز صفر نمی‌باشد.

وقتی α یک عدد صحیح مثبت فرد باشد، نقشهای u_1 و u_2 عوض می‌شوند؛ سری مربوط به $u_2(x)$ یک چند جمله‌ای است و سری مربوط به $u_1(x)$ یک چند جمله‌ای نمی‌باشد. بطور مشخص، اگر $\alpha = 2m + 1$ ، داریم

$$(۴۱.۶) \quad u_2(x) = x + \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{(2m+2k+1)!}{(m-k)!(m+k)!(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

مثلاً، " وقتی $\alpha = 1, 3, 5$ ($m = 0, 1, 2$) چند جمله‌ایهای نظیر خواهند بود

$$u_2(x) = x, \quad x - \frac{1}{3}x^3, \quad x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5.$$

۱۹.۶ چند جمله‌ایهای لژاندر

بعضی از خواص جوابهای چند جمله‌ای معادله لژاندر را می‌توان مستقیماً "از معادله دیفرانسیل یا از فرمولهای (۴۰.۶) و (۴۱.۶) نتیجه گرفت. خواص دیگر از فرمول دیگر برای این چند جمله‌ایها، که اینک آنها را نتیجه می‌گیریم، آسانتر به دست می‌آیند. ابتدا فرمولی به دست می‌آوریم که (صرف نظر از سازه‌های ثابت) شامل چند جمله‌ایهای (۴۰.۶) و (۴۱.۶) است. فرض کنیم

$$(۴۲.۶) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{r!(n-r)!(n-2r)!} x^{n-2r},$$

که در آن $[n/2]$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از $n/2$ است. بزودی نشان می‌دهیم که این چند جمله‌ای لژاندر از درجه n است که در فصل ۱ معرفی شد. وقتی n زوج باشد، این چند جمله‌ای مساوی مضرب ثابتی از چند جمله‌ای $u_1(x)$ در معادله (۴۰.۶) است؛ وقتی n فرد باشد، این چند جمله‌ای مساوی مضرب ثابتی از چند جمله‌ای $u_2(x)$ در (۴۱.۶)

می‌باشد. * هفت چند جمله‌ای اول لژاندر با فرمولهای زیر داده می‌شوند:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

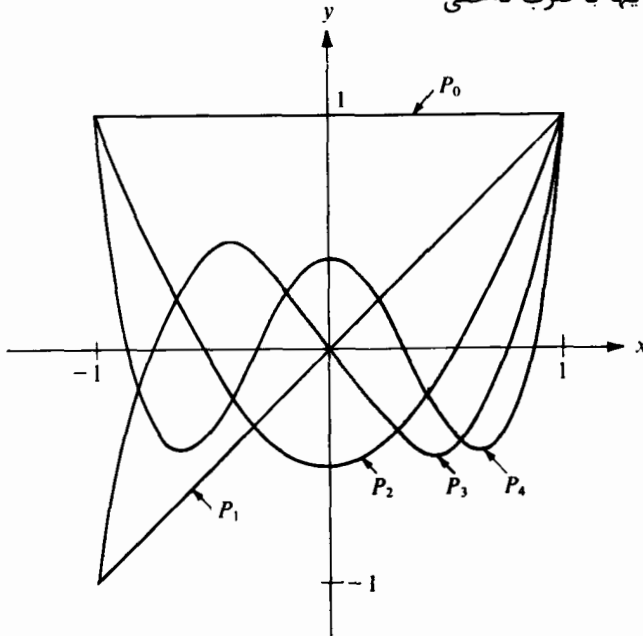
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

شکل ۱۰۶ نمودارهای پنج تابع اول را روی بازه $[-1, 1]$ نشان می‌دهد.

حال می‌توان نشان داد که، صرف نظر از سازه‌های اسکالر، چندجمله‌ایهای لژاندر

آنهایی هستند که از اعمال فرایند متعامد سازی گرام - اشمیت بر دنباله $1, x, x^2, \dots$ از چندجمله‌ایها با ضرب داخلی



شکل ۱۰۶ نمودار چندجمله‌ایهای لژاندر روی بازه $[-1, 1]$

* وقتی n زوج باشد، مثلاً " $n = 2m$ "، می‌توان اندیس جمع‌بندی k در معادله (۴۰.۶) را با اندیس جدید r ، که $r = m - k$ ، عوض کرد. با این کار می‌بینیم که مجموع (۴۰.۶) مضرب ثابتی از $P_n(x)$ است. بهمین نحو، وقتی n فرد باشد، هر تغییر اندیس مجموع (۴۱.۶) را به مضرب ثابتی از $P_n(x)$ بدل می‌سازد.

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

به دست می آید .

ابتدا توجه می کنیم که ، اگر $m \neq n$ ، چندجمله ایهای P_m و P_n متعامدند ، زیرا توابع ویژه^۶ یک عملگر متقارن متعلق به مقادیر ویژه^۶ متمایز می باشند . همچنین ، از آنجا که درجه^۶ P_n مساوی n بوده و $P_0 = 1$ ، چندجمله ایهای $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ همان زیرفضای پیموده شده به وسیله^۶ $1, x, \dots, x^n$ را می پیمایند . در بخش ۱۴۰۱ ، مثال ۲ ، مجموعه^۶ متعامد دیگری از چندجمله ایهای y_0, y_1, y_2, \dots ساختیم که همان $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)$ همان زیرفضای پیموده شده به وسیله^۶ $1, x, \dots, x^n$ را به ازای n می پیمایند . قضیه^۶ متعامد سازی (قضیه^۶ ۱۳۰۱) می گوید که ، صرف نظر از سازه های اسکالر ، فقط یک مجموعه از توابع متعامد با این خاصیت وجود دارد . بنابراین ، باید به ازای اسکالرهایی چون c_n داشته باشیم

$$P_n(x) = c_n y_n(x) .$$

ضریب x^n در $y_n(x)$ مساوی یک است ؛ در نتیجه ، c_n ضریب x^n در $P_n(x)$ می باشد . از (۴۲۰۶) می بینیم که

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} .$$

۲۵۰۶ فرمول ردیگوز برای چندجمله ایهای لژاندر

در مجموع (۴۲۰۶) معرف $P_n(x)$ ملاحظه می شود که

$$\frac{1}{r!(n-r)!} = \frac{1}{n!} \binom{n}{r} \quad \text{و} \quad \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!} x^{n-2r} = \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2r}$$

که در آن $\binom{n}{r}$ ضریب دوجمله ای است ، و مجموع را به شکل زیر می نویسیم :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \binom{n}{r} x^{2n-2r} .$$

وقتی $n > r \geq \lfloor n/2 \rfloor$ ، جمله^۶ x^{2n-2r} دارای درجه ای کمتر از n است ؛ در نتیجه ، مشتق n آن صفر می باشد . بنابراین ، اگر r مجاز به تغییر از ۰ تا n باشد ، مجموع تغییر

نخواهد کرد . این نتیجه می دهد که

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} x^{2n-2r}.$$

حال می بینیم که مجموع سمت راست بسط دوجمله‌ای $(x^2 - 1)^n$ است. بنابراین، داریم

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

این فرمول، به افتخار اولیند رد ریگوز^۱ (۱۷۹۴ - ۱۸۵۱)، اقتصاددان و مصلح فرانسوی، به فرمول رد ریگوز معروف شده است.

با استفاده از فرمول رد ریگوز و معادله دیفرانسیل، می توان چند خاصیت مهم چند جمله‌ایهای لژاندر را نتیجه گرفت. بعضی از این خواص در زیر ذکر شده‌اند. برهانهای آنها در مجموعه تمرینات بعدی به اختصار بیان می شوند.

به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم

$$P_n(1) = 1.$$

بعلاوه، $P_n(x)$ تنها چندجمله‌ای است که در معادله لژاندر

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

صدق می کند و، وقتی $x = 1$ ، دارای مقدار ۱ می باشد.

به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

این نشان می دهد که P_n ، وقتی n زوج باشد، یک تابع زوج، و، وقتی n فرد باشد، یک تابع فرد می باشد.

ما قبلاً "رابطه تعامدی را ذکر کرده‌ایم:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

وقتی $m = n$ ، رابطه نرمی زیر را داریم:

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

هر چند جمله‌ای درجه n را می توان به صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ایهای

لژاندر P_0, P_1, \dots, P_n بیان کرد. در واقع، اگر f یک چندجمله‌ای درجه n باشد، داریم

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x),$$

که در آن

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx.$$

از رابطهٔ تعامدی نتیجه می‌شود که، به‌ازای هر چند جمله‌ای g از درجه کمتر از n ،

$$\int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx = 0.$$

این خاصیت را می‌توان به‌کاربرد و ثابت کرد که چندجمله‌ای لژاندر P_n دارای n صفر حقیقی متمایز است و همه در بازه $(-1, 1)$ قرار دارند.

۲۱.۶ تمرین

۱. معادلهٔ لژاندر (۳۵.۶) به‌ازای $\alpha = 0$ دارای جواب چندجمله‌ای $u_1(x) = 1$ و یک جواب u_2 است، که چندجمله‌ای نیست، و با سری معادله (۴۱.۶) داده می‌شود. (T) نشان دهید که مجموع سری مربوط به u_2 از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

(ب) مستقیماً تحقیق کنید که تابع u_2 در قسمت (T)، وقتی $\alpha = 0$ ، یک جواب معادلهٔ لژاندر است.

۲. نشان دهید که تابع f تعریف شده با معادلهٔ

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

به‌ازای $|x| < 1$ در معادلهٔ لژاندر (۳۵.۶) به‌ازای $\alpha = 1$ صدق می‌کند. این تابع را به صورت ترکیبی خطی از جوابهای u_1 و u_2 داده شده با معادلات (۳۸.۶) و (۳۹.۶) بیان نمایید.

۳. معادلهٔ لژاندر (۳۵.۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$[(x^2 - 1)y']' - \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

(T) هرگاه a, b, c ثابت بوده و $a > b$ و $4c + 1 > 0$ ، نشان دهید که یک معادلهٔ دیفرانسیل از نوع

$$[(x - a)(x - b)y']' - cy = 0$$

را می‌توان با تغییر متغیری به شکل $x = At + B$ ، که $A > 0$ ، به یک معادلهٔ لژاندر تبدیل کرد. A و B را برحسب a و b معین نمایید.

(ب) با استفاده از روش قسمت (T) ، معادلهٔ

$$(x^2 - x)y'' + (2x - 1)y' - 2y = 0$$

را به یک معادلهٔ لژاندر تبدیل نمایید.

۴. دو جواب مستقل به صورت سری توانی معادلهٔ هرمیتی

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

را بر بازه‌ای به شکل $(-r, r)$ پیدا کنید. نشان دهید که یکی از اینها، وقتی α یک عدد صحیح نامنفی باشد، یک چندجمله‌ای می‌باشد.

۵. یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy'' + (3 + x^2)y' + 3x^2y = 0$$

را به صورت سری توانی بیابید که به ازای هر x معتبر باشد، جواب دوم را به شکل $y = x^{-2} \sum a_n x^n$ بیابید که به ازای هر $x \neq 0$ معتبر باشد.

۶. یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' + x^2y' - (\alpha x + 2)y = 0$$

را به صورت سری توانی بیابید که بر بازه‌ای به شکل $(-r, r)$ معتبر باشد.

۷. فرض کنید دو تابع A و B بر بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی باشند؛ مثلاً،

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n.$$

می‌توان نشان داد که حاصل ضرب $C(x) = A(x)B(x)$ نیز بر $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی است. این تمرین نشان می‌دهد که C دارای بسط به صورت سری توانی زیر است:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \text{که در آن } C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

(T) با استفاده از قاعدهٔ لایب نیتز برای مشتق n م حاصل ضرب، نشان دهید

که مشتق n م C مساوی است با

$$C^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{(k)}(x) B^{(n-k)}(x).$$

(ب) حال، با استفاده از این امر که $A^{(k)}(x_0) = k! a_k$ و $B^{(n-k)}(x_0) = (n-k)! b_{n-k}$ ، نتیجه بگیرید که

$$C^{(n)}(x_0) = n! \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

چون $C^{(n)}(x_0) = n! c_n$ ، این فرمول مطلوب برای c_n را ثابت خواهد کرد.

در تمرینهای ۸ تا ۱۴، $P_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر درجه n است. این تمرینها اثبات خواص چندجمله‌ایهای لژاندر را که در بخش ۲۰.۶ توصیف شده‌اند به اختصار شرح می‌دهند.

۸. (T) با استفاده از فرمول رد ریگوز، نشان دهید

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} (x+1)^n + (x-1)Q_n(x),$$

که در آن $Q_n(x)$ یک چندجمله‌ای است.

(ب) ثابت کنید $P_n(1) = 1$ و $P_n(-1) = (-1)^n$.

(پ) ثابت کنید تنها جواب چندجمله‌ای معادله لژاندر (با $\alpha = n$) است که در $x = 1$ مقدار یک دارد.

۹. (T) با استفاده از معادلات دیفرانسیل برقرار به وسیله P_n و P_m ، نشان دهید که

$$[(1-x^2)(P_n P'_m - P'_n P_m)]' = [n(n+1) - m(m+1)]P_n P_m.$$

(ب) هرگاه $n \neq m$ ، با انتگرالگیری از معادله قسمت (T) از -1 تا 1 ، برهان دیگری برای رابطه تعامدی

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

به دست آورید.

۱۰. (T) فرض کنید $f(x) = (x^2 - 1)^n$. با استفاده از انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء،

نشان دهید که

$$\int_{-1}^1 f^{(n)}(x) f^{(n)}(x) dx = - \int_{-1}^1 f^{(n+1)}(x) f^{(n-1)}(x) dx.$$

این فرمول را چندبار به کار برده، نتیجه بگیرید که انتگرال سمت چپ مساوی

$$2(2n)! \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

است.

(ب) جانشانی $x = \cos t$ انتگرال $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ را به $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt$ بدل می‌کند. با استفاده از رابطه

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1}$$

و فرمول رد ریگوز، نتیجه بگیرید که

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

۱۱. (T) نشان دهید

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n + Q_n(x),$$

که در آن $Q_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از n است.

(ب) چندجمله‌ای $f(x) = x^n$ را به صورت ترکیبی خطی از P_0, P_1, P_2, P_3 و P_4 بیان کنید.

(پ) نشان دهید که هر چند جمله‌ای f از درجه n را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از چندجمله‌ایهای لژاندر P_0, P_1, \dots, P_n بیان کرد.

۱۲. (T) اگر f یک چندجمله‌ای درجه n باشد، می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x).$$

[این امر، جهت تمرین ۱۱ (پ)، میسر است.] به ازای یک m ثابت، که $0 \leq m \leq n$ ، دوطرف این معادله را در $P_m(x)$ ضرب کرده از -1 تا 1 انتگرال می‌گیریم. با استفاده از تمرینهای ۹ (ب) و ۱۰ (ب)، رابطه زیر را نتیجه بگیرید:

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx.$$

۱۳. با استفاده از تمرینهای ۹ و ۱۱، نشان دهید که، به ازای هر چند جمله‌ای g از درجه کمتر از n ، $\int_{-1}^1 g(x)P_n(x) dx = 0$.

۱۴. (آ) با استفاده از قضیه رل، نشان دهید که P_n نمی‌تواند در بازه $(-1, 1)$ صفر مکرر داشته باشد. به عبارت دیگر، هر صفر P_n واقع در $(-1, 1)$ باید یک صفر ساده باشد.

(ب) فرض کنیم P_n در بازه $(-1, 1)$ دارای m صفر باشد. اگر $m = 0$ ، فرض کنید $Q_0(x) = 1$ ؛ و اگر $m \geq 1$ ، فرض کنید

$$Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

که در آن x_1, x_2, \dots, x_m صفر P_n در $(-1, 1)$ اند. نشان دهید که، در هر نقطه x از $(-1, 1)$ ، $Q_m(x)$ با $P_n(x)$ همعلامت است.

(پ) با استفاده از قسمت (ب)، همراه با تمرین ۱۳، نشان دهید که نامساوی $m < n$ به تناقض می‌رسد. این نشان می‌دهد که P_n دارای n صفر حقیقی متمایز است، که همه آنها در بازه $(-1, 1)$ قرار دارند.

۱۵. (آ) نشان دهید که مقدار انتگرال $\int_{-1}^1 P_n(x)P_{n+1}'(x) dx$ از n مستقل است.
(ب) انتگرال $\int_{-1}^1 x P_n(x)P_{n-1}(x) dx$ را محاسبه نمایید.

۲۲۰۶ روش فروبنیوس

در بخش ۱۷۰۶ آموختیم که جوابهای به صورت سری توانی معادله دیفرانسیل

$$(۴۳۰۶) \quad y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

در یک بازه حول نقطه x_0 که در آن ضرایب P_1 و P_2 تحلیلی اند را چطور پیدا کنیم. اگر P_1 یا P_2 در مجاورت x_0 تحلیلی نباشد، جوابهای به صورت سری توانی معتبر در مجاورت x_0 ممکن است موجود باشند یا که نباشند. به عنوان مثال، فرض کنید بخواهیم یک جواب به صورت سری توانی معادله دیفرانسیل

$$(۴۴۰۶) \quad x^2 y'' - y' - y = 0$$

را در نزدیکی $x_0 = 0$ بیابیم. اگر فرض کنیم جوابی چون $y = \sum a_k x^k$ وجود داشته باشد، و این سری را در معادله دیفرانسیل بگذاریم، به فرمول بازگشتی

$$a_{n+1} = \frac{n^2 - n - 1}{n + 1} a_n$$

خواهیم رسید. اگرچه با این کار سری توانی $\sum a_n x^n = y$ حاصل می‌شود که به‌طور صوری در (۴۴.۶) صدق می‌کند، آزمون نسبت نشان می‌دهد که این سری توانی فقط به‌ازای $x = 0$ همگرا است. بنابراین، هیچ جوابی از (۴۴.۶) به‌صورت سری توانی که در بازهٔ بازی حول $x_0 = 0$ معتبر باشد وجود ندارد. این مثال قضیهٔ ۱۳.۶ را از کار نمی‌اندازد، زیرا، وقتی معادلهٔ (۴۴.۶) را به‌شکل (۴۳.۶) درمی‌آوریم، درمی‌یابیم که ضرایب P_1 و P_2 عبارتند از

$$P_1(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{و} \quad P_2(x) = -\frac{1}{x^2}$$

این توابع حول مبداً بسط به‌صورت سری توانی ندارند. مشکل در اینجا این است که ضریب y'' در (۴۴.۶)، وقتی $x = 0$ ، دارای مقدار ۰ است؛ به‌عبارت دیگر، معادلهٔ دیفرانسیل در $x = 0$ نقطهٔ منفرد دارد.

برای درک مشکلات بررسی معادلات دیفرانسیل در مجاورت یک نقطهٔ منفرد به اطلاعاتی از نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط نیاز داریم. با اینحال، چند حالت خاص و مهم از معادلات با نقاط منفرد وجود دارند که می‌توان آنها را با روشهای مقدماتی بررسی کرد. مثلاً، فرض کنیم معادلهٔ دیفرانسیل (۴۳.۶) با معادله‌ای به شکل

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (۴۵.۶)$$

معادل باشد، که در آن P و Q در بازهٔ بازی چون $(x_0 - r, x_0 + r)$ بسط به‌صورت سری توانی دارند. در این حالت، می‌گوییم x_0 یک نقطهٔ منفرد منتظم معادله است. اگر دو طرف (۴۵.۶) را بر $(x - x_0)^2$ تقسیم کنیم، معادله به‌ازای $x \neq x_0$ خواهد شد

$$y'' + \frac{P(x)}{x - x_0} y' + \frac{Q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0.$$

اگر $P(x_0) \neq 0$ یا $Q(x_0) \neq 0$ ، یا اگر $Q(x_0) = 0$ و $Q'(x_0) \neq 0$ ، ضریب y' یا ضریب y حول نقطهٔ x_0 بسط به‌صورت سری توانی ندارد؛ در نتیجه، قضیهٔ ۱۳.۶ قابل اجرا نیست. در سال ۱۸۷۳، ریاضیدان آلمانی، گئورگ فروبنیوس^۱ (۱۹۱۷ - ۱۸۴۹)، روش مفیدی برای بررسی این معادلات ارائه داد. ما قضیهٔ فروبنیوس را ذکر می‌کنیم اما برهانش

را عرضه نخواهیم کرد. * در بخش بعد، برهان حالت خاص و مهمی از آن، یعنی معادله بسل^۱، به تفصیل بیان خواهد شد.

قضیه فروبنیوس، بسته به سرشت ریشه‌های معادله درجه دوم

$$(46.6) \quad t(t-1) + P(x_0)t + Q(x_0) = 0,$$

به دو قسمت تقسیم می‌شود. این معادله درجه دوم معادله اندیسی معادله دیفرانسیل (45.6) است. ضرایب $P(x_0)$ و $Q(x_0)$ جملات ثابت در بسط‌های P و Q به صورت سری توانی اند. فرض کنیم α_1 و α_2 ریشه‌های معادله اندیسی باشند. این ریشه‌ها ممکن است حقیقی یا مختلط، مساوی یا متمایز، باشند؛ نوع جوابی که به وسیله روش فروبنیوس به دست می‌آید تابع آن است که این ریشه‌ها به قدر عددی صحیح با هم تفاوت دارند یا نه.

قضیه ۱۴.۶. حالت اول قضیه فروبنیوس. فرض کنیم α_1 و α_2 ریشه‌های معادله اندیسی بوده و $\alpha_1 - \alpha_2$ یک عدد صحیح نباشد. در این صورت، معادله دیفرانسیل (45.6) دو جواب مستقل u_1 و u_2 به شکل زیر دارد:

$$(47.6) \quad a_0 = 1 \quad \text{با} \quad u_1(x) = |x - x_0|^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$(48.6) \quad b_0 = 1 \quad \text{با} \quad u_2(x) = |x - x_0|^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

هر دو سری در بازه $|x - x_0| < r$ همگرا آیند، و معادله دیفرانسیل به زای $|x - x_0| < r$ برقرار می‌باشد.

قضیه ۱۵.۶. حالت دوم قضیه فروبنیوس. فرض کنیم α_1 ، α_2 ریشه‌های معادله اندیسی بوده، و $\alpha_1 - \alpha_2 = N$ ، یعنی مساوی عددی صحیح و نامنفی باشد. در این

* برای مشاهده برهانی از آن، ر.گ.

E. Hille, *Analysis*, Vol. II, Blaisdell Publishing Co., 1966

یا

E. A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, 1961.

صورت، معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵.۶) جوابی مانند u_1 به شکل (۴۷.۶) و جواب مستقل دیگری مانند u_2 به شکل زیر دارد:

$$(۴۹.۶) \quad u_2(x) = |x - x_0|^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n + C u_1(x) \log |x - x_0|,$$

که در آن $b_0 = 1$. ثابت C ، در صورت $N = 0$ ، ناصفر است. اگر $N > 0$ ، ثابت C ممکن است صفر باشد یا نباشد. مثل حالت ۱، هر دو سری در بازهٔ $|x - x_0| < r$ همگراست، و جوابها به ازای $0 < |x - x_0| < r$ معتبر می‌باشند.

۲۳.۶ معادلهٔ بسل

در این بخش، با استفاده از روش فروبنیوس، معادلهٔ بسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \alpha^2) y = 0$$

را، که در آن α یک ثابت نامنفی است، حل می‌کنیم. این معادله در مسائل مربوط به ارتعاشات جداره‌ها، جریان گرما در سیلندرها، و انتشار جریانات الکتریکی در هادیهای استوانه‌ای به‌کار می‌آید. بعضی از جوابهای آن به معادلات بسل معروفند. توابع بسل در بعضی مسائل نظریهٔ تحلیلی اعداد نیز ظاهر می‌شوند.

این معادله، با اینکه قبلاً "در تحقیقات دانیل برنولی^۱ (۱۷۳۲) و اوایلر (۱۷۶۴) آمده است، به افتخار ستاره‌شناس آلمانی، اف. دبلیو، بسل (۱۸۴۶ - ۱۷۸۴)، به معادلهٔ بسل معروف است.

معادلهٔ بسل به شکل (۴۵.۶) است با $x_0 = 0$ ، $P(x) = 1$ ، و $Q(x) = x^2 - \alpha^2$ ؛ در نتیجه، نقطهٔ x_0 یک نقطهٔ منفرد منتظم است. چون P و Q بر تمام خط حقیقی تحلیلی است، سعی می‌کنیم جوابها را به شکل

$$(۵۰.۶) \quad y = |x|^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

پیدا کنیم با $a_0 \neq 0$ ، که به ازای هر x حقیقی با استثنای احتمالی $x = 0$ معتبر باشد. ابتدا x را بزرگتر از ۰ می‌گیریم؛ در نتیجه، $|x|^{\alpha} = x^{\alpha}$. مشتگیری از (۵۰.۶) نتیجه می‌دهد که

$$y' = tx^{t-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^t \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^{t-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+t) a_n x^n.$$

بهمین نحو، داریم

$$y'' = x^{t-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+t)(n+t-1) a_n x^n.$$

اگر $L(y) = x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y$ معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} L(y) &= x^t \sum_{n=0}^{\infty} (n+t)(n+t-1) a_n x^n + x^t \sum_{n=0}^{\infty} (n+t) a_n x^n \\ &+ x^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - x^t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 a_n x^n = x^t \sum_{n=0}^{\infty} [(n+t)^2 - \alpha^2] a_n x^n + x^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}. \end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم $L(y) = 0$ ، x^t را حذف می‌کنیم، و سعی می‌کنیم a_n را طوری تعیین کنیم که ضرب هر توان x صفر شود. برای جمله ثابت لازم داریم که $(t^2 - \alpha^2)a_0 = 0$. چون جوابی را می‌خواهیم که در آن $a_0 \neq 0$ ، این ایجاب می‌کند که

$$(51.6) \quad t^2 - \alpha^2 = 0.$$

این معادله اندیسی است. ریشه‌هایش α و $-\alpha$ تنها مقادیر ممکن t اند که می‌توانند جوابی از نوع مطلوب به ما بدهند.

ابتدا انتخاب $t = \alpha$ را در نظر می‌گیریم. به‌ازای این t ، بقیه معادلات برای

تعیین ضرایب خواهند شد

$$(52.6) \quad [(1+\alpha)^2 - \alpha^2] a_1 = 0 \text{ و } [(n+\alpha)^2 - \alpha^2] a_n + a_{n-2} = 0 \text{ به‌ازای } n \geq 2.$$

چون $\alpha \geq 0$ ، اولین معادله ایجاب می‌کند که $a_1 = 0$. دومین فرمول را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(53.6) \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\alpha)^2 - \alpha^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\alpha)};$$

در نتیجه، $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$. برای ضرایب با زیرنویسهای زوج داریم

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-a_0}{2(2+2\alpha)} = \frac{-a_0}{2^2(1+\alpha)}, & a_4 &= \frac{-a_2}{4(4+2\alpha)} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^4! (1+\alpha)(2+\alpha)}, \\ a_6 &= \frac{-a_4}{6(6+2\alpha)} = \frac{(-1)^3 a_0}{2^6! (1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)}, \end{aligned}$$

و، بطور کلی،

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1 + \alpha)(2 + \alpha) \cdots (n + \alpha)}$$

بنابراین، انتخاب $t = \alpha$ به ما جواب

$$y = a_0 x^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1 + \alpha)(2 + \alpha) \cdots (n + \alpha)} \right)$$

را می‌دهد. آزمون نسبت نشان می‌دهد که سری توانی در این فرمول به‌ازای هر x حقیقی همگراست.

در این بحث فرض کرده‌ایم $x > 0$. اگر $x < 0$ ، می‌توان بحث را با تعویض x به $(-x)$ تکرار کرد. مجدداً درمی‌یابیم که t باید در معادله $t^2 - \alpha^2 = 0$ صدق کند. با اختیار $t = \alpha$ ، همان جواب به‌دست می‌آید، جز آنکه سازهٔ خارجی x^α با $(-x)^\alpha$ عوض شده است. بنابراین، تابع f_α که با معادلهٔ

$$(54.6) \quad f_\alpha(x) = a_0 |x|^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1 + \alpha)(2 + \alpha) \cdots (n + \alpha)} \right)$$

داده شده، یک جواب معادلهٔ بسل است که به‌ازای هر $x \neq 0$ حقیقی معتبر می‌باشد. برای آن مقادیر α که $f'_\alpha(0)$ و $f''_\alpha(0)$ موجودند، جواب به‌ازای $x = 0$ نیز معتبر می‌باشد. حال ریشهٔ $t = -\alpha$ معادلهٔ اندیسی را در نظر می‌گیریم. به‌جای (52.6)، معادلات

$$[(n - \alpha)^2 - \alpha^2] a_n + a_{n-2} = 0 \quad \text{و} \quad [(1 - \alpha)^2 - \alpha^2] a_1 = 0$$

را خواهیم داشت، که خواهند شد

$$n(n - 2\alpha) a_n + a_{n-2} = 0 \quad \text{و} \quad (1 - 2\alpha) a_1 = 0$$

اگر 2α عددی صحیح نباشد، این معادلات نتیجه می‌دهند که $a_1 = 0$ و، به‌ازای $n \geq 2$ ،

$$a_n = - \frac{a_{n-2}}{n(n - 2\alpha)}$$

چون این فرمول بازگشتی همان فرمول (53.6) است، با $-\alpha$ به‌جای α ، به‌جواب

$$(55.6) \quad f_{-\alpha}(x) = a_0 |x|^{-\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1 - \alpha)(2 - \alpha) \cdots (n - \alpha)} \right)$$

می‌رسیم، که به‌ازای هر $x \neq 0$ حقیقی معتبر است.

جواب $f_{-\alpha}$ با این فرض به‌دست آمده بود که 2α یک عدد صحیح مثبت نباشد. اما،

سری برای $f_{-\alpha}$ ، حتی اگر 2α عدد صحیح مثبت باشد، نیز با معنی است ، البته تاجایی که α یک عدد صحیح مثبت نباشد . می توان تحقیق کرد که $f_{-\alpha}$ به ازای چنین α ای در معادلهٔ بسل صدق می کند . بنابراین، به ازای هر $\alpha \geq 0$ ، جواب به صورت سری f_{α} را داریم که با معادلهٔ (۵۴.۶) داده می شود ؛ و اگر α یک عدد صحیح نامنفی نباشد، جواب دیگر $f_{-\alpha}$ را یافته ایم که با معادلهٔ (۵۵.۶) داده شده است . دو جواب f_{α} و $f_{-\alpha}$ مستقل اند، زیرا یکی از آنها، وقتی $x \rightarrow 0$ ، به ∞ میل می کند، و دیگری نخواهد کرد . حال شکل جوابها را ساده می نماییم . برای این کار، به چند خاصیت از تابع گامای اولیر نیاز داریم ، و برای یادآوری این خواص کمی از بحث خود خارج می شویم .

به ازای هر $s > 0$ حقیقی، $\Gamma(s)$ را با انتگرال مجازی

$$\Gamma(s) = \int_{0+}^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

تعریف می کنیم . این انتگرال اگر $s > 0$ همگرا و ، اگر $s \leq 0$ ، واگراست . انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء به معادلهٔ تابعی زیر منجر می شود :

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s). \quad (56.6)$$

این ایجاب می کند که

$$\Gamma(s+2) = (s+1)\Gamma(s+1) = (s+1)s \Gamma(s),$$

$$\Gamma(s+3) = (s+2)\Gamma(s+2) = (s+2)(s+1)s \Gamma(s),$$

و ، بطور کلی ، به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ،

$$\Gamma(s+n) = (s+n-1) \cdots (s+1)s \Gamma(s). \quad (57.6)$$

چون $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ ، وقتی در (۵۷.۶) قرار دهیم $s = 1$ ، درمی یابیم که

$$\Gamma(n+1) = n!$$

بنابراین، تابع گاما تعمیمی است از تابع فاکتوریل از اعداد صحیح به اعداد حقیقی مثبت .

معادلهٔ تابعی (۵۶.۶) را می توان برای تعمیم تعریف $\Gamma(s)$ به مقادیر منفی s که اعدادی صحیح نیستند به کار برد . معادلهٔ (۵۶.۶) را به شکل زیر می نویسیم :

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}. \quad (58.6)$$

طرف راست با معنی است اگر $s + 1 > 0$ و $s \neq 0$. بنابراین، می توان، با استفاده از این معادله، $\Gamma(s)$ را به ازای $-1 < s < 0$ تعریف کرد. حال طرف راست (۵۸.۶) با معنی است اگر $s \neq 0$ ، $s \neq -1$ ، $s + 2 > 0$ ، و می توان، با استفاده از این معادله، $\Gamma(s)$ را به ازای $-2 < s < -1$ تعریف نمود. اگر به همین نحو ادامه دهیم، می توانیم تعریف $\Gamma(s)$ را به استقرا به هر بازه، باز به شکل $-n < s < -n + 1$ ، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، تعمیم داد. حال معادله تابعی (۵۶.۶) و تعمیم آن به (۵۷.۶) به ازای هر s حقیقی که دو طرف با معنی باشند معتبر است.

حال به بحث معادله بسل باز می گردیم. سری مربوط به f_2 در معادله (۵۴.۶) شامل حاصل ضرب $(n + \alpha) \cdots (2 + \alpha)(1 + \alpha)$ است. این حاصل ضرب را می توان، با اختیار $s = 1 + \alpha$ در (۵۷.۶)، برحسب تابع گاما بیان کرد. این نتیجه می دهد که

$$(1 + \alpha)(2 + \alpha) \cdots (n + \alpha) = \frac{\Gamma(n + 1 + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)}.$$

بنابراین، اگر $a_0 = 2^{-\alpha} / \Gamma(1 + \alpha)$ را در معادله (۵۴.۶) اختیار کنیم، و تابع حاصل $f_\alpha(x)$ را، وقتی $x > 0$ ، با $J_\alpha(x)$ نشان دهیم، جواب به ازای $x > 0$ را می توان به صورت زیر نوشت:

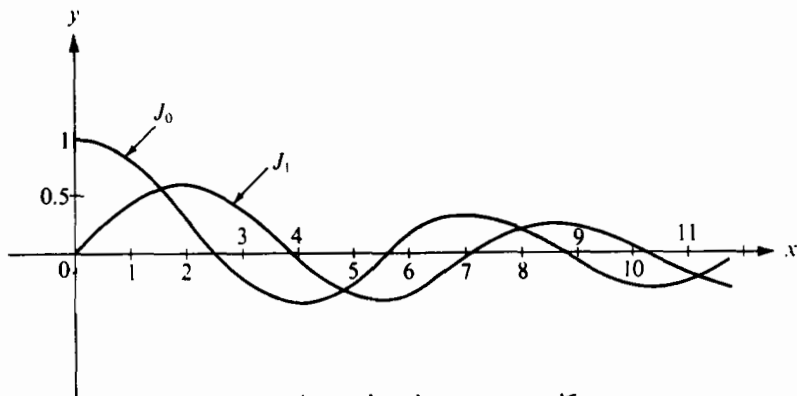
$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + 1 + \alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \quad (59.6)$$

تابع J_α تعریف شده با این معادله به ازای $x > 0$ و $\alpha \geq 0$ تابع بسل نوع اول مرتبه α نامیده می شود. وقتی α یک عدد صحیح نامنفی باشد، مثلاً $\alpha = p$ ، تابع بسل J_p با سری توانی زیر داده می شود:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n + p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \quad (p = 0, 1, 2, \dots).$$

این یک جواب معادله بسل به ازای $x < 0$ نیز هست. جداول مسووظی از توابع بسل ساخته شده اند. نمودار دو تابع J_0 و J_1 در شکل ۲.۶ نشان داده شده است.

حال تابع جدید $J_{-\alpha}$ را با تعویض α به $-\alpha$ در معادله (۵۹.۶) تعریف می کنیم، در صورتی که α طوری باشد که $\Gamma(n + 1 - \alpha)$ معنی داشته باشد؛ یعنی، α یک عدد صحیح مثبت نباشد. بنابراین، اگر $x > 0$ و $\alpha > 0$ ، $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$ ، تعریف می کنیم



شکل ۲۰۶ نمودار توابع بسل J_0 و J_1

$$J_{-\alpha}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1-\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

با فرض $\alpha = 1 - s$ در (۵۷.۶)، خواهیم داشت

$$\Gamma(n+1-\alpha) = (1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)\Gamma(1-\alpha),$$

و ملاحظه می‌کنیم که سری مربوط به $J_{-\alpha}(x)$ همان سری مربوط به $J_{-\alpha}(x)$ در معادلهٔ

(۵۵.۶) به ازای $a_0 = 2^\alpha/\Gamma(1-\alpha)$ ، $x > 0$ است. بنابراین، اگر α یک عدد صحیح

مثبت نباشد، $J_{-\alpha}$ یک جواب معادلهٔ بسل به ازای $x > 0$ می‌باشد.

اگر α یک عدد صحیح نباشد، دو جواب $J_\alpha(x)$ و $J_{-\alpha}(x)$ بر محور حقیقی مثبت

(بدلیل اینکه نسبت آنها ثابت نیست) مستقل خطی اند، و جواب عمومی معادلهٔ بسل

به ازای $x > 0$ مساوی است با

$$y = c_1 J_\alpha(x) + c_2 J_{-\alpha}(x).$$

اگر α یک عدد صحیح نامنفی باشد، مثلاً $\alpha = p$ ، فقط دریافته‌ایم که جواب

J_p و ضرایب ثابت آن به ازای $x > 0$ معتبرند. جواب دیگر، مستقل از این یکی، را

می‌توان به روش توصیف شده در تمرین ۴ از بخش ۱۶.۶ به دست آورد. این روش بیان

می‌کند که، اگر u_1 یک جواب $0 = P_1 y' + P_2 y + y''$ باشد که هرگز بر بازهٔ I صفر نشود،

جواب دوم u_2 مستقل از u_1 با انتگرال

$$u_2(x) = u_1(x) \int_c^x \frac{Q(t)}{[u_1(t)]^2} dt$$

داده می‌شود، که در آن $Q(x) = e^{-\int P_1(x) dx}$. برای معادلهٔ بسل داریم $P_1(x) = 1/x$:
در نتیجه، $Q(x) = 1/x$ و جواب دوم u_2 با فرمول

$$(۶۰.۰۶) \quad u_2(x) = J_p(x) \int_c^x \frac{1}{t[J_p(t)]^2} dt$$

داده می‌شود، در صورتی که c و x در بازهٔ I که در آن J_p صفر نمی‌شود قرار داشته باشند.
این جواب دوم را می‌توان به شکلهای دیگر درآورد. مثلاً، از معادلهٔ (۵۹.۰۶) می‌توان نوشت

$$\frac{1}{[J_p(t)]^2} = \frac{1}{t^{2p}} g_p(t),$$

که در آن $g_p(0) \neq 0$. در بازهٔ I ، تابع g_p دارای بسط به صورت سری توانی

$$g_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

است، که می‌توان آن را با متحد گرفتن ضرایب در اتحاد $t^{2p} [J_p(t)]^2 = t^{2p} g_p(t)$ تعیین کرد.
اگر وجود این بسط را فرض کنیم، انتگرالده در (۶۰.۰۶) شکل زیر را خواهد گرفت:

$$\frac{1}{t[J_p(t)]^2} = \frac{1}{t^{2p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n.$$

با انتگرالگیری جمله به جمله از این فرمول از c تا x ، یک جملهٔ لگاریتمی $A_{2p} \log x$ (از توان t^{-1}) به انضمام یک سری به شکل $x^{-2p} \sum B_n x^n$ به دست می‌آید. بنابراین، معادلهٔ (۶۰.۰۶) شکل زیر را خواهد گرفت:

$$u_2(x) = A_{2p} J_p(x) \log x + J_p(x) x^{-2p} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n.$$

می‌توان نشان داد که $A_{2p} \neq 0$. اگر $u_2(x)$ را در $1/A_{2p}$ ضرب کنیم، جواب حاصل با $K_p(x)$ نموده می‌شود و به شکل زیر می‌باشد:

$$K_p(x) = J_p(x) \log x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

این شکل جوابی است که حالت دوم قضیهٔ فروبنیوس قول داده است.

با رسیدن به این فرمول، می‌توان تحقیق کرد که یک جواب به این شکل عملاً وجود دارد، به این ترتیب که طرف راست را در معادلهٔ بسل گذاشته و ضرایب C_n را طوری

تعیین کرد که معادله برقرار شود. این محاسبات طولانی دارد و، در نتیجه، حذف شده است. نتیجه نهایی را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$K_p(x) = J_p(x) \log x - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h_n + h_{n+p}}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

که در آن $h_0 = 0$ و، به ازای $n \geq 1$ ، $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + 1/n$ ، سری سمت راست به ازای هر x حقیقی همگراست. تابع K_p ، که به ازای $x > 0$ با این فرمول تعریف شده است، تابع بسل نوع دوم مرتبه p نامیده می شود. چون K_p مضرب ثابتی از J_p نیست، جواب عمومی معادله بسل در این حالت به ازای $x > 0$ عبارت است از

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 K_p(x).$$

خواص دیگر توابع بسل در مجموعه تمرینات زیر مطرح شده اند.

۲۴۰۶ تمرین

۱. (T) فرض کنید f یک جواب معادله بسل مرتبه α بوده و، به ازای $x > 0$ ،

$$g(x) = x^{1/2} f(x) \text{ . نشان دهید که } g \text{ در معادله دیفرانسیل}$$

$$y'' + \left(1 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}\right) y = 0$$

صدق می کند.

(ب) وقتی $4\alpha^2 = 1$ ، معادله دیفرانسیل در (T) خواهد شد $y'' + y = 0$ ؛ جواب

عمومی آن $y = A \cos x + B \sin x$ است. با این اطلاعات و معادله $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *

نشان دهید که، به ازای $x > 0$ ،

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x \quad \text{و} \quad J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x$$

* تغییر متغیر $t = u^2$ نتیجه می دهد که

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{0+}^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

(برای اثبات اینکه $2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ ، ر.ک. تمرین ۱۶ از بخش (۲۸۰۱).

(پ) فرمولهای قسمت (ب) را مستقیماً از سریهای مربوط به $J_{1/2}(x)$ و $J_{-1/2}(x)$ نتیجه بگیرید.

۲. با استفاده از نمایش سری برای توابع بسل، نشان دهید که

$$: \frac{d}{dx} (x^\alpha J_\alpha(x)) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x) \quad (\bar{T})$$

$$. \frac{d}{dx} (x^{-\alpha} J_\alpha(x)) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x) \quad (\bar{ب})$$

۳. فرض کنید به ازای $x > 0$ ، $F_\alpha(x) = x^\alpha J_\alpha(x)$ و $G_\alpha(x) = x^{-\alpha} J_\alpha(x)$. توجه کنید که هر

صفر مثبت J_α یک صفر F_α و نیز یک صفر G_α است. با استفاده از قضیه رول و

تمرین ۲، ثابت کنید صفرهای مثبت J_α و $J_{\alpha+1}$ بهم بافته شده‌اند؛ یعنی، بین

هر جفت صفر مثبت $J_{\alpha+1}$ یک صفر J_α ، و بین هر جفت صفر مثبت J_α یک صفر

$J_{\alpha+1}$ قرار دارد. (ر.ک. شکل ۲۰۶)

۴. (T) از روابط تمرین ۲ روابط بازگشتی

$$\frac{\alpha}{x} J_\alpha(x) - J'_\alpha(x) = J_{\alpha+1}(x) \quad \text{و} \quad \frac{\alpha}{x} J_\alpha(x) + J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x)$$

را نتیجه بگیرید.

(ب) با استفاده از روابط قسمت (T)، فرمولهای

$$J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) = 2J'_\alpha(x) \quad \text{و} \quad J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_\alpha(x)$$

را نتیجه بگیرید.

۵. با استفاده از تمرین ۱ (ب) و یک فرمول بازگشتی مناسب، نشان دهید که

$$J_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

فرمول مشابهی نیز برای $J_{5/2}(x)$ پیدا کنید. تذکر. $J_\alpha(x)$ به ازای هر α که نصف

یک عدد صحیح فرد باشد، یک تابع مقدماتی است.

۶. ثابت کنید که

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (J_\alpha^2(x) + J_{\alpha+1}^2(x)) = \frac{\alpha}{x} J_\alpha^2(x) - \frac{\alpha+1}{x} J_{\alpha+1}^2(x)$$

و

$$\frac{d}{dx} (x J_\alpha(x) J_{\alpha+1}(x)) = x (J_\alpha^2(x) - J_{\alpha+1}^2(x)).$$

۷. (T) با استفاده از اتحادهای تمرین ۶، نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)J_n(x)J_{n+1}(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{و} \quad J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1$$

(ب) از قسمت (آ) نتیجه بگیرید که ، به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ و هر $x \geq 0$ ،
 $|J_n(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ و $|J_0(x)| \leq 1$.

۸ . فرض کنید به ازای $x > 0$ ، $g_\alpha(x) = x^{1/2}f_\alpha(ax^2)$ ، که در آن a و b ثابتهای ناصفری هستند . نشان دهید که g_α در معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' + (a^2b^2x^{2b} + \frac{1}{4} - \alpha^2b^2)y = 0$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر f_α یک جواب معادلهٔ بسل مرتبهٔ α باشد .

۹ . با استفاده از تمرین ۸ ، جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را برحسب توابع بسل به ازای $x > 0$ بیان نمایید :

$$(آ) \quad y'' + xy = 0 \quad ; \quad (ب) \quad y'' + x^2y = 0$$

$$(پ) \quad y'' + x^m y = 0 \quad ; \quad (ت) \quad x^2y'' + (x^4 + \frac{1}{8})y = 0$$

۱۰ . تمرین ۸ را ، وقتی f_α و g_α با معادلهٔ $g_\alpha(x) = x^c f_\alpha(ax^2)$ به ازای $x > 0$ بهم مربوط شده‌اند ، تعمیم دهید . سپس ، جواب عمومی هریک از معادلات زیر را برحسب توابع بسل به ازای $x > 0$ پیدا نمایید :

$$(آ) \quad xy'' + 6y' + y = 0 \quad ; \quad (ب) \quad xy'' + 6y' + xy = 0$$

$$(پ) \quad xy'' + 6y' + x^4y = 0 \quad ; \quad (ت) \quad x^2y'' - xy' + (x+1)y = 0$$

۱۱ . یک اتحاد از توابع بسل وجود دارد به شکل

$$J_\alpha(x) - J_0(x) = aJ'_c(x),$$

که در آن a و c ثابت هستند . a و c را مشخص نمایید .

۱۲ . یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + y' + y = 0$ به صورت سری توانی بیابید که به ازای $-\infty < x < +\infty$ همگرا باشد . نشان دهید که به ازای $x > 0$ می‌توان آن را برحسب یک تابع بسل بیان کرد .

۱۳ . یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی به شکل

$$x^2A(x)y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0,$$

را در نظر بگیرید ، که در آن $A(x)$ ، $P(x)$ ، و $Q(x)$ بسط به صورت سری توانی دارند :

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k,$$

با $a_0 \neq 0$ ، که هر یک در بازه $(-r, r)$ همگراست . هرگاه معادلهٔ دیفرانسیل جوابی به صورت سری به شکل

$$y = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

داشته باشد ، که به ازای $0 < x < r$ معتبر است ، نشان دهید که t در معادلهٔ درجهٔ دومی به شکل $t^2 + bt + c = 0$ صدق می‌کند ، و b و c را بر حسب ضرایب سریهای مربوط به $A(x)$ ، $P(x)$ ، و $Q(x)$ معین کنید .

۱۴ . حالت خاص تمرین ۱۳ را در نظر بگیرید که در آن $A(x) = 1 - x$ ، $P(x) = \frac{1}{2}$ ، و $Q(x) = -\frac{1}{4}x$. یک جواب به صورت سری بیابید که t عددی صحیح نباشد .

۱۵ . معادلهٔ دیفرانسیل $2x^2 y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$ دو جواب مستقل به شکل

$$y = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

دارد ، که به ازای $x > 0$ معتبرند . این جوابها را تعیین کنید .

۱۶ . معادلهٔ دیفرانسیل غیر خطی $y'' + y + \alpha y^2 = 0$ فقط وقتی "به طور ملایم" غیر خطی است که α ثابت ناصفر کوچکی باشد . فرض کنید جوابی وجود داشته باشد که بتوان آن را به صورت یک سری توانی از α به شکل زیر بیان کرد :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \alpha^n \quad (0 < \alpha < r \text{ معتبر در بازه‌ای چون } r > 0)$$

و این جواب در شرایط کرانه‌ای $y = 1$ و $y' = 0$ وقتی $x = 0$ صدق می‌کند . برای همسازي با این شرایط کرانه‌ای ، سعی می‌کنیم ضرایب $u_n(x)$ را طوری بگیریم که $u_0(0) = 1$ ، $u_0'(0) = 0$ ، و به ازای $n \geq 1$ ، $u_n(0) = u_n'(0) = 0$. با جانشانی این سری در معادلهٔ دیفرانسیل ، توانهای مناسب α را متحد گرفته و بدینوسیله $u_0(x)$ و $u_1(x)$ را معین نمایید .



دستگاههای معادلات دیفرانسیل

۱۰۷ مقدمه

اگرچه بررسی معادلات دیفرانسیل در قرن ۱۷ آغاز شد، اما تا قرن ۱۹ طول کشید تا ریاضیدانان دریافته‌اند که تعداد نسبتاً کمی معادله دیفرانسیل را می‌توان به وسایل مقدماتی حل کرد. کارهای کشی، لیوویل، و دیگران اهمیت اثبات قضایایی کلی برای تضمین وجود جوابهای رده‌های خاصی از معادلات دیفرانسیل را نشان داد. در فصل ۶ استفاده از یک قضیه وجودی - یکتایی در بررسی معادلات دیفرانسیل خطی توضیح شد. در این فصل به برهانی از این قضیه و مطالب مربوط به آن خواهیم پرداخت.

نظریه وجودی معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر را می‌توان با معرفی دستگاه معادلات به مرتبه اول تحویل کرد. مثلاً، معادله مرتبه دوم

$$(107) \quad y'' + 2ty' - y = e^t$$

را می‌توان با معرفی توابع مجهول y_1 و y_2 ، که

$$y_1 = y, \quad y_2 = y_1'$$

به یک دستگاه از دو معادله مرتبه اول تبدیل نمود. در این صورت، داریم $y_1'' = y_2' = y_1'$ ؛ در نتیجه، (۱۰۷) را می‌توان به صورت یک دستگاه از دو معادله مرتبه اول نوشت:

$$(207) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2ty_2 + e^t. \end{aligned}$$

حل جداگانه این معادلات به روشهای فصل ۶ ممکن نیست، زیرا هریک از آنها شامل دو تابع مجهول هستند.

در این فصل، دستگاههایی را در نظر می‌گیریم مرکب از n معادله دیفرانسیل خطی

مرتبه اول که شامل n تابع مجهول y_1, \dots, y_n هستند. این معادلات به شکل زیر می باشند:

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + \dots + p_{1n}(t)y_n + q_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= p_{n1}(t)y_1 + p_{n2}(t)y_2 + \dots + p_{nn}(t)y_n + q_n(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

توابع q_i و p_{ik} در (۳.۷) توابع معلومی هستند که بر بازه معلومی چون J تعریف شده اند. توابع y_1, \dots, y_n توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. دستگاههای از این نوع دستگاههای خطی مرتبه اول نام دارند. در حالت کلی، هر معادله در این نوع دستگاه بیش از یک تابع مجهول را شامل است؛ و در نتیجه، معادلات را نمی توان جداگانه حل کرد.

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n را همیشه می توان به یک دستگاه خطی بدل کرد. فرض کنیم معادله مرتبه n م مفروض عبارت باشد از

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = R(t), \quad (4.7)$$

که در آن ضرایب a_i توابع معلومی هستند. برای تبدیل این معادله به یک دستگاه، می نویسیم $y_1 = y$ و هر مشتق متوالی y را یک تابع مجهول جدید می گیریم. یعنی، قرار می دهیم

$$y_1 = y, \quad y_2 = y_1', \quad y_3 = y_2', \dots, y_n = y_{n-1}',$$

و معادله (۴.۷) را به صورت دستگاه زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \dots - a_1 y_n + R(t). \end{aligned} \quad (5.7)$$

بحث دستگاهها را می توان با استفاده از نمادهای بردار و ماتریس به نحو قابل ملاحظه ای ساده کرد. دستگاه کلی (۳.۷) را در نظر می گیریم، و توابع برداری $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ، و تابع ماتریسی $P = [p_{ij}]$ ، که با معادلات

$$Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)), \quad P(t) = [p_{ij}(t)]$$

بمازای هر t در J تعریف می‌شود، را معرفی می‌کنیم. بردارها را به صورت ماتریسهای ستونی $1 \times n$ در نظر گرفته، دستگاه (۳.۷) را به شکل ساده‌تر

$$(۶.۷) \quad Y' = P(t)Y + Q(t)$$

می‌نویسیم.

مثلاً، در دستگاه (۲.۷) داریم

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

و در دستگاه (۵.۷) داریم

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ R(t) \end{bmatrix}$$

یک مسئله با مقدار اولیه برای دستگاه (۶.۷) یافتن یک تابع برداری مانند Y است که در (۶.۷) صادق بوده و در یک شرط اولیه به شکل $Y(a) = B$ ، که در آن $a \in J$ و $B = (b_1, \dots, b_n)$ یک بردار n بعدی معلوم است، نیز صدق نماید. در حالت $n = 1$ (حالت اسکالر)، از قضیه ۱.۰۶ می‌دانیم که، اگر P و Q بر J پیوسته باشند، همه جوابهای (۶.۷) از فرمول صریح

$$(۷.۷) \quad Y(x) = e^{A(x)}Y(a) + e^{A(x)} \int_a^x e^{-A(t)}Q(t) dt$$

به دست می‌آیند، که در آن $A(x) = \int_a^x P(t) dt$ و a نقطه دلخواهی در J می‌باشد. نشان می‌دهیم که این فرمول را می‌توان به نحو مناسبی برای دستگاهها تعمیم داد؛ یعنی، وقتی $P(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ و $Q(t)$ یک تابع برداری n بعدی باشد. برای این کار باید به انتگرال و نمایی ماتریسها معنی ببخشیم. لذا، کمی از بحث خارج شده به حساب توابع ماتریسی می‌پردازیم.

۲.۷ حساب توابع ماتریسی

تعمیم مفاهیم انتگرال و مشتق برای توابع ماتریسی سراسر است. اگر $P(t) = [p_{ij}(t)]$ ، انتگرال $\int_a^b P(t) dt$ را با معادله

$$\int_a^b P(t) dt = \left[\int_a^b p_{ij}(t) dt \right]$$

تعریف می‌کنیم. یعنی، انتگرال ماتریس $P(t)$ ماتریسی است که با انتگرالگیری از هر درایه $P(t)$ به دست می‌آید، البته با این فرض که هر درایه بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد. خواننده می‌تواند خواص خطی انتگرالها را برای توابع ماتریسی تعمیم یافته تحقیق نماید. پیوستگی و مشتقپذیری توابع ماتریسی نیز برحسب درایه‌ها تعریف می‌شوند. گوئیم تابع ماتریسی $P = [p_{ij}]$ در t پیوسته است در صورتی که هر درایه p_{ij} در t پیوسته باشد. مشتق P' با مشتقگیری از هر درایه تعریف می‌شود:

$$P'(t) = [p'_{ij}(t)],$$

و این در صورتی است که تمام مشتقات $p'_{ij}(t)$ موجود باشند. قواعد اساسی مشتقگیری درباب مجموعها و حاصل ضربها به آسانی تحقیق می‌شوند. مثلاً، اگر P و Q توابع ماتریسی مشتقپذیری باشند، داریم

$$(P + Q)' = P' + Q';$$

و اگر P و Q دارای یک اندازه باشند، نیز داریم

$$(PQ)' = PQ' + P'Q$$

و این در صورتی است که PQ تعریف شده باشد. قاعده زنجیره‌ای نیز برقرار است. یعنی، هرگاه $F(t) = P[g(t)]$ ، که در آن P یک تابع ماتریسی مشتقپذیر بوده و g یک تابع اسکالر مشتقپذیر باشد، آنگاه $F'(t) = g'(t)P'[g(t)]$. قضیه مشتق صفر، اولین و دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز برای توابع ماتریسی معتبرند. اثبات این خواص در مجموعه تمرینات بعدی خواسته شده است.

تعریف نمایی یک ماتریس چندان ساده نیست و نیاز به آمادگی بیشتری دارد. این امر در بخش بعد مطرح می‌شود.

۲.۷ سربهای نامتناهی از ماتریسها. نرم ماتریسها

فرض کنیم $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد. می‌خواهیم

نمایی e^{tA} را طوری تعریف کنیم که بعضی از خواص اصلی نمایی حقیقی یا مختلط معمولی را داشته باشد. بخصوص، قانون نماها به شکل

$$(۸.۷) \quad e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}, \quad \text{حقیقی، } t \text{ و } s \text{ به‌ازای هر}$$

و رابطه

$$(۹.۷) \quad e^0 = I,$$

که در آن O و I به ترتیب ماتریسهای $n \times n$ صفر و همانی‌اند، را لازم داریم. ممکن است تعریف e^{tA} مساوی ماتریس $[e^{tA}]$ طبیعی به‌نظر برسد، اما قابل قبول نیست، زیرا از هیچیک از خواص (۸.۷) و (۹.۷) برخوردار نیست. در عوض، e^{tA} را با بسط به صورت سری توانی تعریف می‌کنیم:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

می‌دانیم این فرمول در صورتی که A عددی حقیقی یا مختلط باشد برقرار است، و ثابت می‌کنیم که از آن در صورتی که A یک ماتریس باشد خواص (۸.۷) و (۹.۷) نتیجه می‌شوند. پیش از این کار لازم است معنی یک سری همگرا از ماتریسها را توضیح دهیم.

تعریف یک سری همگرا از ماتریسها. دنباله نامتناهی $\{C_k\}$ از ماتریسهای $m \times n$ که درایه‌های آنها اعدادی حقیقی یا مختلط‌اند مفروض است، و درایه $c_{ij}^{(k)}$ را با C_k نشان می‌دهیم. هرگاه تمام mn سری

$$(۱۰.۷) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

همگرا باشند، گوئیم سری $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ از ماتریسها همگراست، و مجموع آن ماتریس $m \times n$ تعریف می‌شود که درایه ij آن سری (۱۰.۷) است.

یک آزمون ساده و مفید برای همگرایی یک سری از ماتریسها بر حسب نرم یک ماتریس، تعمیمی از قدر مطلق یک عدد است، قابل بیان است.

تعریف نرم یک ماتریس. هرگاه $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد، نرم A ، که با $\|A\|$ نموده می‌شود، عدد نامنفی تعریف می‌شود که با فرمول

زیر داده می‌شود:

$$(11.7) \quad \|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

به عبارت دیگر، نرم A مجموع قدرمطلقهای تمام درایه‌های آن است. تعریفهای دیگری از نرم وجود دارند که گهگاه به کار می‌روند، ولی ما این تعریف را از آنجهت برگزیده‌ایم که خواص زیر به آسانی با آن ثابت می‌شوند.

قضیه ۱۰.۷. خواص اساسی نرمها. به ازای ماتریسهای مستطیلی شکل A و B ، و تمام اسکالرهای حقیقی یا مختلط c ، داریم

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \|cA\| = |c| \|A\|.$$

برهان. نتیجه را فقط در مورد $\|AB\|$ ، با فرض اینکه A ، $m \times n$ و B ، $n \times p$ است، ثابت می‌کنیم. اثبات سایر روابط ساده‌تر است و به عنوان تمرین می‌ماند.

با نوشتن $A = [a_{ik}]$ ، $B = [b_{kj}]$ ، داریم $AB = [\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}]$ ؛ در نتیجه، از

(11.7) خواهیم داشت

$$\|AB\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j=1}^p |b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \|B\| = \|A\| \|B\|.$$

توجه کنید که، در حالت خاص $B = A$ ، نامساوی مربوط به $\|AB\|$ به صورت

$$\|A^2\| \leq \|A\|^2 \text{ درمی‌آید. به استقرا، نیز داریم:}$$

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

این نامساویها در بحث ماتریس نمایی مفید خواهند بود.

قضیه بعدی شرط کافی مفیدی برای همگرایی یک سری از ماتریسها به دست می‌دهد.

قضیه ۲۰.۷. آزمون همگرایی برای یک سری ماتریسی. هرگاه $\{C_k\}$ دنباله‌ای از ماتریسهای $m \times n$ بوده بطوری که $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ همگرا باشد، آنگاه سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ نیز همگرا می‌باشد.

برهان. فرض کنیم درایه $c_{ij}^{(k)}$ مساوی C_k باشد. چون $\|C_k\| \leq |c_{ij}^{(k)}|$ ، همگرایی $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ همگرایی مطلق هر سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ را ایجاب می‌کند. بنابراین، هر سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ همگراست؛ و در نتیجه، سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ همگرا می‌باشد.

۴۰۷ تمرین

۱. تحقیق کنید که خاصیت خطی انتگرالها برای انتگرال توابع ماتریسی نیز برقرار است.
۲. هر یک از قواعد مشتگیری زیر را، با فرض مشتپذیر بودن P و Q ، برای توابع ماتریسی تحقیق کنید. در (\bar{T}) ، P و Q باید به یک اندازه باشند تا $P + Q$ معنی داشته باشد. در $(\bar{ب})$ و $(\bar{ت})$ لازم نیست یک اندازه داشته باشند مشروط بر اینکه حاصل ضربها معنی داشته باشند. در $(\bar{پ})$ و $(\bar{ت})$ ، Q نامفرد فرض خواهد شد.

$$(\bar{T}) \quad (P + Q)' = P' + Q' \quad (\bar{ب}) \quad (PQ)' = PQ' + P'Q$$

$$(\bar{پ}) \quad (Q^{-1})' = -Q^{-1}Q'Q^{-1} \quad (\bar{ت}) \quad (PQ^{-1})' = -PQ^{-1}Q'Q^{-1} + P'Q^{-1}$$
۳. (\bar{T}) فرض کنید P یک تابع ماتریسی مشتپذیر باشد. ثابت کنید که مشتقات P^2 و P^3 از فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$(P^2)' = PP' + P'P, \quad (P^3)' = P^2P' + PP'P + P'P^2.$$

۴. $(\bar{ب})$ برای مشتق P^k یک فرمول کلی حدس بزنید و آن را به استقرا ثابت کنید.
۵. فرض کنید P یک تابع ماتریسی مشتپذیر بوده، و g یک تابع اسکالر مشتپذیر باشد که بردش زیر مجموعه‌ای از قلمرو P است. تابع مرکب $F(t) = P[g(t)]$ را تعریف کرده و قاعده زنجیرهای $F'(t) = g'(t)P'[g(t)]$ را ثابت کنید.
۶. قضیه مشتق صفر را برای توابع ماتریسی ثابت کنید: هرگاه به ازای هر t در بازه بازی مانند (a, b) ، $P'(t) = 0$ ، آنگاه تابع ماتریسی P بر (a, b) ثابت است.
۷. تعمیمهای اولین و دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را برای توابع ماتریسی بیان و اثبات کنید.
۸. برای انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء یک فرمول که در آن انتگرالدهها توابعی ماتریسی باشند بیان و اثبات کنید.
۹. خواص زیر را که مربوط به نرم ماتریسهاست اثبات نمایید:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|cA\| = |c| \|A\|.$$

۹. ثابت کنید که اگر تابع ماتریسی P بر بازه $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد،

$$\left\| \int_a^b P(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|P(t)\| dt.$$

۱۰. فرض کنید D یک ماتریس قطری $n \times n$ باشد؛ مثلاً $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ، ثابت کنید سری ماتریسی $\sum_{k=0}^{\infty} D^k/k!$ همگراست و یک ماتریس قطری نیز هست:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

(جمله^۶ نظیر به $k=0$ ماتریس همانی I فرض می شود.)

۱۱. فرض کنید D یک ماتریس قطری $n \times n$ باشد:

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. ثابت کنید اگر سری ماتریسی $\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$ همگرا باشد،

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_n^k \right).$$

۱۲. فرض کنید سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ همگرا باشد، که در آن هر C_k یک ماتریس $n \times n$ است. ثابت کنید سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} (AC_k B)$ نیز همگراست و مجموعش ماتریس

$$A \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \right) B$$

می باشد. در اینجا A و B ماتریسهایی هستند که به ازای آنها $AC_k B$ ها معنی دارند.

۵.۷ ماتریس نمایی

با استفاده از قضیه^۶ ۲.۷، به آسانی ثابت می شود که سری ماتریسی

$$(12.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

به ازای هر ماتریس مربعی A با درایه های حقیقی یا مختلط همگراست. (جمله^۶ نظیر به $k=0$ ماتریس همانی I فرض می شود.) نرم هر جمله در نامساوی

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$$

صدق می کند. چون سری $\sum a^k/k!$ به ازای هر a حقیقی همگراست، قضیه^۶ ۲.۷ ایجاب می کند که سری (۱۲.۷) به ازای هر ماتریس مربعی A همگرا باشد.

تعریف ماتریس نمایی. به ازای هر ماتریس $n \times n$ ، A با درایه‌های حقیقی یا مختلط، نمایی e^A را ماتریس $n \times n$ ی تعریف می‌کنیم که با سری همگرای (۱۲.۷) داده می‌شود یعنی،

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

توجه کنید که این تعریف $e^0 = I$ را ایجاب می‌کند، که در آن O یک ماتریس صفر است. خواص دیگر نمایی به کمک معادلات دیفرانسیل به دست می‌آیند.

۶.۷ معادله دیفرانسیل برقرار به وسیله e^{tA}

فرض کنیم t یک عدد حقیقی، A یک ماتریس $n \times n$ ، و $E(t)$ ماتریس $n \times n$ ی باشد که با

$$E(t) = e^{tA}$$

داده شده است. A را ثابت گرفته این ماتریس را به عنوان تابعی از t مطالعه می‌کنیم. ابتدا یک معادله دیفرانسیل برقرار به وسیله E را به دست می‌آوریم.

قضیه ۳.۷. به ازای هر t حقیقی، تابع ماتریسی E تعریف شده با $E(t) = e^{tA}$ در معادله دیفرانسیل ماتریسی

$$E'(t) = E(t)A = AE(t)$$

صدق می‌کند.

برهان. از تعریف ماتریس نمایی داریم

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

فرض کنیم $c_{ij}^{(k)}$ درایه ij ، A^k باشد. در این صورت، درایه ij ، $t^k A^k / k!$ مساوی $t^k c_{ij}^{(k)} / k!$ است. از اینرو، از تعریف یک سری ماتریسی، داریم

$$(13.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k)} \right].$$

هر درایه سمت راست (۱۳.۷) یک سری توانی از t است، که به ازای هر t همگراست.

بنابراین، مشتق به ازای t وجود دارد و از سری مشتقگیری شده^۴ زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k+1)}.$$

این نشان می‌دهد که مشتق $E'(t)$ وجود دارد و با سری ماتریسی

$$E'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right) A = E(t)A$$

داده می‌شود. در آخرین معادله از خاصیت $A^{k+1} = A^k A$ استفاده شده است. چون A با A^k تعویض می‌شود، نیز می‌شد بنویسیم $A^{k+1} = A A^k$ تا رابطه $E'(t) = A E(t)$ به دست آید. این برهان را تمام خواهد کرد.

تذکره. برهان فوق همچنین نشان می‌دهد که A با e^{tA} تعویض می‌گردد.

۷.۷ قضیه، یکتایی برای معادله، دیفرانسیل ماتریسی $F'(t) = AF(t)$

در این بخش، یک قضیه^۵ یکتایی ثابت می‌کنیم که جمیع جوابهای معادله^۶ دیفرانسیل ماتریسی $F'(t) = AF(t)$ را مشخص می‌کند. در برهانش از قضیه^۷ زیر استفاده می‌شود.

قضیه^۷ ۴.۷. نامنفردی e^{tA} . به ازای هر ماتریس $n \times n$ ، A و هر اسکالر t داریم

$$e^{tA} e^{-tA} = I. \quad (14.7)$$

لذا، e^{tA} نامنفرد است و معکوش e^{-tA} می‌باشد.

برهان. فرض کنیم F تابع ماتریسی باشد که به ازای هر t حقیقی با معادله^۸

$$F(t) = e^{tA} e^{-tA}$$

تعریف می‌شود. با نشان دادن اینکه مشتق $F'(t)$ ماتریس صفر است، ثابت می‌کنیم $F(t)$ ماتریس همانی I است. با مشتقگیری از F به عنوان یک حاصل ضرب، و استفاده از قضیه^۹

۳.۷، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} F'(t) &= e^{tA} (e^{-tA})' + (e^{tA})' e^{-tA} = e^{tA} (-A e^{-tA}) + A e^{tA} e^{-tA} \\ &= -A e^{tA} e^{-tA} + A e^{tA} e^{-tA} = 0, \end{aligned}$$

زیرا A با e^{tA} تعویض می‌شود. لذا، طبق قضیه^{۱۰} مشتق صفر، F یک ماتریس ثابت است. اما $F(0) = e^{0A} e^{0A} = I$ ؛ در نتیجه، به ازای هر t ، $F(t) = I$. این (۱۴.۷) را ثابت خواهد کرد.

قضیه ۵.۷. قضیه یکتایی. فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ ثابت باشند. در این صورت، تنها تابع ماتریسی $F: n \times n \rightarrow F$ صادق در مسئله با مقدار اولیه

$$F'(t) = AF(t), \quad F(0) = B$$

برای $-\infty < t < +\infty$ عبارت است از

$$F(t) = e^{tA}B. \quad (15.7)$$

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که $e^{tA}B$ یک جواب است. حال فرض کنیم F یک جواب بوده و تابع ماتریسی

$$G(t) = e^{-tA}F(t)$$

را در نظر می‌گیریم. با مشتگیری از این حاصل ضرب، داریم

$$G'(t) = e^{-tA}F'(t) - Ae^{-tA}F(t) = e^{-tA}AF(t) - e^{-tA}AF(t) = 0.$$

بنابراین، $G(t)$ یک ماتریس ثابت می‌باشد:

$$G(t) = G(0) = F(0) = B.$$

به عبارت دیگر، $e^{-tA}F(t) = B$. با ضرب در e^{tA} و استفاده از (۱۴.۷)، (۱۵.۷) را خواهیم داشت.

تذکره. برهانی مشابه نشان می‌دهد که $F(t) = Be^{tA}$ تنها جواب مسئله با مقدار اولیه

$$F'(t) = F(t)A, \quad F(0) = B$$

است.

۸.۷ قانون نماها برای ماتریسهای نمایی

قانون نماها، یعنی $e^{A+B} = e^A e^B$ ، همیشه برای نمایهای ماتریسی درست نیست. مثال نقض در تمرین ۱۳ از بخش ۱۲.۷ آمده است. با اینحال، به آسانی ثابت می‌شود که این فرمول برای ماتریسهای A و B که تعویض می‌شوند درست است.

قضیه ۶.۷. فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند که تعویض می‌شوند: $AB = BA$. در این صورت، داریم

$$e^{A+B} = e^A e^B. \quad (16.7)$$

برهان. از معادله $AB = BA$ درمی یابیم که

$$A^2B = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2;$$

در نتیجه، B با A^2 تعویض می شود. بنابراین استقرا، B با هر توانی از A تعویض می شود. با نوشتن e^{tA} به صورت یک سری توانی، درمی یابیم که B نیز با e^{tA} به ازای هر t حقیقی تعویض می گردد.

حال فرض کنیم F تابع ماتریسی باشد که با معادله

$$F'(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}$$

تعریف می شود. با مشتگیری از $F(t)$ و استفاده از این امر که B با e^{tA} تعویض می شود، درمی یابیم که

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB} \\ &= (A+B)e^{t(A+B)} - (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)F(t). \end{aligned}$$

بنابرضیه یکتایی، داریم

$$F(t) = e^{t(A+B)}F(0).$$

اما $F(0) = 0$ ؛ در نتیجه، به ازای هر t ، $F(t) = 0$. بنابراین،

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}.$$

وقتی $t = 1$ ، (۱۶.۷) به دست خواهد آمد.

مثال. ماتریسهای sA و tA به ازای هر اسکالر s و t تعویض می شوند. بنابراین، خواهیم داشت

$$e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}.$$

۹.۷ قضایای وجودی و یکتایی برای دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل برداری $Y'(t) = AY(t)$ ، که در آن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده و Y یک تابع برداری n بعدی (به صورت یک ماتریس ستونی $n \times 1$) باشد، یک دستگاه خطی همگن با ضرایب ثابت نامیده می شود. با استفاده از ماتریس نمایی، برای جواب چنین دستگاه فرمول صریحی به دست می آوریم.

قضیه ۷.۷. فرض کنیم A یک ماتریس ثابت $n \times n$ ، و B یک بردار n بعدی معلوم

باشد. در این صورت، مسئله با مقدار اولیه

$$(17.7) \quad Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = B,$$

بر بازه $-\infty < t < +\infty$ جواب منحصر بفرد دارد، و این جواب با فرمول

$$(18.7) \quad Y(t) = e^{tA}B$$

داده می‌شود. بطور کلی، جواب منحصر بفرد مسئله با مقدار اولیه

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(a) = B,$$

مساوی $Y(t) = e^{(t-a)A}B$ می‌باشد.

برهان. مشتقگیری از (18.7) نتیجه می‌دهد که $Y'(t) = Ae^{tA}B = AY(t)$. چون $Y(0) = B$ ، این یک جواب مسئله با مقدار اولیه (17.7) می‌باشد.

برای اثبات اینکه فقط یک جواب وجود دارد، مثل برهان قضیه 5.7 استدلال می‌کنیم. فرض کنیم $Z(t)$ تابع برداری دیگری باشد که در $Z'(t) = AZ(t)$ با $Z(0) = B$ صدق می‌کند، و نیز $G(t) = e^{-tA}Z(t)$. در این صورت، به آسانی تحقیق می‌شود که $G'(t) = 0$ ؛ در نتیجه، $G(t) = G(0) = Z(0) = B$. به عبارت دیگر، $e^{-tA}Z(t) = B$. بنابراین، $Z(t) = e^{tA}B = Y(t)$. حالت کلیتر با مقدار اولیه $Y(a) = B$ درست به همین نحو اثبات می‌شود.

۱۰.۷ محاسبه e^{tA}

قضیه 7.7 فرمول صریحی برای حل یک دستگاه همگن با ضرایب ثابت به دست می‌دهد؛ با اینحال، مشکل محاسبه ماتریس نمایی e^{tA} هنوز برجاست. اگر می‌خواستیم e^{tA} را مستقیماً از تعریف سری حساب کنیم، می‌بایستی تمام توانهای A^k را به‌ازای $k = 0, 1, 2, \dots$ حساب کرده مجموع هر سری $\sum_{k=0}^{\infty} t^k c_{ij}^{(k)}/k!$ ، که در آن $c_{ij}^{(k)}$ درایه ij A^k است، را محاسبه کنیم. این درحالت کلی کاری بی‌فرجام مگر اینکه A ماتریسی باشد که توانهایش به آسانی قابل محاسبه باشند. مثلاً، اگر A یک ماتریس قطری باشد، مثلاً

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

هر توان A نیز یک ماتریس قطری است؛ در واقع،

$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k).$$

بنابراین، در این حالت، e^{tA} یک ماتریس قطری است که با رابطه زیر داده می شود:

$$e^{tA} = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_n^k \right) = \text{diag} (e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

حالت ساده دیگر وقتی است که A قطری می شود. مثلاً، اگر به ازای ماتریس نامنفردی چون C ، $C^{-1}AC = D$ قطری باشد، مثلاً $C^{-1}AC = D$ ، خواهیم داشت

$$A = CDC^{-1},$$

که از آن درمی یابیم که

$$A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1},$$

و، بطور کلی،

$$A^k = CD^kC^{-1}.$$

بنابراین، در این حالت داریم

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} CD^kC^{-1} = C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} \right) C^{-1} = Ce^{tD}C^{-1}.$$

در اینجا مشکل تعیین C و معکوس آن است. به محض دانستن اینها، e^{tA} به آسانی محاسبه می شود. البته، هر ماتریس قطری پذیر نیست؛ در نتیجه، درجه مفید بودن نکات فوق محدود می باشد.

مثال ۱. e^{tA} را برای ماتریس 2×2 ، $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ حساب کنید.

حل. این ماتریس دارای مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1 = 6$ ، $\lambda_2 = 1$ است؛ در نتیجه، ماتریس نامنفردی چون $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هست بطوری که $C^{-1}AC = D$ ، که در آن

$$D = \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای تعیین C می توان نوشت $AC = CD$ ، یا

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

با ضرب ماتریسها، درمی یابیم که این معادله به ازای اسکالرهایی a, b, c, d که

$a = 4c, b = -d$ برقرار است. با فرض $c = d = 1$ ، اختیار می‌کنیم

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Ce^{tDC^{-1}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & e^{6t} \\ -e^t & 4e^t \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^t & 4e^{6t} - 4e^t \\ e^{6t} - e^t & e^{6t} + 4e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

مثال ۲. دستگاه خطی

$$y_1' = 5y_1 + 4y_2$$

$$y_2' = y_1 + 2y_2$$

را با شرایط اولیه $y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$ حل کنید.

حل. دستگاه را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ که در آن } Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Y'(t) = AY(t)$$

بنابراین قضیه ۷.۷، جواب $Y(t) = e^{tA}Y(0)$ است. با استفاده از ماتریس e^{tA} که در مثال

۱ حساب شد، درمی‌یابیم که

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^t & 4e^{6t} - 4e^t \\ e^{6t} - e^t & e^{6t} + 4e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

که از آن خواهیم داشت

$$y_1 = 4e^{6t} - 2e^t, \quad y_2 = e^{6t} + 2e^t.$$

روشهای زیادی برای محاسبه e^{tA} در صورت قطری پذیر نبودن A وجود دارند.

غالب این روشها نسبتاً "پیچیده‌اند و به تبدیلات ماتریسی مقدماتی نیاز دارند، که این

نیاز به طبیعت درجات تکرار مقادیر ویژه^۴ A بستگی دارد. در یکی از بخشهای بعدی، روشی عملی و سراسر برای محاسبه^۴ A^t مطرح می‌شود که، چه A قطری پذیر باشد یا نه، قابل به‌کار بردن است. این روش به‌ازای هر ماتریس معتبر است و به هیچ نوع تبدیل مقدماتی نیاز ندارد. این روش به‌وسیله^۴ ای. ج. پوتزر^۱ در مقاله‌ای در *American Mathematical Monthly*, Vol. 73 (1966), pp. 2-7 ارائه شده است. روش بر قضیه^۴ معروفی منسوب به آرتور کیلی^۲ (۱۸۹۵ - ۱۸۲۱) و ویلیام روان هامیلتون^۳ (۱۸۶۵ - ۱۸۰۵) استوار است که می‌گوید هر ماتریس مربعی در معادله^۴ مشخص خود صدق می‌کند. ابتدا قضیه^۴ کیلی - هامیلتون را ثابت می‌کنیم و بعد، با استفاده از آن، فرمولهای پوتزر را برای محاسبه^۴ A^t به دست می‌آوریم.

۱۱.۷ قضیه^۴ کیلی - هامیلتون

قضیه^۴ ۸.۷. قضیه^۴ کیلی - هامیلتون. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ بوده و

$$(19.7) \quad f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

چند جمله‌ای مشخص آن باشد. در این صورت، $f(A) = 0$. به عبارت دیگر، A در معادله^۴

$$(20.7) \quad A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0I = 0$$

صدق می‌کند.

برهان. برهان بر قضیه^۴ ۱۲.۳ استوار است که می‌گوید به‌ازای هر ماتریس مربعی A

$$(21.7) \quad A(\operatorname{cof} A)^t = (\det A)I.$$

این فرمول را با A به‌جای $\lambda I - A$ به‌کار می‌بریم. چون $\det(\lambda I - A) = f(\lambda)$ ، معادله^۴ (۲۱.۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(22.7) \quad (\lambda I - A)\{\operatorname{cof}(\lambda I - A)\}^t = f(\lambda)I.$$

این معادله به‌ازای هر λ حقیقی معتبر است. ایده^۴ اثبات نشان می‌دهد که این معادله به‌ازای A به‌جای λ نیز معتبر است.

درایه‌های ماتریس $\operatorname{cof}(\lambda I - A)$ همسازهای $\lambda I - A$ هستند. هرچنین همسازهای، با تقریب سازهای چون ± 1 ، در میانه یک مینور $\lambda I - A$ از مرتبه^۴ $n - 1$ است. لذا،

هر درایه $\text{cof}(\lambda I - A)$ ، و در نتیجه هر درایه $\{\text{cof}(\lambda I - A)\}^t$ ، یک چند جمله‌ای از λ و از درجه نایبشتر از $n - 1$ است . بنابراین ،

$$\{\text{cof}(\lambda I - A)\}^t = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k,$$

که در آن هر ضریب B_k یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های اسکالر است . با استفاده از این در (۲۲.۷) ، رابطه

$$(\lambda I - A) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k = f(\lambda) I$$

به دست می‌آید ، که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت :

$$\lambda^n B_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (B_{k-1} - AB_k) - AB_0 = \lambda^n I + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k c_k I + c_0 I.$$

در این مرحله ، با متحد گرفتن ضرایب هم‌توان λ در (۲۴.۷) ، معادلات زیر به دست می‌آیند :

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= c_{n-1} I \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= c_1 I \\ -AB_0 &= c_0 I. \end{aligned}$$

(۲۵.۷)

متحد گرفتن ضرایب مجاز است ، زیرا (۲۴.۷) با n^2 معادله اسکالر معادل است ، که در هریک می‌توان ضرایب هم‌توان λ را متحد گرفت . حال معادلات (۲۵.۷) را متوالیا "در $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$ ضرب و نتایج را با هم جمع می‌کنیم . جملات سمت چپ حذف می‌شوند و به دست می‌آوریم که

$$O = A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I.$$

این قضیه کیلی - هامیلتون را ثابت می‌کند .

تذکر . هامیلتون این قضیه را در ۱۸۵۳ برای رده خاص از ماتریسها ثابت کرد . چند سال بعد ، کیلی اعلام کرد که قضیه برای جمیع ماتریسها درست است ، اما برهانی برای

آن ارائه نداد.

مثال. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ دارای چندجمله‌ای مشخص

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 6) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 20\lambda - 12$$

است. قضیه کیلی - هامیلتون می‌گوید که A در معادله

$$(26.7) \quad A^3 - 9A^2 + 20A - 12I = O$$

صدق می‌کند. با استفاده از این معادله، می‌توان A^3 و تمام توانهای بالاتر A را برحسب A ، A^2 و I بیان کرد. مثلاً، داریم

$$A^3 = 9A^2 - 20A + 12I,$$

$$A^4 = 9A^3 - 20A^2 + 12A = 9(9A^2 - 20A + 12I) - 20A^2 + 12A$$

$$= 61A^2 - 168A + 108I.$$

همچنین، می‌توان از آن برای بیان A^{-1} به صورت یک چندجمله‌ای از A استفاده کرد. رابطه (26.7) را به صورت $A(A^2 - 9A + 20I) = 12I$ می‌نویسیم، و خواهیم داشت

$$A^{-1} = \frac{1}{12}(A^2 - 9A + 20I).$$

۱۲.۷ تمرین

در هر یک از تمرینهای ۱ تا ۴، $(A^{-1})^T$ ، A^2 ، و همه توانهای بالاتر A را به صورت ترکیبی خطی از I و A بیان کنید (قضیه کیلی - هامیلتون می‌تواند مفید باشد)؛ (ب) e^{tA} را محاسبه نمایید.

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 2. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 4. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad (A)^T \text{ هرگاه } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ثابت کنید که } e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

(ب) برای e^{tA} ، که $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ و a و b حقیقی‌اند، فرمول نظیر را پیدا

کنید .

۶ . هرگاه $F(t) = \begin{bmatrix} t & t-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید که $e^{F(t)} = eF(e^{t-1})$.

۷ . هرگاه $A(t)$ یک تابع اسکالر از t باشد ، مشتق $e^{A(t)}$ مساوی $e^{A(t)}A'(t)$ است . مشتق

$e^{A(t)}$ وقتی $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ را محاسبه کرده نشان دهید که نتیجه مساوی هیچیک

از حاصل ضربهای $e^{A(t)}A'(t)$ و $A'(t)e^{A(t)}$ نیست .

در هر یک از تمرینهای ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱، A^T را محاسبه کرده A^3 را بر حسب A^2, A, I بیان کنید؛ (ب) e^{tA} را محاسبه نمایید .

۹ . $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۸ . $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۱۰ . $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۱ . هرگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، e^{tA} را به صورت ترکیبی خطی از I, A, A^2 بیان کنید .

۱۲ . هرگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید که $e^{tA} = \begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2xy & x^2 + y^2 & 2xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{bmatrix}$ ، که در آن

$x = \cosh 1$ و $y = \sinh 1$.

۱۳ . این مثال نشان می دهد که معادله $e^{A+B} = e^A e^B$ همیشه برای نمایهای ماتریسی

درست نیست . هر یک از ماتریسهای $e^{A+B}, e^A e^B, e^B e^A$ را وقتی $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ حساب کنید ، و توجه کنید که سه نتیجه متمایز می باشند .

۱۳.۷ روش پوتزر برای محاسبه e^{tA}

قضیه کیلی - هامیلتون نشان می دهد که توان n م ماتریس $n \times n$ A را می توان به صورت ترکیبی خطی از توانهای پایین تر A^{n-1}, A^2, \dots, I بیان کرد. از این نتیجه می شود که هر توان بالاتر A^{n+1}, A^{n+2}, \dots را نیز می توان به صورت ترکیبی خطی از I, A, A^2, \dots بیان داشت. بنابراین، در سری نامتناهی معرف e^{tA} ، هر جمله $t^k A^k / k!$ ، که در آن $k \geq n$ ، ترکیبی خطی از $t^k A^{n-1}, t^k A^2, \dots, t^k I$ است. پس، می توان انتظار داشت که e^{tA} به صورت یک چندجمله ای از A به شکل

$$(27.7) \quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t) A^k$$

قابل بیان است، که در آن ضرایب اسکالر $q_k(t)$ به t بستگی دارند. پوتزر در روش مفید برای بیان e^{tA} به صورت یک چندجمله ای از A ذکر می کند. قضیه بعدی روش ساده تر را توضیح می دهد.

قضیه ۹.۷. فرض کنیم $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس $n \times n$ A باشد، و یک دنباله از چندجمله ایها از A را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(28.7) \quad P_0(A) = I \text{ و به ازای } k = 1, 2, \dots, n, \quad P_k(A) = \prod_{m=1}^k (A - \lambda_m I)$$

در این صورت، داریم

$$(29.7) \quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A),$$

که در آن ضرایب اسکالر $r_1(t), \dots, r_n(t)$ به طور بازگشتی از دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی زیر به دست می آیند:

$$(30.7) \quad \begin{aligned} r_1'(t) &= \lambda_1 r_1(t), & r_1(0) &= 1, \\ r_{k+1}'(t) &= \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t), & r_{k+1}(0) &= 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

تذکر. معادله (۲۹.۷) e^{tA} را مستقیماً به صورتی که در (۲۷.۷) است بیان نمی کند، بلکه به صورت ترکیبی خطی از چند جمله ایهای $P_0(A), P_1(A), \dots, P_{n-1}(A)$ بیان می کند. این چندجمله ایها به محض معلوم شدن مقادیر ویژه A به آسانی محاسبه می شوند. همچنین،

ضرایب $r_1(t), \dots, r_n(t)$ در (۳۰.۷) به آسانی حساب می‌شوند. با آنکه این کار به حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی نیاز دارد، این دستگاه خاص دارای یک ماتریس مثلثی شکل است و جوابها را می‌توان بتوالی معین نمود.

برهان. فرض کنیم $r_1(t), \dots, r_n(t)$ توابع اسکالری باشند که به وسیله (۳۰.۷) معین می‌شوند، و تابع ماتریسی F را با معادله

$$(۳۱.۷) \quad F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t)P_k(A)$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که $F(0) = r_1(0)P_0(A) = I$. با نشان دادن اینکه F در همان معادله دیفرانسیل صادق به وسیله e^{At} ، یعنی $F'(t) = AF(t)$ ، صدق می‌کند، ثابت می‌کنیم که $F(t) = e^{At}$.

با مشتقگیری از (۳۱.۷) و استفاده از فرمولهای بازگشتی (۳۰.۷)، داریم

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r'_{k+1}(t)P_k(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \{r_k(t) + \lambda_{k+1}r_{k+1}(t)\}P_k(A),$$

که در آن $r_0(t)$ مساوی 0 تعریف می‌شود. این رابطه را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t)P_{k+1}(A) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1}r_{k+1}(t)P_k(A),$$

بعد، با تفریق $\lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_n r_{k+1}(t)P_k(A)$ از آن، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$(۳۲.۷) \quad F'(t) - \lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) \{P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n)P_k(A)\}.$$

اما از (۲۸.۷) معلوم می‌شود که $P_{k+1}(A) = (A - \lambda_{k+1}I)P_k(A)$ ؛ در نتیجه،

$$\begin{aligned} P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n)P_k(A) &= (A - \lambda_{k+1}I)P_k(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n)P_k(A) \\ &= (A - \lambda_n I)P_k(A). \end{aligned}$$

بنابراین، معادله (۳۲.۷) خواهد شد

$$\begin{aligned} F'(t) - \lambda_n F(t) &= (A - \lambda_n I) \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t)P_k(A) = (A - \lambda_n I) \{F(t) - r_n(t)P_{n-1}(A)\} \\ &= (A - \lambda_n I)F(t) - r_n(t)P_n(A). \end{aligned}$$

قضیه کیلی - هامیلتون ایجاب می‌کند که $P_n(A) = O$ ؛ در نتیجه، معادله آخر به صورت

زیر درمی‌آید:

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = (A - \lambda_n I)F(t) = AF(t) - \lambda_n F(t),$$

که از آن معلوم می‌شود که $F'(t) = AF(t)$. چون $F(0) = I$ ، قضیهٔ یکتایی (قضیهٔ ۷.۷) نشان می‌دهد که $F(t) = e^{tA}$.

مثال ۱. اگر A یک ماتریس 2×2 باشد که هر دو مقدار ویژه‌اش مساوی λ اند ، e^{tA} را به صورت ترکیبی خطی از I و A بیان نمایید .

حل . با نوشتن $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ، باید دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$r_1'(t) = \lambda r_1(t), \quad r_1(0) = 1,$$

$$r_2'(t) = \lambda r_2(t) + r_1(t), \quad r_2(0) = 0$$

را حل کنیم . با حل این معادلات مرتبهٔ اول بتوالی ، در می‌یابیم که

$$r_1(t) = e^{\lambda t}, \quad r_2(t) = te^{\lambda t}.$$

چون $P_0(A) = I$ و $P_1(A) = A - \lambda I$ ، فرمول مطلوب برای e^{tA} عبارت خواهد بود از

$$(۳۳.۷) \quad e^{tA} = e^{\lambda t}I + te^{\lambda t}(A - \lambda I) = e^{\lambda t}(1 - \lambda t)I + te^{2\lambda t}A.$$

مثال ۲. مثال ۱ را در صورتی حل کنید که مقادیر ویژهٔ A ، λ و μ بوده و $\lambda \neq \mu$.

حل . در این حالت دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر است :

$$r_1'(t) = \lambda r_1(t), \quad r_1(0) = 1,$$

$$r_2'(t) = \mu r_2(t) + r_1(t), \quad r_2(0) = 0.$$

جوابهای آن عبارتند از

$$r_1(t) = e^{\lambda t}, \quad r_2(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}.$$

چون $P_0(A) = I$ و $P_1(A) = A - \lambda I$ ، فرمول مطلوب برای e^{tA} مساوی است با

$$(۳۴.۷) \quad e^{tA} = e^{\lambda t}I + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}(A - \lambda I) = \frac{\lambda e^{\mu t} - \mu e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}I + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}A.$$

اگر مقادیر ویژهٔ λ ، μ اعدادی مختلط باشند ، نمایه‌های $e^{\lambda t}$ و $e^{\mu t}$ نیز اعدادی

مختلط‌اند. اما، اگر λ و μ مزدوجهای مختلط باشند، اسکالره‌ای ضرب شده در I و A در (۳۴.۷) حقیقی خواهند بود. مثلاً، فرض کنیم

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \mu = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0.$$

در این صورت، $\lambda - \mu = 2i\beta$ ؛ در نتیجه، معادله (۳۴.۷) خواهد شد

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{(\alpha+i\beta)t}I + \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i\beta} [A - (\alpha + i\beta)I] \\ &= e^{\alpha t} \left\{ e^{i\beta t}I + \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i\beta} (A - \alpha I - i\beta I) \right\} \\ &= e^{\alpha t} \left\{ (\cos \beta t + i \sin \beta t)I + \frac{\sin \beta t}{\beta} (A - \alpha I - i\beta I) \right\}. \end{aligned}$$

جملات شامل i حذف می‌شوند و به دست می‌آوریم که

$$(35.7) \quad e^{tA} = \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \{ (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t)I + \sin \beta t A \}.$$

۱۴.۷ روشهای دیگر برای محاسبه e^{tA} در حالات خاص

روش پوتزبر برای بیان e^{tA} به صورت یک چندجمله‌ای از A کاملاً کلی است، چرا که برای تمام ماتریسهای مربعی A اعتبار دارد. یک روش کلی همیشه ساده‌ترین روش برای استفاده در بعضی حالات خاص نیست. در این بخش روشهای ساده‌تری برای محاسبه e^{tA} در سه حالت خاص زیر ارائه می‌دهیم: (آ) وقتی همه مقادیر ویژه A مساویند؛ (ب) وقتی همه مقادیر ویژه A متمایزند؛ و (پ) وقتی A دو مقدار ویژه متمایز دارد که دقیقاً یکی درجه تکرارش ۱ است.

قضیه ۱۰.۷. هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ باشد که همه مقادیر ویژه‌اش مساوی λ است، آنگاه خواهیم داشت

$$(36.7) \quad e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k.$$

برهان. چون ماتریسهای $\lambda t I$ و $t(A - \lambda I)$ تعویض می‌شوند، داریم

$$e^{tA} = e^{\lambda t I} e^{t(A - \lambda I)} = (e^{\lambda t I}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k.$$

قضیه کیلی - هامیلتون ایجاب می‌کند که، به‌ازای هر $k \geq n$ ، $(A - \lambda I)^k = O$ ؛ در نتیجه، قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۱۱.۷. هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ با n مقدار ویژه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} L_k(A),$$

که در آن $L_k(A)$ یک چندجمله‌ای از A از درجه $n - 1$ است که با فرمول زیر داده می‌شود:

$$L_k(A) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

تذکره. چند جمله‌ایهای $L_k(A)$ را ضرایب درونیابی لاگرانژ می‌نامند.

برهان. تابع ماتریسی F را با معادله

$$(37.7) \quad F(t) = \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} L_k(A)$$

تعریف کرده، تحقیق می‌کنیم که F در معادله دیفرانسیل $F'(t) = AF(t)$ با شرط اولیه $F(0) = I$ صدق می‌کند. از (37.7) معلوم می‌شود که

$$AF(t) - F'(t) = \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} (A - \lambda_k I) L_k(A).$$

بنابر قضیه کیلی - هامیلتون، به‌ازای هر k داریم $(A - \lambda_k I) L_k(A) = O$ ؛ در نتیجه، F در معادله دیفرانسیل $F'(t) = AF(t)$ صدق می‌کند.

برای اتمام برهان باید نشان دهیم F در شرط اولیه $F(0) = I$ صدق می‌کند، که به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(38.7) \quad \sum_{k=1}^n L_k(A) = I.$$

برهانی از (۳۸.۷) در تمرین ۱۶ از بخش ۱۵.۷ مختصراً آمده است .

در قضیه بعدی به حالتی می پردازیم که A دو مقدار ویژه متمایز دارد که دقیقاً یکی از آنها درجه تکرارش ۱ است .

قضیه ۱۲.۷ . فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ ($n \geq 3$) باشد ، با دو مقدار ویژه متمایز λ و μ ، که λ با درجه تکرار $n - 1$ و μ با درجه تکرار ۱ باشد . در این صورت ، داریم

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + \left\{ \frac{e^{\mu t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mu - \lambda)^k \right\} (A - \lambda I)^{n-1}.$$

برهان . مثل برهان قضیه ۱۰.۷ ، شروع می کنیم به نوشتن

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + e^{\lambda t} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + e^{\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!} (A - \lambda I)^{n-1+r}. \end{aligned}$$

حال ، با استفاده از قضیه کیلی - هامیلتون ، سری را روی r در شکل بسته محاسبه می کنیم . چون

$$A - \mu I = A - \lambda I - (\mu - \lambda) I ,$$

در می یابیم که

$$(A - \lambda I)^{n-1} (A - \mu I) = (A - \lambda I)^n - (\mu - \lambda) (A - \lambda I)^{n-1}.$$

طرف چپ ، بنابر قضیه کیلی - هامیلتون ، O است ؛ در نتیجه ،

$$(A - \lambda I)^n = (\mu - \lambda) (A - \lambda I)^{n-1}.$$

با چندبار استفاده از این رابطه ، در می یابیم که

$$(A - \lambda I)^{n-1+r} = (\mu - \lambda)^r (A - \lambda I)^{n-1}.$$

لذا ، سری روی r خواهد شد

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!} (\mu - \lambda)^r (A - \lambda I)^{n-1} = \frac{1}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mu - \lambda)^k (A - \lambda I)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \left(e^{t(\mu - \lambda)} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mu - \lambda)^k \right) (A - \lambda I)^{n-1}.$$

این برهان را تمام می‌کند.

فرمول صریح قضیه ۱۲.۷ را می‌توان با اعمال روش پوتزر نیز نتیجه گرفت، اما جزئیات کار پیچیده‌تر است.

فرمولهای صریح قضایای ۱۰.۷، ۱۱.۷، و ۱۲.۷ تمام ماتریسهای از مرتبه $n \leq 3$ را می‌پوشانند. چون اغلب در عمل با حالت 3×3 مواجهیم، فرمولهای این حالت برای سهولت در ارجاع ذیلاً ذکر شده‌اند.

حالت ۱. هرگاه ماتریس 3×3 ، A دارای مقادیر ویژه $\lambda, \lambda, \lambda$ باشد، آنگاه

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \{ I + t(A - \lambda I) + \frac{1}{2} t^2 (A - \lambda I)^2 \}.$$

حالت ۲. هرگاه ماتریس 3×3 ، A دارای مقادیر ویژه متمایز λ, μ, ν باشد، آنگاه

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \frac{(A - \mu I)(A - \nu I)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} + e^{\mu t} \frac{(A - \lambda I)(A - \nu I)}{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)} + e^{\nu t} \frac{(A - \lambda I)(A - \mu I)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}.$$

حالت ۳. هرگاه ماتریس 3×3 ، A دارای مقادیر ویژه λ, λ, μ ، که $\lambda \neq \mu$ ، باشد، آنگاه

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \{ I + t(A - \lambda I) \} + \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^2} (A - \lambda I)^2 - \frac{te^{\lambda t}}{\mu - \lambda} (A - \lambda I).$$

مثال. e^{tA} را وقتی $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ حساب کنید.

حل. مقادیر ویژه A عبارتند از ۱, ۱, ۲؛ در نتیجه، از فرمول حالت ۳ معلوم می‌شود که

$$(۳۹.۷) \quad e^{tA} = e^t\{I + t(A - I)\} + (e^{2t} - e^t)(A - I)^2 - te^t(A - I)^2.$$

با دسته‌بندی توانهای A ، می‌توان این رابطه را به صورت زیر نیز نوشت:

$$(۴۰.۷) \quad e^{tA} = (-2te^t + e^{2t})I + \{(3t + 2)e^t - 2e^{2t}\}A - \{(t + 1)e^t - e^{2t}\}A^2.$$

در این مرحله می‌توان $(A - I)^2$ یا A^2 را محاسبه کرد و، با انجام اعمال آمده در (۳۹.۷) یا (۴۰.۷)، نتیجه را به صورت یک ماتریس 3×3 نوشت:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & (3t + 2)e^t - 2e^{2t} & -(t + 1)e^t + e^{2t} \\ -2(t + 1)e^t + 2e^{2t} & (3t + 5)e^t - 4e^{2t} & -(t + 2)e^t + 2e^{2t} \\ -2(t + 2)e^t + 4e^{2t} & (3t + 8)e^t - 8e^{2t} & -(t + 4)e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

۱۵.۷ تمرین

برای هر یک از ماتریسهای تمرینات ۱ تا ۶، e^{tA} را به صورت یک چندجمله‌ای از A بیان کنید.

$$۱. \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad ۲. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$۳. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ۴. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$۵. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad ۶. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

۷. (A) می‌دانیم که همه مقادیر ویژه ماتریس 3×3 ، A مساوی λ است. ثابت کنید که

$$e^{tA} = \frac{1}{2}e^{\lambda t}\{(\lambda^2 t^2 - 2\lambda t + 2)I + (-2\lambda t^2 + 2t)A + t^2 A^2\}.$$

(ب) فرمول نظیر را در صورتی که A یک ماتریس 4×4 باشد که همه مقادیر ویژه اش

مساوی λ است پیدا کنید.

در هریک از تمرینهای ۸ تا ۱۵، دستگاه $Y' = AY$ با شرط اولیه داده شده را حل کنید.

$$\cdot A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 9 \quad \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdot 8$$

$$\cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 10$$

$$\cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \cdot 11$$

$$\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 12$$

$$\cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 13$$

$$\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 14$$

$$\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 15$$

۱۶. در این تمرین، برهان مختصری برای معادله (۳۸.۷) که در برهان قضیه ۱۱.۷ به

کاررفت ارائه می‌شود. فرض کنید $L_k(\lambda)$ چند جمله‌ای از λ از درجه $n-1$ باشد که با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$L_k(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j},$$

که در آن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ اسکالر متمایزند. (T) ثابت کنید که

$$L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 0, & \lambda_i \neq \lambda_k \\ 1, & \lambda_i = \lambda_k \end{cases}$$

(ب) فرض کنید y_1, \dots, y_n اسکالر دلخواه بوده، و

$$p(\lambda) = \sum_{k=1}^n y_k L_k(\lambda).$$

ثابت کنید $p(\lambda)$ تنها چند جمله‌ای از درجه $n-1$ است که در n معادله زیر صدق می‌کند:

$$p(\lambda_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(پ) ثابت کنید به‌ازای هر λ ، $\sum_{k=1}^n L_k(\lambda) = 1$ ، و نتیجه بگیرید که به‌ازای هر ماتریس مربعی A داریم

$$\sum_{k=1}^n L_k(A) = I,$$

که در آن I ماتریس همانی می‌باشد.

۱۶.۷ دستگاههای خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

حال مسئله با مقدار اولیه غیرهمگن

$$(۴۱.۷) \quad Y'(t) = AY(t) + Q(t), \quad Y(a) = B,$$

بر بازه J را در نظر می‌گیریم. در اینجا A یک ماتریس ثابت $n \times n$ ، Q یک تابع برداری n بعدی (به صورت یک ماتریس ستونی $n \times 1$) پیوسته بر J ، و a نقطه مفروضی در J است. می‌توان با همان عملی که در حالت اسکالر به کار رفت به یک فرمول صریح برای جواب این مسئله دست یافت.

ابتدا طرفین (۴۱.۷) را در ماتریس نمایی e^{-tA} ضرب کرده، معادله دیفرانسیل

را به شکل

$$(۴۲.۷) \quad e^{-tA}\{Y'(t) - AY(t)\} = e^{-tA}Q(t)$$

می‌نویسیم. طرف چپ (۴۲.۷) مشتق حاصل ضرب $e^{-tA}Y(t)$ است. بنابراین، اگر از طرفین (۴۲.۷) از a تا x ، که $x \in J$ ، انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$e^{-xA}Y(x) - e^{-aA}Y(a) = \int_a^x e^{-tA}Q(t) dt.$$

با ضرب این رابطه در e^{xA} ، فرمول صریح (۴۳.۷) به دست می‌آید که در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱۳.۷. فرض کنیم A یک ماتریس ثابت $n \times n$ ، و Q یک تابع برداری n بعدی پیوسته بر بازه J باشد. در این صورت، مسئله با مقدار اولیه

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \quad Y(a) = B,$$

جواب منحصر بفردی بر J دارد که با فرمول صریح

$$(۴۳.۷) \quad Y(x) = e^{(x-a)A}B + e^{xA} \int_a^x e^{-tA}Q(t) dt$$

بیان می‌شود.

مثل حالت همگن، مشکل به‌کار بردن این فرمول در عمل محاسبه ماتریسهای نمایی

است.

توجه کنید که جمله اول، یعنی $e^{(x-a)A}B$ ، جواب مسئله همگن

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(a) = B$$

است. جمله دوم جواب مسئله غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \quad Y(a) = 0$$

می‌باشد. قضیه ۱۳.۷ را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال. مسئله با مقدار اولیه

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \quad Y(0) = B,$$

را بر بازه $(-\infty, +\infty)$ حل کنید، که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ te^{2t} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

حل. بنابر قضیه ۱۳.۷، جواب به صورت زیر است:

$$(۴۴.۷) \quad Y(x) = e^{x \cdot I} \int_0^x e^{-t \cdot I} Q(t) dt = \int_0^x e^{(x-t) \cdot I} Q(t) dt.$$

مقادیر ویژه A عبارتند از ۲، ۲، و ۴. برای محاسبه $e^{x \cdot I}$ از فرمول حالت ۳، بخش ۱۴.۷، استفاده می‌کنیم تا به دست آید که

$$\begin{aligned} e^{x \cdot A} &= e^{2x} \{ I + x(A - 2I) \} + \frac{1}{4}(e^{4x} - e^{2x})(A - 2I)^2 - \frac{1}{2}x e^{2x}(A - 2I)^2 \\ &= e^{2x} \{ I + x(A - 2I) + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2x - 1)(A - 2I)^2 \}. \end{aligned}$$

می‌توان از تعویض x با $x - t$ در این فرمول $e^{(x-t) \cdot I}$ رابه‌دست آورد. بنابراین، انتگرالده در (۴۴.۷) عبارت است از

$$\begin{aligned} e^{(x-t) \cdot I} Q(t) &= e^{2(x-t)} \{ I + (x-t)(A - 2I) \\ &\quad + \frac{1}{4}[e^{2(x-t)} - 2(x-t) - 1](A - 2I)^2 \} Q(t) \\ &= e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} + (A - 2I)e^{2x} \begin{bmatrix} x-t \\ 0 \\ t(x-t) \end{bmatrix} + \frac{1}{4}(A - 2I)^2 e^{2x} \begin{bmatrix} e^{2x}e^{-2t} - 2(x-t) - 1 \\ 0 \\ e^{2x}te^{-2t} - 2t(x-t) - t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

با انتگرالگیری، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} Y(x) &= \int_0^x e^{(x-t) \cdot I} Q(t) dt = e^{2x} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} + (A - 2I)e^{2x} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \\ \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{4}(A - 2I)^2 e^{2x} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} - x - x^2 \\ 0 \\ \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

چون داریم

$$(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 Y(x) &= e^{2x} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \frac{1}{3}x^2 \end{bmatrix} + e^{2x} \begin{bmatrix} \frac{1}{6}x^3 \\ -\frac{1}{6}x^3 \\ x^2 + \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix} + e^{2x} \begin{bmatrix} \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \\ -\frac{3}{8}e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \\ \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix} \\
 &= e^{2x} \begin{bmatrix} \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \\ -\frac{3}{8}e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 \\ \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

سطرهای این ماتریس توابع مطلوب y_1, y_2, y_3 می‌باشند.

۱۷۰۷ تمرین

۱. فرض کنید Z یک جواب دستگاه غیرهمگن

$$Z'(t) = AZ(t) + Q(t)$$

بربازه r با مقدار اولیه $Z(a)$ باشد. ثابت کنید که دستگاه غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t)$$

بر r با مقدار اولیه $Y(a)$ فقط یک جواب دارد و این جواب از فرمول

$$Y(t) = Z(t) + e^{(t-a)A}\{Y(a) - Z(a)\}$$

به دست می‌آید. اغلب روشهای خاصی برای تعیین یک جواب خصوصی $Z(t)$ که شبیه تابع معلوم $Q(t)$ است وجود دارند. تمرینهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۷ چنین روشهایی را برای $Q(t) = C$ ، $Q(t) = e^{xt}C$ ، $Q(t) = t^m C$ ، $Q(t) = (\cos \alpha t)C + (\sin \alpha t)D$ ، که در آنها C و D بردارهای ثابتی‌اند، توضیح می‌دهند. اگر جواب خصوصی $Z(t)$ که به این طریق به دست می‌آید مقدار اولیه لازم را نداشته باشد، $Z(t)$ را همانطور که در تمرین ۱ نموده شده اصلاح می‌کنیم تا جواب دیگری مانند $Y(t)$ با مقدار اولیه لازم به دست آید.

۲. (۱) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ ثابت بوده، و B و C بردارهای n بعدی ثابتی باشند. ثابت کنید جواب دستگاه

$$Y'(t) = AY(t) + C, \quad Y(a) = B,$$

بر $(-\infty, +\infty)$ از فرمول

$$Y(x) = e^{(x-a) \cdot A} B + \left(\int_0^{x-a} e^{u \cdot A} du \right) C$$

به دست می آید .

(ب) هرگاه A نامفرد باشد ، نشان دهید که انتگرال قسمت (\bar{A}) دارای مقدار $\{e^{(x-a) \cdot A} - I\} A^{-1}$ است .

(پ) $Y(x)$ را وقتی

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \quad a = 0$$

به طور صریح حساب کنید .

۳ . فرض کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده ، B و C بردارهایی ثابت و n بعدی باشند ، و α اسکالر مفروضی باشد .

(\bar{A}) ثابت کنید دستگاه غیر همگن $Z'(t) = AZ(t) + e^{2t}C$ جوابی به شکل $Z(t) = e^{2t}B$ دارد اگر و فقط اگر $(\alpha I - A)B = C$.

(ب) هرگاه α یک مقدار ویژه A نباشد ، ثابت کنید بردار B را همیشه می توان طوری اختیار کرد که دستگاه قسمت (\bar{A}) جوابی به شکل $Z(t) = e^{2t}B$ داشته باشد .

(پ) هرگاه α یک مقدار ویژه A نباشد ، ثابت کنید هر جواب دستگاه $Y'(t) = AY(t) + e^{2t}C$ به شکل $Y(t) = e^{t \cdot A}(Y(0) - B) + e^{2t}B$ است ، که در آن $B = (\alpha I - A)^{-1}C$.

۴ . با استفاده از روش تمرین ۳ ، برای دستگاه غیر همگن $Y'(t) = AY(t) + e^{2t}C$ ، که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جوابی پیدا کنید .

۵ . فرض کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده ، B و C بردارهایی ثابت و n بعدی باشند ، و m یک عدد صحیح مثبت باشد .

(\bar{A}) ثابت کنید دستگاه غیر همگن $Y'(t) = AY(t) + t^m C$ ، $Y(0) = B$ جوابی خصوصی به شکل

$$Y(t) = B_0 + tB_1 + t^2B_2 + \dots + t^m B_m ,$$

که در آن B_0, B_1, \dots, B_m بردارهایی ثابت اند، دارد اگر و فقط اگر

$$C = -\frac{1}{m!} A^{m+1} B.$$

ضرایب B_0, B_1, \dots, B_m این جواب را معین نمایید.

(ب) ثابت کنید اگر A نامنفرد باشد، همیشه می‌توان بردار اولیه B را طوری اختیار کرد که دستگاه قسمت (T) جوابی به شکل معین داشته باشد.

۶. دستگاه غیر همگن

$$y_1' = 3y_1 + y_2 + t^3$$

$$y_2' = 2y_1 + 2y_2 + t^3$$

را در نظر بگیرید.

(T) یک جواب خصوصی به شکل $Y(t) = B_0 + tB_1 + t^2B_2 + t^3B_3$ پیدا کنید.

(ب) یک جواب دستگاه را با شرایط $y_1(0) = y_2(0) = 1$ پیدا کنید.

۷. فرض کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده، B, C, D بردارهایی ثابت و n بعدی باشند، و α عدد حقیقی ناصفر معلومی باشد. ثابت کنید دستگاه غیر همگن

$$Y'(t) = AY(t) + (\cos \alpha t)C + (\sin \alpha t)D, \quad Y(0) = B,$$

جوابی خصوصی به شکل

$$Y(t) = (\cos \alpha t)E + (\sin \alpha t)F,$$

که در آن E و F بردارهایی ثابت اند، دارد اگر و فقط اگر

$$(A^2 + \alpha^2 I)B = -(AC + \alpha D).$$

برای این جواب، E و F را بر حسب A, B, C معین کنید. توجه کنید که اگر $A^2 + \alpha^2 I$ نامنفرد باشد، همیشه می‌توان بردار اولیه B را طوری اختیار کرد که دستگاه جوابی به شکل معین داشته باشد.

۸. (T) یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن

$$y_1' = y_1 + 3y_2 + 4 \sin 2t$$

$$y_2' = y_1 - y_2$$

را بیابید.

(ب) یک جواب دستگاه با شرایط $y_1(0) = y_2(0) = 1$ پیدا کنید.

در هریک از تمرینهای ۹ تا ۱۲، دستگاه غیر همگن $Y'(t) = AY(t) + Q(t)$ را با

شرط اولیه داده شده حل کنید .

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^t \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . ۹$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} e \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad . ۱۰$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 7e^t - 27 \\ -3e^t + 12 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1007}{442} \\ \frac{707}{221} \end{bmatrix} \quad . ۱۱$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \\ t \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . ۱۲$$

۱۸.۷ دستگاه خطی کلی $Y'(t) = P(t)Y(t) + Q(t)$

قضیه ۱۳.۷ برای جواب دستگاه خطی

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \quad Y(a) = B,$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$ ثابت بوده و $Q(t), Y(t)$ ماتریسهای ستونی $n \times 1$ ی هستند ، یک فرمول صریح به دست می دهد . اینک به حالت کلیتر

$$(۴۵.۷) \quad Y'(t) = P(t)Y(t) + Q(t), \quad Y(a) = B,$$

می پردازیم ، که در آن ماتریس $n \times n$ ، $P(t)$ لزوماً ثابت نیست .

هرگاه P و Q بر بازه J پیوسته باشند ، یک قضیه وجودی - یکتایی کلی که در یکی از بخشهای آتی ثابت می شود می گوید که به ازای هر a در J و هر بردار اولیه B درست یک جواب برای مسئله با مقدار اولیه (۴۵.۷) وجود دارد . در این بخش ، با استفاده از این نتیجه ، فرمولی برای این جواب به دست می آوریم که قضیه ۱۳.۷ را تعمیم می دهد .

در حالت اسکالر ($n = 1$) ، معادله دیفرانسیل (۴۵.۷) را می توان به صورت زیر حل کرد . قرار می دهیم $A(x) = \int_a^x P(t) dt$ سپس ، با ضرب طرفین (۴۵.۷) در $e^{-A(t)}$ ، معادله دیفرانسیل را به شکل

$$(۴۶.۷) \quad e^{-A(t)}\{Y'(t) - P(t)Y(t)\} = e^{-A(t)}Q(t)$$

می‌نویسیم. اما طرف چپ مشتق حاصل ضرب $e^{-A(t)}Y(t)$ است. بنابراین، می‌توان با انتگرالگیری از طرفین از a تا x ، که x و a نقاطی در J اند، به دست آورد که

$$e^{-A(x)}Y(x) - e^{-A(a)}Y(a) = \int_a^x e^{-A(t)}Q(t) dt.$$

با ضرب این رابطه در $e^{A(x)}$ فرمول صریح

$$(47.7) \quad Y(x) = e^{A(x)}e^{-A(a)}Y(a) + e^{A(x)} \int_a^x e^{-A(t)}Q(t) dt$$

به دست خواهد آمد.

تنها بخشی از این استدلال که مستقیماً "در باب توابع ماتریسی به کار نمی‌رود این است که طرف چپ (46.7) مشتق حاصل ضرب $e^{-A(t)}Y(t)$ است. در این مرحله از این استفاده شد که مشتق $e^{-A(t)}$ مساوی $-P(t)e^{-A(t)}$ است. در حالت اسکالر، این نتیجه‌ای است از فرمول زیر برای مشتقگیری از توابع نمایی:

$$E'(t) = A'(t)e^{A(t)}, \quad \text{هرگاه } E(t) = e^{A(t)}.$$

متأسفانه، این فرمول مشتقگیری، وقتی A یک تابع ماتریسی باشد، همیشه درست نیست.

مثلاً، برای تابع ماتریسی 2×2 ، $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ درست نیست. (ر.ک. تعریف 7

از بخش 0.12.7). از اینرو، برای تعمیم معادله (47.7) به حالت ماتریسی، استدلالی اصلاح شده لازم است.

فرض کنید طرفین (45.7) را در یک ماتریس $n \times n$ نامعین مانند $F(t)$ ضرب کرده باشیم. این کار رابطه

$$F(t)Y'(t) = F(t)P(t)Y(t) + F(t)Q(t)$$

را به ما می‌دهد. حال، با افزودن $F'(t)Y(t)$ به طرفین این رابطه، طرف چپ آن را به مشتق حاصل ضرب $F(t)Y(t)$ تبدیل می‌کنیم. با این عمل، معادله آخر نتیجه می‌دهد که

$$\{F(t)Y(t)\}' = \{F'(t) + F(t)P(t)\}Y(t) + F(t)Q(t).$$

اگر بتوان ماتریس $F(t)$ را طوری اختیار کرد که مجموع $\{F'(t) + F(t)P(t)\}$ سمت راست ماتریس صفر باشد، معادله آخر به

$$\{F(t)Y(t)\}' = F(t)Q(t)$$

ساده خواهد شد. با انتگرالگیری از این رابطه از a تا x ، خواهیم داشت

$$F(x)Y(x) - F(a)Y(a) = \int_a^x F(t)Q(t) dt.$$

هرگاه، علاوه بر این، ماتریس $F(x)$ نامنفرد باشد، فرمول صریح

$$(۴۸.۷) \quad Y(x) = F(x)^{-1}F(a)Y(a) + F(x)^{-1} \int_a^x F(t)Q(t) dt$$

را خواهیم داشت. این فرمول تعمیمی است از فرمول اسکالر (۴۷.۷). این فرایند در صورتی بکار است که بتوان تابع ماتریسی $n \times n$ ، $F(t)$ را طوری پیدا کرد که در معادله دیفرانسیل ماتریسی

$$F'(t) = -F(t)P(t)$$

صدق کرده و نامنفرد باشد.

توجه کنید که این معادله دیفرانسیل خیلی شبیه معادله دیفرانسیل اصلی (۴۵.۷) با $Q(t) = 0$ است، جز آنکه تابع مجهول $F(t)$ به جای یک ماتریس ستونی بودن یک ماتریس مربعی است. همچنین، تابع مجهول به جای آنکه از چپ در $P(t)$ ضرب شده باشد از راست در $-P(t)$ ضرب شده است.

حال ثابت می‌کنیم که معادله دیفرانسیل برای F همیشه یک جواب نامنفرد دارد. اثبات به قضیه وجودی زیر برای دستگاههای خطی همگن بستگی دارد.

قضیه ۱۴.۷. فرض کنیم $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ باشد که بر یک بازه باز J پیوسته است. هرگاه $a \in J$ و B یک بردار n بعدی معلوم باشد، دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(a) = B,$$

یک جواب برداری n بعدی مانند Y بر J دارد.

برهانی از قضیه ۱۴.۷ در بخش ۲۱.۷ داده می‌شود. به کمک این قضیه می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۱۵.۷. اگر P یک تابع ماتریسی $n \times n$ باشد که بر بازه J پیوسته است، و a نقطه‌ای در J باشد، یک تابع ماتریسی $n \times n$ مانند F هست که در معادله دیفرانسیل

ماتریسی

(۴۹.۷) $F'(x) = -F(x)P(x)$
 بر J با مقدار اولیه $F(a) = I$ صدق می‌کند. علاوه، به‌ازای هر x در J نامنفرد می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $Y_k(x)$ یک جواب برداری معادله دیفرانسیل

$$Y_k'(x) = -P(x)Y_k(x)$$

بر J با بردار اولیه $Y_k(a) = I_k$ ، که I_k ستون k ام ماتریس همانی $n \times n$ ، I است، باشد. در اینجا $P(x)$ ترانهاده $P(x)$ است. فرض کنیم $G(x)$ ماتریس $n \times n$ ی باشد که ستون k امش $Y_k(x)$ است. در این صورت، G در معادله دیفرانسیل ماتریسی

$$(۵۰.۷) \quad G'(x) = -P(x)G(x)$$

بر J با مقدار اولیه $G(a) = I$ صدق می‌کند. حال از طرفین (۵۰.۷) ترانهاده می‌گیریم. چون ترانهاده یک حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ترانهاده‌ها به ترتیب عکس است، داریم

$$\{G'(x)\}' = -G(x)P(x).$$

همچنین، ترانهاده مشتق G' مشتق ترانهاده G' است. بنابراین، ماتریس $F(x) = G(x)$ در معادله دیفرانسیل (۴۹.۷) با مقدار اولیه $F(a) = I$ صدق می‌کند.

حال، بانشان دادن معکوس، ثابت می‌کنیم $F(x)$ نامنفرد است. فرض کنیم H تابع ماتریسی $n \times n$ ی باشد که ستون k امش جواب معادله دیفرانسیل

$$Y'(x) = P(x)Y(x)$$

با بردار اولیه (ستون k ام I) $Y(a) = I_k$ است. در این صورت، H در مسئله با مقدار اولیه

$$H'(x) = P(x)H(x), \quad H(a) = I,$$

بر J صدق می‌کند. حاصل ضرب $F(x)H(x)$ دارای مشتق

$$F(x)H'(x) + F'(x)H(x) = F(x)P(x)H(x) - F(x)P(x)H(x) = 0$$

به‌ازای هر x در J است. بنابراین، حاصل ضرب $F(x)H(x)$ ثابت است، $F(x)H(x) = F(a)H(a) = I$ ؛ در نتیجه، $H(x)$ معکوس $F(x)$ می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

نتایج این بخش در قضیه زیر خلاصه شده است.

قضیه ۱۶۰۷. اگر P یک تابع ماتریسی $n \times n$ و Q یک تابع برداری n بعدی باشد، و هر دو بر بازه J پیوسته باشند، جواب مسئله با مقدار اولیه

$$Y'(x) = P(x)Y(x) + Q(x), \quad Y(a) = B, \quad (51.7)$$

بر J با فرمول

$$Y(x) = F(x)^{-1}Y(a) + F(x)^{-1} \int_a^x F(t)Q(t) dt \quad (52.7)$$

بیان می شود. ماتریس $n \times n$ ، $F(x)$ ترانزاده ماتریسی است که ستون k امش جواب مسئله با مقدار اولیه

$$Y'(x) = -P(x)Y(x), \quad Y(a) = I_k, \quad (53.7)$$

می باشد، که در آن I_k ستون k ام ماتریس همانی I است.

اگرچه قضیه ۱۶۰۷ فرمول صریحی برای جواب دستگاه خطی کلی (۵۱.۷) به دست می دهد، این فرمول بخاطر مشکلات تعیین تابع ماتریسی F ، همیشه برای محاسبه جواب مفید نیست. تعیین F نیاز به حل n دستگاه خطی همگن (۵۳.۷) دارد. در بخش بعد یک روش سری توانی توصیف می شود که گاهی برای حل دستگاههای خطی همگن به کار می رود.

بار دیگر متذکر می شویم که برهان قضیه ۱۶۰۷ بر قضیه ۱۴۰۷، یعنی قضیه وجودی برای دستگاههای خطی همگن، که هنوز ثابت نشده است، استوار است.

۱۹۰۷ روش سری توانی برای حل دستگاههای خطی همگن دستگاه خطی همگن

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \quad Y(0) = B, \quad (54.7)$$

را در نظر می گیریم، که در آن ماتریس $n \times n$ ، $A(x)$ بسط به صورت سری توانی از x دارد که در بازه بازی شامل مبدا همگراست؛ مثلاً،

$$A(x) = A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \dots + x^kA_k + \dots, \quad |x| < r_1$$

که در آن ضرایب A_0, A_1, A_2, \dots ماتریسهای $n \times n$ معلومی هستند. سعی می کنیم جوابی

به صورت سری توانی به شکل

$$Y(x) = B_0 + xB_1 + x^2B_2 + \dots + x^k B_k + \dots$$

با ضرایب برداری B_0, B_1, B_2, \dots بیابیم. چون $Y(0) = B_0$ ، شرط اولیه با اختیار (بردار اولیه مقرر) $B_0 = B$ برقرار می شود. برای تعیین بقیه ضرایب، سری توانی مربوط به $Y(x)$ را در معادله دیفرانسیل گذاشته، ضرایب جملات هم‌توان x را متحد قرار می دهیم تا دستگاه معادلات زیر به دست آید:

$$(55.7) \cdot B_1 = A_0 B, \quad (k+1)B_{k+1} = \sum_{r=0}^k A_r B_{k-r}, \quad k = 1, 2, \dots$$

این معادلات را می توان بتوالی نسبت به بردارهای B_1, B_2, \dots حل کرد. اگر سری توانی حاصل برای $Y(x)$ در بازه‌ای چون $|x| < r_2$ همگرا باشد، $Y(x)$ یک جواب مسئله با مقدار اولیه (54.7) در بازه $|x| < r$ است، که در آن $r = \min\{r_1, r_2\}$.
مثلاً، اگر $A(x)$ یک ماتریس ثابت مانند A باشد، $A_0 = A$ ، و به ازای $k \geq 1$ ،

$$A_k = 0 \quad ; \text{ در نتیجه، دستگاه معادلات (55.7) به صورت زیر درمی آید:}$$

$$(k+1)B_{k+1} = AB_k, \quad k \geq 1 \quad ; \text{ به ازای } B_1 = AB$$

با حل این معادلات بتوالی، درمی یابیم که

$$B_k = \frac{1}{k!} A^k B, \quad k \geq 1 \quad \text{به ازای}$$

بنابراین، جواب به صورت سری در این حالت خواهد شد

$$Y(x) = B + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k B = e^{xA} B.$$

این بانیجه‌ای که پیشتر برای دستگاه‌های خطی همگن با ضرایب ثابت به دست آمد مطابقت دارد.

۲۰.۷ تمرین

۱. فرض کنید p یک تابع حقیقی و Q یک تابع ماتریسی $n \times 1$ باشد، و هر دو بر بازه r پیوسته باشند. همچنین، A یک ماتریس ثابت $n \times n$ باشد. ثابت کنید مسئله با مقدار اولیه

$$Y'(x) = p(x)AY(x) + Q(x), \quad Y(a) = B,$$

دارای جواب

$$Y(x) = e^{a(x)A}B + e^{a(x)A} \int_a^x e^{-a(t)A} Q(t) dt$$

بر J است، که در آن $q(x) = \int_a^x p(t) dt$.

۲. حالت خاص تمرین ۱ که در آن A نامفرد است، $a = 0$ ، $p(x) = 2x$ ، و $Q(x) = xC$ ، که در آن C یک بردار ثابت است را در نظر بگیرید. نشان دهید که جواب به صورت زیر درمی آید:

$$Y(x) = e^{2x}A(B + \frac{1}{2}A^{-1}C) - \frac{1}{2}A^{-1}C.$$

۳. فرض کنید $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ بوده و $E(t) = e^{A(t)}$. همچنین، $Q(t)$ ،

$Y(t)$ و B ماتریسهای ستونی $n \times 1$ ی باشند. فرض کنید بر بازه J

$$E'(t) = A'(t)E(t).$$

هرگاه $a \in J$ و A' و Q بر J پیوسته باشند، ثابت کنید که مسئله با مقدار اولیه

$$Y'(t) = A'(t)Y(t) + Q(t), \quad Y(a) = B,$$

دارای جواب زیر بر J است:

$$Y(x) = e^{A(x)}e^{-A(a)}B + e^{A(x)} \int_a^x e^{-A(t)}Q(t) dt.$$

۴. فرض کنید $E(t) = e^{A(t)}$. این تمرین چند نمونه از توابع ماتریسی $A(t)$ را توصیف

می کند که برای آنها $E'(t) = A'(t)E(t)$.

(آ) فرض کنید $A(t) = t^r A$ ، که در آن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده و r یک

عدد صحیح مثبت است. ثابت کنید $E'(t) = A'(t)E(t)$ بر $(-\infty, \infty)$.

(ب) فرض کنید $A(t)$ یک چندجمله ای از t با ضرایب ماتریسی باشد: مثلاً،

$$A(t) = \sum_{r=0}^m t^r A_r,$$

که در آن ضرایب تعویض می شوند: به ازای هر r و s ، $A_r A_s = A_s A_r$. ثابت

کنید $E'(t) = A'(t)E(t)$ بر $(-\infty, \infty)$.

(پ) دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = (I + tA)Y(t), \quad Y(0) = B$$

بر بازه $(-\infty, \infty)$ ، که در آن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ است، را حل کنید.

۵. فرض کنید تابع ماتریسی $n \times n$ ، $A(x)$ بسط به صورت سری توانی همگرا به ازای $|x| < r$ دارد. برای حل دستگاه خطی همگن مرتبه دوم

$$Y''(x) = A(x)Y(x), \quad Y(0) = B, \quad Y'(0) = C$$

یک روند به صورت سری توانی ارائه دهید.

۶. دستگاه مرتبه دوم $Y''(x) + AY(x) = 0$ ، با $Y(0) = B$ ، $Y'(0) = C$ ، که در آن A یک ماتریس $n \times n$ ثابت است، را در نظر بگیرید. ثابت کنید دستگاه جواب به صورت سری توانی

$$Y(x) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} A^k}{(2k)!} \right) B + \left(xI + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} A^k}{(2k+1)!} \right) C$$

دارد، که به ازای $-\infty < x < +\infty$ همگراست.

۲۱۰۷ اثبات قضیه وجودی به روش تقریبات متوالی

در این بخش وجود و یکتایی جواب دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad (۵۶.۷)$$

که در آن $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ بوده که بر بازه J پیوسته است، را ثابت می‌کنیم. ثابت می‌کنیم به ازای هر نقطه a در J و هر بردار اولیه معلوم B درست یک جواب مانند $Y(t)$ بر J هست که در شرط اولیه $Y(a) = B$ صدق می‌کند.

روش تقریبات متوالی را به کار می‌سازیم، که روشی است تکراری که در مسائل بسیار دیگر نیز کاربرد دارد. این روش نخستین بار در ۱۸۳۸ به وسیله لیوویل در رابطه با معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم انتشار یافت، و بعدها به وسیله ج. ساکه^۱ در ۱۸۶۴، ال. فوکس^۲ در ۱۸۷۰، و جی. پتانو^۳ در ۱۸۸۸ به معادلات خطی مرتبه n تعمیم یافت. در ۱۸۹۰، امیل پیکارد^۴ (۱۹۴۱ - ۱۸۵۶) این روش را تعمیم داد تا معادلات دیفرانسیل غیرخطی را نیز دربرگیرد. بعضی از نویسندگان برای تقدیر از کارهای اساسی او این روش را روش پیکارد می‌نامند. این روش نه فقط از حیث نظری جالب است، بلکه می‌توان با استفاده از آن در بعضی حالات تقریبی‌هایی عددی از جوابها به دست آورد. روش با حدس اولیه‌ای از یک جواب معادله (۵۶.۷) شروع می‌شود. بردار اولیه

B را حدس اولیه می‌گیریم، گرچه این امر ضرورت ندارد. بعد این حدس را در طرف راست معادله می‌گذاریم و معادلهٔ دیفرانسیل جدید

$$Y'(t) = A(t)B$$

را به دست می‌آوریم. طرف راست این معادله دیگر شامل تابع مجهول نیست؛ در نتیجه، معادله را می‌توان فوراً با انتگرالگیری طرفین آن از a تا x ، که x یک نقطه دلخواه در J است، حل کرد. این معادله دقیقاً یک جواب مانند Y_1 بر J دارد که در شرط اولیه $Y_1(a) = B$ صدق می‌کند؛ یعنی،

$$Y_1(x) = B + \int_a^x A(t)B dt.$$

حال در طرف راست معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۵۶.۷) $Y(t)$ را با $Y_1(t)$ عوض می‌کنیم تا معادلهٔ دیفرانسیل جدید

$$Y'(t) = A(t)Y_1(t)$$

به دست آید. این معادله دارای جواب منحصر بفرد Y_2 بر J با خاصیت $Y_2(a) = B$ است:

$$(57.7) \quad Y_2(x) = B + \int_a^x A(t)Y_1(t) dt.$$

سپس Y_2 را در طرف راست (۵۶.۷) می‌گذاریم و معادلهٔ حاصل را حل کرده Y_3 را با خاصیت $Y_3(a) = B$ معین می‌کنیم، و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر. این فرایند دنباله‌ای مانند Y_0, Y_1, Y_2, \dots از توابع را تولید می‌کند، که در آن $Y_0 = B$ و Y_{k+1} از Y_k به وسیلهٔ فرمول بازگشتی زیر معین می‌شود:

$$(58.7) \quad Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x A(t)Y_k(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

هدف اثبات این امر است که دنبالهٔ توابعی که این‌طور تعریف می‌شود به یک تابع حدی مانند Y همگراست که جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل (۵۶.۷) بر J است که در شرط اولیه $Y(a) = B$ نیز صدق می‌کند. توابع Y_0, Y_1, Y_2, \dots تقریباً متوالی به Y نامیده می‌شوند. پیش از بررسی همگرایی این فرایند، روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال. مسئله با مقدار اولیه $Y(0) = B$ ، $Y'(t) = AY(t)$ ، که در آن A یک ماتریس

$n \times n$ ثابت است، را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم جواب با فرمول $Y(x) = e^{xA}B$ به‌ازای هر x حقیقی داده می‌شود. نشان می‌دهیم که این جواب را چطور می‌توان به روش تقریبات متوالی به دست آورد.

حدس اولیه $Y_0(x) = B$ است. فرمول بازگشتی (۵۸.۷) نتیجه می‌دهد که

$$Y_1(x) = B + \int_0^x AB \, dt = B + xAB,$$

$$Y_2(x) = B + \int_0^x AY_1(t) \, dt = B + \int_0^x (AB + tA^2B) \, dt = B + xAB + \frac{1}{2}x^2A^2B.$$

به استقرا درمی‌یابیم که

$$Y_k(x) = B + xAB + \frac{1}{2}x^2A^2B + \cdots + \frac{1}{k!}x^kA^kB = \left(\sum_{r=0}^k \frac{(xA)^r}{r!} \right) B.$$

مجموع طرف راست مجموع جزئی سری مربوط به e^{xA} است. بنابراین، وقتی $k \rightarrow \infty$ ، معلوم می‌شود که، به‌ازای هر x ،

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(x) = e^{xA}B.$$

بنابراین، در این مثال می‌توان مستقیماً "نشان داد که تقریبات متوالی به جوابی از مسئله با مقدار اولیه بر $(-\infty, +\infty)$ همگراست.

برهان همگرایی دنباله تقریبات متوالی. حال به دنباله کلی که با فرمول بازگشتی (۵۸.۷) تعریف شد باز می‌گردیم. برای اثبات همگرایی دنباله، هر جمله $Y_k(x)$ را به صورت یک مجموع توی هم رو می‌نویسیم:

$$(۵۹.۷) \quad Y_k(x) = Y_0(x) + \sum_{m=0}^{k-1} \{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\}.$$

برای اثبات اینکه $Y_k(x)$ ، وقتی $k \rightarrow \infty$ ، به حدی میل می‌کند، ثابت می‌کنیم سری نامتناهی

$$(۶۰.۷) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\}$$

به‌ازای هر x در J همگراست. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که سری

$$(۶۱.۷) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\|$$

همگراست. در این سری از نرم ماتریسی که در بخش ۳.۷ معرفی شد استفاده می‌کنیم؛ نرم یک ماتریس مجموع قدر مطلقهای تمام درایه‌های آن است.

زیر بازه بسته و کراندار J_1 از J را که شامل a است در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم سری (۶۱.۷) به‌ازای هر x در J_1 تحت تسلط یک سری همگرا از ثابت‌هایی است که از x مستقل‌اند. این ایجاب می‌کند که سری بر J_1 به‌طور یکنواخت همگرا باشد. برای تخمین اندازه جملات در (۶۱.۷)، فرمول بازگشتی را چند بار به‌کار می‌بریم. درآغاز، داریم

$$Y_1(x) - Y_0(x) = \int_a^x A(t)B dt.$$

برای ساده بودن، فرض کنیم $a < x$. در این صورت، می‌توان نوشت

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\| = \left\| \int_a^x A(t)B dt \right\| \leq \int_a^x \|A(t)\| \|B\| dt. \quad (62.7)$$

چون هر درایه $A(t)$ بر J پیوسته است، هر درایه بر بازه بسته و کراندار J_1 کراندار است. بنابراین، $\|A(t)\| \leq M$ ، که در آن M مجموع کرانهای همه درایه‌های $A(t)$ بر بازه J_1 است. (عدد M به J_1 بستگی دارد.) بنابراین، انتگرالده در (۶۲.۷) به‌وسیله $M \|B\|$ کراندار است؛ در نتیجه، به‌ازای هر $x > a$ در J_1 داریم

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\| \leq \int_a^x \|B\| M dt = \|B\| M(x - a).$$

حال فرمول بازگشتی را بار دیگر به‌کار برده، تفاضل $Y_2 - Y_1$ را بر حسب $Y_1 - Y_0$ بیان می‌کنیم، و سپس، با استفاده از تخمینی که هم‌اینک برای $Y_1 - Y_0$ به‌دست آمد، به‌ازای هر $x > a$ در J_1 خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \|Y_2(x) - Y_1(x)\| &= \left\| \int_a^x A(t)\{Y_1(t) - Y_0(t)\} dt \right\| \leq \int_a^x \|A(t)\| \|B\| M(t - a) dt \\ &\leq \|B\| M^2 \int_a^x (t - a) dt = \|B\| \frac{M^2(x - a)^2}{2!}. \end{aligned}$$

به‌استقرا، درمی‌یابیم که

به‌ازای $m = 0, 1, 2, \dots$ و هر $x > a$ در J_1 ،

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \leq \|B\| \frac{M^{m+1}(x - a)^{m+1}}{(m + 1)!}.$$

اگر $x < a$ ، استدلالی مشابه همین نامساوی را با $|x - a|$ به جای $(x - a)$ به دست می دهد . اگر L طول بازه J_1 باشد ، به ازای هر x در J_1 داریم $|x - a| \leq L$ ؛ در نتیجه ، تخمین زیر را خواهیم داشت :

به ازای $m = 0, 1, 2, \dots$ و هر x در J_1 ،

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \leq \|B\| \frac{M^{m+1}L^{m+1}}{(m+1)!} .$$

بنابر این ، سری (۶۱.۷) تحت تسلط سری همگرای

$$\|B\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ML)^{m+1}}{(m+1)!} = \|B\| (e^{ML} - 1)$$

است . این ثابت می کند که سری (۶۱.۷) بر J_1 به طور یکنواخت همگراست .

استدلال فوق نشان می دهد که دنباله تقریبات متوالی همیشه همگراست و همگرایی بر J_1 یکنواخت است . فرض کنیم Y تابع حدی باشد . یعنی ، $Y(x)$ را به ازای هر x در J_1 با معادله

$$Y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(x)$$

تعریف می کنیم . ثابت می کنیم Y از خواص زیر بهره مند است :

(۱) Y بر J_1 پیوسته است :

(۲) به ازای هر x در J_1 ، $Y(x) = B + \int_a^x A(t)Y(t) dt$ ؛

(۳) به ازای هر x در J_1 ، $Y'(x) = A(x)Y(x)$ و $Y(a) = B$.

قسمت (۳) نشان می دهد که Y یک جواب مسئله با مقدار اولیه بر J_1 است .

برهان (۶) . هر تابع Y_k یک ماتریس ستونی است که درایه هایش توابعی اسکالر و بر J_1 پیوسته اند . هر درایه تابع حدی Y حد یک دنباله به طور یکنواخت همگرا از توابع پیوسته است ؛ در نتیجه ، بنابر قضیه ۱۰.۱۱ از جلد یک ، هر درایه Y نیز بر J_1 پیوسته است . بنابراین ، خود Y بر J_1 پیوسته می باشد .

برهان (۲) . فرمول بازگشتی (۵۸.۷) می گوید که

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x A(t)Y_k(t) dt .$$

بنابراین ،

$$Y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_{k+1}(x) = B + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x A(t)Y_k(t) dt = B + \int_a^x A(t) \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(t) dt$$

$$= B + \int_a^x A(t)Y(t) dt .$$

تعویض علامت حد با علامت انتگرال ، بدلیل همگرایی یکنواخت دنباله $\{Y_k\}$ بر J_1 ، مجاز می باشد .

برهان (پ) . معادله $Y(a) = B$ فوراً " از (ب) نتیجه می شود . بخاطر (آ) ، انتگرالده در (ب) بر J_1 پیوسته است ؛ در نتیجه ، بنا بر اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ، $Y'(x)$ موجود و مساوی $A(x)Y(x)$ بر J_1 می باشد .

بازه J_1 زیر بازه بسته و کراندار دلخواهی از J شامل a بود . اگر J_1 بزرگ شود ، فرایند به دست آوردن $Y(x)$ تغییر نمی کند ، زیرا که فقط مستلزم انتگرالگیری از a تا x است . چون به ازای هر x در J یک زیربازه بسته و کراندار از J شامل a و x وجود دارد ، پس یک جواب روی بازه کامل J وجود خواهد داشت .

قضیه ۱۷.۷ . قضیه یکتایی برای دستگاههای خطی همگن . هرگاه $A(t)$ بر بازه J پیوسته باشد ، معادله دیفرانسیل

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

حداکثر یک جواب بر J دارد که در شرط اولیه داده شده $Y(a) = B$ صدق می کند .

برهان . فرض کنیم Y و Z دو جواب بر J باشند . همچنین ، J_1 زیر بازه بسته و کراندار از J شامل a باشد . ثابت می کنیم به ازای هر x در J_1 ، $Z(x) = Y(x)$. این ایجاب می کند که بر بازه کامل J ، $Z = Y$. چون هر دوی Y و Z جوابند ، داریم

$$Z'(t) - Y'(t) = A(t)\{Z(t) - Y(t)\} .$$

x را در J_1 اختیار کرده ، از این معادله از a تا x انتگرال می گیریم تا به دست آید

$$Z(x) - Y(x) = \int_a^x A(t)\{Z(t) - Y(t)\} dt .$$

این رابطه نامساوی زیر را ایجاب می‌کند:

$$(۶۳.۷) \quad \|Z(x) - Y(x)\| \leq M \left| \int_a^x \|Z(t) - Y(t)\| dt \right|,$$

که در آن M یک کران بالایی برای $\|A(t)\|$ بر J_1 است. فرض کنیم M_1 یک کران بالایی برای تابع پیوسته $\|Z(t) - Y(t)\|$ بر J_1 باشد. در این صورت، نامساوی (۶۳.۷) نتیجه می‌دهد که

$$(۶۴.۷) \quad \|Z(x) - Y(x)\| \leq MM_1 |x - a|.$$

با استفاده از (۶۴.۷) در طرف راست (۶۳.۷)، خواهیم داشت

$$\|Z(x) - Y(x)\| \leq M^2 M_1 \left| \int_a^x |t - a| dt \right| = M^2 M_1 \frac{|x - a|^2}{2}.$$

به استقرا، درمی‌یابیم که

$$(۶۵.۷) \quad \|Z(x) - Y(x)\| \leq M^m M_1 \frac{|x - a|^m}{m!}.$$

طرف راست، وقتی $m \rightarrow \infty$ ، به ۰ نزدیک می‌شود؛ در نتیجه، $Z(x) = Y(x)$. این برهان را تمام خواهد کرد.

نتایج این بخش را می‌توان در قضیهٔ وجودی - یکتایی زیر خلاصه کرد.

قضیهٔ ۱۸.۷. فرض کنیم A یک تابع ماتریسی $n \times n$ باشد که بر بازهٔ باز J پیوسته است. هرگاه $a \in J$ و B یک بردار n بعدی باشد، دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(a) = B,$$

یک و فقط یک جواب برداری n بعدی بر J خواهد داشت.

۲۲.۷ روش تقریبات متوالی اعمال شده بر دستگاههای غیرخطی مرتبهٔ اول
روش تقریبات متوالی را می‌توان بر بعضی از دستگاههای غیرخطی نیز اعمال کرد. دستگاه مرتبهٔ اول

$$(۶۶.۷) \quad Y' = F(t, Y)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن F یک تابع برداری n بعدی معلوم بوده، و Y یک تابع

بردار n بعدی مجهول است که باید تعیین شود. جوابی چون Y را جستجو می‌کنیم که در معادله

$$Y'(t) = F[t, Y(t)]$$

به ازای هر t در بازه‌ای مانند J صدق کرده و در شرط اولیه مفروضی، مثلا $Y(a) = B$ که $a \in J$ و B بردار n بعدی معلومی است، صادق باشد.

همانند حالت خطی، دنباله Y_0, Y_1, Y_2, \dots از تقریبات متوالی را با اختیار $Y_0 = B$ و تعریف Y_{k+1} برحسب Y_k با فرمول بازگشتی

$$(۶۷.۷) \quad Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x F[t, Y_k(t)] dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

می‌سازیم. این دنباله تحت شرایطی بر F به یک تابع حدی مانند Y همگراست که در معادله دیفرانسیل و شرط اولیه داده شده صدق می‌کند.

پیش از پرداختن به همگرایی این فرایند، در چند مثال یک بعدی بحث می‌کنیم که برخی از مشکلات ناشی در عمل را نشان می‌دهند.

مثال ۱. مسئله با مقدار اولیه و غیر خطی $y' = x^2 + y^2$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$ را در نظر می‌گیریم. چند تقریب به حل آن را محاسبه می‌کنیم. $Y_0(x) = 0$ را اختیار و سه تقریب بعدی را به صورت زیر معین می‌کنیم:

$$Y_1(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

$$Y_2(x) = \int_0^x [t^2 + Y_1^2(t)] dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$Y_3(x) = \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \right)^2 \right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

ملاحظه می‌شود که محاسبه تقریبات دیگر کار زیادی لازم دارد. مثلا، دو تقریب Y_4 و Y_5 بترتیب چند جمله‌ایهایی از درجه 31 و 63 هستند.

مثال بعدی مشکل دیگری که ممکن است در محاسبه تقریبات متوالی رخ دهد توضیح

مثال ۲. مسئله با مقدار اولیه و غیر خطی $y' = 2x + e^y$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$ رادر نظر می‌گیریم. با حدس اولیه $Y_0(x) = 0$ شروع کرده، به دست می‌آوریم که

$$Y_1(x) = \int_0^x (2t + 1) dt = x^2 + x,$$

$$Y_2(x) = \int_0^x (2t + e^{t^2+t}) dt = x^2 + \int_0^x e^{t^2+t} dt.$$

در اینجا بیش از این نمی‌توان پیش رفت، به این دلیل که انتگرال آخر را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی حساب کرد. اما، به ازای x معلوم، می‌توان یک تقریب عددی به انتگرال را حساب کرد و بدین وسیله یک تقریب به $Y_2(x)$ را به دست آورد.

بخاطر مشکلاتی که در دو مثال اخیر توضیح شد، روش تقریبات متوالی گاهی در تعیین صریح جوابها عملاً "چندان مفید نیست". ارزش واقعی روش در استفاده از آن برای اثبات قضایای وجودی است.

۲۳.۷ برهان قضیه وجودی - یکتایی برای دستگاههای غیرخطی مرتبه اول

حال به قضیه وجودی - یکتایی برای دستگاههای غیرخطی مرتبه اول می‌پردازیم. با گذاردن قیود مناسب بر تابع سمت راست معادله دیفرانسیل

$$Y' = F(x, Y),$$

می‌توان روش اثبات برای حالت خطی در بخش ۲۱.۷ را تعمیم داد.

فرض کنیم J بازه باز باشد که جواب روی آن جستجو می‌شود. همچنین، $a \in J$ و B یک بردار n بعدی معلوم باشد. فرض کنیم S مجموعه‌ای در فضای $(n+1)$ باشد به صورت

$$S = \{(x, Y) \mid |x - a| \leq h, \|Y - B\| \leq k\},$$

که در آن $h > 0$ و $k > 0$. [هرگاه $n = 1$ ، این مجموعه مستطیلی است به مرکز (a, B) و قاعده $2h$ و ارتفاع $2k$]. فرض کنیم قلمرو F شامل مجموعه‌ای مانند S از این نوع بوده و F بر S کراندار باشد؛ مثلاً، به ازای هر (x, Y) در S ،

$$\|F(x, Y)\| \leq M. \quad (۶۸.۷)$$

که در آن M یک ثابت مثبت است.

حال فرض کنیم تابع مرکب $G(x) = F(x, Y(x))$ بر بازه $(a - h, a + h)$ به ازای

هر تابع Y پیوسته بر $(a-h, a+h)$ و با این خاصیت که به ازای هر x در $(a-h, a+h)$ ، $(x, Y(x)) \in S$ پیوسته باشد. این فرض وجود انتگرالهایی که در روش تقریبات متوالی ظاهر می شوند تضمین می کند، و نیز پیوستگی توابعی را که به این ترتیب ساخته می شوند ایجاب می نماید.

بالاخره، فرض کنیم F در شرطی به شکل

$$\|F(x, Y) - F(x, Z)\| \leq A \|Y - Z\|$$

به ازای هر جفت از نقاط (x, Y) و (x, Z) در S صدق کند، که در آن A یک ثابت مثبت است. این شرط را به افتخار رودلف لیب شیتس^۱ که اولین بار آن را در ۱۸۷۶ معرفی کرد شرط لیب شیتس می نامند. شرط لیب شیتس یک تابع را چندان محدود نمی کند و به کمک آن می توان برهان وجود و یکتایی را از حالت خطی به غیر خطی تعمیم داد.

قضیه ۱۹۰۷. وجود و یکتایی جوابهای دستگاههای غیرخطی مرتبه اول. فرض کنیم F در شرایط کراننداری، پیوستگی، و لیب شیتس مذکور در فوق بر مجموعه S صدق کند. همچنین، I بازه $(a-c, a+c)$ باشد، که در آن $c = \min\{h, k/M\}$. در این صورت، یک و فقط یک تابع مانند Y هست که بر I با خاصیت $Y(a) = B$ تعریف شده و چنان است که $(x, Y(x)) \in S$ و

$$Y'(x) = F(x, Y(x))، I \text{ در } x \text{ به ازای هر } x$$

برهان. چون این برهان شبیه برهان حالت خطی است، ما فقط مراحل اصلی آن را توضیح می دهیم. قرار می دهیم $Y_0(x) = B$ و توابع برداری Y_1, Y_2, \dots را بر I با فرمول بازگشتی زیر تعریف می کنیم:

$$Y_{m+1}(x) = B + \int_a^x F[t, Y_m(t)] dt، m = 0, 1, 2, \dots \text{ به ازای } (۶۹.۷)$$

برای آنکه فرمول بازگشتی معنی دار باشد، لازم است بدانیم که به ازای هر x در I ، $(x, Y_m(x)) \in S$ این را می توان به آسانی به استقرا بر m ثابت کرد. وقتی $m = 0$ ، داریم $(x, Y_0(x)) = (x, B) \in S$ است. سپس، فرض می کنیم به ازای m ی و هر

x در I ، $(x, Y_m(x)) \in S$ ، با استفاده از (۶۹.۷) و (۶۸.۷)، به دست می آوریم

$$\|Y_{m+1}(x) - B\| \leq \left| \int_a^x \|F[t, Y_m(t)]\| dt \right| \leq M \left| \int_a^x dt \right| = M|x - a|.$$

چون به ازای x در I ، $|x - a| \leq c$ ، این ایجاب می کند که

$$\|Y_{m+1}(x) - B\| \leq Mc \leq k,$$

نشانگر آنکه به ازای هر x در I ، $(x, Y_{m+1}(x)) \in S$ ، بنابراین، فرمول بازگشتی به ازای هر $m \geq 0$ و هر x در I معنی دارد.

حال همگرایی دنباله $\{Y_m(x)\}$ درست مثل بخش ۲۱.۷ ثابت می شود. می نویسیم

$$Y_k(x) = Y_0(x) + \sum_{m=0}^{k-1} \{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\}$$

و ثابت می کنیم $Y_k(x)$ ، وقتی $k \rightarrow \infty$ ، به حدی میل می کند به این طریق که ثابت می کنیم سری نامتناهی

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\|$$

بر I همگرا است. این مطلب از نامساوی

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \leq \frac{MA^m |x - a|^{m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{MA^m c^{m+1}}{(m+1)!}$$

نتیجه می شود، که به استقرا، با استفاده از فرمول بازگشتی و شرط لیب شیتس، ثابت شد. سپس، تابع حدی Y را با معادله

$$Y(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m(x)$$

به ازای هر x در I تعریف کرده، تحقیق می کنیم که، درست مثل حالت خطی، در معادله انتگرال

$$Y(x) = B + \int_a^x F[t, Y(t)] dt$$

صدق می نماید. این مطلب وجود یک جواب را ثابت خواهد کرد. سپس، یکتایی رامی توان به همان روش به کار رفته در اثبات قضیه ۱۷.۷ ثابت کرد.

۱. مسئله با مقدار اولیه و خطی

$$y' + y = 2e^x \quad \text{با } y = 1 \text{ وقتی } x = 0$$

را در نظر بگیرید.

(آ) جواب دقیق Y این مسئله را بیابید.

(ب) روش تقریبات متوالی را، با شروع از حدس اولیه $Y_0(x) = 1$ ، به کار ببرید.

$Y_n(x)$ را به طور صریح تعیین کرده، نشان دهید که به ازای هر x حقیقی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x) = Y(x) .$$

۲. روش تقریبات متوالی را در مورد مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = x + y^2 \quad \text{با } y = 0 \text{ وقتی } x = 0$$

به کار ببرید. $Y_0(x) = 0$ را حدس اولیه بگیرید و $Y_3(x)$ را حساب کنید.

۳. روش تقریبات متوالی را در مورد مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = 1 + xy^2 \quad \text{با } y = 0 \text{ وقتی } x = 0$$

به کار ببرید. $Y_0(x) = 0$ را حدس اولیه بگیرید و $Y_3(x)$ را حساب کنید.

۴. روش تقریبات متوالی را در مورد مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{با } y = 0 \text{ وقتی } x = 0$$

به کار ببرید. با حدس اولیه "نامناسب" $Y_0(x) = 1$ شروع کرده، $Y_3(x)$ را حساب

کنید، و نتیجه را با نتایج مثال ۱ در بخش ۲۲.۷ مقایسه نمایید.

۵. مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{با } y = 1 \text{ وقتی } x = 0$$

را در نظر بگیرید.

(آ) روش تقریبات متوالی را، با شروع از حدس اولیه $Y_0(x) = 1$ ، به کار ببرید و

$Y_2(x)$ را محاسبه نمایید.

(ب) فرض کنید $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$. کوچکترین M را بیابید که

$|f(x, y)| \leq M$ بر R ، بازه $I = (-c, c)$ راطوری بیابید که نمودار هر تابع تقریب

Y_n روی I در R قرار داشته باشد.

(پ) فرض کنید جواب $y = Y(x)$ در همسایگی مبدأ بسط به صورت سری توانی

داشته باشد. اولین شش جمله ناصفر این بسط را معین کرده، نتیجه را با نتیجه قسمت (آ) مقایسه نمایید.

۶. مسئله با مقدار اولیه

$$y' = 1 + y^2 \quad \text{با } y = 0 \text{ وقتی } x = 0$$

را در نظر بگیرید.

(آ) روش تقریبات متوالی را، با شروع از حدس اولیه $Y_0(x) = 0$ به کار برید و $Y_4(x)$ را محاسبه کنید.

(ب) ثابت کنید هر تابع تقریب Y_n بر تمام محور حقیقی تعریف شده است.

(پ) با استفاده از قضیه ۱۹.۷، نشان دهید که مسئله با مقدار اولیه در هر بازه به شکل $(-h, h)$ حداکثر یک جواب دارد.

(ت) معادله دیفرانسیل را با جداسازی متغیرها حل کرده، بدین وسیله نشان دهید که مسئله با مقدار اولیه دقیقاً یک جواب مانند γ بر بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ داشته و بر هر بازه بزرگتر جوابی ندارد. در این مثال، تقریبات متوالی بر تمام محور حقیقی تعریف شده‌اند، اما فقط بر بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ به یک تابع حدی همگرا می‌باشند.

۷. دو تابع مانند $y = Y(x)$ و $z = Z(x)$ را جستجو می‌کنیم که با هم در دستگاه معادلات

$$y' = z, \quad z' = x^3(y + z)$$

با شرایط اولیه $y = 1$ و $z = 1/2$ وقتی $x = 0$ صدق کنند. با حدسهای اولیه $Z_0(x) = 1/2$ ، $Y_0(x) = 1$ شروع کرده، با استفاده از روش تقریبات متوالی، توابع تقریب

$$Y_3(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^5}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192},$$

$$Z_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + \frac{3x^8}{64} + \frac{7x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$$

را به دست آورید.

۸. دستگاه معادلات

$$y' = 2x + z, \quad z' = 3xy + x^2z$$

با شرایط اولیه $y = 2$ و $z = 0$ وقتی $x = 0$ را در نظر بگیرید. با حدسهای اولیه

$Y_0(x) = 2, Z_0(x) = 0$ شروع کرده، از روش تقریبات متوالی استفاده کنید، و $Y_3(x)$ و $Z_3(x)$ را معین نمایید.

۹. مسئله با مقدار اولیه

$$y'' = x^2y' + x^4y \quad \text{با } y = 5 \text{ و } y' = 1 \text{ وقتی } x = 0$$

را در نظر بگیرید. این مسئله را به مسئله معادل آن که شامل یک دستگاه دو معادله و دو تابع مجهول $y = Y(x)$ و $z = Z(x)$ ، که $z = y'$ ، باشد تغییر دهید. سپس، روش تقریبات متوالی را به کار ببرید، از حدسهای اولیه $Y_0(x) = 5$ و $Z_0(x) = 1$ شروع کنید، و $Y_3(x)$ و $Z_3(x)$ را معین نمایید.

۱۰. فرض کنید f بر مستطیل $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x = 0 \\ 2y/x & \text{اگر } |y| \leq x^2 \text{ و } x \neq 0 \\ 2x & \text{اگر } y > x^2 \text{ و } x \neq 0 \\ -2x & \text{اگر } y < -x^2 \text{ و } x \neq 0 \end{cases}$$

(آ) ثابت کنید به ازای هر (x, y) در R ، $|f(x, y)| \leq 2$.

(ب) نشان دهید که f در شرط لیب شیتس بر R صدق نمی کند.

(پ) به ازای هر C صادق در $|C| \leq 1$ ، نشان دهید که $y = Cx^2$ یک جواب مسئله با مقدار اولیه $y' = f(x, y)$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$ است. همچنین، نشان دهید

که نمودار هریک از این جوابها روی $(-1, 1)$ در R قرار دارد.

(ت) روش تقریبات متوالی را در مورد این مسئله با مقدار اولیه، با شروع از حدس اولیه $Y_0(x) = 0$ ، به کار ببرید. $Y_n(x)$ را تعیین کرده، نشان دهید که تقریبات به یک جواب مسئله بر بازه $(-1, 1)$ همگرا می باشند.

(ث) قسمت (ت) را، با شروع از حدس اولیه $Y_0(x) = x$ ، تکرار نمایید. $Y_n(x)$ را تعیین کرده، نشان دهید که توابع تقریب به جوابی متمایز از هر جواب در قسمت (پ) همگرا می باشند.

(ج) قسمت (ت) را، با شروع از حدس اولیه $Y_0(x) = x^3$ ، تکرار کنید.

(چ) قسمت (ت) را، با شروع از حدس اولیه $Y_0(x) = x^{1/3}$ ، تکرار کنید.

* ۲۵.۷ تقریبات متوالی و نقاط ثابت عملگرها

ایده اصلی روش تقریبات متوالی نه فقط در اثبات قضایای وجودی معادلات دیفرانسیل به کار می رود بلکه از آن می توان برای مسائل مهم بسیار دیگر در آنالیز نیز استفاده کرد. تا پایان این فصل روش تقریبات متوالی را در محدوده های تنظیم می کنیم که به دیدگاه کاربردی آن وسعت زیادی خواهد بخشید.

در برهان قضیه ۱۸.۷، دنباله $\{Y_k\}$ از توابع را طبق فرمول بازگشتی

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x AY_k(t) dt$$

ساختیم. طرف راست این فرمول را می توان عملگری چون T دانست که بعضی توابع مانند Y را طبق معادله

$$T(Y) = B + \int_a^x AY(t) dt$$

به توابع جدید $T(Y)$ تبدیل می کند. در برهان قضیه ۱۸.۷ دریافتیم که جواب Y مسئله با مقدار اولیه $Y(a) = B$ ، $Y'(t) = AY(t)$ در معادله انتگرال

$$Y = B + \int_a^x AY(t) dt$$

صدق می کند. با نماد عملگر، این می گوید که $Y = T(Y)$. به عبارت دیگر، جواب Y تحت عملگر T ثابت می ماند. چنین تابع Y یک نقطه ثابت عملگر T نام دارد. بسیاری از مسائل مهم در آنالیز را می توان طوری تنظیم کرد که جوابشان به وجود یک نقطه ثابت عملگری وابسته باشد. از اینرو، مفید است سعی شود خواصی از عملگرها را کشف کنیم که وجود یک نقطه ثابت را تضمین کنند. حال به بحث اصولی این مسئله می پردازیم.

* ۲۶.۷ فضاهای خطی نرم‌مدار

برای تنظیم روش تقریبات متوالی به شکل کلی، شایسته است که در چارچوب فضاهای خطی کار کنیم. فرض کنیم S یک فضای خطی دلخواه باشد. وقتی از تقریب عنصر x در S به وسیله عنصر دیگر y در S صحبت می کنیم، تفاضل $x - y$ را در نظر می گیریم، که آن را خطای تقریب می نامیم. برای سنجش اندازه این خطا یک نرم در فضا معرفی

می‌کنیم .

تعریف نرم . فرض کنیم S یک فضای خطی باشد . تابع حقیقی N تعریف شده بر S یک نرم است اگر خواص زیر را دارا باشد :

$$(آ) \quad \text{بازای هر } x \text{ در } S, N(x) \geq 0$$

$$(ب) \quad \text{بازای هر } x \text{ در } S \text{ و هر اسکالر } c, N(cx) = |c| N(x)$$

$$(پ) \quad \text{بازای هر } x \text{ و } y \text{ در } S, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

$$(ت) \quad N(x) = 0 \text{ ایجاب می‌کند که } x = 0$$

هر فضای خطی با یک نرم یک فضای خطی نرم‌دار نامیده می‌شود .

نرم x را گاهی به‌جای $N(x)$ به‌صورت $\|x\|$ می‌نویسند . با این نماد ، خواص اساسی

خواهند شد :

$$(آ) \quad \text{بازای هر } x \text{ در } S, \|x\| \geq 0$$

$$(ب) \quad \text{بازای هر } x \text{ در } S \text{ و هر اسکالر } c, \|cx\| = |c| \|x\|$$

$$(پ) \quad \text{بازای هر } x \text{ و } y \text{ در } S, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$(ت) \quad \|x\| = 0 \text{ ایجاب می‌کند که } x = 0$$

هرگاه x و y در S باشند ، $\|x - y\|$ را فاصله x تا y می‌نامیم .

اگر فضای S اقلیدسی باشد ، همواره نرمی دارد که از ضرب داخلی به‌ارث برده

است ؛ یعنی ، $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. ولی ما به‌نرم خاصی توجه داریم که از یک ضرب داخلی ناشی نشود .

مثال . نرم ماکزیمم . فرض کنیم $C(J)$ فضای خطی توابع حقیقی پیوسته بر بازه J بسته و کراندار باشد . اگر $\varphi \in C(J)$ ، تعریف می‌کنیم

$$\|\varphi\| = \max_{x \in J} |\varphi(x)|,$$

که در آن علامت سمت راست یعنی ماکزیمم قدر مطلق φ بر J . خواننده می‌تواند تحقیق

کند که این نرم چهار خاصیت اساسی را داراست.

نرم ماکزیمم از یک ضرب داخلی ناشی نمی‌شود. برای اثبات این مطلب، نشان می‌دهیم که نرم ماکزیمم از خاصیتی که همهٔ نرمهای ضرب داخلی دارند محروم است. مثلاً، اگر یک نرم از یک ضرب داخلی ناشی شده باشد، "قانون متوازی الاضلاع"

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

به‌ازای هر x و y در S برقرار است. (ر.ک. تمرین ۱۶ در بخش ۱۳.۱). قانون متوازی الاضلاع همیشه به وسیلهٔ نرم ماکزیمم برقرار نیست. مثلاً، فرض کنیم x و y توابعی باشند که بر بازهٔ $[0, 1]$ با

$$x(t) = t, \quad y(t) = 1 - t$$

داده می‌شوند. در این صورت، داریم $\|x\| = \|y\| = \|x + y\| = \|x - y\| = 1$ ؛ در نتیجه، قانون متوازی الاضلاع نقض خواهد شد.

* ۲۷.۷ عملگرهای انقباض

در این بخش، فضای خطی نرم‌دار $C(J)$ مرکب از همهٔ توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ کراندار بستهٔ J را در نظر می‌گیریم، که در آن $\|\varphi\|$ نرم ماکزیمم است. عملگر

$$T: C(J) \rightarrow C(J)$$

را در نظر می‌گیریم که قلمروش $C(J)$ و بردش زیر مجموعه‌ای از $C(J)$ است. یعنی، هرگاه φ بر J پیوسته باشد، آنگاه $T(\varphi)$ نیز بر J پیوسته است. فرمولهای زیر چند نمونهٔ ساده از این عملگرها را نشان می‌دهند. در هر حالت، φ یک تابع دلخواه در $C(J)$ است و $T(\varphi)(x)$ به‌ازای هر x در J با فرمول داده شده تعریف شده است:

$$T(\varphi)(x) = \lambda\varphi(x), \quad \text{که در آن } \lambda \text{ یک عدد حقیقی ثابت است؛}$$

$$T(\varphi)(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \quad \text{که در آن } c \text{ نقطهٔ مفروضی در } J \text{ است؛}$$

$$T(\varphi)(x) = b + \int_0^x f[t, \varphi(t)] dt, \quad \text{که در آن } b \text{ ثابت بوده و ترکیب } f[t, \varphi(t)] \text{ بر } J$$

پیوسته است.

ما به آن عملگرهای T توجه داریم که به‌ازای آنها فاصلهٔ $\|T(\varphi) - T(\psi)\|$ از یک مضرب ثابت مانند $1 < \alpha$ از $\|\varphi - \psi\|$ کوچکتر باشد. این عملگرها را عملگرهای انقباض می‌نامند؛ این عملگرها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف یک عملگر انقباض. عملگر $T: C(J) \rightarrow C(J)$ یک عملگر انقباض نامیده می‌شود اگر ثابتی چون α صادق در $0 \leq \alpha < 1$ باشد بطوری که به‌ازای هر جفت تابع φ و ψ در $C(J)$ داشته باشیم

$$(70.7) \quad \|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq \alpha \|\varphi - \psi\|.$$

ثابت α یک ثابت انقباض برای T نامیده می‌شود.

تذکر. نامساوی (70.7) برقرار است اگر و فقط اگر

$$|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| \leq \alpha \|\varphi - \psi\|, \quad J \text{ در } x \text{ هر}$$

مثال ۱. فرض کنیم T عملگری باشد که با $T(\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ تعریف می‌شود، که در آن λ یک ثابت است. چون

$$|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| = |\lambda| |\varphi(x) - \psi(x)|,$$

داریم $\|T(\varphi) - T(\psi)\| = |\lambda| \|\varphi - \psi\|$. بنابراین، این عملگر انقباض است اگر و فقط اگر $|\lambda| < 1$ ، که در این حالت $|\lambda|$ را می‌توان به‌عنوان یک ثابت انقباض به‌کار برد.

مثال ۲. فرض کنیم $T(\varphi)(x) = b + \int_c^x f[t, \varphi(t)] dt$ ، که در آن f در شرط لیب شیتس به‌شکل

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|$$

به‌ازای هر x در J و هر y و z حقیقی صدق می‌کند. در اینجا K یک ثابت مثبت است. فرض کنیم $L(J)$ طول بازه J باشد. اگر $KL(J) < 1$ ، به آسانی می‌توان نشان داد که T یک عملگر انقباض با ثابت انقباض $KL(J)$ است. در واقع، به‌ازای هر x در J ، داریم

$$\begin{aligned} |T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| &= \left| \int_c^x \{f[t, \varphi(t)] - f[t, \psi(t)]\} dt \right| \leq K \left| \int_c^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right| \\ &\leq K \|\varphi - \psi\| \left| \int_c^x dt \right| \leq KL(J) \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

هرگاه $KL(J) < 1$ ، آنگاه T یک عملگر انقباض با ثابت انقباض $\alpha = KL(J)$ است.

* 28.7 قضیه نقطه ثابت برای عملگرهای انقباض

قضیه بعدی نشان می‌دهد که هر عملگر انقباض دارای نقطه ثابت منحصر بفرد است.

قضیه ۲۰۰۷. فرض کنیم $T: C(J) \rightarrow C(J)$ یک عملگر انقباض باشد. در این صورت، یک و فقط یک تابع مانند φ در $C(J)$ هست بطوری که

$$T(\varphi) = \varphi. \quad (۷۱.۷)$$

برهان. فرض کنیم φ_0 تابع دلخواهی در $C(J)$ باشد، و دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع را با فرمول بازگشتی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_{n+1} = T(\varphi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

توجه کنید که به ازای هر n ، $\varphi_{n-1} \in C(J)$ ، ثابت می‌کنیم دنباله $\{\varphi_n\}$ به تابع حدی φ در $C(J)$ همگراست. روش اثبات شبیه روشی است که در برهان قضیه ۱۸۰۷ به کار رفت. هر φ_n را به صورت یک مجموع توی هم رو می‌نویسیم:

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\} \quad (۷۲.۷)$$

و همگرایی $\{\varphi_n\}$ را با نشان دادن اینکه سری نامتناهی

$$\varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\} \quad (۷۳.۷)$$

بر J به طور یکنواخت همگراست ثابت می‌کنیم. سپس، نشان می‌دهیم که مجموع این سری نقطه ثابت مطلوب است.

همگرایی یکنواخت سری از مقایسه آن با سری هندسی و همگرایی

$$M \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k,$$

که در آن $M = \|\varphi_0\| + \|\varphi_1\|$ و α یک ثابت انقباض برای T است، نتیجه می‌شود. مقایسه به وسیله نامساوی

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M\alpha^k \quad (۷۴.۷)$$

صورت می‌گیرد، که به ازای هر x در J و هر $k \geq 1$ برقرار است. برای اثبات (۷۴.۷)، توجه می‌کنیم که

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| = |T(\varphi_k)(x) - T(\varphi_{k-1})(x)| \leq \alpha \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|.$$

بنابراین، نامساوی (۷۴.۷) در صورتی ثابت می‌شود که نشان دهیم به ازای هر $k \geq 1$ ،

$$\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \leq M\alpha^{k-1}. \quad (۷۵.۷)$$

حال (۷۵.۷) را به استقرا ثابت می‌کنیم. به‌ازای $k = 1$ ، داریم

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_0\| = M,$$

که همان (۷۵.۷) است. برای اثبات اینکه (۷۵.۷)، در صورت برقرار بودن به‌ازای k ، به‌ازای $k + 1$ برقرار است، توجه می‌کنیم که

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| = |T(\varphi_k)(x) - T(\varphi_{k-1})(x)| \leq \alpha \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \leq M\alpha^k.$$

چون این نامساوی به‌ازای هر x در J برقرار است، نیز باید داشته باشیم

$$\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\| \leq M\alpha^k.$$

این (۷۵.۷) را به‌استقرا ثابت می‌کند. بنابراین، سری (۷۳.۷) بر J به‌طور یکنواخت همگراست. اگر $\varphi(x)$ را مجموع آن بگیریم، خواهیم داشت

$$(۷۶.۷) \quad \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\}.$$

تابع φ بر J پیوسته‌است، زیرا مجموع یک‌سری به‌طور یکنواخت همگرا از توابع پیوسته است. برای اثبات اینکه φ یک نقطه ثابت T است، $T(\varphi)$ را با $\varphi_{n+1} = T(\varphi_n)$ مقایسه می‌کنیم. با استفاده از خاصیت انقباض T ، داریم

$$(۷۷.۷) \quad |T(\varphi)(x) - \varphi_{n+1}(x)| = |T(\varphi)(x) - T(\varphi_n)(x)| \leq \alpha |\varphi(x) - \varphi_n(x)|.$$

اما، از (۷۲.۷) و (۷۶.۷)، درمی‌یابیم که

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k,$$

که در آخرین مرحله از (۷۴.۷) استفاده کرده‌ایم. بنابراین، (۷۷.۷) ایجاب می‌کند که

$$|T(\varphi)(x) - \varphi_{n+1}(x)| \leq M \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^{k+1}.$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، سری سمت راست به 0 میل می‌کند؛ در نتیجه، $\varphi_{n+1}(x) \rightarrow T(\varphi)(x)$. اما چون، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\varphi_{n+1}(x) \rightarrow \varphi(x)$ ، این ثابت می‌کند که به‌ازای هر x در J ، $\varphi(x) = T(\varphi)(x)$. بنابراین، $\varphi = T(\varphi)$ ؛ در نتیجه، φ یک نقطه ثابت می‌باشد. بالاخره، ثابت می‌کنیم نقطه ثابت φ منحصر بفرد است. فرض کنیم ψ تابع دیگری

در $C(J)$ باشد که $T(\psi) = \psi$. در این صورت، داریم

$$\|\varphi - \psi\| = \|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq \alpha \|\varphi - \psi\|.$$

از این نتیجه می‌شود که $\|\varphi - \psi\| \leq 0(1 - \alpha)$. چون $\alpha < 1$ ، می‌توان، با تقسیم بر

$1 - \alpha$ ، نامساوی $\|\varphi - \psi\| \leq 0$ را نتیجه گرفت. اما ، چون نیز داریم $\|\varphi - \psi\| \geq 0$ ، این یعنی $\|\varphi - \psi\| = 0$ ؛ و در نتیجه ، $\varphi - \psi = 0$ ، و برهان قضیه نقطه ثابت تمام خواهد بود .

* ۲۹.۷ کاربردهای قضیه نقطه ثابت

برای آنکه وسعت کاربردهای قضیه نقطه ثابت را نشان دهیم ، از آن در اثبات دو قضیه مهم استفاده می کنیم .

اولین قضیه شرطی کافی برای آنکه معادله $f(x, y) = 0$ معرف y به صورت تابعی از x باشد را به دست می دهد .

قضیه ۲۱.۷ . قضیه تابع ضمنی . فرض کنیم f بر نوار مستطیلی شکل R :

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$$

تعریف شده باشد . همچنین ، مشتق جزئی $D_2 f(x, y)$ موجود بوده* ، و در نامساوی به شکل

$$(78.7) \quad 0 < m \leq D_2 f(x, y) \leq M$$

به ازای هر (x, y) در R صدق کند ، که در آن m و M ثابتهایی که $m \leq M$ می باشند . علاوه ، به ازای هر تابع پیوسته q بر $[a, b]$ ، تابع مرکب $g(x) = f[x, q(x)]$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد . در این صورت ، یک و فقط یک تابع مانند $y = Y(x)$ وجود دارد ، که بر $[a, b]$ پیوسته است ، و به ازای هر x در $[a, b]$ ،

$$(79.7) \quad f[x, Y(x)] = 0 .$$

تذکر . این نتیجه را این طور توصیف می کنیم که می گوییم معادله $f(x, y) = 0$ ، y را به طور ضمنی به صورت تابعی از x در $[a, b]$ تعریف می کند .

برهان . فرض کنیم C فضای خطی توابع پیوسته بر $[a, b]$ بوده ، و عملگر $T: C \rightarrow C$ را با معادله

* $D_2 f(x, y)$ مشتق $f(x, y)$ نسبت به y است در حالی که x ثابت گرفته شده است .

$$T(\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{1}{M} f[x, \varphi(x)]$$

به‌ازای هر x در $[a, b]$ تعریف می‌کنیم. در اینجا M ثابت مثبت در (۷۸.۷) است. تابع $T(\varphi) \in C$ هر وقت $\varphi \in C$ ثابت می‌کنیم T یک عملگر انقباض است. به محض دانستن این، نتیجه می‌شود که T یک نقطه ثابت منحصر بفرد مانند Y در C دارد. برای این تابع Y داریم $Y = T(Y)$ ، بدین معنی که، به‌ازای هر x در $[a, b]$ ،

$$Y(x) = Y(x) - \frac{1}{M} f[x, Y(x)] .$$

این، همانطور که مطلوب است، (۷۹.۷) را نتیجه می‌دهد. برای نشان دادن اینکه T یک عملگر انقباض است، تفاضل

$$(۸۰.۷) \quad T(\varphi)(x) - T(\psi)(x) = \varphi(x) - \psi(x) - \frac{f[x, \varphi(x)] - f[x, \psi(x)]}{M}$$

را در نظر می‌گیریم. بنابراین قضیه مقدار میانگین برای مشتقا، داریم

$$f[x, \varphi(x)] - f[x, \psi(x)] = D_2 f[x, z(x)] [\varphi(x) - \psi(x)],$$

که در آن $z(x)$ بین $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ قرار دارد. بنابراین، (۸۰.۷) نتیجه می‌دهد که

$$(۸۱.۷) \quad T(\varphi)(x) - T(\psi)(x) = [\varphi(x) - \psi(x)] \left(1 - \frac{D_2 f[x, z(x)]}{M} \right).$$

فرض (۷۸.۷) ایجاب می‌کند که

$$0 \leq 1 - \frac{D_2 f[x, z(x)]}{M} \leq 1 - \frac{m}{M} .$$

بنابراین، (۸۱.۷) نامساوی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$(۸۲.۷) \quad |T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| \leq |\varphi(x) - \psi(x)| \left(1 - \frac{m}{M} \right) \leq \alpha \|\varphi - \psi\| ,$$

که در آن $\alpha = 1 - m/M$. چون $0 < m \leq M$ ، داریم $0 \leq \alpha < 1$. نامساوی (۸۲.۷) به‌ازای هر x در $[a, b]$ معتبر است. بنابراین، T یک عملگر انقباض می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

کاربرد بعدی قضیه نقطه ثابت، یک قضیه وجودی برای معادله انتگرال

$$(۸۳.۷) \quad \varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt$$

را ثابت می‌کند. در اینجا ψ یک تابع معلوم پیوسته بر $[a, b]$ ، λ یک ثابت معلوم، و K تابع مفروضی است که بر مربع

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$$

تعریف شده و کراندار است. تابع K هسته^۱ معادله^۱ انتگرال نام دارد. فرض کنیم C فضای خطی توابع پیوسته بر $[a, b]$ باشد. همچنین، هسته^۱ K چنان باشد که عملگر T داده شده با

$$T(\varphi)(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt$$

C را بتوی C بنگارد. به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم $T(\varphi) \in C$ هر وقت $\varphi \in C$. یک جواب معادله^۱ انتگرال تابعی است چون φ در C که در (۸۳.۷) صدق کند.

قضیه^۱ ۲۲.۷. قضیه^۱ وجودی برای معادلات انتگرال. هرگاه، تحت شرایط پیشگفته، بازای هر (x, y) در S ، $M > 0$ ، داشته باشیم

$$(۸۴.۷) \quad |K(x, y)| \leq M,$$

آنگاه، بازای هر λ که

$$(۸۵.۷) \quad |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

یک و فقط یک تابع مانند φ در C هست که در معادله^۱ انتگرال (۸۳.۷) صدق می‌کند.

برهان. ثابت می‌کنیم T یک عملگر انقباض است. دو تابع دلخواه φ_1 و φ_2 را در C اختیار و تفاضل

$$T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] dt$$

را در نظر می‌گیریم. با استفاده از نامساوی (۸۴.۷)، می‌توان نوشت

$$|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| \leq |\lambda| M(b-a) \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \alpha \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

که در آن $\alpha = |\lambda| M(b-a)$. بخاطر (۸۵.۷)، داریم $0 \leq \alpha < 1$ ؛ در نتیجه، T یک عملگر انقباض با ثابت انقباض α می‌باشد. بنابراین، T نقطه^۱ ثابت منحصر بفرد φ در C می‌باشد. این تابع φ در (۸۳.۷) صدق می‌نماید.



حساب دیفرانسیل میدانهای اسکالر و برداری

۱۰۸ توابع از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m میدانهای اسکالر و برداری

در قسمت ۱ این جلد عمدتاً با تبدیلات خطی

$$T: V \rightarrow W$$

از یک فضای خطی مانند V بتوی فضای خطی دیگری چون W سرو کار داشتیم. در قسمت ۲ شرط خطی بودن T را حذف و لسی قید می‌کنیم که فضاهای V و W با بعد متناهی می‌باشند. بالاخص، توابع با قلمرو در فضای n ، \mathbb{R}^n و برد در فضای m ، \mathbb{R}^m را در نظر خواهیم گرفت.

چنین تابع، وقتی n و m هر دو مساوی یک‌اند، یک تابع حقیقی از یک متغیر حقیقی نامیده می‌شود. وقتی $n = 1$ و $m > 1$ ، این نوع تابع یک تابع برداری از یک متغیر حقیقی نام دارد.

نمونه‌هایی از این توابع به تفصیل در جلد یک مورد مطالعه قرار گرفتند.

در این فصل فرض آن است که $n > 1$ و $m \geq 1$. وقتی $m = 1$ ، تابع یک تابع حقیقی از یک متغیر برداری، یا، مختصرتر، یک میدان اسکالر، نامیده می‌شود. وقتی $m > 1$ ، تابع یک تابع برداری از یک متغیر برداری، یا فقط یک میدان برداری، نام دارد. در این فصل مفاهیم حد، پیوستگی، و مشتق به میدانهای اسکالر و برداری تعمیم می‌یابد. در فصلهای ۱۰ و ۱۱ مفهوم انتگرال تعمیم خواهد یافت.

نمادگذاری. اسکالرها با حروف معمولی، و بردارها با حروف سیاه نموده می‌شوند. اگر f یک میدان اسکالر باشد که در نقطه $x = (x_1, \dots, x_n)$ در \mathbb{R}^n تعریف شده است،

نمادهای $f(x)$ و $f(x_1, \dots, x_n)$ هر دو برای نمودن مقدار f در آن نقطه خاص به کار خواهند رفت. اگر f یک میدان برداری باشد، برای مقدار تابع در x می نویسیم $f(x)$ یا $f(x_1, \dots, x_n)$ از حاصل ضرب داخلی

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

و نرم نظیرش $\|x\| = (x \cdot x)^{1/2}$ ، که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ ، استفاده خواهیم کرد. نقاط در \mathbb{R}^2 را معمولاً با (x, y) به جای (x_1, x_2) ، و نقاط در \mathbb{R}^3 را معمولاً با (x, y, z) به جای (x_1, x_2, x_3) نشان می دهیم.

میدانهای اسکالر و برداری تعریف شده بر زیر مجموعه های \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 مکرر در کاربردهای ریاضیات در علوم و مهندسی ظاهر می شوند. مثلاً، اگر به هر نقطه x از هوار عدد حقیقی $f(x)$ را، که نمایش دما در x است، نسبت دهیم، تابع f که به این ترتیب تعریف می شود یک میدان اسکالر است. اگر به این نقطه یک بردار، که مبین سرعت باد است، نسبت داده شود، نمونه ای از یک میدان برداری خواهیم داشت.

در مسائل فیزیکی مربوط به میدانهای اسکالر یا برداری، مهم آن است که بدانیم میدان با رفتن از یک نقطه به نقطه دیگر چگونه تغییر می کند. در حالت یک بعدی، مشتق یک ابزار ریاضی است که در مطالعه این تغییرات به کار می رود. نظریه مشتق در حالت یک بعدی به توابعی می پردازد که بر بازه های باز تعریف شده اند. برای تعمیم این نظریه به \mathbb{R}^n ، تعمیم بازه های باز به مجموعه های باز را در نظر می گیریم.

۲۰۸ گویهای باز و مجموعه های باز

فرض کنیم a نقطه ای در \mathbb{R}^n ، و r عددی مثبت باشد. مجموعه x هایی در \mathbb{R}^n که

$$\|x - a\| < r$$

یک گوی باز به شعاع r و مرکز a است. این مجموعه را با $B(a)$ یا $B(a; r)$ نشان می دهیم. گوی $B(a; r)$ از تمام نقاطی تشکیل شده است که فاصله شان تا a از r کمتر است. در \mathbb{R}^1 ، این چیزی جز یک بازه باز به مرکز a نیست. در \mathbb{R}^2 یک قرص مستدیر، و در \mathbb{R}^3 یک کره توپر به مرکز a و شعاع r می باشد.

تعریف نقطه درونی. فرض کنیم S زیر مجموعه \mathbb{R}^n بوده، و $a \in S$. در این صورت،

a یک نقطه درونی S نامیده می شود اگر n - گوی بازی به مرکز a وجود داشته باشد که تمام نقاط متعلق به S باشند .

به عبارت دیگر، هر نقطه درونی a از S را می توان با یک n - گوی مانند $B(a)$ چنان محصور کرد که $B(a) \subseteq S$. مجموعه تمام نقاط درونی S درون S نام دارد و با $\text{int } S$ نموده می شود . یک مجموعه باز شامل نقطه a را گاهی یک همسایگی a می نامند .

تعریف مجموعه باز . مجموعه S در \mathbb{R}^n باز نامیده می شود اگر تمام نقاط درونی باشند . به عبارت دیگر، S باز است اگر و فقط اگر $S = \text{int } S$.

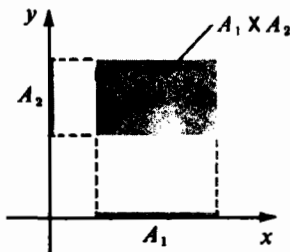
چند مثال . در \mathbb{R}^1 ساده ترین نوع مجموعه باز بازه باز است . اجتماع دو یا چند بازه باز نیز باز است . بازه بسته $[a, b]$ باز نیست ، زیرا هیچ نقطه انتهایی را نمی توان در یک 1 - گوی که جزء این بازه باشد جای داد .

2 - گوی $S = B(O; 1)$ در شکل ۱۰۸ نمونه ای است از یک مجموعه باز در \mathbb{R}^2 . هر نقطه a از S مرکز قرصی است که کاملاً در S قرار دارد . در بعضی نقاط، شعاع این قرص خیلی کوچک است .

بعضی از مجموعه های باز در \mathbb{R}^2 را می توان با ضرب دکارتی مجموعه های باز در \mathbb{R}^1 ساخت . اگر A_1 و A_2 زیر مجموعه هایی از \mathbb{R}^1 باشند ، حاصل ضرب دکارتی آنها $A_1 \times A_2$ مجموعه ای است در \mathbb{R}^2 که به صورت زیر تعریف می شود :

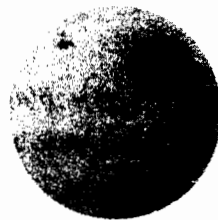
$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \text{ و } a_2 \in A_2\}.$$

مثالی در شکل ۲۰۸ نموده شده است . مجموعه های A_1 و A_2 باز هاند ، و $A_1 \times A_2$ مستطیل



شکل ۲۰۸ حاصل ضرب دکارتی

دو بازه باز یک مستطیل باز است .



قرص ، مستدیر

شکل ۱۰۸ قرص $B(O; 1)$

یک مجموعه باز در \mathbb{R}^2 است .

می باشد.

هرگاه A_1 و A_2 زیرمجموعه‌های بازی از \mathbf{R}^1 باشند، $A_1 \times A_2$ یک زیر مجموعه^۲ باز \mathbf{R}^2 است. برای اثبات این مطلب، نقطه^۳ دلخواهی مانند $a = (a_1, a_2)$ را در $A_1 \times A_2$ اختیار می‌کنیم. باید نشان دهیم که a یک نقطه^۴ درونی $A_1 \times A_2$ است. چون A_1 و A_2 در \mathbf{R}^1 بازند، یک ϵ_1 - گوی مانند $B(a_1; r_1)$ در A_1 ، و یک ϵ_2 - گوی مانند $B(a_2; r_2)$ در A_2 وجود دارد. فرض کنیم $r = \min\{r_1, r_2\}$. به آسانی می‌توان نشان داد که 2 گوی $B(a; r) \subseteq A_1 \times A_2$ در واقع، اگر $x = (x_1, x_2)$ نقطه‌ای از $B(a; r)$ باشد، $\|x - a\| < r$ ؛ در نتیجه، $|x_1 - a_1| < r_1$ و $|x_2 - a_2| < r_2$. از اینرو، $x_1 \in B(a_1; r_1)$ و $x_2 \in B(a_2; r_2)$. بنابراین، $x_1 \in A_1$ و $x_2 \in A_2$ ؛ در نتیجه، $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$. این ثابت می‌کند که هر نقطه^۵ $B(a; r)$ در $A_1 \times A_2$ است. بنابراین، هر نقطه^۶ $A_1 \times A_2$ یک نقطه^۷ درونی است؛ در نتیجه، $A_1 \times A_2$ باز می‌باشد.

لازم است توجه کنیم که یک زیر مجموعه^۸ باز \mathbf{R}^1 ، وقتی زیر مجموعه‌ای از \mathbf{R}^2 گرفته شود، دیگر مجموعه^۹ باز نیست، چرا که یک زیر مجموعه^{۱۰} \mathbf{R}^1 نمی‌تواند شامل یک 2 - گوی باشد.

تعریفهای برون و کرانه. گوییم نقطه^{۱۱} x برون مجموعه^{۱۲} S در \mathbf{R}^n است اگر n - گویی مانند $B(x)$ وجود داشته باشد که شامل هیچ نقطه^{۱۳} از S نباشد. مجموعه^{۱۴} تمام نقاط در \mathbf{R}^n که برون S اند را برون S می‌نامیم و با $\text{ext } S$ نشان می‌دهیم. یک نقطه^{۱۵} که نه برون S و نه نقطه^{۱۶} درونی S باشد یک نقطه^{۱۷} گرانهای S نامیده می‌شود. مجموعه^{۱۸} تمام نقاط گرانهای S گرانه^{۱۹} S نام دارد و با ∂S نموده می‌شود.

این مفاهیم در شکل ۱.۸ نموده شده‌اند. برون S مجموعه^{۲۰} تمام x هایی است که $\|x\| > 1$. کرانه^{۲۱} S از تمام x هایی تشکیل شده است که $\|x\| = 1$.

۳.۸ تمرین

۱. فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد که بر مجموعه‌ای چون S تعریف شده است، و c عدد حقیقی معلومی باشد. مجموعه^{۲۲} تمام x هایی در S که $f(x) = c$ یک مجموعه^{۲۳}

تراز f نام دارد. (بعدا "در این فصل، مسائل هندسی و فیزیکی مربوط به مجموعه‌های تراز مورد بحث قرار خواهند گرفت.) در هر میدان اسکالر زیر، S تمام فضای \mathbb{R} است. شکلی بکشید که مجموعه‌های تراز نظیر به مقادیر داده شده از c را توصیف کند.

(ت) $f(x, y) = x^2 + y^2, c = 0, 1, 4, 9$

(ب) $f(x, y) = e^{xy}, c = e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2, e^3$

(پ) $f(x, y) = \cos(x + y), c = -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1$

(ث) $f(x, y, z) = x + y + z, c = -1, 0, 1$

(ج) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, c = 0, 6, 12$

(د) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2), c = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1$

۲. در هر حالت زیر، فرض کنید S مجموعه تمام نقاط (x, y) در صفحه باشد که در نامساویهای داده شده صدق می‌کنند. مجموعه S را رسم کنید و، با استدلالی هندسی، باز بودن یا نبودن S را توضیح دهید. در رسم خود کرانه S را نشان دهید.

(ت) $x^2 + y^2 < 1$

(ب) $3x^2 + 2y^2 < 6$

(پ) $|x| < 1$ و $|y| < 1$

(ث) $x \geq 0$ و $y > 0$

(ج) $|x| \leq 1$ و $|y| \leq 1$

(د) $x > 0$ و $y < 0$

(ه) $xy < 1$

(و) $1 \leq x \leq 2$ و $3 < y < 4$

(ز) $1 < x < 2$ و $y > 0$

(ح) $x \geq y$

(ط) $x > y$

(ی) $|x| < 2$ و $y > x^2$

(ک) $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$

(ل) $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$

۳. در هر حالت زیر، S را مجموعه تمام نقاط (x, y, z) در فضای 3 بگیرد که در نامعادلات داده شده صدق می‌کنند، و باز بودن یا نبودن S را مشخص کنید.

(ت) $z^2 - x^2 - y^2 - 1 > 0$

(ب) $|z| < 1, |y| < 1, |x| < 1$

(پ) $x + y + z < 1$

(ث) $|z| < 1, |y| < 1, |x| \leq 1$

(ج) $x > 0, y > 0, z > 0$ و $x + y + z < 1$

(د) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 16y + 40z + 113 < 0$

۴. (آ) هرگاه A مجموعه بازی در فضای n بوده و $x \in A$ ، نشان دهید که مجموعه $A - \{x\}$ ، که با حذف x از A به دست می آید، باز است.

(ب) هرگاه A بازه بازی بر خط حقیقی بوده و B زیر بازه بسته ای از A باشد، نشان دهید که $A - B$ باز می باشد.*

(پ) هرگاه A و B بازه های بازی بر خط حقیقی باشند، نشان دهید که $A \cup B$ و $A \cap B$ باز می باشند.

(ت) هرگاه A بازه بازی بر خط حقیقی باشد، نشان دهید که متمم آن (نسبت به تمام خط حقیقی) باز است.

۵. خواص زیر از مجموعه های باز در \mathbb{R}^n را ثابت کنید:

(آ) مجموعه تهی \emptyset باز است؛

(ب) \mathbb{R}^n باز است؛

(پ) اجتماع هر گرد آیه از مجموعه های باز باز است.

(ت) اشتراک هر گرد آیه متناهی از مجموعه های باز باز است.

(ث) با یک مثال نشان دهید که اشتراک هر گرد آیه نامتناهی از مجموعه های باز لزوماً "باز نیست".

مجموعه های بسته. مجموعه S در \mathbb{R}^n را بسته خوانند اگر متمم آن $\mathbb{R}^n - S$ باز باشد. در سه تمرین بعدی خواص مجموعه های بسته بحث می شوند.

۶. در هر حالت زیر، فرض کنید S مجموعه تمام نقاط (x, y) در \mathbb{R}^2 باشد که در شرایط داده شده صدق می کنند. S را رسم کنید و، با استدلالی هندسی، باز، بسته، هم باز و هم بسته، یا نه باز نه بسته بودن S را توضیح دهید.

$$(آ) \quad x^2 + y^2 \geq 0 \quad (ب) \quad x^2 + y^2 < 0$$

$$(پ) \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad (ت) \quad 1 < x^2 + y^2 < 2$$

$$(ث) \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \quad (ج) \quad 1 < x^2 + y^2 \leq 2$$

$$(چ) \quad 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4 \quad (ح) \quad 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y < 4$$

$$(خ) \quad y = x^2 \quad (د) \quad y \geq x^2$$

* هرگاه A و B مجموعه باشند، تفاضل $A - B$ (به نام متمم B نسبت به A) مجموعه تمام عنصرهایی از A است که در B نیستند.

(ذ) $x^2 \geq y$ و $|x| < 2$. (ر) $x^2 \geq y$ و $|x| \leq 2$.

۷. (آ) هرگاه A یک مجموعه بسته در فضای n بوده و x نقطه‌ای در A نباشد، ثابت کنید $\{x\} \cup A$ نیز بسته می‌باشد.

(ب) ثابت کنید بازه بسته $[a, b]$ بر خط حقیقی یک مجموعه بسته است.

(پ) هرگاه A و B بازه‌های بسته‌ای بر خط حقیقی باشند، نشان دهید که $A \cup B$ و $A \cap B$ نیز بسته می‌باشند.

۸. خواص زیر از مجموعه‌های بسته در \mathbb{R}^n را ثابت کنید. می‌توانید از تمرین ۵ استفاده کنید:

(آ) مجموعه تهی \emptyset بسته است؛

(ب) \mathbb{R}^n بسته است؛

(پ) اشتراک هر گردآیه از مجموعه‌های بسته بسته است؛

(ت) اجتماع تعدادی متناهی مجموعه بسته بسته است؛

(ث) بایک مثال نشان دهید که اجتماع هر گردآیه نامتناهی از مجموعه‌های بسته لزوماً بسته نیست.

۹. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R}^n باشد.

(آ) ثابت کنید که $\text{int } S$ و $\text{ext } S$ هر دو مجموعه‌هایی باز هستند.

(ب) ثابت کنید که $\mathbb{R}^n = (\text{int } S) \cup (\text{ext } S) \cup \partial S$ ، یعنی اجتماعی از مجموعه‌های از هم جداست، و، با استفاده از این، نتیجه بگیرید که ∂S همواره یک مجموعه بسته است.

۱۰. S یک مجموعه در \mathbb{R}^n و x نقطه‌ای است با این خاصیت که هرگویی $B(x)$ شامل هم نقاط درونی و هم نقاط برونی S است. ثابت کنید x یک نقطه کرانه‌ای S است. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟ یعنی، آیا هر نقطه کرانه‌ای S لزوماً این خاصیت را دارد؟

۱۱. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R}^n باشد. ثابت کنید که $\text{ext } S = \text{int}(\mathbb{R}^n - S)$.

۱۲. ثابت کنید مجموعه S در \mathbb{R}^n بسته است اگر و فقط اگر $S = (\text{int } S) \cup \partial S$.

۴۰۸ حدود و پیوستگی

مفاهیم حد و پیوستگی را می‌توان به آسانی به میدانهای اسکالر و برداری تعمیم داد.

تعریفها را برای میدانهای برداری تنظیم می‌کنیم؛ این تعاریف در مورد میدانهای اسکالر نیز به‌کار می‌روند.

یک تابع مانند $f: S \rightarrow \mathbf{R}^m$ را در نظر می‌گیریم، که در آن S زیر مجموعه‌ای از \mathbf{R}^n است. هرگاه $a \in \mathbf{R}^n$ و $b \in \mathbf{R}^m$ ، می‌نویسیم

$$(1.0.8) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (f(x) \rightarrow b, x \rightarrow a \text{ وقتی } x \rightarrow a \text{ و } f(x) \rightarrow b)$$

به این معنی که

$$(2.0.8) \quad \lim_{\|x-a\| \rightarrow 0} \|f(x) - b\| = 0.$$

علامت حد در معادله (۲.۰.۸) حد معمولی در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی است. در این تعریف لزومی به اینکه f در خود نقطه a تعریف شده باشد نیست. هرگاه بنویسیم $h = x - a$ ، معادله (۲.۰.۸) خواهد شد

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|f(a+h) - b\| = 0.$$

برای نقاط در \mathbf{R}^2 ، به جای x می‌نویسیم (x, y) و به جای a می‌نویسیم (a, b) و رابطه حدی (۱.۰.۸) را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = b.$$

برای نقاط در \mathbf{R}^3 ، قرار می‌دهیم $x = (x, y, z)$ و $a = (a, b, c)$ و می‌نویسیم

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x, y, z) = b.$$

تابع f را در a پیوسته گوئیم هرگاه f در a تعریف شده باشد و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

گوئیم f بر مجموعه S پیوسته است اگر f در هر نقطه از S پیوسته باشد. چون اینها تعمیمهای سرراست تعاریف در حالت یک بعدی اند، اینکه بسیاری از خواص آشنای حدود و پیوستگی را نیز می‌توان تعمیم داد تعجبی ندارد. مثلاً، قضایای معمولی حدود و پیوستگی مجموعها، حاصل ضربها، و خارج قسمتها برای میدانهای اسکالر نیز برقرارند. در مورد میدانهای برداری، خارج قسمتها تعریف نشده‌اند، اما قضایای

زیرا در مورد مجموعها، ضرب در اسکالرها، حاصل ضربهای داخلی، و نرمها خواهیم داشت.

قضیه ۱۰۸. هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ، آنگاه نیز داریم

$$: \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = b + c \quad (\text{ت})$$

$$: \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda b, \quad \lambda \text{ هر اسکلر} \quad (\text{ب})$$

$$: \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c \quad (\text{پ})$$

$$: \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|b\| \quad (\text{ت})$$

برهان. فقط قسمتهای (پ) و (ت) را ثابت می‌کنیم؛ اثبات (ت) و (ب) به‌عنوان تمرین به خواننده محول می‌شود.

برای اثبات (پ)، می‌نویسیم

$$f(x) \cdot g(x) - b \cdot c = [f(x) - b] \cdot [g(x) - c] + b \cdot [g(x) - c] + c \cdot [f(x) - b].$$

حال، با استفاده از نامساوی مثلثی و نامساوی کشی - شوارتز، داریم

$$0 \leq \|f(x) \cdot g(x) - b \cdot c\| \leq \|f(x) - b\| \|g(x) - c\| + \|b\| \|g(x) - c\| + \|c\| \|f(x) - b\|.$$

چون وقتی $x \rightarrow a$ ، $\|f(x) - b\| \rightarrow 0$ و $\|g(x) - c\| \rightarrow 0$ ، این نشان می‌دهد که، وقتی

$x \rightarrow a$ ، $\|f(x) \cdot g(x) - b \cdot c\| \rightarrow 0$ ، که (پ) را ثابت خواهد کرد.

با اختیار $f(x) = g(x)$ در قسمت (پ)، معلوم می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\|^2 = \|b\|^2,$$

که از آن (ت) را خواهیم داشت.

مثال ۱. پیوستگی و مولفه‌های یک میدان برداری. هرگاه میدان برداری f مقادیرش در \mathbb{R}^m باشند، هر مقدار تابعی $f(x)$ دارای m مولفه بوده و می‌توان نوشت

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

m میدان اسکالر f_1, \dots, f_m مولفه‌های میدان برداری f نامیده می‌شوند. ثابت می‌کنیم f در یک نقطه پیوسته است اگر و فقط اگر هر مولفه f_k در آن نقطه پیوسته باشد. فرض کنیم e_k برداریکه k ام مختصات باشد (همه مولفه‌های e_k صفرند جز مولفه k ام، که مساوی یک است). در این صورت، $f_k(x)$ از حاصل ضرب نقطه‌ای زیر به دست می‌آید:

$$f_k(x) = f(x) \cdot e_k.$$

بنابراین، قسمت (پ) قضیه ۱۰۸ نشان می‌دهد که هر نقطه پیوستگی f یک نقطه پیوستگی f_k نیز هست. بعلاوه، چون داریم

$$f(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x) e_k,$$

چند بار استفاده از قسمت‌های (آ) و (ب) قضیه ۱۰۸ نشان می‌دهد که یک نقطه پیوستگی تمام m مولفه f_1, \dots, f_m یک نقطه پیوستگی f نیز هست.

مثال ۲. پیوستگی تابع همانی. تابع همانی، یعنی $f(x) = x$ ، همه جا در \mathbb{R}^n پیوسته است. بنابراین، مولفه‌هایش نیز همه جا در \mathbb{R}^n پیوسته می‌باشند. اینها n میدان اسکالر هستند که با روابط زیر مشخص می‌شوند:

$$f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2, \dots, f_n(x) = x_n.$$

مثال ۳. پیوستگی تبدیلات خطی. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی باشد. ثابت می‌کنیم f در هر نقطه a در \mathbb{R}^n پیوسته است. بنا بر خاصیت خطی، داریم

$$f(a+h) = f(a) + f(h).$$

لذا، کافی است ثابت کنیم که، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $f(h) \rightarrow 0$. با نوشتن h برحسب مولفه‌هایش، داریم $h = h_1 e_1 + \dots + h_n e_n$. با استفاده مجدد از خاصیت خطی، معلوم می‌شود که $f(h) = h_1 f(e_1) + \dots + h_n f(e_n)$. این نشان می‌دهد که، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $f(h) \rightarrow 0$.

مثال ۴. پیوستگی چند جمله‌ایهای n متغیره. میدان اسکالر P تعریف شده بر \mathbb{R}^n که با فرمولی به شکل

$$P(x) = \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{p_n} c_{k_1 \cdots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

تعریف شده است یک چند جمله‌ای از n متغیر x_1, \dots, x_n نامیده می‌شود. یک چند جمله‌ای همه‌جا در \mathbf{R}^n پیوسته است، زیرا یک مجموع متناهی از حاصل ضربهایی از میدانهای اسکالر است که همه‌جا در \mathbf{R}^n پیوسته‌اند. مثلاً، یک چند جمله‌ای از دو متغیر x و y ، که با

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q c_{ij} x^i y^j$$

داده شده، در هر نقطه (x, y) در \mathbf{R}^2 پیوسته است.

مثال ۵. پیوستگی توابع گویا. میدان اسکالر f که با $f(x) = P(x)/Q(x)$ داده شده، که در آن P و Q چند جمله‌ایهایی از مولفه‌های x اند، یک تابع گویا نام دارد. یک تابع گویا در هر نقطه که $Q(x) \neq 0$ پیوسته می‌باشد.

به کمک قضیه بعدی که در باب پیوستگی توابع مرکب است، می‌توان مثالهای دیگری از توابع پیوسته ساخت.

قضیه ۲۰۸. فرض کنیم f و g چنان توابعی باشند که تابع مرکب $f \circ g$ در a تعریف شده باشد، که

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

هرگاه g در a و f در $g(a)$ پیوسته باشد، ترکیب $f \circ g$ در a پیوسته می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $y = f(x)$ و $b = g(a)$. در این صورت، داریم

$$f[g(x)] - f[g(a)] = f(y) - f(b).$$

طبق فرض، وقتی $x \rightarrow a$ ، $y \rightarrow b$ ؛ در نتیجه، داریم

$$\lim_{\|x-a\| \rightarrow 0} \|f[g(x)] - f[g(a)]\| = \lim_{\|y-b\| \rightarrow 0} \|f(y) - f(b)\| = 0.$$

بنابراین، $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f[g(a)]$ ؛ در نتیجه، $f \circ g$ در a پیوسته خواهد بود.

مثال ۶. قضیه فوق پیوستگی میدانهای اسکالری چون h را ایجاب می کند، که $h(x, y)$ با فرمولهایی نظیر

$$\sin(x^2y), \quad \log(x^2 + y^2), \quad \frac{e^{x+y}}{x+y}, \quad \log[\cos(x^2 + y^2)]$$

بیان شده باشد. این مثالها در همه نقاطی که توابع در آنها تعریف شده اند پیوسته اند. اولی در تمام نقاط صفحه، و دومی در تمام نقاط غیر از مبدأ پیوسته است. سومی در تمام نقاط (x, y) که در آنها $x + y \neq 0$ پیوسته است، و چهارمی در تمام نقاطی که در آنها $x^2 + y^2 \neq \pi/2$ مضرب فردی از $\pi/2$ نباشد پیوسته است.

[مجموعه (x, y) هایی که $x^2 + y^2 = n\pi/2$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) خانواده ای است از دوائر به مرکز مبدأ.] این مثالها نشان می دهند که ناپیوستگیهای یک تابع دو متغیره ممکن است از نقاطی تنها، تمام نقاط یک منحنی، یا خانواده ای از منحنیها متشکل باشند.

مثال ۷. یک تابع دو متغیره ممکن است نسبت به هر متغیر جداگانه پیوسته بوده و به عنوان یک تابع دو متغیره با هم ناپیوسته باشد. این وضع با مثال زیر توضیح می شود:

$$f(0, 0) = 0; \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

برای نقاط روی محور x ، داریم $y = 0$ و $f(x, y) = f(x, 0) = 0$ ؛ در نتیجه، تابع همجا بر محور x دارای مقدار ثابت 0 است. لذا، اگر قرار دهیم $y = 0$ و f را فقط تابعی از x بگیریم، در $x = 0$ پیوسته می باشد. به همین نحو، f در تمام نقاط محور y مقدار ثابت 0 را دارد؛ در نتیجه، اگر قرار دهیم $x = 0$ و f را فقط تابعی از y بگیریم، f در $y = 0$ پیوسته خواهد بود. با اینحال، به عنوان یک تابع دو متغیره، f در مبدأ پیوسته نیست. در واقع، در هر نقطه از خط $y = x$ (جز مبدأ)، تابع دارای مقدار ثابت $\frac{1}{2}$ است، زیرا $f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. چون نقاطی بر این خط وجود دارند بدلخواه نزدیک مبدأ و $\frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ ، تابع در $(0, 0)$ پیوسته نخواهد بود.

۵.۸ تمرین

تمرینهای این بخش مربوطند به حدود و پیوستگی میدانهای اسکالر که بر زیرمجموعههایی از صفحه تعریف شده اند.

۱. در هر یک از مثالهای زیر، میدان اسکالر f به ازای هر نقطه (x, y) در صفحه با معادله‌ای که سمت راستش معنی دارد تعریف شده است. در هر مثال، مجموعه نقاط (x, y) را که f در آنها پیوسته است معین نمایید.

• $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ (ب) • $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ (ت)

• $f(x, y) = \tan \frac{x^2}{y}$ (ث) • $f(x, y) = \frac{1}{y} \cos x^2$ (پ)

• $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (ج) • $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ (ث)

• $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (ح) • $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ (چ)

• $f(x, y) = \arccos \sqrt{x/y}$ (د) • $f(x, y) = x^{(y^2)}$ (خ)

۲. هرگاه $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ و حدود یک بعدی

$$\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

هر دو وجود داشته باشند، ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow a} [\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)] = \lim_{y \rightarrow b} [\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)] = L.$$

دو حد این معادله حدود مکرر نامیده می‌شوند. این تمرین نشان می‌دهد که وجود حدود بعدی و دو حد یک بعدی وجود و تساوی دو حد مکرر را ایجاب می‌کند. (عکس

این مطلب همیشه درست نیست. مثال نقض در تمرین ۴ ذکر شده است.)

۳. فرض کنید اگر $x + y \neq 0$ ، $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$ ، نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)] = -1 \quad \text{ولی} \quad \lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)] = 1$$

با استفاده از این و تمرین ۲، نتیجه بگیرید که $f(x, y)$ ، وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، به‌حدی میل نمی‌کند.

۴. فرض کنید

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}, \quad x^2y^2 + (x - y)^2 \neq 0$$

هروقت

نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)] = \lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)] = 0$$

ولی $f(x, y)$ ، وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، به حدی میل نخواهد کرد .

[راهنمایی . f را روی خط $y = x$ بررسی کنید .] این مثال نشان می دهد که عکس تمرین ۲ همیشه درست نیست .

۵ . فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، $f(x, y) \rightarrow 0$ ، ولی

$$\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)] \neq \lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)] .$$

توضیح دهید چرا این با تمرین ۲ متناقض نیست .

۶ . فرض کنید اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ ، حد $f(x, y)$ ، وقتی در امتداد خط $y = mx$ ، $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، را پیدا کنید . آیا می توان $f(0, 0)$ را طوری تعریف کرد که f در $(0, 0)$ پیوسته باشد ؟

۷ . فرض کنید $f(x, y) = 0$ اگر $y \leq 0$ یا $y \geq x^2$ ، و $f(x, y) = 1$ اگر $0 < y < x^2$. نشان دهید که وقتی در امتداد هر خط مستقیم ماربر مبداء $(0, 0)$ ، $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، خواهیم داشت $f(x, y) \rightarrow 0$. منحنی بیابید ماربر مبداء که در امتداد آن (جز در مبداء) $f(x, y)$ مقدار ثابت ۱ داشته باشد . آیا f در مبداء پیوسته است ؟

۸ . هرگاه وقتی $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = [\sin(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$ ، $f(0, 0)$ چطور باید تعریف شود که f در مبداء پیوسته باشد ؟

۹ . فرض کنید f یک میدان اسکالر باشد که در نقطه درونی a مجموعه S در \mathbb{R}^n پیوسته است . هرگاه $f(a) \neq 0$ ، ثابت کنید n - گوی بازی چون $B(a)$ وجود دارد که در آن f با $f(a)$ همعلامت است .

۶.۸ مشتق یک میدان اسکالر نسبت به یک بردار

در این بخش به معرفی مشتق میدانهای اسکالری پردازیم . مشتق میدانهای برداری در بخشی

۱۸۰۸ مطرح خواهد شد .

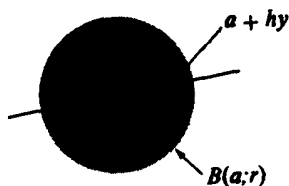
فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد که بر مجموعه S در \mathbf{R}^n تعریف شده است ،
 و a یک نقطه درونی S باشد . می‌خواهیم ببینیم که با رفتن از a به نقطه مجاور میدان
 چگونه تغییر می‌کند . مثلاً " ، فرض کنیم $f(a)$ دمای یک اطاق بخاری دار با یک پنجره باز
 در نقطه a باشد . اگر به سمت پنجره برویم ، دما کم می‌شود ، اما اگر به طرف بخاری برویم ،
 دما زیاد خواهد شد . در حالت کلی ، نحوه تغییر یک میدان به جهت دور شدن از a
 بستگی دارد .

فرض کنیم این جهت با بردار دیگر y مشخص شده باشد . یعنی ، فرض کنیم از a
 به نقطه دیگر $a + y$ در امتداد پاره خط واصل بین a و $a + y$ رفته باشیم . هر نقطه
 بر این پاره خط به شکل $a + hy$ است ، که در آن h یک عدد حقیقی است . مثالی در شکل
 ۳۰۸ نموده شده است . فاصله a تا $a + hy$ مساوی است با $\|hy\| = |h| \|y\|$.

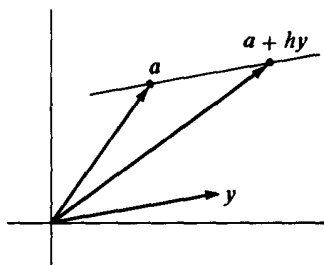
چون a یک نقطه درونی S است ، یک n -گویی مانند $B(a; r)$ وجود دارد که کاملاً
 در S واقع است . اگر h را طوری بگیریم که $\|hy\| < r$ ، پاره خط از a تا $a + hy$ در
 S قرار خواهد گرفت . (ر. ک. شکل ۴۰۸) . h را مخالف 0 نگهداشته ولی آنقدر کوچک
 که $a + hy \in S$ ، و خارج قسمت تفاضلی

$$(۳۰۸) \quad \frac{f(a + hy) - f(a)}{h}$$

را تشکیل می‌دهیم . صورت این کسر به ما می‌گوید که ، با رفتن از a تا $a + hy$ ، تابع
 چقدر تغییر می‌کند . خود کسر را میزان متوسط تغییر f روی پاره خط واصل بین a و



شکل ۴۰۸ نقطه $a + hy$ در n -گویی
 $B(a; r)$ قرار دارد اگر $\|hy\| < r$.



شکل ۳۰۸ نقطه $a + hy$ بر خط ماربر
 a موازی y قرار دارد .

$a + hy$ می‌نامیم. ما به رفتار این کسر، وقتی $h \rightarrow 0$ ، علاقه‌مندیم. این امر به تعریف زیر منجر می‌گردد.

تعریف مشتق یک میدان اسکالر نسبت به یک بردار. $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ یک میدان اسکالر است، که در آن $S \subseteq \mathbb{R}^n$. فرض کنیم a یک نقطهٔ درونی S بوده و y نقطهٔ دلخواهی در \mathbb{R}^n باشد. مشتق f در a نسبت به y با علامت $f'(a; y)$ نموده شده و با معادلهٔ

$$(۴.۸) \quad f'(a; y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hy) - f(a)}{h},$$

در صورت وجود حد سمت راست، تعریف می‌شود.

مثال ۱. هرگاه $y = 0$ ، خارج قسمت تفاضلی (۳.۸) به‌ازای هر $h \neq 0$ مساوی ۰ است؛ در نتیجه، $f'(a; 0)$ همواره وجود داشته و مساوی ۰ می‌باشد.

مثال ۲. مشتق یک تبدیل خطی. هرگاه $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ خطی باشد، آنگاه $f(a + hy) = f(a) + hf(y)$ و خارج قسمت تفاضلی (۳.۸) مساوی $f(y)$ به‌ازای هر $h \neq 0$ است. در این حالت، $f'(a; y)$ همواره وجود داشته و از رابطهٔ

$$f'(a; y) = f(y)$$

به‌ازای هر a در S و هر y در \mathbb{R}^n به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر، مشتق یک تبدیل خطی نسبت به y مساوی مقدار تابع در y است.

برای مطالعهٔ رفتار f بر خط ماربر a و $a + y$ به‌ازای $y \neq 0$ ، تابع

$$g(t) = f(a + ty)$$

را معرفی می‌کنیم. قضیهٔ زیر مشتقهای $g'(t)$ و $f'(a + ty; y)$ را بهم مربوط می‌سازد.

قضیهٔ ۳.۸. فرض کنیم $g(t) = f(a + ty)$. هرگاه $g'(t)$ یا $f'(a + ty; y)$ وجود داشته باشد، دیگری نیز وجود دارد و با هم مساوی‌اند،

$$(۵.۸) \quad g'(t) = f'(a + ty; y).$$

بخصوص، وقتی $t = 0$ ، خواهیم داشت $g'(0) = f'(a; y)$.

برهان. با تشکیل خارج قسمت تفاضلی برای g ، داریم

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{f(a+ty+hy) - f(a+ty)}{h}.$$

با فرض $h \rightarrow 0$ ، (۵.۸) را خواهیم داشت.

مثال ۳. $f'(a; y)$ را در صورتی که به ازای هر x در \mathbb{R}^n ، $f(x) = \|x\|^2$ محاسبه کنید.

حل. قرار می‌دهیم

$$g(t) = f(a+ty) = (a+ty) \cdot (a+ty) = a \cdot a + 2ta \cdot y + t^2 y \cdot y.$$

بنابراین، $g'(t) = 2a \cdot y + 2ty \cdot y$ ؛ و لذا، $g'(0) = f'(a; y) = 2a \cdot y$.

یک نتیجه ساده قضیه ۳.۸ مقدار میانگین برای میدانهای اسکالر است.

قضیه ۴.۸. قضیه مقدار میانگین برای مشتقات میدانهای اسکالر. فرض کنیم

$f'(a+ty; y)$ به ازای هر t در بازه $0 \leq t \leq 1$ وجود داشته باشد. در این صورت،

به ازای θ حقیقی در بازه $0 < \theta < 1$ ، داریم

$$f(a+y) - f(a) = f'(z; y) \quad \text{که در آن } z = a + \theta y.$$

برهان. فرض کنیم $g(t) = f(a+ty)$. با اعمال قضیه مقدار میانگین یک بعدی در مورد

g بر بازه $[0, 1]$ ، داریم

$$g(1) - g(0) = g'(\theta) \quad \text{که در آن } 0 < \theta < 1.$$

چون $g(1) - g(0) = f(a+y) - f(a)$ و $g'(\theta) = f'(a+\theta y; y)$ ، این برهان را تمام

خواهد کرد.

۷.۸ مشتقات جهتی و مشتقات جزئی

در حالت خاص، وقتی y یک بردار یکه باشد، یعنی وقتی $\|y\| = 1$ ، فاصله بین a و

$a+hy$ مساوی $|h|$ است. در این حالت، خارج قسمت تفاضلی (۳.۸) نمایش میزان

متوسط تغییر f بر واحد فاصله در امتداد پاره خطی اصلی بین a و $a+hy$ است؛ $f'(a; y)$

یک مشتق جهتی نام دارد .

تعریف مشتقات جهتی و جزئی . اگر γ یک بردار یکه باشد ، $f'(a; \gamma)$ مشتق جهتی f در a در جهت γ نامیده می شود . بخصوص ، اگر $\gamma = e_k$ (بردار یکه k ام مختصات) ، مشتق جهتی $f'(a; e_k)$ مشتق جزئی نسبت به e_k نامیده و با $D_k f(a)$ نیز نموده می شود . بنابراین ،

$$D_k f(a) = f'(a; e_k).$$

نمادهای زیر نیز برای مشتق جزئی $D_k f(a)$ به کار می روند :

$$f'_{x_k}(a_1, \dots, a_n) \text{ ، } \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \dots, a_n) \text{ ، } D_k f(a_1, \dots, a_n)$$

گاهی f'_{x_k} بی پریم و به صورت f_{x_k} نوشته می شود یا ، حتی به صورت ساده تر f_x . در \mathbb{R}^2 ، بردارهای یکه مختصات با i و j نموده می شوند . اگر $a = (a, b)$ ،

مشتقات جزئی $f'(a; i)$ و $f'(a; j)$ نیز بترتیب به صورت

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

نوشته می شوند . در \mathbb{R}^3 ، اگر $a = (a, b, c)$ ، مشتقات جزئی $D_2 f(a)$ ، $D_1 f(a)$ و $D_3 f(a)$ نیز با

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \text{ ، } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) \text{ ، } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)$$

نموده خواهند شد .

۸.۸ مشتقات جزئی مراتب بالاتر

مشتقگیری جزئی از میدان اسکالر f میدانهای اسکالر جدید $D_1 f, \dots, D_n f$ را تولید می کند . مشتقات جزئی $D_1 f, \dots, D_n f$ را مشتقات جزئی مرتبه دوم f می نامند . در مورد توابع دو متغیره ، چهار مشتق جزئی مرتبه دوم وجود دارند ، که به صورت زیر نوشته می شوند :

$$D_1(D_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ ، } D_1(D_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ ، } D_2(D_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ ، } D_2(D_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} .$$

توجه کنید که $D_1(D_2f)$ یعنی مشتق جزئی D_2f نسبت به متغیر اول. گاهی از نماد $D_{i,j}f$ برای مشتق جزئی مرتبه دوم $D_i(D_jf)$ استفاده می‌کنیم. مثلاً " $D_{1,2}f = D_1(D_2f)$ " ، مرتبه مشتقها را این طور نشان می‌دهیم :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

این ممکن است با مشتق جزئی مخلوط دیگر ، یعنی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

مساوی باشد یا نباشد. در بخش ۲۳.۸ ثابت می‌کنیم که دو مشتق جزئی مخلوط $D_1(D_2f)$ و $D_2(D_1f)$ ، در صورتی که یکی از آنها در همسایگی یک نقطه پیوسته باشد ، در آن نقطه مساوی می‌باشند. بخش ۲۳.۸ نیز شامل مثالی است که در آن در یک نقطه $D_1(D_2f) \neq D_2(D_1f)$

۹.۸ تمرین

۱ . میدان اسکالر f بر \mathbb{R}^n با معادله $f(x) = a \cdot x$ تعریف شده است ، که در آن a یک بردار ثابت است . $f'(x; y)$ را به ازای x و y دلخواه حساب کنید .

۲ . (آ) تمرین ۱ را به ازای $f(x) = \|x\|^4$ حل کنید .

(ب) در (آ) فرض کنید $n = 2$ ، و تمام نقاط (x, y) را که به ازای آنها $f'(2i + 3j; xi + yj) = 6$ بیابید .

(پ) در (آ) فرض کنید $n = 3$ ، و تمام نقاط (x, y, z) را که به ازای آنها $f'(i + 2j + 3k; xi + yj + zk) = 0$ بیابید .

۳ . فرض کنید $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد . $f'(x; y)$ را برای میدان اسکالر تعریف شده بر \mathbb{R}^n با معادله $f(x) = x \cdot T(x)$ محاسبه کنید .

در تمرینهای ۴ تا ۹ ، جميع مشتقهای جزئی مرتبه اول میدان اسکالر داده شده را حساب کنید . میدانهای تمرینات ۸ و ۹ بر \mathbb{R}^n تعریف شده‌اند .

۴ . $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$. ۵ . $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

۶ . $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. ۷ . $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$, $x \neq y$.

۸. $f(x) = a \cdot x$ ، a ثابت است . ۹. $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ، $a_{ij} = a_{ji}$.

درترینهای ۱۰ تا ۱۷ ، جمیع مشتقات جزئی مرتبه اول را حساب کنید . درترینهای ۱۰ ، ۱۱ ، و ۱۲ تساوی مشتقات جزئی مخلوط $D_1(D_2 f)$ و $D_2(D_1 f)$ را تحقیق نمایید .

۱۰. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

۱۱. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ ، $(x, y) \neq (0, 0)$.

۱۲. $f(x, y) = \frac{1}{y} \cos x^2$ ، $y \neq 0$. ۱۳. $f(x, y) = \tan(x^2/y)$ ، $y \neq 0$.

۱۴. $f(x, y) = \arctan(y/x)$ ، $x \neq 0$. ۱۵. $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ ، $xy \neq 1$.

۱۶. $f(x, y) = x^{(y^2)}$ ، $x > 0$. ۱۷. $f(x, y) = \arccos\sqrt{xy}$ ، $y \neq 0$.

۱۸. فرض کنید $v(r, t) = t^n e^{-r^2/(4t)}$. برای ثابت n مقداری بیابید که v در معادله زیر صدق نماید:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) .$$

۱۹. فرض کنید $z = u(x, y)e^{ax+by}$ و $\partial^2 u / (\partial x \partial y) = 0$. برای ثابتهای a و b مقداری بیابید که

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0 .$$

۲۰. (آ) فرض کنید به ازای هر x در n - گوی $B(a)$ و هر بردار y ، $f'(x; y) = 0$.

با استفاده از قضیه مقدار میانگین ، ثابت کنید f بر $B(a)$ ثابت است .

(ب) فرض کنید به ازای بردار ثابت y و هر x در $B(a)$ ، $f'(x; y) = 0$. در این

حالت برای f چه می توان نتیجه گرفت ؟

۲۱. مجموعه S در \mathbb{R}^n محدب نامیده می شود اگر به ازای هر جفت نقطه a و b در

S ، پاره خط از a تا b نیز در S باشد . به عبارت دیگر ، به ازای هر t در بازه

$$0 \leq t \leq 1 \quad ta + (1-t)b \in S$$

(آ) ثابت کنید که هر n - گوی محدب است .

(ب) هرگاه به ازای هر x در مجموعه محدب S و به ازای هر y در \mathbb{R}^n ،

$$f'(x; y) = 0$$

ثابت کنید که f بر S ثابت می باشد .

۲۲. (آ) ثابت کنید میدان اسکالری چون f وجود ندارد که به ازای هر بردار ثابت a

$$f(a; y) > 0$$

و هر بردار ناصفر y ،

(ب) میدان اسکالر f را طوری مثال بزنید که به ازای یک بردار ثابت مانند y و هر

بردار x ، $f'(x; y) > 0$.

۱۰۰۸ مشتقات جهتی و پیوستگی

در نظریهء یک بعدی، وجود مشتق تابع f در یک نقطه پیوستگی اش را در آن نقطه ایجاب می‌کند. این را می‌توان با اختیار $h \neq 0$ و نوشتن

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h$$

ثابت کرد. وقتی $h \rightarrow 0$ ، طرف راست به حد $f'(a) \cdot 0 = 0$ میل می‌کند؛ در نتیجه، $f(a+h) \rightarrow f(a)$. این نشان می‌دهد که وجود $f'(a)$ پیوستگی f در a را ایجاب می‌کند. فرض کنید همین استدلال برای یک میدان اسکالر کلی بشود. همچنین، $f'(a; y)$ ، به ازای y وجود داشته باشد. در این صورت، اگر $h \neq 0$ ، می‌توان نوشت

$$f(a+hy) - f(a) = \frac{f(a+hy) - f(a)}{h} \cdot h$$

وقتی $h \rightarrow 0$ ، طرف راست به حد $f'(x; y) \cdot 0 = 0$ میل می‌کند؛ در نتیجه وجود

$f'(a; y)$ به ازای یک y معلوم ایجاب می‌کند که، به ازای همان y ،

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+hy) = f(a)$$

این یعنی، وقتی در امتداد خط ماربر a و با جهت y ، $x \rightarrow a$ ، داریم $f(x) \rightarrow f(a)$. هرگاه $f'(a; y)$ به ازای هر بردار y وجود داشته باشد، آنگاه، وقتی در امتداد هر خط ماربر a ، $x \rightarrow a$ ، خواهیم داشت $f(x) \rightarrow f(a)$. این ظاهراً "حکم می‌کند که f در a پیوسته است. با کمال تعجب، این نتیجه لزوماً درست نیست. در مثال زیر، یک میدان اسکالر توصیف شده که در هر جهت در O مشتق جهتی دارد ولی در O پیوسته نیست.

مثال. فرض کنیم میدان اسکالر f بر \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\cdot f(0, y) = 0 \quad ; \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad , \quad x \neq 0$$

فرض کنیم $a = (0, 0)$ و $y = (a, b)$ بردار دلخواهی باشد. اگر $a \neq 0$ و $h \neq 0$ ، داریم

$$\frac{f(a+hy) - f(a)}{h} = \frac{f(hy) - f(O)}{h} = \frac{f(ha, hb)}{h} = \frac{ab^2}{a^2 + h^2b^4} .$$

با فرض $h \rightarrow 0$ ، معلوم می‌شود که $f'(O; y) = b^2/a$ اگر $y = (0, b)$ ، به‌نحو مشابه معلوم می‌شود که $f'(O; y) = 0$ ، بنابراین، $f'(O; y)$ به‌ازای هر جهت y وجود دارد. همچنین، وقتی در امتداد هر خط مستقیم ماربر مبداء $x \rightarrow O$ ، خواهیم داشت $f(x) \rightarrow 0$. اما، در هر نقطه از سهمی $x = y^2$ (جز مبداء)، تابع f دارای مقدار $\frac{1}{2}$ است. چون از این نقاط که بدخواه نزدیک مبداء باشند زیادند و $f(O) = 0$ ، تابع f در O پیوسته نخواهد بود.

مثال فوق نشان می‌دهد که وجود همه مشتقات جهتی در یک نقطه پیوستگی در آن نقطه را ایجاب نمی‌کند. به این دلیل، مشتق جهتی تعمیم مقنعی از مفهوم یک بعدی مشتق نیست. تعمیم مناسبتری وجود دارد که پیوستگی را ایجاب می‌کند، در عین حال، به ما اجازه تعمیم قضایای اصلی نظریه یک بعدی مشتق را به ابعاد بالاتر می‌دهد. این تعمیم مشتق کل نامیده می‌شود.

۱۱.۸ مشتق کل

یادآور شویم که، در حالت یک بعدی، تابع f مشتق‌دار در a را می‌توان در مجاورت a با یک چند جمله‌ای تیلور خطی تقریب کرد. اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد، به‌ازای $h \neq 0$ قرار می‌دهیم

$$(۶.۸) \quad E(a, h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

و تعریف می‌کنیم $E(a, 0) = 0$. از (۶.۸) فرمول زیر به دست می‌آید:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + hE(a, h),$$

معادله‌ای که به‌ازای $h = 0$ نیز برقرار است. این فرمول تیلور مرتبه اول برای تقریب $f(a+h) - f(a)$ به وسیله $f'(a)h$ است. خطای مرتب شده $hE(a, h)$ می‌باشد. از (۶.۸) دیده می‌شود که، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $E(a, h) \rightarrow 0$ ، بنابراین، خطای $hE(a, h)$ از مرتبه کوچکتر از h به‌ازای h کوچک است.

خاصیت تقریب یک تابع مشتق‌پذیر به وسیله یک تابع خطی راهی برای تعمیم مفهوم مشتق‌پذیری به ابعاد بالاتر می‌گشاید.

فرض کنیم $f: S \rightarrow \mathbb{R}$: f یک میدان اسکالر باشد که بر مجموعه S در \mathbb{R}^n تعریف شده است. همچنین، a یک نقطه درونی S بوده، و $B(a; r)$ یک n -گوی واقع در S باشد. فرض کنیم v یک بردار با $\|v\| < r$ باشد بطوری که $a + v \in B(a; r)$.

تعریف میدان اسکالر مشتقپذیر. گوئیم f در a مشتقپذیر است اگر تبدیلی خطی مانند

$$T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

از \mathbb{R}^n به \mathbb{R} و تابعی اسکالر چون $E(a, v)$ وجود داشته باشند بطوری که، بهازای r ، $\|v\| < r$ ،

$$(7.8) \quad f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| E(a, v),$$

که در آن، وقتی $\|v\| \rightarrow 0$ ، $E(a, v) \rightarrow 0$. تبدیل خطی T_a مشتق گل f در a نام خواهد داشت .

تذکر. مشتق گل T_a یک تبدیل خطی است، نه یک عدد. مقدار تابعی $T_a(v)$ یک عدد حقیقی است، که بهازای هر نقطه v در \mathbb{R}^n تعریف شده است. مشتق گل به وسیله دلبلیو. اچ. یانگ^۱ در ۱۹۰۸ و به وسیله ام. فرشه^۲ در ۱۹۱۱ در زمینه‌ای کلیتر معرفی شده بود.

معادله (7.8)، که بهازای $\|v\| < r$ برقرار است، یک فرمول تیلور مرتبه اول برای $f(a+v)$ نام دارد. این معادله یک تقریب خطی، یعنی $T_a(v)$ ، بسرای تفاضل $f(a+v) - f(a)$ به دست می‌دهد. خطای این تقریب $\|v\| E(a, v)$ است، جمله‌ای که وقتی $\|v\| \rightarrow 0$ ، از مرتبه کوچکتر از $\|v\|$ می‌باشد؛ یعنی، وقتی $\|v\| \rightarrow 0$ ، $E(a, v) = o(\|v\|)$.

قضیه بعدی نشان می‌دهد که اگر مشتق گل وجود داشته باشد، منحصر بفرد است. همچنین، طرز محاسبه $T_a(y)$ را بهازای هر y در \mathbb{R}^n بازگو می‌کند.

قضیه ۵.۸. فرض کنیم f در a مشتقپذیر بوده و دارای مشتق گل T_a باشد. در این صورت، $f'(a; y)$ بهازای هر y در \mathbb{R}^n وجود دارد و داریم

$$(8.8) \quad T_a(y) = f'(a; y).$$

بعلاوه، $f'(a; y)$ ترکیبی خطی از مولفه‌های y است. در واقع، اگر $y = (y_1, \dots, y_n)$ ، خواهیم داشت

$$(9.8) \quad f'(a; y) = \sum_{k=1}^n D_k f(a) y_k.$$

برهان. معادله (۸.۸) در صورت $y = 0$ بداهتا " برقرار است، زیرا هم $T_a(0) = 0$ و هم $f'(a; 0) = 0$. لذا، می توان فرض کرد که $y \neq 0$.

چون f در a مشتقپذیر است، فرمول تیلور

$$(10.8) \quad f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| E(a, v)$$

را داریم، که بهازای $r > 0$ و هر $\|v\| < r$ برقرار است و، وقتی $\|v\| \rightarrow 0$ ، $E(a, v) \rightarrow 0$. در این فرمول فرض می کنیم $v = hy$ ، که در آن $h \neq 0$ و $\|h\| \|y\| < r$. در این صورت، $\|v\| < r$. چون T_a خطی است، داریم $T_a(v) = T_a(hy) = hT_a(y)$. بنابراین، (۱۰.۸) نتیجه می دهد که

$$(11.8) \quad \frac{f(a + hy) - f(a)}{h} = T_a(y) + \frac{|h| \|y\|}{h} E(a, v).$$

چون وقتی $h \rightarrow 0$ ، $\|v\| \rightarrow 0$ ، و چون $|h|/h = \pm 1$ ، طرف راست (۱۱.۸)، وقتی $h \rightarrow 0$ ، به حد $T_a(y)$ میل می کند. لذا، طرف چپ نیز به همان حد میل می نماید. این (۸.۸) را ثابت می کند.

حال، با استفاده از خطی بودن T_a ، (۹.۸)، نتیجه می شود. اگر

$$y = (y_1, \dots, y_n), \quad \text{داریم } T_a(y) = \sum_{k=1}^n y_k e_k, \quad \text{در نتیجه،}$$

$$T_a(y) = T_a\left(\sum_{k=1}^n y_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n y_k T_a(e_k) = \sum_{k=1}^n y_k f'(a; e_k) = \sum_{k=1}^n y_k D_k f(a).$$

۱۲.۸ گرادیان یک میدان اسکالر

فرمول قضیه ۵.۸، که $f'(a; y)$ را به صورت ترکیبی خطی از مولفه های y بیان می کند، را می توان به صورت یک حاصل ضرب نقطه ای نوشت:

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^n D_k f(a) y_k = \nabla f(a) \cdot y,$$

که در آن $\nabla f(a)$ برداری است که مولفه های مشتقات جزئی f در a اند:

$$\nabla f(a) = (D_1 f(a), \dots, D_n f(a)).$$

این را **گرادیان f** می نامیم. گرادیان ∇f یک میدان برداری است که در هر نقطه a که در آن مشتقات جزئی $D_1 f(a), \dots, D_n f(a)$ وجود دارند تعریف شده است. همچنین، برای ∇f می نویسیم $\text{grad } f$. علامت ∇ تلفظ می شود "دل".

حال فرمول تیلور مرتبه اول (۱۰.۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(12.8) \quad f(a + v) = f(a) + \nabla f(a) \cdot v + \|v\| E(a, v),$$

که در آن، وقتی $\|v\| \rightarrow 0$ ، $E(a, v) \rightarrow 0$. این فرمول در این شکل شبیه فرمول یک بعدی تیلور است، که در آن بردار گرادیان $\nabla f(a)$ نقش مشتق $f'(a)$ را دارد.

از فرمول تیلور می‌توان به آسانی ثابت کرد که مشتق پذیری پیوستگی را ایجاب می‌کند.

قضیه ۶.۸. هرگاه میدان اسکالر f در a مشتق پذیر باشد، f در a پیوسته می‌باشد.

برهان. از (۱۲.۸) داریم

$$|f(a + v) - f(a)| = |\nabla f(a) \cdot v + \|v\| E(a, v)|.$$

با اعمال نامساوی مثلثی و نامساوی کوشی - شوارتز، درمی‌یابیم که

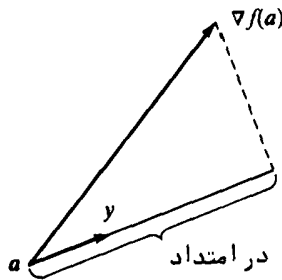
$$0 \leq |f(a + v) - f(a)| \leq \|\nabla f(a)\| \|v\| + \|v\| |E(a, v)|.$$

این نشان می‌دهد که، وقتی $\|v\| \rightarrow 0$ ، $f(a + v) \rightarrow f(a)$ ؛ در نتیجه، f در a پیوسته می‌باشد.

وقتی y یک بردار یکه است، مشتق جهتی $f'(a; y)$ رابطه هندسی ساده‌ای با بردار گرادیان دارد. فرض کنیم $\Delta f(a) \neq 0$ و θ زاویه بین y و $\Delta f(a)$ باشد. در این صورت داریم

$$f'(a; y) = \nabla f \cdot (a) \cdot y = \|\nabla f(a)\| \|y\| \cos \theta = \|\nabla f(a)\| \cos \theta$$

این نشان می‌دهد که مشتق جهتی چیزی جز مولفه بردار گرادیان در جهت y نیست. شکل ۵.۸ بردارهای $\nabla f(a)$ و y مربوط به نقطه a را نشان می‌دهد. مشتق جهتی وقتی ماکزیمم است که $\cos \theta = 1$ ؛ یعنی، y با $\nabla f(a)$ همجهت است. به عبارت دیگر،



شکل ۵.۸ رابطه هندسی مشتق جهتی با بردار گرادیان

شکل ۵.۸ رابطه هندسی مشتق جهتی با بردار گرادیان

در نقطه معلوم a ، میدان اسکالر ماکزیمم میزان تغییر خود را در جهت بردار گرادیان دارد؛ بعلاوه، این ماکزیمم مساوی طول بردار گرادیان است. وقتی $\nabla f(a)$ بر y عمود باشد، مشتق جهتی $f'(a; y)$ مساوی 0 می باشد. در فضای 2، بردار گرادیان اغلب به صورت

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} j$$

نوشته می شود.

در فضای 3، فرمول نظیر عبارت است از

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} j + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} k.$$

۱۳۰۸ شرط کافی برای مشتق پذیری

اگر f در a مشتق پذیر باشد، همه مشتقات جزئی $D_1 f(a), \dots, D_n f(a)$ وجود دارند. اما وجود همه این مشتقها لزوماً "مشتق پذیری f در a را ایجاب نمی کند. یک مثال نقض عبارت است از تابع زیر:

$$f(0, y) = 0; \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad x \neq 0$$

که در بخش ۱۵۰۸ مطرح شد. برای این تابع، هر دو مشتق جزئی $D_1 f(0)$ و $D_2 f(0)$ وجود دارند اما f در 0 پیوسته نیست؛ در نتیجه، f نمی تواند در 0 مشتق پذیر باشد. قضیه بعدی نشان می دهد که وجود مشتقات جزئی پیوسته در یک نقطه مشتق پذیری را در آن نقطه ایجاب خواهد کرد.

قضیه ۷۰۸. شرط کافی برای مشتق پذیری. فرض کنیم مشتقات جزئی $D_1 f, \dots, D_n f$ در یک n -گوی مانند $B(a)$ وجود داشته و در a پیوسته باشند. در این صورت، f در a مشتق پذیر می باشد.

تذکر. یک میدان اسکالر صادق در مفروضات قضیه ۷۰۸ را در a به طور پیوسته مشتق پذیر می نامند.

برهان. تنها نامزد برای $T_0(v)$ عبارت است از $\nabla f(a) \cdot v$. نشان می دهیم

$$f(a + v) - f(a) = \nabla f(a) \cdot v + \|v\| E(a, v),$$

که در آن، وقتی $\|v\| \rightarrow 0$ ، $E(a, v) \rightarrow 0$. این قضیه را ثابت خواهد کرد.

فرض کنیم $\|v\| = \lambda$. پس $v = \lambda u$ ، که در آن $\|u\| = 1$. λ را آنقدر کوچک می‌گیریم که $a + v$ در گوی $B(a)$ که در آن مشتقات جزئی $D_1 f, \dots, D_n f$ وجود دارند قرار گیرد. u را برحسب مولفه‌هایش بیان می‌کنیم:

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n,$$

که در آن e_1, \dots, e_n بردارهای یکه مختصات اند. حال تفاضل $f(a + v) - f(a)$ را به صورت یک مجموع توی هم رو می‌نویسیم:

$$(13.8) \quad f(a + v) - f(a) = f(a + \lambda u) - f(a) = \sum_{k=1}^n \{f(a + \lambda v_k) - f(a + \lambda v_{k-1})\},$$

که در آن v_0, v_1, \dots, v_n بردارهایی در R^n اند بطوری که $v_0 = O$ و $v_n = u$. این بردارها را طوری می‌گیریم که در رابطه بازگشتی $v_k = v_{k-1} + u_k e_k$ صدق کنند. یعنی، فرض می‌کنیم

$$v_0 = O, \quad v_1 = u_1 e_1, \quad v_2 = u_1 e_1 + u_2 e_2, \quad \dots, \quad v_n = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n.$$

در این صورت، جمله k ام مجموع در (۱۳.۸) خواهد شد

$$f(a + \lambda v_{k-1} + \lambda u_k e_k) - f(a + \lambda v_{k-1}) = f(b_k + \lambda u_k e_k) - f(b_k),$$

که در آن $b_k = a + \lambda v_{k-1}$. دو نقطه $b_k + \lambda u_k e_k$ و b_k فقط در مولفه k ام با هم فرق دارند. لذا، می‌توان قضیه مقدار میانگین حساب دیفرانسیل را به‌کار برد و نوشت

$$(14.8) \quad f(b_k + \lambda u_k e_k) - f(b_k) = \lambda u_k D_k f(c_k),$$

که در آن c_k برپاره خط واصل بین b_k و $b_k + \lambda u_k e_k$ قرار دارد. توجه کنید که، وقتی $\lambda \rightarrow 0$ ، $b_k \rightarrow a$ ، و در نتیجه $c_k \rightarrow a$.

با استفاده از (۱۴.۸) در (۱۳.۸)، داریم

$$f(a + v) - f(a) = \lambda \sum_{k=1}^n D_k f(c_k) u_k.$$

اما در نتیجه: $\nabla f(a) \cdot v = \lambda \sum_{k=1}^n D_k f(a) u_k$.

$$f(a + v) - f(a) - \nabla f(a) \cdot v = \lambda \sum_{k=1}^n \{D_k f(c_k) - D_k f(a)\} u_k = \|v\| E(a, v),$$

که در آن

$$E(a, v) = \sum_{k=1}^n \{D_k f(c_k) - D_k f(a)\} u_k.$$

چون وقتی $\|v\| \rightarrow 0$ ، $c_k \rightarrow a$ ، و چون هر مشتق جزئی $D_k f$ در a پیوسته است، ملاحظه می‌شود که، وقتی $\|v\| \rightarrow 0$ ، $E(a, v) \rightarrow 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۴۰۸ تمرین

۱. برای میدانهای اسکالری که با معادلات زیر تعریف می‌شوند بردار گرادیان را در هر نقطه که وجود دارد پیدا کنید:

$$(A) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy) \quad (B) \quad f(x, y) = e^x \cos y$$

$$(P) \quad f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4 \quad (T) \quad f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$$

$$(S) \quad f(x, y, z) = \log(x^3 + 2y^2 - 3z^2) \quad (J) \quad f(x, y, z) = x^{y^z}$$

۲. مشتقات جهتی میدانهای اسکالر زیر را در نقاط و جهت‌های داده شده حساب کنید:

$$(A) \quad f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \quad \text{در } (1, 1, 0) \quad \text{در جهت } i - j + 2k$$

$$(B) \quad f(x, y, z) = (x/y)^z \quad \text{در } (1, 1, 1) \quad \text{در جهت } 2i + j - k$$

۳. نقاط (x, y) و جهاتی که در آنها مشتق جهتی $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ بیشترین مقدار را دارد در صورتی بیابید که (x, y) به دایره $x^2 + y^2 = 1$ مقید شده باشد.

۴. میدان اسکالر مشتق‌پذیر f در نقطه $(1, 2)$ دارای مشتق جهتی $+2$ در جهت $(2, 2)$ و مشتق جهتی -2 در جهت $(1, 1)$ است. بردار گرادیان را در $(1, 2)$ معین کرده و مشتق جهتی را در جهت $(4, 6)$ حساب کنید.

۵. ثابت‌های a ، b ، و c را طوری بیابید که مشتق جهتی

$$f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3 \quad \text{در نقطه } (1, 2, -1) \quad \text{دارای ماکزیمم } 64 \quad \text{در جهتی موازی محور } z \quad \text{باشد.}$$

۶. یک میدان اسکالر مشتق‌پذیر در نقطه a در R^2 مفروض است. فرض کنید $f'(a; y) = 1$ و $f'(a; z) = 2$ ، که در آنها $y = 2i + 3j$ و $z = i + j$ مجموعه تمام نقاط (x, y) را که $f'(a; xi + yj) = 6$ رسم کنید. همچنین، گرادیان $\nabla f(a)$ را محاسبه نمایید.

۷. فرض کنید میدانهای اسکالر f و g بر مجموعه S مشتق‌پذیر باشند. خواص زیر از گرادیان را به دست آورید:

$$(A) \quad \text{اگر } f \text{ بر } S \text{ ثابت باشد، } \text{grad } f = 0$$

$$(B) \quad \text{grad } (f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$$

(پ) اگر c ثابت باشد، $\text{grad}(cf) = c \text{grad} f$ ؛

(ت) $\text{grad}(fg) = f \text{grad} g + g \text{grad} f$ ؛

(ث) در نقاطی که $g \neq 0$ ، $\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \text{grad} f - f \text{grad} g}{g^2}$ ؛

۸. در \mathbb{R}^3 ، فرض کنید $r(x, y, z) = xi + yj + zk$ و $\|r(x, y, z)\| = r(x, y, z)$.

(آ) نشان دهید که $\nabla r(x, y, z)$ یک بردار یکه در جهت $r(x, y, z)$ است.

(ب) نشان دهید که اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، $\nabla(r^n) = nr^{n-2}r$.

[راهنمایی: از تمرین ۷ (ت) استفاده کنید.]

(پ) آیا فرمول قسمت (ب)، وقتی n یک عدد صحیح منفی یا صفر باشد، نیز برقرار است؟

(ت) میدان اسکالر f را طوری بیابید که $\nabla f = r$.

۹. فرض کنید f در هر نقطه $n -$ گوی $B(a)$ مشتقپذیر باشد. اگر به ازای n بردار مستقل

y_1, \dots, y_n و هر x در $B(a)$ ، $f'(x; y) = 0$ ، ثابت کنید f بر $B(a)$ ثابت می باشد.

۱۰. فرض کنید f در هر نقطه $n -$ گوی $B(a)$ مشتقپذیر باشد.

(آ) اگر به ازای هر x در $B(a)$ ، $\nabla f(x) = 0$ ، ثابت کنید f بر $B(a)$ ثابت است.

(ب) اگر به ازای هر x در $B(a)$ ، $f(x) \leq f(a)$ ، ثابت کنید که $\nabla f(a) = 0$.

۱۱. شش حکم زیر را در باب میدان اسکالر $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ ، که در آن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ و a یک نقطه

درونی S است، در نظر بگیرید:

(آ) f در a پیوسته است؛

(ب) f در a مشتقپذیر است؛

(پ) $f'(a; y)$ به ازای هر y در \mathbb{R}^n وجود دارد؛

(ت) همه مشتقات جزئی مرتبه اول f در همسایگی a وجود دارند و در a

پیوسته اند؛

(ث) $\nabla f(a) = 0$ ؛

(ج) به ازای هر x در \mathbb{R}^n ، $f(x) = \|x - a\|$.

در جدولی مانند جدول زیر، اگر گزاره سطر (x) همواره گزاره ستون (y) را ایجاب

می کند، در مربع مربوطه علامت T بگذارید. مثلاً، اگر (آ) همواره (ب) را

ایجاب می کند، در دومین مربع سطر اول علامت T بگذارید. قطر اصلی قبلاً برای

	a	b	c	d	e	f
a	T					
b		T				
c			T			
d				T		
e					T	
f						T

شما پر شده است .

۱۵.۸ قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقات میدانهای اسکالر

در نظریهٔ یک بعدی مشتق، به وسیلهٔ قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان مشتق تابع مرکب $g(t) = f[r(t)]$ را با فرمول

$$g'(t) = f'[r(t)] \cdot r'(t)$$

حساب کرد. در این بخش تعمیمی از این فرمول را وقتی f با یک میدان اسکالر تعریف شده بر مجموعه‌ای در فضای n و r با تابعی برداری از یک متغیر حقیقی با مقادیر در قلمرو f عوض شده است به دست می‌آوریم.

در یکی از بخشهای آتی، این فرمول را طوری تعمیم می‌دهیم که حالتی را که f و r هر دو میدانهایی برداری‌اند را شامل شود.

به آسانی می‌توان مثالهایی زد که در آنها ترکیب یک میدان اسکالر و یک میدان برداری وجود داشته باشد. مثلاً، فرض کنیم $f(x)$ دما در نقطهٔ x از یک جسم در فضای 3 باشد، و بخواهیم تغییرات دما را وقتی x در امتداد منحنی C واقع بر جسم تغییر می‌کند بدانیم. هرگاه منحنی با تابع برداری r بر بازهٔ $[a, b]$ توصیف شده باشد، می‌توان تابع جدید g را با فرمول زیر معرفی کرد:

$$g(t) = f[r(t)], \quad a \leq t \leq b$$

اگر

تابع مرکب g دما را به صورت تابعی از پارامتر t بیان می‌کند، و مشتقش $g'(t)$ میزان تغییر دما را در امتداد منحنی اندازه می‌گیرد. با تعمیم زیر از قاعده زنجیره‌ای، می‌توان $g'(t)$ را بی‌آنکه $g(t)$ صریحا مشخص شود حساب کرد.

قضیه ۸.۸. قاعده زنجیره‌ای. فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد که بر مجموعه باز S در \mathbb{R}^n تعریف شده است، و r یک تابع برداری باشد که بازه J در \mathbb{R}^1 را بتوی S می‌نگارد. تابع مرکب $g = f \circ r$ را بر J با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = f[r(t)], \quad t \in J$$

فرض کنیم r نقطه‌ای در J باشد که در آن $r'(t)$ وجود دارد و f در $r(t)$ مشتقپذیر باشد. در این صورت، $g'(t)$ وجود دارد و مساوی حاصل ضرب نقطه‌ای زیر است:

$$g'(t) = \nabla f(a) \cdot r'(t), \quad \text{که در آن } a = r(t) \quad (15.8)$$

برهان. فرض کنیم $a = r(t)$ که در آن t نقطه‌ای در J است که در آن $r'(t)$ وجود دارد. چون S باز است، یک n -گوی مانند $B(a)$ وجود دارد که در S واقع است. h را مخالف 0 می‌گیریم اما آنقدر کوچک که $r(t+h)$ در $B(a)$ قرار گیرد، و فرض می‌کنیم $y = r(t+h) - r(t)$. توجه کنید که، وقتی $h \rightarrow 0$ ، $y \rightarrow 0$. اما داریم

$$g(t+h) - g(t) = f[r(t+h)] - f[r(t)] = f(a+y) - f(a).$$

با اعمال فرمول تیلور مرتبه اول برای f ، خواهیم داشت

$$f(a+y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \|y\| E(a, y),$$

که در آن وقتی $\|y\| \rightarrow 0$ ، $E(a, y) \rightarrow 0$. چون $y = r(t+h) - r(t)$ ، این نتیجه می‌دهد که

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \nabla f(a) \cdot \frac{r(t+h) - r(t)}{h} + \frac{\|r(t+h) - r(t)\|}{h} E(a, y).$$

با فرض $h \rightarrow 0$ ، (15.8) به دست خواهد آمد.

مثال ۱. مشتق جهتی در امتداد یک منحنی. وقتی تابع r منحنی C را توصیف می‌کند، r' بردار سرعت (مماس بر منحنی) است و g' در معادله (15.8) مشتق f نسبت به بردار سرعت، با فرض $r' \neq 0$ ، می‌باشد. اگر $T(t)$ بردار یک در جهت $r'(t)$ باشد

(T بردار یکه مماس است)، حاصل ضرب نقطه‌ای $\nabla f[r(t)] \cdot T(t)$ مشتق جهتی f در امتداد C یا در جهت C نامیده می‌شود. برای یک منحنی سطح، می‌توان نوشت

$$T(t) = \cos \alpha(t) i + \cos \beta(t) j.$$

که در آن $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ زوایایی هستند که بردار $T(t)$ با محورهای مثبت x و y می‌سازد؛ مشتق جهتی f در امتداد C خواهد شد

$$\nabla f[r(t)] \cdot T(t) = D_1 f[r(t)] \cos \alpha(t) + D_2 f[r(t)] \cos \beta(t).$$

این فرمول اغلب به صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla f \cdot T = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta.$$

بعضی مولفان برای مشتق جهتی $\nabla f \cdot T$ می‌نویسند df/ds . چون مشتق جهتی در امتداد C برحسب T تعریف شده، مقدارش به نمایش پارامتری C بستگی دارد. یک تغییرنمایش می‌تواند جهت T را عکس کند؛ این، درجای خود، علامت مشتق جهتی را تغییر خواهد داد.

مثال ۲. مشتق جهتی میدان اسکالر $f(x, y) = x^2 - 3xy$ را در امتداد سهمی $y = x^2 - x + 2$ در نقطه $(1, 2)$ بیابید.

حل. در نقطه دلخواه (x, y) ، بردار گرادیان عبارت است از

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = (2x - 3y)i - 3xj.$$

در نقطه $(1, 2)$ داریم $\nabla f(1, 2) = -4i - 3j$. سهمی را می‌توان به‌طور پارامتری با معادله برداری $r(t) = ti + (t^2 - t + 2)j$ نمایش داد. بنابراین، $r(1) = i + 2j$ ، $r'(1) = i + j$ و $r'(t) = i + (2t - 1)j$. برای این نمایش C ، بردار یکه مماس $T(1) = \nabla f(1, 2) \cdot T(1) = -7/\sqrt{2}$ عبارت است از $(i + j)/\sqrt{2}$ و مشتق جهتی مطلوب $\nabla f(1, 2) \cdot T(1) = -7/\sqrt{2}$ می‌باشد.

مثال ۳. فرض کنیم f یک میدان اسکالر ثابت باشد که همه‌جا در صفحه مشتقپذیر است، c یک ثابت باشد. همچنین، معادله دکارتی $f(x, y) = c$ منحنی C را که در هر

نقطه‌اش خط مماس دارد توصیف نماید. ثابت کنید f در هر نقطه C دارای خواص زیر است:

- (ت) بردار گرادیان ∇f قائم به C است؛
 (ب) مشتق جهتی f در امتداد C صفر است؛
 (پ) مشتق جهتی f در جهتی قائم به C بیشترین مقدارش را دارد.

حل. اگر T یک برداریکه مماس بر C باشد، مشتق جهتی f در امتداد C حاصل ضرب نقطه‌ای T و ∇f است. این حاصل ضرب صفر است اگر ∇f بر T عمود باشد، و بیشترین مقدار را دارد اگر ∇f موازی T باشد. بنابراین، هر دو حکم (ب) و (پ) نتایج (ت) می‌باشند. برای اثبات (ت)، منحنی مسطح Γ را با معادله برداری $r(t) = X(t)i + Y(t)j$ در نظر می‌گیریم و تابع $g(t) = f[r(t)]$ را معرفی می‌کنیم. طبق قاعده زنجیره‌ای، داریم $g'(t) = \nabla f[r(t)] \cdot r'(t)$. وقتی $\Gamma = C$ ، تابع g دارای مقدار ثابت c است، در نتیجه، اگر $r(t) \in C$ ، $g'(t) = 0$ ، چون $g' = \nabla f \cdot r'$ ، این نشان می‌دهد که ∇f روی C بر r' عمود است؛ بنابراین، ∇f قائم به C می‌باشد.

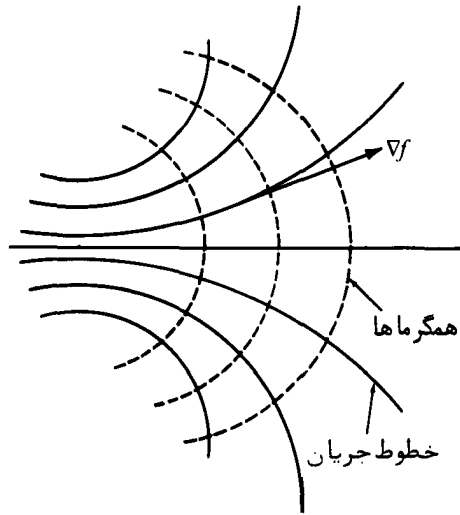
۱۶۰۸ کاربرد در هندسه. مجموعه‌های تراز. صفحات مماس

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای می‌توان خواص هندسی بردار گرادیان را نتیجه گرفت. فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد که بر مجموعه S در \mathbb{R}^n تعریف شده است، و x هلی در S را در نظر می‌گیریم که به‌ازای آنها $f(x)$ ثابت است؛ مثلاً، $f(x) = c$. این مجموعه را با $L(c)$ نشان می‌دهیم؛ بنابراین،

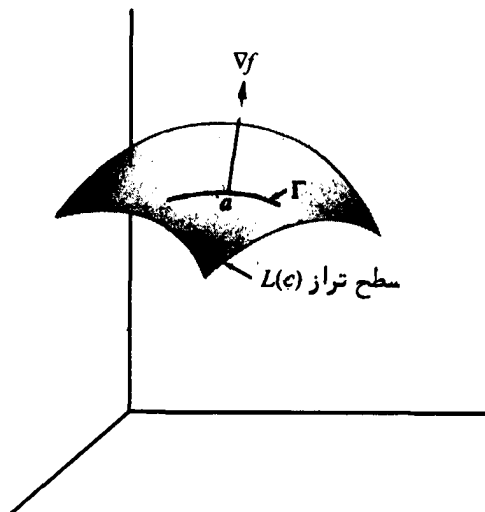
$$L(c) = \{x \mid x \in S \text{ و } f(x) = c\}.$$

مجموعه $L(c)$ یک مجموعه تراز f نام دارد. در \mathbb{R}^2 ، $L(c)$ یک منحنی تراز نامیده می‌شود؛ در \mathbb{R}^3 ، یک سطح تراز نام دارد.

خانواده‌های مجموعه‌های تراز در کاربردهای فیزیکی زیادی ظاهر می‌شوند. مثلاً، اگر $f(x, y)$ دما در (x, y) باشد، منحنیهای تراز f (منحنیها با دمای ثابت) همگرم نامیده می‌شوند. جریان گرما در جهتی صورت می‌گیرد که بیشترین تغییر در دما را داریم. همانطور که در مثال ۳ بخش پیش دیدیم، این جهت بر همگرماها عمود است. لذا، در یک ورقه حلبی نازک، جریان گرما در امتداد یک خانواده از منحنیها که بر همگرماها



شکل ۶.۸ منحنیهای نقطه‌چین همگراها هستند: $f(x, y) = c$. بردار گرادیان ∇f جهت خطوط جریان را نشان می‌دهد.



شکل ۷.۸ بردار گرادیان ∇f روی سطح تراز $f(x, y, z) = c$ بر هر منحنی Γ عمود است.

عمود است صورت می‌گیرد. اینها را خطوط جریان می‌نامند؛ اینها مسیرهای قائم همگرم‌ها می‌باشند. مثالهایی در شکل ۶.۸ نموده شده‌اند.

حال میدان اسکالر f را که بر مجموعه S در \mathbb{R}^3 مشتق‌پذیر است در نظر می‌گیریم، و یکی از سطوح نراز آن، یعنی $L(c)$ ، را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم a نقطه‌ای برای این سطح باشد، و منحنی Γ که روی سطح قرار داشته و از a می‌گذرد را، مثل شکل ۷.۸، در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم بردار گرادیان $\nabla f(a)$ برای این منحنی در a عمود است. یعنی، ثابت می‌کنیم $\nabla f(a)$ بر بردار مماس Γ در a عمود است. برای این کار، فرض کنیم Γ با تابع برداری مشتق‌پذیر r که بر بازه J در \mathbb{R}^1 تعریف شده پارامتریزه شده باشد. چون Γ روی سطح تراز $L(c)$ است، تابع r در معادله زیر صدق می‌کند:

$$f[r(t)] = c, \quad J \text{ در } t \text{ به‌ازای هر } t$$

اگر به‌ازای t در J ، $g(t) = f[r(t)]$ ، قاعده زنجیره‌ای می‌گوید که

$$g'(t) = \nabla f[r(t)] \cdot r'(t).$$

چون g بر J ثابت است، بر J داریم $g'(t) = 0$. بخصوص، با اختیار t_1 که $g(t_1) = a$ ، درمی‌یابیم که

$$\nabla f(a) \cdot r'(t_1) = 0.$$

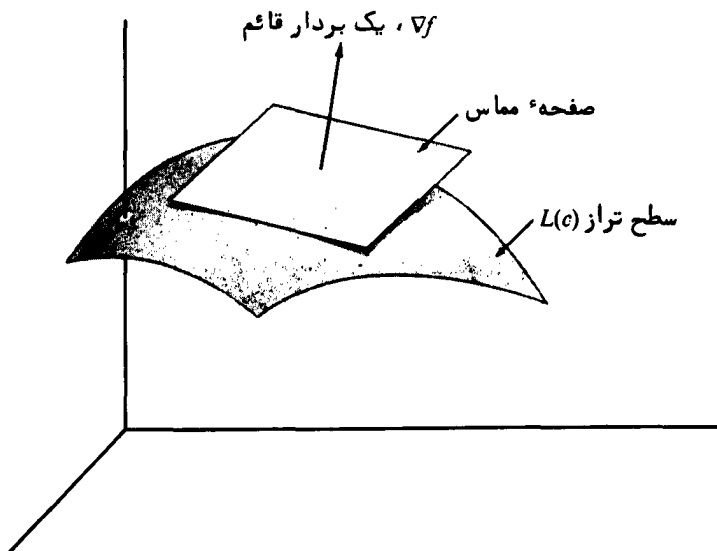
به عبارت دیگر، همانطور که حکم شده، گرادیان f در a بر بردار مماس $r'(t_1)$ عمود است.

حال بر سطح تراز $L(c)$ خانواده‌ای از منحنیها را در نظر می‌گیریم که همه از نقطه a می‌گذرند. مطابق بحث پیش، بردارهای مماس تمام این منحنیها بر بردار گرادیان $\nabla f(a)$ عمود است. اگر $\nabla f(a)$ بردار صفر نباشد، این بردارهای مماس یک صفحه معین می‌کنند، و گرادیان $\nabla f(a)$ برای این صفحه عمود است. (ر.ک. شکل ۷.۸). این صفحه خاص صفحه مماس سطح $L(c)$ در a نامیده می‌شود.

از جلد یک می‌دانیم که صفحه ماربر a با بردار قائم N از نقاط x در \mathbb{R}^3 تشکیل شده که در $N \cdot (x - a) = 0$ صدق می‌کنند. لذا، صفحه مماس بر سطح تراز $L(c)$ در a از همه x هایی در \mathbb{R}^3 تشکیل شده که در

$$\nabla f(a) \cdot (x - a) = 0$$

صدق می‌کنند. برای بدست آوردن معادله دکارتی این صفحه، x ، a ، و $\nabla f(a)$ را بر حسب مولفه‌هایشان بیان می‌کنیم. چنانچه بنویسیم $x = (x, y, z)$ ، $a = (x_1, y_1, z_1)$ ،



شکل ۸.۸ بردار گرادیان ∇f بر صفحه مماس سطح تراز $f(x, y, z) = c$ عمود است.

۹

$$\nabla f(\mathbf{a}) = D_1 f(\mathbf{a})\mathbf{i} + D_2 f(\mathbf{a})\mathbf{j} + D_3 f(\mathbf{a})\mathbf{k},$$

معادله دکارتی زیر به دست می آید:

$$D_1 f(\mathbf{a})(x - x_1) + D_2 f(\mathbf{a})(y - y_1) + D_3 f(\mathbf{a})(z - z_1) = 0.$$

برای میدانهای اسکالر تعریف شده در \mathbf{R}^2 بحث مشابهی خواهیم داشت. در مثال

۳ بخش پیش ثابت شد که بردار گرادیان $\nabla f(\mathbf{a})$ در نقطه \mathbf{a} یک منحنی تراز بر بردار

مماس منحنی در \mathbf{a} عمود است. لذا، خط مماس منحنی تراز $L(c)$ در نقطه $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$

به معادله دکارتی

$$D_1 f(\mathbf{a})(x - x_1) + D_2 f(\mathbf{a})(y - y_1) = 0$$

خواهد بود.

۱۷.۸ تمرین

۱. در این تمرین می توان وجود و پیوستگی همه مشتقات تحت نظر را فرض دانست.

معادلات $u \cdot u = f(x, y)$, $x = X(t)$, $y = Y(t)$ را به عنوان تابعی از t ، مثلاً

$u = F(t)$ ، تعریف می کند .

(\bar{T}) با استفاده از قاعده زنجیره ای ، نشان دهید

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} X'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} Y'(t),$$

که در آن $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ باید در $[X(t), Y(t)]$ حساب شوند .

(ب) بهمین ترتیب ، $F''(t)$ را بر حسب مشتقات f ، X ، Y بیان کنید . به یاد

بیاورید که مشتقات جزئی در فرمول قسمت (\bar{T}) توابع مرکب زیرند :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f[X(t), Y(t)], \quad \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f[X(t), Y(t)].$$

۲ . بهترین بازگشته ، در هر یک از حالات زیر $F'(t)$ و $F''(t)$ را بر حسب t حساب کنید :

(\bar{T}) $f(x, y) = x^2 + y^2, X(t) = t, Y(t) = t^2$

(ب) $f(x, y) = e^{xy} \cos(xy^2), X(t) = \cos t, Y(t) = \sin t$

(پ) $f(x, y) = \log[(1 + e^{x^2})/(1 + e^{y^2})], X(t) = e, Y(t) = e^{-t}$

۳ . در هر حالت ، مشتق جهتی f را در نقطه و جهت داده شده حساب کنید :

(\bar{T}) $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$ در $(2, 2, 1)$ در جهت قائم رو به خارج به کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

(ب) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ در یک نقطه عمودی سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ در جهت

قائم رو به خارج در آن نقطه :

(پ) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ در $(3, 4, 5)$ در امتداد منحنی فصل مشترک دو سطح

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ و } 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$$

۴ . (\bar{T}) بردار $V(x, y, z)$ قائم به سطح

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2}$$

را در نقطه عمومی (x, y, z) از سطح ، که $(0, 0, 0) \neq (x, y, z)$ ، پیدا نمایید .

(ب) کسینوس زاویه θ بین $V(x, y, z)$ و محور z را بیابید و حد $\cos \theta$ را ، وقتی

$$(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$$
 ، تعیین کنید .

۵ . دو معادله $y = e^u \sin v = x$ ، $e^u \cos v = x$ ، u و v را به عنوان توابعی از x و y ، مثلاً

برای $u = U(x, y)$ و $v = V(x, y)$ ، تعریف می کنند . برای $U(x, y)$ و $V(x, y)$ فرمولهای

صریحی بیابید که بدازای $x > 0$ اعتبار داشته باشند ، و نشان دهید که بردارهای

گرادیان $\nabla U(x, y)$ و $\nabla V(x, y)$ در هر نقطه (x, y) بر هم عمودند .

۶ . فرض کنید $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

(آ) تحقیق کنید که $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ هر دو در مبدأ صفرند .

(ب) آیا سطح $z = f(x, y)$ در مبدأ صفحه مماس دارد؟

[راهنمایی . مقطع سطح را با صفحه $x = y$ در نظر بگیرید .]

۷ . هرگاه (x_0, y_0, z_0) نقطه‌ای بر سطح $z = xy$ باشد ، دو خط $z = y_0x, y = y_0$ و

$z = x_0y, x = x_0$ در (x_0, y_0, z_0) هم را قطع می‌کنند و بر سطح قرار دارند . تحقیق

کنید که صفحه مماس بر این سطح در نقطه (x_0, y_0, z_0) شامل این دو خط است .

۸ . معادله دکارتی صفحه مماس بر سطح $xyz = a^3$ را در نقطه عمومی (x_0, y_0, z_0)

بیابید . نشان دهید که حجم چهاروجهی محدود به این صفحه و سه صفحه مختصات

$9a^3/2$ است .

۹ . برای خط مماس بر دو سطح $z = 4 - x^2 + y^2 + 2z^2$ و $z = e^{x-y}$ در نقطه $(1, 1, 1)$ یک

جفت معادله دکارتی خطی بیابید .

۱۰ . ثابت c را طوری بیابید که صفحات مماس در هر نقطه فصل مشترک دو کره

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1 \quad \text{و} \quad (x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$$

بر هم عمود باشند .

۱۱ . هرگاه r_1 و r_2 فاصله نقطه (x, y) یک بیضی تا کانونهایش باشد ، نشان دهید

که معادله ثابت $r_1 + r_2 =$ (برقرار به وسیله این فواصل) رابطه

$$T \cdot \nabla(r_1 + r_2) = 0$$

را ایجاب می‌کند ، که در آن T مماس یک بر منحنی است . این نتیجه را تعبیرهندسی

کنید ، و بدین وسیله نشان دهید که مماس با خطوط واصل بین (x, y) و کانونها

زوایای مساوی می‌سازد .

۱۲ . هرگاه $\nabla f(x, y, z)$ همواره موازی $xi + yj + zk$ باشد ، نشان دهید که f باید در

نقاط $(0, 0, a)$ و $(0, 0, -a)$ مقادیر مساوی بگیرد .

۱۸۰۸ مشتقات میدانهای برداری

نظریه مشتق برای میدانهای برداری تعمیم سراسر است این نظریه برای میدانهای اسکالر

است . فرض کنیم $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ میدانی برداری باشد که بر زیر مجموعه S از \mathbb{R}^n تعریف

شده است. هرگاه a یک نقطه درونی S بوده و y برداری در \mathbb{R}^n باشد، $f'(a; y)$ را با فرمول

$$f'(a; y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hy) - f(a)}{h}.$$

در صورت وجود حد، تعریف می‌کنیم $f'(a; y)$ یک بردار در \mathbb{R}^m است.

فرض کنیم f_k مولفه k ام f باشد. توجه می‌کنیم که $f'(a; y)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $f'_k(a; y)$ به‌ازای هر $k = 1, 2, \dots, m$ وجود داشته باشد، که در این حالت داریم

$$f'(a; y) = (f'_1(a; y), \dots, f'_m(a; y)) = \sum_{k=1}^m f'_k(a; y) e_k.$$

که در آن e_k بردار یکه k ام مختصات است.

گوییم f در نقطه درونی a مشتق‌پذیر است اگر تبدیلی خطی مانند

$$T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

وجود داشته باشد بطوری که

$$(16.8) \quad f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| E(a, v),$$

که در آن، وقتی $v \rightarrow 0$ ، $E(a, v) \rightarrow 0$. فرمول تیلور مرتبه اول (16.8) باید به‌ازای $r > 0$ و هر v که $\|v\| < r$ برقرار باشد. جمله $E(a, v)$ یک بردار در \mathbb{R}^m است. تبدیل خطی T_a مشتق گل f در a نامیده می‌شود.

برای میدانهای اسکالر ثابت کردیم که $T_a(y)$ حاصل ضرب نقطه‌ای بردار گرادیان $\nabla f(a)$ با y است. برای میدانهای برداری ثابت می‌کنیم که $T_a(y)$ برداری است که مولفه k ام آن حاصل ضرب نقطه‌ای $\nabla f_k(a) \cdot y$ می‌باشد.

قضیه 9.8. فرض کنیم f در a مشتق‌پذیر بوده و مشتق گل آن T_a باشد. در این صورت، $f'(a; y)$ به‌ازای هر a در \mathbb{R}^n وجود دارد، و داریم

$$(17.8) \quad T_a(y) = f'(a; y).$$

بعلاوه، اگر $f = (f_1, \dots, f_m)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ ، داریم

$$(18.8) \quad T_a(y) = \sum_{k=1}^m \nabla f_k(a) \cdot y e_k = (\nabla f_1(a) \cdot y, \dots, \nabla f_m(a) \cdot y).$$

برهان. مثل حالت اسکالر استدلال می‌کنیم. هرگاه $y = 0$ ، آنگاه $f'(a; y) = 0$ و

$T_a(O) = O$ از اینرو، می توان فرض کرد که $y \neq O$. با فرض $v = hy$ در فرمول تیلور (۱۶۰۸) ، داریم

$$f(a + hy) - f(a) = T_a(hy) + \|hy\| E(a, v) = hT_a(y) + |h| \|y\| E(a, v).$$

با تقسیم بر h و فرض $h \rightarrow 0$ ، (۱۷۰۸) به دست می آید .
برای اثبات (۱۸۰۸) کافی است توجه شود که

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^m f'_k(a; y) e_k = \sum_{k=1}^m \nabla f_k(a) \cdot y e_k.$$

معادله (۱۸۰۸) را می توان ساده تر و به صورت یک حاصل ضرب ماتریسی نوشت :

$$T_a(y) = Df(a)y,$$

که در آن $Df(a)$ ماتریس $m \times n$ می است که سطر k ام آن $\nabla f_k(a)$ است ، و y یک ماتریس ستونی $n \times 1$ در نظر گرفته می شود . ماتریس $Df(a)$ ماتریس ژاکوبی f در a نامیده می شود . درایه kj آن مشتق جزئی $D_j f_k(a)$ می باشد . بنابراین ، داریم

$$Df(a) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{bmatrix}.$$

ماتریس ژاکوبی $Df(a)$ در هر نقطه که mn مشتق جزئی $D_j f_k(a)$ وجود دارند تعریف شده است .

مشتق کل T_a به صورت $f'(a)$ نیز نوشته می شود . $f'(a)$ یک تبدیل خطی است ؛ ژاکوبی $Df(a)$ یک نمایش ماتریسی برای این تبدیل است .
فرمول تیلور مرتبه اول شکل زیر را می گیرد :

$$(۱۹۰۸) \quad f(a + v) = f(a) + f'(a)(v) + \|v\| E(a, v),$$

که در آن ، وقتی $v \rightarrow O$ ، $E(a, v) \rightarrow O$. این فرمول شبیه فرمول یک بعدی تیلور است .
برای محاسبه مولفه های بردار $f'(a)(v)$ ، می توان از حاصل ضرب ماتریسی $Df(a)v$ یا فرمول (۱۸۰۸) قضیه ۹۰۸ استفاده کرد .

۱۹۰۸ مشتقپذیری پیوستگی را ایجاب می‌کند

قضیه ۱۰۰۸. هرگاه میدان برداری f در a مشتقپذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

برهان. مثل حالت اسکالر، از فرمول تیلور برای اثبات این قضیه استفاده می‌کنیم. اگر در (۱۹۰۸) فرض کنیم $v \rightarrow 0$ ، جمله خطای $E(a, v)$ به $\|v\|$ میل می‌کند. قسمت خطی $f'(a)(v)$ نیز به 0 میل می‌کند، زیرا تبدیلات خطی در 0 پیوسته می‌باشند. این برهان را تمام خواهد کرد.

در این مرحله شایسته است یک نامساوی به دست آوریم که در برهان قاعده زنجیره‌ای در بخش بعد به کار خواهد رفت. این نامساوی مربوط به یک میدان برداری f است که در a مشتقپذیر است، و می‌گویید

$$(2008) \quad M_f(a) = \sum_{k=1}^m \|\nabla f_k(a)\| \quad \text{که در آن} \quad \|f'(a)(v)\| \leq M_f(a) \|v\|$$

برای اثبات این نامساوی، اگر از معادله (۱۸۰۸) همراه با نامساوی مثلثی و نامساوی کوشی - شوارتز استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\|f'(a)(v)\| = \left\| \sum_{k=1}^m \nabla f_k(a) \cdot v e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m |\nabla f_k(a) \cdot v| \leq \sum_{k=1}^m \|\nabla f_k(a)\| \|v\|.$$

۲۰۰۸ قاعده زنجیره‌ای برای مشتقات میدانهای برداری

قضیه ۱۱۰۸. قاعده زنجیره‌ای. فرض کنیم f و g میدانهایی برداری باشند بطوری که ترکیب $h = f \circ g$ در همسایگی نقطه a تعریف شده است. همچنین، g در a مشتق پذیر باشد با مشتق کل $g'(a)$ ، $h = g(a)$ ، و f در h مشتقپذیر باشد با مشتق کل $f'(h)$. در این صورت، h در a مشتقپذیر است، و مشتق کل $h'(a)$ از

$$h'(a) = f'(h) \circ g'(a),$$

یعنی ترکیب تبدیلات خطی $f'(h)$ و $g'(a)$ ، به دست می‌آید.

برهان. تفاضل $h(a + v) - h(a)$ را به ازای $\|v\|$ کوچک در نظر می‌گیریم، و نشان می‌دهیم

که یک فرمول تیلور مرتبه اول داریم. از تعریف h داریم

$$(21.8) \quad h(a+y) - h(a) = f[g(a+y)] - f[g(a)] = f(b+v) - f(b),$$

که در آن $v = g(a+y) - g(a)$. از فرمول تیلور برای $g(a+y)$ نتیجه می شود که

$$(22.8) \quad E_g(a, y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad v = g'(a)(y) + \|y\| E_g(a, y)$$

فرمول تیلور برای $f(b+v)$ نتیجه می دهد که

$$(23.8) \quad f(b+v) - f(b) = f'(b)(v) + \|v\| E_f(b, v),$$

که در آن وقتی $v \rightarrow 0$ ، $E_f(b, v) \rightarrow 0$. با استفاده از (22.8) در (23.8)، خواهیم داشت

$$(24.8) \quad f(b+v) - f(b) = f'(b)g'(a)(y) + f'(b)(\|y\| E_g(a, y)) + \|v\| E_f(b, v) \\ = f'(b)g'(a)(y) + \|y\| E(a, y),$$

که در آن $E(a, 0) = 0$ و

$$(25.8) \quad E(a, y) = f'(b)(E_g(a, y)) + \frac{\|v\|}{\|y\|} E_f(b, v), \quad y \neq 0$$

برای تکمیل برهان کافی است نشان دهیم که، وقتی $y \rightarrow 0$ ، $E(a, y) \rightarrow 0$

جمله اول سمت راست (25.8)، وقتی $y \rightarrow 0$ ، به 0 میل می کند، زیرا، وقتی

$$y \rightarrow 0, \quad E_g(a, y) \rightarrow 0 \quad \text{و تبدیلات خطی در } 0 \text{ پیوسته اند.}$$

در جمله دوم سمت راست (25.8) سازه $E_f(b, v)$ به 0 میل می کند زیرا، وقتی

$$y \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0. \quad \text{خارج قسمت } \|v\|/\|y\| \text{ کراندار می ماند زیرا، طبق (22.8) و} \\ (25.8)، \text{ داریم}$$

$$\|v\| \leq M_g(a) \|y\| + \|y\| \|E_g(a, y)\|.$$

از اینرو، هر دو جمله سمت راست (25.8)، وقتی $y \rightarrow 0$ ، به 0 میل می کنند:

$$E(a, y) \rightarrow 0 \quad \text{در نتیجه،}$$

بنابراین، از (24.8) و (21.8) فرمول تیلور

$$h(a+y) - h(a) = f'(b)g'(a)(y) + \|y\| E(a, y)$$

به دست می آید، که در آن وقتی $y \rightarrow 0$ ، $E(a, y) \rightarrow 0$. این ثابت می کند که h در

a مشتق پذیر است و مشتق کل $h'(a)$ مساوی ترکیب $f'(b) \circ g'(a)$ است.

۲۱.۸ شکل ماتریسی قاعده زنجیره ای

فرض کنیم $h = f \circ g$ ، که در آن g در a و f در $b = g(a)$ مشتق پذیر است. قاعده

زنجیره‌ای می‌گوید که

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a).$$

قاعدهٔ زنجیره‌ای را می‌توان برحسب ماتریسهای ژاکوبی $Dh(a)$ ، $Df(b)$ ، و $Dg(a)$ ، که برترتیب نمایش تبدیلات خطی $h'(a)$ ، $f'(b)$ ، و $g'(a)$ اند، بیان کرد. چون ترکیب تبدیلات خطی متناظر ضرب ماتریسهای آنهاست، خواهیم داشت

$$(۲۶.۸) \quad Dh(a) = Df(b) Dg(a) \quad \cdot \quad b = g(a) \quad \text{که در آن}$$

این را شکل ماتریسی قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌نامند. این را می‌توان، با بیان هر ماتریس برحسب درایه‌هایش، به صورت مجموعه‌ای از معادلات اسکالر نوشت.

فرض کنیم $a \in \mathbb{R}^p$ ، $b = g(a) \in \mathbb{R}^n$ ، و $f(b) \in \mathbb{R}^m$. در این صورت، $h(a) \in \mathbb{R}^m$

و می‌توان نوشت

$$g = (g_1, \dots, g_n), \quad f = (f_1, \dots, f_m), \quad h = (h_1, \dots, h_m).$$

در این صورت، $Dh(a)$ یک ماتریس $m \times p$ ، $Df(b)$ یک ماتریس $m \times n$ ، و $Dg(a)$ یک ماتریس $n \times p$ است، که با روابط زیر داده می‌شوند:

$$Dh(a) = [D_j h_i(a)]_{i,j=1}^{m,p}, \quad Df(b) = [D_k f_i(b)]_{i,k=1}^{m,n}, \quad Dg(a) = [D_j g_k(a)]_{k,j=1}^{n,p}.$$

معادلهٔ ماتریسی (۲۶.۸) معادل mp معادلهٔ اسکالر زیر است:

$$\cdot \quad D_j h_i(a) = \sum_{k=1}^n D_k f_i(b) D_j g_k(a), \quad j = 1, 2, \dots, p \quad \text{و} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

این معادلات مشتقات جزئی مولفه‌های h را برحسب مشتقات جزئی مولفه‌های f و g بیان می‌کنند.

مثال ۱. قاعدهٔ زنجیره‌ای تعمیم یافته برای میدانهای اسکالر. فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد ($m = 1$). در این صورت، h نیز یک میدان اسکالر است و در قاعدهٔ زنجیره‌ای p معادله وجود دارند، برای هر مشتق جزئی h یکی:

$$\cdot \quad D_j h(a) = \sum_{k=1}^n D_k f(b) D_j g_k(a), \quad j = 1, 2, \dots, p$$

به حالت خاص $p = 1$ قبلاً در بخش ۱۵.۸ توجه شد. در این حالت فقط یک معادله به دست آمد:

$$h'(a) = \sum_{k=1}^n D_k f(b) g'_k(a).$$

حال فرض کنیم $p = 2$ و $n = 2$. می‌نویسیم $a = (s, t)$ و $b = (x, y)$. در این صورت، مولفه‌های x و y با معادلات

$$x = g_1(s, t), \quad y = g_2(s, t)$$

به s و t مربوط می‌شوند. از قاعدهٔ زنجیره‌ای دو معادله برای مشتقات جزئی h به دست می‌آیند

$$D_1 h(s, t) = D_1 f(x, y) D_1 g_1(s, t) + D_2 f(x, y) D_1 g_2(s, t),$$

$$D_2 h(s, t) = D_1 f(x, y) D_2 g_1(s, t) + D_2 f(x, y) D_2 g_2(s, t).$$

با نماد ∂ ، این دو معادله را معمولاً "به صورت زیر می‌نویسند:

$$(27.8) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

مثال ۲. مختصات قطبی. دمای یک صفحه نازک با میدان اسکالری چون f توصیف می‌شود، دما در (x, y) عبارت است از $f(x, y)$. در مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ دما تابعی از r و θ می‌شود که با معادلهٔ

$$\varphi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

مشخص می‌گردد. مشتقات جزئی $\partial \varphi / \partial r$ و $\partial \varphi / \partial \theta$ را بر حسب مشتقات جزئی $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ بیان نمایید.

حل. (r, θ) را به جای (s, t) و φ را به جای h نوشته، از قاعدهٔ زنجیره‌ای به صورت (27.8) استفاده می‌کنیم. معادلات

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

نتیجه می‌دهند که

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta.$$

با گذاردن این فرمولها در (27.8)، خواهیم داشت

$$(28.8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -r \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta.$$

اینها فرمولهای مطلوب برای $\partial \varphi / \partial r$ و $\partial \varphi / \partial \theta$ می‌باشند.

مثال ۳. مشتقات جزئی مرتبه دوم. به مثال ۲ بازگشته، مشتق جزئی مرتبه دوم $\partial^2 \varphi / \partial \theta^2$ را برحسب مشتقات جزئی f بیان دارید.

حل. با فرمول مربوط به $\partial \varphi / \partial \theta$ در (۲۸.۰۸) شروع کرده و، با ثابت گرفتن r ، نسبت به θ مشتق می‌گیریم. طرف راست دو جمله وجود دارند، که از هر یک باید به‌عنوان یک حاصل ضرب مشتق گرفت. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} (29.08) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= -r \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial(\sin \theta)}{\partial \theta} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + r \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial \theta} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

برای محاسبه مشتقات $\partial f / \partial y$ و $\partial f / \partial x$ نسبت به θ باید در خاطر داشت که $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ ، به‌عنوان توابعی از r و θ ، توابعی مرکب‌اند که از

$$\frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

به‌دست می‌آیند. بنابراین، مشتقات آنها نسبت به θ باید از قاعده زنجیره‌ای به‌دست آیند. مجدداً، با استفاده از (۲۷.۰۸)، با $D_1 f$ به‌جای f ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial(D_1 f)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial(D_1 f)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (-r \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (r \cos \theta).$$

به‌همین نحو، با استفاده از (۲۷.۰۸) با $D_2 f$ به‌جای f ، درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial(D_2 f)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial(D_2 f)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (-r \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (r \cos \theta).$$

وقتی این فرمولها در (۲۹.۰۸) به‌کار روند، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ &\quad - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} - r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

این‌همان فرمول مطلوب برای $\partial^2 \varphi / \partial \theta^2$ است. فرمولهای مشابه برای مشتقات جزئی مرتبه دوم $\partial^2 \varphi / \partial r^2$ ، $\partial^2 \varphi / (\partial r \partial \theta)$ ، و $\partial^2 \varphi / (\partial \theta \partial r)$ در تمرین ۵ بخش آتی خواسته شده‌اند.

۲۲۰۸ تمرین

در این تمرینها می توان مشتق پذیری همه توابع تحت نظرا فرض دانست .

۱ . جانشانی $t = g(x, y)$ ، $F(t)$ را به $f(x, y)$ تبدیل می کند ، که در آن

$$f(x, y) = F[g(x, y)]$$

(۲) نشان دهید که

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F'[g(x, y)] \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F'[g(x, y)] \frac{\partial g}{\partial y}$$

(ب) حالت خاص $F(t) = e^{\sin t}$ ، $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ را در نظر بگیرید .

$\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ را با فرمولهای قسمت (۲) حساب کنید. برای امتحان نتیجه حاصل ،

$f(x, y)$ را صریحا " برحسب x و y بیان کرده ، $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ را مستقیما " از f

حساب کنید .

۲ . جانشانی $u = (x - y)/2$ ، $v = (x + y)/2$ ، $f(u, v)$ را به $F(x, y)$ تغییر می دهد . با

استفاده از قاعده زنجیره ای به شکل مناسب ، مشتقات جزئی $\partial F / \partial x$ و $\partial F / \partial y$ را برحسب

مشتقات جزئی $\partial f / \partial u$ و $\partial f / \partial v$ بیان کنید .

۳ . معادلات $u = f(x, y)$ ، $x = X(s, t)$ ، $y = Y(s, t)$ را به عنوان تابعی از s و t ،

مثلا " $u = F(s, t)$ ، تعریف می کنند .

(۲) با استفاده از شکل مناسب قاعده زنجیره ای ، مشتقات جزئی $\partial F / \partial s$ و $\partial F / \partial t$ را

برحسب $\partial f / \partial x$ ، $\partial f / \partial y$ ، $\partial X / \partial s$ ، $\partial X / \partial t$ ، $\partial Y / \partial s$ ، $\partial Y / \partial t$ بیان کنید .

(ب) هرگاه $\partial^2 f / (\partial x \partial y) = \partial^2 f / (\partial y \partial x)$ ، نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right)^2 + 2 \frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right)^2$$

(پ) برای مشتقات جزئی $\partial^2 F / \partial s^2$ و $\partial^2 F / (\partial s \partial t)$ فرمولهای مشابهی پیدا کنید .

۴ . تمرین ۳ را در هر حالت خاص زیر حل کنید :

$$: X(s, t) = s + t, \quad Y(s, t) = st \quad (۲)$$

$$: X(s, t) = st, \quad Y(s, t) = s/t \quad (ب)$$

$$: X(s, t) = (s - t)/2, \quad Y(s, t) = (s + t)/2 \quad (پ)$$

۵ . مختصات قطبی $f(x, y)$ را به $\varphi(r, \theta)$ تغییر می دهند ، که $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$.

مشتقات جزئی مرتبه دوم $\partial^2 \varphi / \partial r^2$ ، $\partial^2 \varphi / (\partial r \partial \theta)$ ، و $\partial^2 \varphi / (\partial \theta \partial r)$ را برحسب مشتقات

جزئی f بیان کنید. می‌توانید از فرمولهای مثال ۲ در بخش ۲۱.۸ استفاده کنید.
 ۶. معادلات $z = Z(r, s, t)$ ، $y = Y(r, s, t)$ ، $x = X(r, s, t)$ ، $u = f(x, y, z)$ را به‌عنوان تابعی از r ، s ، t ، مثلاً " $u = F(r, s, t)$ " تعریف می‌کنند. با استفاده از شکل مناسب قاعدهٔ زنجیره‌ای، مشتقات جزئی $\partial F/\partial r$ ، $\partial F/\partial s$ ، و $\partial F/\partial t$ را برحسب مشتقات جزئی f ، X ، Y ، Z بیان کنید.

۷. تمرین ۶ را در هر یک از حالات خاص زیر حل کنید:

$$(T) \quad X(r, s, t) = r + s + t, \quad Y(r, s, t) = r - 2s + 3t, \quad Z(r, s, t) = 2r + s - t$$

$$(ب) \quad X(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2, \quad Y(r, s, t) = r^2 - s^2 - t^2,$$

$$Z(r, s, t) = r^2 - s^2 + t^2.$$

۸. معادلات $u = f(x, y, z)$ ، $x = X(s, t)$ ، $y = Y(s, t)$ ، $z = Z(s, t)$ را به‌عنوان تابعی از s و t ، مثلاً " $u = F(s, t)$ " تعریف می‌کنند. با استفاده از شکل مناسب قاعدهٔ زنجیره‌ای، مشتقات جزئی $\partial F/\partial s$ و $\partial F/\partial t$ را برحسب مشتقات جزئی f ، X ، Y و Z بیان کنید.

۹. تمرین ۸ را در هر یک از حالات خاص زیر حل کنید:

$$(T) \quad X(s, t) = s^2 + t^2, \quad Y(s, t) = s^2 - t^2, \quad Z(s, t) = 2st$$

$$(ب) \quad X(s, t) = s + t, \quad Y(s, t) = s - t, \quad Z(s, t) = st$$

۱۰. معادلات $u = f(x, y)$ ، $x = X(r, s, t)$ ، $y = Y(r, s, t)$ را به‌عنوان تابعی از r ، s و t ، مثلاً " $u = F(r, s, t)$ " تعریف می‌کنند. با استفاده از شکل مناسب قاعدهٔ زنجیره‌ای، مشتقات جزئی $\partial F/\partial r$ ، $\partial F/\partial s$ ، و $\partial F/\partial t$ را برحسب مشتقات جزئی f ، X و Y بیان دارید.

۱۱. تمرین ۱۰ را در هر یک از حالات خاص زیر حل کنید:

$$(T) \quad X(r, s, t) = r + s, \quad Y(r, s, t) = t$$

$$(ب) \quad X(r, s, t) = r + s + t, \quad Y(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2$$

$$(پ) \quad X(r, s, t) = r/s, \quad Y(r, s, t) = s/t$$

۱۲. فرض کنید $h(x) = f[g(x)]$ ، که در آن $g = (g_1, \dots, g_n)$ یک میدان برداری مشتق‌پذیر در a بوده ، و f یک میدان اسکالر مشتق‌پذیر در $g(a)$ باشد. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، نشان دهید که گرادیان h را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای گرادیان مولفه‌های g به شکل زیر بیان کرد:

$$\nabla h(a) = \sum_{k=1}^n D_k f(b) \nabla g_k(a).$$

۱۳. (آ) هرگاه $f(x, y, z) = xi + yz + zk$ ، ثابت کنید ماتریس ژاکوبی $Df(x, y, z)$ ماتریس همانی مرتبه ۳ است .

(ب) جمیع میدانهای برداری مشتقپذیر $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ که به ازای آنها ماتریس ژاکوبی $Df(x, y, z)$ ماتریس همانی مرتبه ۳ است را بیابید .

(پ) جمیع میدانهای برداری مشتقپذیر $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ که به ازای آنها ماتریس ژاکوبی یک ماتریس قطری به شکل $\text{diag}(p(x), q(y), r(z))$ است ، که در آن p, q, r و توابع پیوسته معلومی اند ، را بیابید .

۱۴. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ دو میدان برداری باشند که به صورت زیر تعریف شده اند :

$$f(x, y) = e^{z+2v}i + \sin(y + 2x)j,$$

$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3)i + (2v - u^2)j.$$

(آ) هریک از ماتریسهای ژاکوبی $Df(x, y)$ و $Dg(u, v, w)$ را حساب کنید .

(ب) ترکیب $h(u, v, w) = f[g(u, v, w)]$ را حساب کنید .

(پ) ماتریس ژاکوبی $Dh(1, -1, 1)$ را محاسبه نمایید .

۱۵. فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ دو میدان برداری باشند که به صورت زیر تعریف شده اند :

$$f(x, y, z) = (x^2 + y + z)i + (2x + y + z^2)j,$$

$$g(u, v, w) = uv^2w^2i + w^2 \sin vj + u^2e^vk.$$

(آ) هریک از ماتریسهای ژاکوبی $Df(x, y, z)$ و $Dg(u, v, w)$ را حساب کنید .

(ب) ترکیب $h(u, v, w) = f[g(u, v, w)]$ را حساب کنید .

(پ) ماتریس ژاکوبی $Dh(u, 0, w)$ را محاسبه نمایید .

* ۲۳.۸ شرایط کافی برای تساوی مشتقات جزئی مخلوط

اگر f یک تابع حقیقی دو متغیره باشد ، دو مشتق جزئی مخلوط $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ لزوماً مساوی نیستند . منظور از $D_{1,2}f$ یعنی $D_1(D_2f) = \partial^2 f / (\partial x \partial y)$ ، و منظور از $D_{2,1}f$ یعنی $D_2(D_1f) = \partial^2 f / (\partial y \partial x)$. مثلاً ، اگر f با معادلات زیر تعریف شده باشد :

به‌ازای $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ، $f(0, 0) = 0$ ،

به‌آسانی ثابت می‌شود که $D_{2,1}f(0, 0) = -1$ و $D_{1,2}f(0, 0) = 1$. این را می‌توان به صورت زیر انجام داد :

تعریف $D_{2,1}f(0, 0)$ می‌گوید که

$$(۳۰ \cdot ۸) \quad D_{2,1}f(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_1f(0, k) - D_1f(0, 0)}{k} .$$

اما داریم

$$D_1f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

و ، اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، خواهیم داشت

$$D_1f(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} .$$

بنابراین ، اگر $k \neq 0$ ، خواهیم داشت $D_1f(0, k) = -k^5/k^4 = -k$ ؛ و در نتیجه ،

$$\frac{D_1f(0, k) - D_1f(0, 0)}{k} = -1 .$$

با استفاده از این در (۳۰·۸) ، معلوم می‌شود که $D_{2,1}f(0, 0) = -1$. استدلالی مشابه

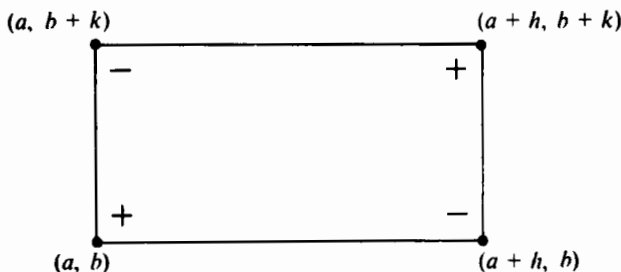
نشان می‌دهد که $D_{1,2}f(0, 0) = 1$ ؛ و در نتیجه ، $D_{2,1}f(0, 0) \neq D_{1,2}f(0, 0)$.

در مثالی که هم‌اکنون بحث شد ، هر دو مشتق جزئی مخلوط $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ در مبدأ پیوسته نیستند . می‌توان نشان داد که دو مشتق جزئی مخلوط در نقطه (a, b) در صورتی مساوی‌اند که دست کم یکی از آنها در همسایگی این نقطه پیوسته باشد . ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر هر دو پیوسته باشند ، مساوی‌اند . به‌طور دقیقتر ، قضیه زیر را داریم .

قضیه ۱۲·۸ . شرط کافی برای تساوی مشتقات جزئی مخلوط . فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد بطوری که مشتقات جزئی D_1f ، D_2f ، $D_{1,2}f$ ، و $D_{2,1}f$ بر مجموعه بازی چون S وجود داشته باشند . هرگاه $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ هر دو در (a, b) از S پیوسته باشند ، خواهیم داشت

$$(۳۱ \cdot ۸) \quad D_{1,2}f(a, b) = D_{2,1}f(a, b) .$$

برهان. h و k ناصفر را طوری اختیار می‌کنیم که مستطیل $R(h, k)$ به راسهای (a, b) ، $(a + h, b)$ ، $(a + h, b + k)$ و $(a, b + k)$ در S قرار داشته باشند. (مثالی در شکل ۹۰۸ نموده شده است.)



شکل ۹۰۸ $\Delta(h, k)$ ترکیبی است از مقادیر f در راسها.

عبارت

$$\Delta(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$$

را در نظر می‌گیریم. این عبارت ترکیبی است از مقادیر f در رئوس $R(h, k)$ ، که با اطلاعات جبری شکل ۹۰۸ گرفته می‌شوند. $\Delta(h, k)$ را برحسب $D_{2,1}f$ و نیز برحسب $D_{1,2}f$ بیان می‌کنیم.

تابع جدید و یک متغیره G را با معادله

$$G(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$$

بمازای هر x بین a و $a + h$ تعریف می‌کنیم. (به‌طور هندسی، مقادیر f در نقاطی در نظر گرفته می‌شود که در آنها یک خط قائم دلخواه اضلاع افقی $R(h, k)$ را قطع می‌کند.) در این صورت، داریم

$$(۳۲.۸) \quad \Delta(h, k) = G(a + h) - G(a).$$

با اعمال قضیه مقدار میانگین یک بعدی در طرف راست (۳۲.۸)، خواهیم داشت $G(a + h) - G(a) = hG'(x_1)$ ، که در آن x_1 بین a و $a + h$ قرار دارد. چون $G'(x) = D_1f(x, b + k) - D_1f(x, b)$ ، معادله (۳۲.۸) خواهد شد

$$(۳۳.۸) \quad \Delta(h, k) = h[D_1f(x_1, b + k) - D_1f(x_1, b)].$$

با اعمال قضیه مقدار میانگین در طرف راست (۳۳.۸)، خواهیم داشت

$$(۳۴.۸) \quad \Delta(h, k) = hkD_{2,1}f(x_1, y_1),$$

که در آن y_1 بین b و $b+k$ قرار دارد. نقطه (x_1, y_1) جایی در مستطیل $R(h, k)$ قرار دارد.

با همین روند در مورد تابع $H(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$ ، عبارتی دیگر برای $\Delta(h, k)$ می‌یابیم؛ یعنی،

$$(۳۵.۸) \quad \Delta(h, k) = hkD_{1,2}f(x_2, y_2),$$

که در آن (x_2, y_2) نیز در $R(h, k)$ قرار دارد. با متحد گرفتن عبارات مربوط به $\Delta(h, k)$ و حذف hk ، خواهیم داشت

$$D_{1,2}f(x_1, y_1) = D_{2,1}f(x_2, y_2)$$

حال فرض می‌کنیم $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ، و با استفاده از پیوستگی $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ ، (۳۱.۸)، به دست خواهد آمد.

با پیرایش استدلال فوق، می‌توان صورت قویتر قضیه ۱۲.۸ را ثابت کرد.

قضیه ۱۳.۸. فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد بطوری که D_1f ، D_2f ، و $D_{2,1}f$ بر مجموعه S شامل (a, b) وجود دارند. همچنین، $D_{2,1}f$ بر S پیوسته باشد.

در این صورت، $D_{1,2}f(a, b)$ وجود دارد و خواهیم داشت

$$D_{1,2}f(a, b) = D_{2,1}f(a, b).$$

برهان. $\Delta(h, k)$ را همانند در برهان قضیه ۱۲.۸ تعریف می‌کنیم. آن قسمت از برهان که به معادله (۳۴.۸) ختم می‌شود هنوز معتبر است، و نتیجه می‌دهد که، به ازای (x_1, y_1) در مستطیل $R(h, k)$ ،

$$(۳۶.۸) \quad \frac{\Delta(h, k)}{hk} = D_{2,1}f(x_1, y_1).$$

بقیه برهان قابل انجام نیست، زیرا به وجود $D_{1,2}f(a, b)$ نیاز است، که اینک می‌خواهیم آن را ثابت کنیم.

تعریف $D_{1,2}f(a, b)$ می‌گوید که

$$(۳۷.۸) \quad D_{1,2}f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2f(a+h, b) - D_2f(a, b)}{h}.$$

باید ثابت کنیم که این حد وجود دارد و دارای مقدار $D_{2,1}f(a, b)$ است. از تعریف D_2f داریم

$$D_2f(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

و

$$D_2f(a+h, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k}.$$

بنابراین، خارج قسمت تفاضلی (۳۷.۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{D_2f(a+h, b) - D_2f(a, b)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta(h, k)}{hk}.$$

با استفاده از (۳۶.۸) می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر نوشت:

$$(۳۸.۸) \quad \frac{D_2f(a+h, b) - D_2f(a, b)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} D_{2,1}f(x_1, y_1).$$

برای اتمام برهان باید نشان داد که

$$(۳۹.۸) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left[\lim_{k \rightarrow 0} D_{2,1}f(x_1, y_1) \right] = D_{2,1}f(a, b).$$

وقتی $k \rightarrow 0$ ، $y_1 \rightarrow b$ ، x_1 به عنوان تابعی از k نامعلوم است. اگر می‌دانستیم که وقتی $k \rightarrow 0$ ، x_1 به حدی، مثلاً \bar{x} ، نزدیک می‌شود، می‌توانستیم با استفاده از پیوستگی $D_{2,1}f$ نتیجه بگیریم که

$$\lim_{k \rightarrow 0} D_{2,1}f(x_1, y_1) = D_{2,1}f(\bar{x}, b).$$

در این صورت، چون حد \bar{x} باید در بازه $a \leq \bar{x} \leq a+h$ قرار گیرد، می‌شد فرض کرد $h \rightarrow 0$ و (۳۹.۸) را نتیجه گرفت. اما، این امر که \bar{x} به طریقی نامعلوم تابع k است استدلال مختصر پیچیده‌تری را می‌طلبد.

بخاطر معادله (۳۸.۸) معلوم می‌شود که حد

$$\lim_{k \rightarrow 0} D_{2,1}f(x_1, y_1)$$

وجود دارد. این حد را با $F(h)$ نشان می‌دهیم. برای اتمام برهان باید نشان داد که

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = D_{2,1}f(a, b).$$

برای این کار به تعریف پیوستگی $D_{2,1}f$ در (a, b) متوسل می‌شویم.

فرض کنیم ϵ یک عدد مثبت باشد. پیوستگی $D_{2,1}f$ در (a, b) یعنی قرص بازی

مانند N به مرکز (a, b) و شعاع δ هست بطوری که

$$(۴۰.۸) \quad |D_{2,1}f(x, y) - D_{2,1}f(a, b)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (x, y) \in N$$

اگر h و k را طوری بگیریم که $|h| < \delta/2$ و $|k| < \delta/2$ ، تمام مستطیل شکل ۹.۸ در همسایگی N واقع می‌شود و، بخصوص، نقطه (x_1, y_1) در N خواهد بود. بنابراین،
(۴۰.۸) وقتی $(x, y) = (x_1, y_1)$ برقرار است و می‌توان نوشت

$$(۴۱.۸) \quad 0 \leq |D_{2,1}f(x_1, y_1) - D_{2,1}f(a, b)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

حال h را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $k \rightarrow 0$. جمله $D_{2,1}f(x_1, y_1)$ به $F(h)$ نزدیک می‌شود و جمله دیگر در (۴۱.۸) از k مستقل است. بنابراین، داریم

$$0 \leq |F(h) - D_{2,1}f(a, b)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

مشروط بر اینکه $0 < |h| < \delta/2$. اما این دقیقاً " یعنی

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = D_{2,1}f(a, b)$$

و، همانطور که قبلاً " ذکر شد، این برهان را تمام خواهد کرد.

تذکره. باید توجه داشت که این قضیه در صورت تعویض نقشهای $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ با هم نیز برقرار است.

۲۴.۸ تمرینات گوناگون

۱. میدان اسکالر f را بیابید که در شرایط زیر صدق کند:
(آ) مشتقات جزئی $D_1f(0, 0)$ و $D_2f(0, 0)$ موجود و مساوی صفر باشند؛
(ب) مشتق جهتی در مبداء و در جهت بردار $z + iz$ موجود و مقدارش ۳ باشد.
بگویید چرا این f نمی‌تواند در $(0, 0)$ مشتقپذیر باشد.
۲. فرض کنید f به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(0, 0) = 0; \quad f(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \text{ اگر}$$

مشتقات جزئی زیر را ، در صورت وجود ، حساب کنید :

$$D_1 f(0, 0), D_2 f(0, 0), D_{2,1} f(0, 0), D_{1,2} f(0, 0) .$$

۳ . فرض کنید اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^3 + y^6}$ ، و تعریف کنید $f(0, 0) = 0$.

(۲) ثابت کنید که $f'(O; a)$ به ازای هر بردار a وجود دارد و مقدارش را برحسب مولفه های a حساب کنید .

(ب) تعیین کنید f در مبدأ پیوسته است یا نه .

۴ . به ازای $x > 0, y > 0$ ، تعریف کنید $f(x, y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2} dt$. $f(x, y)$ را برحسب x و y حساب کنید .

۵ . فرض کنید معادلات $x = X(t), y = Y(t)$ ، $u = f(x, y)$ ، u را به عنوان تابعی از t ، مثلاً " $u = F(t)$ " ، تعریف می کنند . مشتق سوم $F'''(t)$ را برحسب مشتقات f ، X ، و Y حساب کنید .

۶ . تغییر متغیرهای $x = u + v, y = uv^2$ را به $g(u, v)$ تبدیل می کنند . مقدار $\partial^2 g / (\partial v \partial u)$ را در نقطه ای که $u = 1, v = 1$ در صورتی حساب کنید که در آن نقطه

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 .$$

۷ . تغییر متغیرهای $x = uv, y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ را به $g(u, v)$ تبدیل می کنند . (۲) $\partial g / \partial v$ ، $\partial g / \partial u$ ، و $\partial^2 g / (\partial u \partial v)$ را برحسب مشتقات جزئی f حساب کنید . (می توانید مشتقات جزئی مخلوط را مساوی بگیرید .)

(ب) هرگاه به ازای هر x و y ، $\|\nabla f(x, y)\|^2 = 2$ ، ثابتهای a و b را طوری تعیین کنید که

$$a \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^2 - b \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)^2 = u^2 + v^2 .$$

۸ . دو تابع یک متغیره F و G و تابع دو متغیره z با معادله زیر بهم مربوطند :

$$[F(x) + G(y)]^2 e^{z(x, y)} = 2F'(x)G'(y)$$

اگر $F(x) + G(y) \neq 0$ ، نشان دهید که مشتق جزئی مخلوط $D_{2,1} z(x, y)$ هرگز صفر نیست . (می توانید وجود و پیوستگی همه مشتقات درکار را فرض بگیرید .)

۹ . میدان اسکالر f بر مستطیل $R = [a, b] \times [c, d]$ کراندار و پیوسته است . میدان اسکالر جدید g تعریف شده بر R به صورت زیر تعریف شده است :

$$g(u, v) = \int_c^v \left[\int_a^u f(x, y) dx \right] dy.$$

(T) می‌توان نشان داد که به‌ازای هر u ثابت در $[a, b]$ ، تابع A تعریف شده بر $[c, d]$ با معادله $A(y) = \int_a^u f(x, y) dx$ بر $[c, d]$ پیوسته است. با استفاده از این ثابت‌کنید $\partial g / \partial v$ بر مستطیل باز $S = (a, b) \times (c, d)$ (درون R) موجود و پیوسته است.

(ب) فرض کنید به‌ازای هر (u, v) در R ،

$$\int_c^v \left[\int_a^u f(x, y) dx \right] dy = \int_a^u \left[\int_c^v f(x, y) dy \right] dx.$$

ثابت‌کنید g بر S مشتق‌پذیر است و مشتقات جزئی مخلوط $D_{2,1}g(u, v)$ و $D_{1,2}g(u, v)$ در هر نقطه S موجود و مساوی $f(u, v)$ اند.

۱۰. به تمرین ۹ باز گردید. فرض کنید u و v به‌صورت پارامتری $u = A(t)$ ، $v = B(t)$

بیان شده باشد، و قرار می‌دهیم $\varphi(t) = g[A(t), B(t)]$.

(T) $\varphi'(t)$ را برحسب f ، A' ، B' معین کنید.

(ب) وقتی $f(x, y) = e^{x+y}$ و $A(t) = B(t) = t^2$ ، $\varphi'(t)$ را برحسب t حساب

کنید. (فرض کنید R در ربع اول واقع باشد.)

۱۱. هرگاه $f(x, y, z) = (r \times A) \cdot (r \times B)$ ، که در آن $r = xi + yj + zk$ و A و B

بردارهای ثابتی باشند، نشان دهید که $\nabla f(x, y, z) = B \times (r \times A) + A \times (r \times B)$.

۱۲. فرض کنید $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$. هرگاه A و B بردارهای ثابتی باشند،

نشان دهید که

$$A \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{A \cdot r}{r^3} \quad (T)$$

$$B \cdot \nabla \left(A \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \frac{3A \cdot r B \cdot r}{r^5} - \frac{A \cdot B}{r^3} \quad (ب)$$

۱۳. مجموعه تمام نقاط (a, b, c) در فضای ۳ را بیابید که به‌ازای آنها دو کره

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

متعامداً متقاطع باشند. (صفحات مماس آنها باید در هر نقطه تقاطع بر هم عمود باشند.)

۱۴. یک استوانه که معادله اش $y = f(x)$ است بر سطح $z^2 + 2xz + y = 0$ در تمام نقاط

مشترک دو سطح مماس است. $f(x)$ را پیدا نمایید.

۹

کاربردهای حساب دیفرانسیل

۱.۹ معادلات دیفرانسیل جزئی

فضایای حساب دیفرانسیل که در فصل ۸ ذکر شدند کاربردهای متنوعی دارند. در این فصل، با چند مثال، موارد استعمال آنها را در معادلات دیفرانسیل جزئی، توابع ضمنی، و مسائل اکسترم نشان می‌دهیم. با چند نکته در باب معادلات دیفرانسیل جزئی شروع می‌کنیم.

هر معادله شامل یک میدان اسکالر f و مشتقات جزئی آن یک معادله دیفرانسیل جزئی نامیده می‌شود. دو مثال ساده که در آنها f یک تابع دو متغیره است عبارتند از معادله مرتبه اول

$$(1.9) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$$

و معادله مرتبه دوم

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

هریک از اینها یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی همگن است. یعنی، هر یک به شکل $L(f) = 0$ است، که در آن L یک عملگر دیفرانسیل خطی شامل یک یا چند مشتق جزئی می‌باشد. معادله (۲.۹) معادله لاپلاس دوبعدی نام دارد.

بخشی از نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی خطی را می‌توان به معادلات دیفرانسیل جزئی تعمیم داد. مثلاً، به آسانی می‌توان دید که مجموعه جوابهای معادلات (۱.۹) و (۲.۹) یک فضای خطی است. با اینحال، برای معادلات دیفرانسیل خطی معمولی و

جزئی اختلاف مهمی وجود دارد که بایستی در آغاز درک شود. این اختلاف را به وسیلهٔ مقایسهٔ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی (۱۰۹) با معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$f'(x) = 0 \quad (۳۰۹)$$

توضیح می‌دهیم.

کلیتترین تابعی که در (۳۰۹) صدق می‌کند $f(x) = C$ است، که در آن C یک ثابت دلخواه است. به عبارت دیگر، فضای جواب (۳۰۹) یک بعدی است. ولی کلیتترین تابع صادق در (۱۰۹) عبارت است از

$$f(x, y) = g(y)$$

که در آن g یک تابع دلخواه از y است، چون g دلخواه است، به آسانی می‌توان مجموعه‌ای نامتناهی از جوابهای مستقل به دست آورد. مثلاً، می‌توان $g(y) = e^{cy}$ را اختیار و فرض کرد که c روی تمام اعداد حقیقی تغییر می‌کند. بنابراین، فضای جواب (۱۰۹) با بعد نامتناهی است.

این مثال از جهاتی نشانگر وضع در حالت کلی است. در حل معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول، در مرحله‌ای برای حذف هر مشتق جزئی یک انتگرالگیری لازم است. در این مرحله یک تابع دلخواه در جواب وارد می‌شود. این امر به یک فضای جواب با بعد نامتناهی منتج خواهد شد.

در بسیاری از مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی، باید از بین جوابها جوابی خاص که در یک یا چند شرط کمکی صدق کند اختیار شود. همانطور که انتظار می‌رود، سرشت این شرطها اثر عمیقی بر وجود یا یکتایی جوابها دارد. بررسی اصولی این مسائل در این کتاب صورت نمی‌گیرد. به جای آن، چند حالت خاص که مفاهیم داده شده در فصل ۸ را توضیح می‌دهند مطرح می‌شوند.

۲۰۹ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت

معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول

$$3 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + 2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (۴۰۹)$$

را در نظر می‌گیریم. همهٔ جوابهای آن را می‌توان به روش هندسی به دست آورد. طرف چپ را به صورت حاصل ضرب نقطه‌ای در آورده، و معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(3i + 2j) \cdot \nabla f(x, y) = 0.$$

این می‌گوید که بردار گرادیان $\nabla f(x, y)$ به بردار $3i + 2j$ در هر نقطه (x, y) متعامد است. اما نیز می‌دانیم که $\nabla f(x, y)$ به منحنیهای تراز f نیز متعامد است. لذا، این منحنیهای تراز باید خطوطی مستقیم موازی $3i + 2j$ باشند. به عبارت دیگر، منحنیهای تراز f خطوط

$$2x - 3y = c$$

هستند. از اینرو، $f(x, y)$ ، وقتی $2x - 3y$ ثابت باشد، ثابت است. این پیشنهاد می‌کند که، به ازای تابعی چون g ،

$$(5.9) \quad f(x, y) = g(2x - 3y).$$

حال تحقیق می‌کنیم که، به ازای هر تابع مشتقپذیر g ، میدان اسکالر f تعریف شده با (5.9) در (4.9) صدق می‌کند. اگر از قاعده زنجیرهای برای محاسبه مشتقات جزئی f استفاده کنیم، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2g'(2x - 3y), & \frac{\partial f}{\partial y} &= -3g'(2x - 3y), \\ 3 \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} &= 6g'(2x - 3y) - 6g'(2x - 3y) = 0. \end{aligned}$$

بنابراین، f در (4.9) صدق می‌کند.

بعکس، می‌توان نشان داد که هر f مشتقپذیر و صادق در (4.9) لزوماً باید به شکل (5.9) به ازای g ای باشد. برای این کار، تغییر متغیر خطی زیر را می‌دهیم:

$$(6.9) \quad x = Au + Bv, \quad y = Cu + Dv.$$

این $f(x, y)$ را به تابعی از u و v ، مثلاً

$$h(u, v) = f(Au + Bv, Cu + Dv),$$

بدل می‌کند. ثابتهای A, B, C, D را قسمی اختیار می‌کنیم که h در معادله ساده‌تر

$$(7.9) \quad \frac{\partial h(u, v)}{\partial u} = 0$$

صدق کند. بعد این معادله را حل کرده نشان می‌دهیم f شکل مطلوب را دارد.

با استفاده از قاعده زنجیرهای، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} A + \frac{\partial f}{\partial y} C.$$

چون f در (۴.۹) صدق می‌کند، داریم $\partial f / \partial y = -(3/2)(\partial f / \partial x)$ ؛ در نتیجه، معادله نسبت به $\partial h / \partial u$ خواهد شد

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(A - \frac{3}{2} C \right)$$

از اینرو، اگر $A = \frac{3}{2} C$ اختیار شود، h در (۷.۹) صدق می‌کند. با فرض $A = 3$ و $C = 2$ ، معلوم می‌شود که

$$(۸.۹) \quad x = 3u + Bv, \quad y = 2u + Dv.$$

بمازای این A و C ، تابع h در (۷.۹) صدق می‌کند. در نتیجه، $h(u, v)$ فقط تابعی از v است؛ مثلاً، "بمازای تابعی چون g ،

$$h(u, v) = g(v).$$

برای آنکه v را بر حسب x و y بیان کنیم، u را از (۸.۹) حذف می‌کنیم و خواهیم داشت $2x - 3y = (2B - 3D)v$. حال B و D را طوری می‌گیریم که $2B - 3D = 1$ ؛ مثلاً، $D = 1$ ، $B = 2$. بمازای این انتخاب، تبدیل (۶.۹) نامنفرد است؛ داریم $v = 2x - 3y$ ؛ و در نتیجه،

$$f(x, y) = h(u, v) = g(v) = g(2x - 3y).$$

این نشان می‌دهد که هر جواب مشتق‌پذیر f از (۴.۹) به شکل (۵.۹) است. همین نوع استدلال قضیه زیر را برای معادلات مرتبه اول با ضرایب ثابت اثبات می‌کند.

قضیه ۱۰.۹. فرض کنیم g بر \mathbb{R}^1 مشتق‌پذیر بوده، و میدان اسکالر f بر \mathbb{R}^2 یا معادله

$$(۹.۹) \quad f(x, y) = g(bx - ay)$$

تعریف شده باشد، که در آن a و b ثابت بوده و هر دو صفر نباشند. در این صورت، f همه جا در \mathbb{R}^2 ، در معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول

$$(۱۰.۹) \quad a \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

صدق می‌کند. بعکس، هر جواب مشتق‌پذیر (۱۰.۹) لزوماً "بمازای g ای به شکل (۹.۹) می‌باشد.

در این مجموعه تمرینات، می‌توان همهٔ توابع مورد نظر را مشتق‌پذیر گرفت.

۱. جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$4 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + 3 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

را معین کنید که در شرط $f(x, 0) = \sin x$ به‌مازای هر x صدق کند.

۲. جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$5 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - 2 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

را معین کنید که در شرطهای $f(0, 0) = 0$ و $D_1 f(x, 0) = e^x$ به‌مازای هر x صدق نماید.

۳. (۲) هرگاه، $u(x, y) = f(xy)$ ، ثابت کنید u در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

صدق می‌کند. جوابی را بیابید که به‌مازای هر x ، $u(x, x) = x^4 e^{x^2}$.

(ب) هرگاه به‌مازای $0 \neq y$ ، $v(x, y) = f(x/y)$ ، ثابت کنید v در معادلهٔ دیفرانسیل

جزئی

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

صدق می‌کند. جوابی را بیابید که $v(1, 1) = 2$ و به‌مازای هر $x \neq 0$ ، $D_1 v(x, 1/x) = 1/x$.

۴. هرگاه $g(u, v)$ در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial^2 g(u, v)}{\partial u \partial v} = 0$$

صدق کند، ثابت کنید $g(u, v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$ ، که در آن $\varphi_1(u)$ فقط تابعی از u

و $\varphi_2(v)$ فقط تابعی از v است.

۵. فرض کنید f در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

صدق کند. تغییر متغیر خطی $x = Au + Bv$ ، $y = Cu + Dv$ بدهید، که در آن

A, B, C, D ثابت اند، و فرض کنید $g(u, v) = f(Au + Bv, Cu + Dv)$. مقادیر صحیح‌ناصفر A, B, C, D را طوری حساب کنید که g در $\partial^2 g / (\partial u \partial v) = 0$ صدق کند . این معادله را نسبت به g حل کرده f را مشخص نمایید . (مشتقات جزئی مخلوط را مساوی بگیرید .)

۶ . تابع u با معادله‌ای به شکل

$$u(x, y) = xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$$

تعریف شده است . نشان دهید که u در یک معادله دیفرانسیل جزئی به شکل

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y)u$$

صدق می‌کند، و $G(x, y)$ را به دست آورید .

۷ . جانشانی $x = e^s, y = e^t$ ، $f(x, y)$ را به $g(s, t)$ بدل می‌کند، که در آن

$$g(s, t) = f(e^s, e^t) .$$

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

صدق کند، نشان دهید g در معادله دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

صدق خواهد کرد .

۸ . فرض کنید میدان اسکالر f بر مجموعه S باز در \mathbb{R}^n مشتق‌پذیر باشد . گوییم f همگن از درجه p بر S است در صورتی که برای هر $x \in S$ و هر $t > 0$ که $tx \in S$ ،

$$f(tx) = t^p f(x)$$

برای یک میدان اسکالر همگن از درجه p ، نشان دهید که

$$x \cdot \nabla f(x) = p f(x), \quad x \in S$$

این مطلب به قضیه اویلر برای توابع همگن معروف است . هرگاه $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = p f(x_1, \dots, x_n).$$

[راهنمایی . بهازای x ثابت ، تعریف کنید $g(t) = f(tx)$ و $g'(1)$ را محاسبه نمایید .]

۹ . عکس قضیهٔ اولر را ثابت کنید . یعنی ، ثابت کنید هرگاه f در $\nabla f(x) = pf(x)$

بهازای هر x در مجموعهٔ S باز صدق کند ، آنگاه f باید همگن از درجهٔ p روی

S باشد . [راهنمایی . بهازای x ثابت ، $g(t) = f(tx) - t^p f(x)$ را تعریف و $g'(t)$

را حساب کنید .]

۱۰ . تعمیم زیر از قضیهٔ اولر برای توابع همگن از درجهٔ p در حالت ۲ بعدی را ثابت

کنید (مشتقات جزئی مخلوط را مساوی بگیرید) :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = p(p-1)f.$$

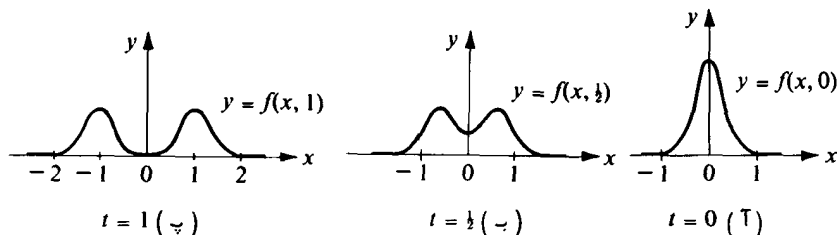
۴.۹ معادلهٔ موج یک بعدی

فرض کنیم سیمی به طول نامتناهی در امتداد محور x کشیده شده و در صفحهٔ xy نوسان

می کند . تغییر مکان قائم سیم در نقطهٔ x و در لحظهٔ t را با $y = f(x, t)$ نشان می دهیم .

فرض کنیم سیم در لحظهٔ $t = 0$ روی منحنی معلوم $y = F(x)$ باشد . مثالی در شکل

۱.۹ (T) آورده شده است . شکلهای ۱.۹ (ب) و (پ) منحنیهای تغییر مکان را بهازای



شکل ۱.۹ منحنی تغییر مکان $y = f(x, t)$ بهازای مقادیر مختلف t نشان داده شده است .

مقادیر بعدی t نشان می دهند . تغییر مکان $f(x, t)$ را تابع مجهولی از x و t می گیریم

که باید معین شود . یک نمونهٔ ریاضی برای این مسئله (که به وسیلهٔ مطالبی

فیزیکی که در اینجا عنوان نمی شوند پیشنهاد می شود) معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

است ، که در آن c ثابت مثبتی است که به مشخصات فیزیکی سیم بستگی دارد . این معادله

معادله موج یک بعدی نامیده می‌شود. ما این معادله را تحت چند شرط کمکی حل خواهیم کرد.

چون تغییر مکان اولیه منحنی مفروض $F(x) = \gamma$ است، جوابی جستجو می‌کنیم که در شرط

$$f(x, 0) = F(x)$$

صدق کند. همچنین، فرض می‌کنیم $\partial \gamma / \partial t$ ، یعنی سرعت تغییر مکان قائم، در لحظه $t = 0$ معلوم باشد؛ مثلاً،

$$D_2 f(x, 0) = G(x),$$

که در آن G تابع معلومی می‌باشد. ظاهراً این اطلاعات برای تعیین حرکت بعدی سیم کافی است. در واقع، با تعیین تابع f برحسب F و G ، نشان می‌دهیم که این مطلب درست است. جواب به شکلی که توسط ژان دالامبر^۱ (۱۷۸۳ - ۱۷۱۷)، ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی، داده شده بیان می‌شود.

قضیه ۲۰۹. جواب دالامبر برای معادله موج، فرض کنیم F و G تابعی باشند بطوری که G مشتق‌پذیر و F دوبار مشتق‌پذیر بر R^1 باشد. در این صورت، تابعی که با فرمول زیر داده می‌شود:

$$(11.9) \quad f(x, t) = \frac{F(x+ct) + F(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds$$

در معادله موج یک بعدی

$$(12.9) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

و شرطهای اولیه

$$(13.9) \quad f(x, 0) = F(x), \quad D_2 f(x, 0) = G(x)$$

صدق می‌کند. بعکس، هر تابع f با مشتقات جزئی مخلوط مساوی که در (۱۲.۹) و (۱۳.۹) صدق کنند لزوماً "به شکل" (۱۱.۹) خواهد بود.

برهان. تحقیق اینکه تابع f تعریف شده با (۱۱.۹) در معادله موج و شرایط اولیه

داده شده صدق می‌کند تعریف سر راستی است. این کار به خواننده محول می‌شود. ماعکس آن را ثابت خواهیم کرد.

یک طریقه این است که f را جوابی از معادله موج بگیریم، تغییر متغیر خطی

$$x = Au + Bv, \quad t = Cu + Dv$$

بدهیم که $f(x, t)$ را به تابعی از u و v ، مثلاً

$$g(u, v) = f(Au + Bv, Cu + Dv),$$

بدل کند، و ثابتهای A, B, C, D را طوری اختیار کنیم که g در معادله ساده‌تر

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

صدق نماید. باحل این معادله نسبت به g ، معلوم می‌شود که $g(u, v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$ که در آن $\varphi_1(u)$ فقط تابع u و $\varphi_2(v)$ فقط تابع v است. ثابتهای A, B, C, D را می‌توان طوری اختیار کرد که $u = x + ct, v = x - ct$ ، که از آن خواهیم داشت

$$(14.9) \quad f(x, t) = \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct).$$

بعد، با استفاده از شرایط اولیه (۱۳.۹)، توابع φ_1 و φ_2 را برحسب توابع معلوم F و G مشخص می‌کنیم.

ما (۱۴.۹) را به روشی دیگر که از قضیه ۱۰.۹ استفاده کرده و از تغییر متغیر اجتناب

می‌کند به دست می‌آوریم. ابتدا معادله موج را به شکل

$$(15.9) \quad L_1(L_2 f) = 0$$

می‌نویسیم، که در آن L_1 و L_2 عملگرهای دیفرانسیل خطی مرتبه اولند که با روابط

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}$$

تعریف می‌شوند. فرض کنیم f جوابی از (۱۵.۹) بوده و

$$u(x, t) = L_2 f(x, t).$$

معادله (۱۵.۹) می‌گوید که u در معادله مرتبه اول $L_1(u) = 0$ صدق می‌کند. از اینرو،

طبق قضیه ۱۰.۹، به ازای تابعی چون φ ، داریم

$$u(x, t) = \varphi(x + ct).$$

فرض کنیم Φ یک اولیه φ باشد؛ مثلاً، $\Phi(y) = \int_0^y \varphi(s) ds$ ، و

$$v(x, t) = \frac{1}{2c} \Phi(x + ct).$$

نشان می دهیم که $L_2(v) = L_2(f)$ داریم .

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \Phi'(x + ct) \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2c} \Phi'(x + ct)$$

در نتیجه ،

$$L_2 v = \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = \Phi'(x + ct) = \varphi(x + ct) = u(x, t) = L_2 f.$$

به عبارت دیگر ، تفاضل $f - v$ در معادله مرتبه اول

$$L_2(f - v) = 0$$

صدق می کند . بنا بر قضیه ۱۰.۹ ، باید به ازای تابعی چون ψ داشته باشیم
 $f(x, t) - v(x, t) = \psi(x - ct)$ ، بنابراین ،

$$f(x, t) = v(x, t) + \psi(x - ct) = \frac{1}{2c} \Phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

این (۱۴.۹) را به ازای $\varphi_1 = \frac{1}{2c} \Phi$ و $\varphi_2 = \psi$ ثابت می کند .
 حال ، با استفاده از شرایط اولیه (۱۳.۹) ، توابع φ_1 و φ_2 را بر حسب توابع معلوم

F و G معین می کنیم . رابطه $f(x, 0) = F(x)$ ایجاب می کند که

$$(16.9) \quad \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = F(x).$$

شرط اولیه دیگر ، یعنی $D_2 f(x, 0) = G(x)$ ، ایجاب می کند که

$$(17.9) \quad c\varphi_1'(x) - c\varphi_2'(x) = G(x).$$

با مشتقگیری از (۱۶.۹) ، داریم

$$(18.9) \quad \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) = F'(x).$$

با حل (۱۷.۹) و (۱۸.۹) نسبت به $\varphi_1'(x)$ و $\varphi_2'(x)$ معلوم می شود که

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{2} F'(x) + \frac{1}{2c} G(x), \quad \varphi_2'(x) = \frac{1}{2} F'(x) - \frac{1}{2c} G(x).$$

و با انتگرالگیری از این روابط ، خواهیم داشت

$$\varphi_1(x) - \varphi_1(0) = \frac{F(x) - F(0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x G(s) ds,$$

$$\varphi_2(x) - \varphi_2(0) = \frac{F(x) - F(0)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x G(s) ds.$$

در معادله اول x را با $x + ct$ ، و در معادله دوم x را با $x - ct$ عوض می‌کنیم . سپس، با جمع دو معادله حاصل و استفاده از $\varphi_1(0) + \varphi_2(0) = F(0)$ ، به دست می‌آوریم که

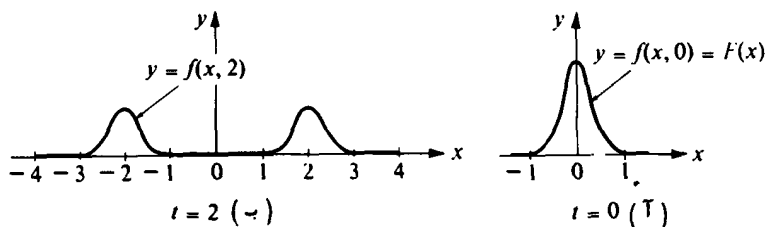
$$f(x, t) = \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds .$$

این برهان را تمام خواهد کرد .

مثال . فرض کنیم تغییر مکان اولیه با فرمول زیر داده شده باشد :

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x , & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$

نمودار F در شکل‌های ۱۰.۹ (T) و ۲۰.۹ (ب) نشان داده شده است .



شکل ۲۰.۹ جواب معادله موج به‌ازای $t = 0$ و $t = 2$ نشان داده است .

فرض کنیم سرعت اولیه $G(x) = 0$ به‌ازای هر x باشد . در این صورت ، جواب معادله موج از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$f(x, t) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} .$$

شکل‌های ۱۰.۹ و ۲۰.۹ منحنی $y = f(x, t)$ را به‌ازای مقادیر مختلف t نشان می‌دهند . این شکلها نشان می‌دهند که جواب معادله موج ترکیبی است از دو موج ایستاده ، که یکی به راست و دیگری به چپ ، با سرعت c ، می‌روند .

مثالهای دیگر ، که موارد استعمال قاعده زنجیره‌ای را در مطالعه معادلات دیفرانسیل

جزئی نشان می‌دهند. در مجموعه ترمینات بعدی داده شده‌اند.

۵۰۹ تمرین

در این مجموعه ترمینات، می‌توان تمام توابع مورد نظر را مشتق‌پذیر گرفت.

۱. هرگاه k ثابت مثبتی بود، و $\frac{1}{2}x/\sqrt{k}$ ، $g(x, t) = \frac{1}{2}x/\sqrt{k}$ ، قرار دهید

$$f(x, t) = \int_0^{g(x, t)} e^{-u^2} du.$$

(۱) نشان دهید که $\frac{\partial f}{\partial t} = e^{-g^2} \frac{\partial g}{\partial t}$ و $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-g^2} \frac{\partial g}{\partial x}$.

(۲) نشان دهید که f در معادله دیفرانسیل جزئی

$$k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{معادله حرارت})$$

صدق می‌کند.

۲. میدان اسکالر f در \mathbb{R}^2 تعریف شده است بطوری که $f(x, y)$ فقط به فاصله r نقطه

(x, y) از مبدا بستگی دارد؛ مثلاً، $f(x, y) = g(r)$ ، که در آن $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

(۱) ثابت کنید به ازای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ داریم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} g'(r) + g''(r).$$

(۲) حال فرض کنید f در معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

به ازای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، نیز صدق کند. با استفاده از قسمت (۱)، ثابت کنید

به ازای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = a \log(x^2 + y^2) + b$ ، که در آن a و b

ثابت‌اند.

۳. تمرین ۲ را در حالت n بعدی، که $n \geq 3$ ، تکرار کنید. یعنی، فرض کنید

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = g(r)$ ، که در آن $r = \|x\|$. نشان دهید که، به ازای $x \neq 0$ ،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \frac{n-1}{r} g'(r) + g''(r).$$

اگر f در معادله لاپلاس n بعدی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0,$$

به ازای هر $x \neq 0$ صدق کند، نتیجه بگیرید که، به ازای $x \neq 0$ ، $f(x) = a \|x\|^{2-n} + b$ ، که در آن a و b ثابت هستند.

تذکر. عملگر خطی ∇^2 تعریف شده با معادله

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

لاپلاسین n بعدی نامیده می شود.

۴. لاپلاسین دوبعدی مختصات قطبی. مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ را به $f(x, y)$ تبدیل می کند. فرمولهای زیر را تحقیق کنید:

$$\|\nabla f(r \cos \theta, r \sin \theta)\|^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 \quad (\text{آ})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} \quad (\text{ب})$$

۵. لاپلاسین سه بعدی در مختصات کروی. مختصات کروی

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi$$

را $f(x, y, z)$ به $F(\rho, \theta, \varphi)$ بدل می کنند. این تمرین طرز بیان لاپلاسین $\nabla^2 f$ را بر حسب مشتقات جزئی F نشان می دهد.

(آ) ابتدا با مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ را به $f(x, y, z)$ تبدیل کنید.

تبدیل کنید. با استفاده از تمرین ۴ ، نشان دهید که

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

(ب) حال، با فرض $z = \rho \cos \varphi$ ، $r = \rho \sin \varphi$ ، $g(r, \theta, z)$ را به $F(\rho, \theta, \varphi)$ تبدیل کنید.

توجه کنید که این تبدیل، صرف نظر از تغییر در نماد، همان تبدیل قسمت (آ)

است. نتیجه بگیرید که

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \varphi}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

۶. این تمرین نشان می‌دهد که چگونه، وقتی جوابهای معادله لاپلاس به شکل خاص جستجو می‌شوند، معادله دیفرانسیل لزاندر به وجود می‌آید. فرض کنید f یک میدان اسکالر باشد که در معادله لاپلاس سه بعدی، یعنی $\nabla^2 f = 0$ ، صدق می‌کند. مختصات کروی مذکور در تمرین ۵ را وارد کرده و فرض کنید $F(\rho, \theta, \varphi) = f(x, y, z)$. (T) فرض کنید جوابهایی چون f از معادله لاپلاس را جستجو می‌کنیم بطوری که $F(\rho, \theta, \varphi)$ مستقل از θ بوده و به شکل خاص $F(\rho, \theta, \varphi) = \rho^n G(\varphi)$ باشد. نشان دهید f در صورتی در معادله لاپلاس صدق می‌کند که G در معادله مرتبه دوم

$$\frac{d^2 G}{d\varphi^2} + \cot \varphi \frac{dG}{d\varphi} + n(n+1)G = 0$$

صدق نماید.

(ب) تغییر متغیر $x = \cos \varphi$ ($\varphi = \arccos x$, $-1 \leq x \leq 1$)، $G(\varphi)$ را به $g(x)$ بدل می‌کند. نشان دهید که g در معادله لزاندر

$$(1-x^2)\frac{d^2 g}{dx^2} - 2x\frac{dg}{dx} + n(n+1)g = 0$$

صدق می‌نماید.

۷. معادله موج دوبعدی. یک غشاء نازک قابل انعطاف روی صفحه xy کشیده شده و در حال ارتعاش است. فرض کنید $z = f(x, y, t)$ تغییر مکان قائم غشاء در نقطه (x, y) در لحظه t باشد. ملاحظات فیزیکی می‌گویند که f در معادله موج دوبعدی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

صدق می‌کند، که در آن c ثابت مثبتی است که به خصوصیات فیزیکی غشاء بستگی دارد. این تمرین رابطه بین این معادله و معادله دیفرانسیل بسل^۱ را آشکار می‌سازد.

(T) مختصات قطبی $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ را وارد کرده، و فرض کنید $F(r, \theta, t) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, t)$. اگر f در معادله موج صدق کند، نشان دهید

F در معادله*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right)$$

صدق خواهد کرد.

(ب) هرگاه $F(r, \theta, t)$ مستقل از θ باشد، مثلاً " $F(r, \theta, t) = \varphi(r, t)$ " ، معادله* (آ)

به

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$$

ساده می‌شود. حال فرض کنید φ یک جواب باشد بطوری که $\varphi(r, t)$ به تابعی از r ضربدر تابعی از t تجزیه شود؛ مثلاً " $\varphi(r, t) = R(r)T(t)$ " ، نشان دهید که هر یک از توابع R و T در یک معادله* دیفرانسیل خطی معمولی مرتبه دوم صدق می‌کند. (پ) هرگاه تابع T در قسمت (ب) متناوب با دوره تناوب $2\pi/c$ باشد، نشان دهید R در معادله* بسل $r^2 R'' + rR' + r^2 R = 0$ صدق می‌نماید.

۶.۹ مشتق توابعی که به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند

برخی از سطوح در فضای 3 با معادلات دکارتی به‌شکل

$$F(x, y, z) = 0$$

توصیف می‌شوند. گوییم هر معادله‌به‌این شکل یک نمایش ضمنی سطح است. مثلاً، معادله*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

نمایش سطح کره^۱ یکه به مرکز مبدأ^۲ است. گاهی می‌توان معادله*

$$F(x, y, z) = 0$$

رانسبت به یک متغیروبرحسب دوتای دیگر، مثلاً "نسبت به z و برحسب

x و y ، حل کرد. این کار به‌یک یا چند معادله به‌شکل

$$z = f(x, y)$$

منجر می‌شود. برای کره دو معادله داریم:

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{و} \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

یکی نمایش نیمکره^۳ بالایی و دیگری نیمکره^۴ پایینی.

درحالت کلی، ممکن است یافتن فرمول صریحی نسبت به z و برحسب x و y آسان

نباشد. مثلاً، برای حل معادله* $0 = e^2 - 4 - xz + y^2 + z^2$ نسبت به z روش ساده‌ای

وجود ندارد. با اینحال، می‌توان، با استفاده از قاعده^۵ زنجیره‌ای، خواص مختلف مشتقات

جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را بدون هیچ اطلاع صریحی از $f(x, y)$ نتیجه گرفت. روند کار در این بخش توضیح خواهد شد.

فرض کنیم تابعی چون $f(x, y)$ وجود داشته باشد بطوری که، به ازای هر (x, y) در مجموعه S بازی مانند S ،

$$F[x, y, f(x, y)] = 0 \quad (19.9)$$

اگرچه ممکن است برای محاسبه $f(x, y)$ فرمولهای صریحی در دست نباشند. این امر را این طور توصیف می کنیم که می گوئیم معادله $F(x, y, z) = 0$ ، z را به عنوان تابعی از x و y به طور ضمنی تعریف می کند، و می نویسیم

$$z = f(x, y).$$

حال تابع کمکی g را بر S به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g(x, y) = F[x, y, f(x, y)].$$

معادله (19.9) می گوید که، بر S ، $g(x, y) = 0$ ؛ در نتیجه، مشتقات جزئی $\partial g/\partial x$ و $\partial g/\partial y$ نیز بر S صفرند. اما این مشتقات جزئی را می توان با قاعده زنجیره ای نیز حساب کرد. برای این کار، می نویسیم

$$g(x, y) = F[u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)],$$

که در آن $u_1(x, y) = x$ ، $u_2(x, y) = y$ ، و $u_3(x, y) = f(x, y)$. قاعده زنجیره ای فرمولهای زیر را به ما می دهد:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = D_1F \frac{\partial u_1}{\partial y} + D_2F \frac{\partial u_2}{\partial y} + D_3F \frac{\partial u_3}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = D_1F \frac{\partial u_1}{\partial x} + D_2F \frac{\partial u_2}{\partial x} + D_3F \frac{\partial u_3}{\partial x}$$

که در آنها هر مشتق جزئی $D_k F$ باید در $(x, y, f(x, y))$ حساب شود. چون داریم

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = 1$$

اولین معادله از معادلات فوق خواهد شد

$$D_1F + D_3F \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

با حل این معادله نسبت به $\partial f/\partial x$ ، در نقاطی که $D_3F[x, y, f(x, y)] \neq 0$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{D_1F[x, y, f(x, y)]}{D_3F[x, y, f(x, y)]} \quad (20.9)$$

با استدلالی مشابه، فرمول نظیر برای $\partial f/\partial y$ به دست می‌آید: در نقاطی که $D_3 F[x, y, f(x, y)] \neq 0$

$$(21.9) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{D_2 F[x, y, f(x, y)]}{D_3 F[x, y, f(x, y)]} .$$

این فرمولها را معمولاً "خلاصه‌تر و به صورت زیر می‌نویسند:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} .$$

مثال. فرض کنیم معادله $z, y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0$ را به عنوان تابعی از x و y تعریف کند؛ مثلاً، $z = f(x, y)$ ، ثابت c را طوری بیابید که $f(0, e) = 2$ و مشتقات جزئی $\partial f/\partial y$ و $\partial f/\partial x$ را در نقطه $(x, y) = (0, e)$ حساب کنید.

حل. وقتی $x = 0, y = e, z = 2$ ، معادله به صورت $e^2 + 4 - e^2 - c = 0$ درمی‌آید، و این معادله به ازای $c = 4$ برقرار است. فرض کنیم $F(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$ از (20.9) و (21.9) داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{z}{x + 2z - e^z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{2y}{x + 2z - e^z} .$$

وقتی $x = 0, y = e, z = 2$ ، درمی‌یابیم که $\partial f/\partial x = 2/(e^2 - 4)$ و $\partial f/\partial y = 2e/(e^2 - 4)$. توجه کنید که می‌توان مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را فقط با استفاده از مقدار $f(x, y)$ در نقطه $(0, e)$ حساب کرد.

بحث قبلی را می‌توان به توابع بیش از دو متغیر تعمیم داد.

قضیه 3.9. فرض کنیم F یک میدان اسکالر مشتق‌پذیر بر مجموعه T در \mathbb{R}^n باشد. همچنین، معادله

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

x_n را به عنوان تابع مشتق‌پذیری از x_1, \dots, x_{n-1} به طور ضمنی تعریف کند؛ مثلاً، "به ازای هر نقطه (x_1, \dots, x_{n-1}) در مجموعه S در \mathbb{R}^{n-1} ،

$$x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

در این صورت، به ازای هر $k = 1, 2, \dots, n-1$ ، مشتق جزئی $D_k f$ در نقاطی که $D_n F \neq 0$ با فرمول زیر داده می‌شود:

$$(22.9) \quad D_k f = - \frac{D_k F}{D_n F}.$$

مشتقات جزئی $D_k F$ و $D_n F$ در (22.9) باید در نقطه

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

حساب شوند.

اثبات تعمیم سر راست استدلالی است که برای معادلات (20.9) و (21.9) به کار رفت، و به خواننده محول می‌شود.

بحث را می‌توان به صورتی دیگر تعمیم داد. فرض کنیم دو سطح با نمایشهای ضمنی زیر داشته باشیم:

$$(23.9) \quad F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0.$$

اگر این سطوح در امتداد منحنی C متقاطع باشند، می‌توان با حل دو معادله (23.9) نسبت به دو متغیر و برحسب سومی، مثلاً "نسبت به x و y و برحسب z "، یک نمایش پارامتری از C را به دست آورد. فرض کنیم حل نسبت به x و y امکان پذیر بوده و جوابها با معادلات

$$x = X(z), \quad y = Y(z)$$

به ازای هر z در بازه‌ی بازی چون (a, b) داده شده باشند. در این صورت، وقتی x و y بترتیب با $X(z)$ و $Y(z)$ عوض شوند، دو معادله (23.9) به صورت اتحاد برقرار می‌باشند. یعنی، می‌توان به ازای هر z در (a, b) نوشت $F[X(z), Y(z), z] = 0$ و $G[X(z), Y(z), z] = 0$. مجدداً، با استفاده از قاعده زنجیرهای، می‌توان مشتقات $X'(z)$ و $Y'(z)$ را بدون هیچ اطلاع صریحی از $X(z)$ و $Y(z)$ حساب کرد. برای این کار، توابع جدید f و g را با معادلات

$$g(z) = G[X(z), Y(z), z] \quad \text{و} \quad f(z) = F[X(z), Y(z), z]$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، به ازای هر z در (a, b) ، $f(z) = g(z) = 0$ ؛ و در نتیجه، مشتقات $f'(z)$ و $g'(z)$ نیز بر (a, b) صفرند. بنابراین قاعده زنجیرهای، این مشتقها با

فرمولهای زیر داده می‌شوند:

$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F}{\partial y} Y'(z) + \frac{\partial F}{\partial z}, \quad g'(z) = \frac{\partial G}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial G}{\partial y} Y'(z) + \frac{\partial G}{\partial z}.$$

چون $f'(z)$ و $g'(z)$ هر دو صفرند، می‌توان $X'(z)$ و $Y'(z)$ را با حل دستگاه دو معادله خطی زیر معین کرد:

$$\frac{\partial F}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F}{\partial y} Y'(z) = -\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial G}{\partial y} Y'(z) = -\frac{\partial G}{\partial z}.$$

این دستگاه در نقاطی که در تعیین دستگاه صفر نیست جواب منحصر بفرد دارد، که می‌توان آن را، با استفاده از قاعده کرامر، به صورت زیر بیان کرد:

$$(۲۴.۹) \quad X'(z) = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}, \quad Y'(z) = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}.$$

دترمینانهایی که در (۲۴.۹) آمدند دترمینانهای ماتریسهای ژاکوبی اند و دترمینانهای ژاکوبی نام دارند. اغلب برای دترمینانهای ژاکوبی نماد خاصی به کار می‌رود. می‌نویسیم

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

با این نماد، فرمولهای (۲۴.۹) را می‌توان به شکل ساده‌تر بیان کرد:

$$(۲۵.۹) \quad X'(z) = \frac{\partial(F, G)/\partial(y, z)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)}, \quad Y'(z) = \frac{\partial(F, G)/\partial(z, x)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)}.$$

(علامت منفی با تعویض ستونها در صورت داخل شده است.)

این روش را می‌توان برای حالات کلیتری که در آنها m معادله از n متغیر داده شده‌اند و $n > m$ تعمیم داد، و معادلات را نسبت به m متغیر و برحسب $n - m$ متغیر باقیمانده حل کرد. مشتقات جزئی توابع جدید را می‌توان، با تعمیم (۲۵.۹)، به صورت خارج قسمتهای دترمینانهای ژاکوبی بیان نمود. یک مثال به‌ازای $m = 2$ و $n = 4$ در ترمین از بخش ۸.۹ توصیف شده است.

۷.۹ مثالهای حل شده

در این بخش، چند مفهوم بخش پیش را با حل مسائل مختلف در باب توابعی که به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. فرض کنید معادله $g(x, y) = 0$ ، y را به‌عنوان تابع مشتق‌پذیری از x معین کند؛ مثلاً، به‌ازای هر x در بازه (a, b) بازی چون $Y'(x) \cdot y = Y(x)$ را برحسب مشتقات جزئی g بیان نمایید.

حل. فرض کنیم به‌ازای x در (a, b) ، $G(x) = g[x, Y(x)]$ ، در این صورت، معادله $g(x, y) = 0$ ایجاب می‌کند که، در (a, b) ، $G(x) = 0$ ، طبق قاعده زنجیره‌ای، داریم

$$G'(x) = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial y} Y'(x),$$

که از آن، در نقاط x در (a, b) که $\partial g/\partial y \neq 0$ ، خواهیم داشت

$$(۲۶.۹) \quad Y'(x) = - \frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}.$$

مشتقات جزئی $\partial g/\partial x$ و $\partial g/\partial y$ از فرمولهای $\partial g/\partial x = D_1g[x, Y(x)]$ و $\partial g/\partial y = D_2g[x, Y(x)]$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۲. وقتی y از دو معادله $z = f(x, y)$ و $g(x, y) = 0$ حذف شود، نتیجه‌ای را می‌توان

به شکل $z = h(x)$ بیان کرد. $h'(x)$ را برحسب مشتقات جزئی f و g بیان کنید.

حل. فرض کنیم بتوان معادله $g(x, y) = 0$ را نسبت به y و برحسب x حل کرد و $y = Y(x)$ به ازای هر x در بازه (a, b) یک جواب باشد. در این صورت، تابع h از فرمول زیر به دست می آید:

$$h(x) = f[x, Y(x)], \quad x \in (a, b) \text{ اگر}$$

با اعمال قاعده زنجیرهای، داریم

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} Y'(x).$$

با استفاده از معادله (۲۶.۹) در مثال ۱، فرمول زیر به دست می آید.

$$h'(x) = \frac{\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

مشتقات جزئی سمت راست باید در نقطه $(x, Y(x))$ حساب شوند. توجه کنید که صورت را می توان به شکل دترمینان ژاکوبی نیز بیان کرد، که نتیجه می دهد

$$h'(x) = \frac{\partial(f, g)/\partial(x, y)}{\partial g/\partial y}.$$

مثال ۳. دو معادله $2x = v^2 - u^2$ و $y = uv$ ، u و v را به عنوان توابعی از x و y تعریف می کنند. برای $\partial u/\partial x$ ، $\partial u/\partial y$ ، $\partial v/\partial x$ ، $\partial v/\partial y$ فرمولهایی بیابید.

حل. اگر y را ثابت گرفته و از دو معادله نسبت به x مشتق بگیریم، و بخاطرمان باشد که u و v توابعی از x و y اند، خواهیم داشت

$$0 = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{و} \quad 2 = 2v \frac{\partial v}{\partial x} - 2u \frac{\partial u}{\partial x}$$

با حل این دستگاه نسبت به $\partial u/\partial x$ و $\partial v/\partial x$ معلوم می شود که

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u^2 + v^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{u^2 + v^2}$$

از آن سو، اگر x را ثابت گرفته و از دو معادله نسبت به y مشتق بگیریم، معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$0 = 2v \frac{\partial v}{\partial y} - 2u \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{و} \quad 1 = u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

با حل این دستگاه، خواهیم داشت

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

مثال ۴. فرض کنیم u به عنوان تابعی از x و y با معادله

$$u = F(x + u, yu)$$

تعریف شده باشد. $\partial u/\partial y$ و $\partial u/\partial x$ را برحسب مشتقات جزئی F بیابید.

حل. فرض کنیم به ازای هر (x, y) در مجموعه S بازی چون $u = g(x, y)$ با گذاردن $g(x, y)$ به جای u در معادله اصلی، باید داشته باشیم

$$g(x, y) = F[u_1(x, y), u_2(x, y)], \quad (27.9)$$

که در آن $u_1(x, y) = x + g(x, y)$ و $u_2(x, y) = yg(x, y)$. حال اگر y را ثابت گرفته و از طرفین (۲۷.۹)، با استفاده از قاعده زنجیرهای در سمت راست، برحسب x مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1 F \frac{\partial u_1}{\partial x} + D_2 F \frac{\partial u_2}{\partial x}. \quad (28.9)$$

اما $\partial u_1/\partial x = 1 + \partial g/\partial x$ و $\partial u_2/\partial x = y \partial g/\partial x$. از اینرو، (۲۸.۹) خواهد شد

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1 F \cdot \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}\right) + D_2 F \cdot \left(y \frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

با حل این معادله نسبت به $\partial g/\partial x$ (و نوشتن $\partial u/\partial x$ به جای $\partial g/\partial x$)، به دست می آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-D_1 F}{D_1 F + y D_2 F - 1}.$$

به همین ترتیب، معلوم می شود که

$$\frac{\partial g}{\partial y} = D_1 F \frac{\partial u_1}{\partial y} + D_2 F \frac{\partial u_2}{\partial y} = D_1 F \frac{\partial g}{\partial y} + D_2 F \left(y \frac{\partial g}{\partial y} + g(x, y)\right).$$

از این رابطه معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-g(x, y) D_2 F}{D_1 F + y D_2 F - 1}.$$

مشتقات جزئی $D_1 F$ و $D_2 F$ باید در نقطهٔ $(x + g(x, y), y, g(x, y))$ حساب شوند.

مثال ۵. وقتی u از دو معادلهٔ $x = u + v$ و $y = uv^2$ حذف شود، معادله‌ای به شکل $F(x, y, v) = 0$ به دست می‌آید که v را به عنوان تابعی از x و y به طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً، $v = h(x, y)$ ، ثابت کنید.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h(x, y)}{3h(x, y) - 2x}$$

و فرمول مشابهی برای $\partial h / \partial y$ پیدا نمایید.

حل. با حذف u از دو معادلهٔ داده شده، رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$xv^2 - v^3 - y = 0.$$

فرض کنیم F تابعی باشد که با معادلهٔ

$$F(x, y, v) = xv^2 - v^3 - y$$

تعریف شده است. حال بحث مذکور در بخش ۶.۹ قابل بیان است و می‌توان نوشت:

$$(۲۹.۹) \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial v} \quad \text{و} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial v}$$

اما $\partial F / \partial x = v^2$ ، $\partial F / \partial v = 2xv - 3v^2$ ، و $\partial F / \partial y = -1$. از اینرو، معادلات (۲۹.۹) خواهند شد

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{v^2}{2xv - 3v^2} = -\frac{v}{2x - 3v} = \frac{h(x, y)}{3h(x, y) - 2x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{-1}{2xv - 3v^2} = \frac{1}{2xh(x, y) - 3h^2(x, y)}.$$

مثال ۶. معادلهٔ $F(x, y, z) = 0$ ، z را به عنوان تابعی از x و y به طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً، $z = f(x, y)$ ، با فرض $\partial^2 F / (\partial x \partial z) = \partial^2 F / (\partial z \partial x)$ ، نشان دهید که

$$(۳۰.۹) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3},$$

که در آن مشتقات جزئی سمت راست باید در $(x, y, f(x, y))$ حساب شوند.

حل. طبق معادله^۶ (۳۰.۹) از بخش ۶.۹، داریم

$$(۳۱.۹) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}.$$

باید بخاطر داشت که این خارج قسمت یعنی

$$- \frac{D_1 F[x, y, f(x, y)]}{D_3 F[x, y, f(x, y)]}.$$

فرض کنیم $G(x, y) = D_1 F[x, y, f(x, y)]$ و $H(x, y) = D_3 F[x, y, f(x, y)]$. هدف محاسبه^۷ مشتق جزئی خارج قسمت

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{G(x, y)}{H(x, y)}$$

برحسب x است، با ثابت گرفتن y . قاعده^۸ مشتگیری از خارج قسمت نتیجه می‌دهد که

$$(۳۲.۹) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = - \frac{H \frac{\partial G}{\partial x} - G \frac{\partial H}{\partial x}}{H^2}.$$

چون G و H توابع مرکبی هستند، با استفاده از قاعده^۹ زنجیره‌ای، مشتقات جزئی $\partial G / \partial x$ و $\partial H / \partial x$ را حساب می‌کنیم. برای $\partial G / \partial x$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= D_1(D_1 F) \cdot 1 + D_2(D_1 F) \cdot 0 + D_3(D_1 F) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

به همین نحو، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= D_1(D_3 F) \cdot 1 + D_2(D_3 F) \cdot 0 + D_3(D_3 F) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

با گذاردن اینها در (۳۲۰۹) و تعویض $\partial f/\partial x$ با کسر (۳۱۰۹)، فرمول (۳۵۰۹) بدست خواهد آمد.

۸.۹ تمرین

در تمرینهای این بخش می‌توان وجود و پیوستگی جمیع مشتقات مورد نظر را فرض گرفت.

۱. دو معادله $x + y = uv$ و $xy = u - v$ ، x و y را به‌عنوان توابعی از u و v به‌طور ضمنی معین می‌کنند؛ مثلاً، $x = X(u, v)$ و $y = Y(u, v)$. نشان دهید که اگر $x \neq y$ ، $\partial X/\partial u = (xv - 1)/(x - y)$ ، و فرمولهای مشابهی برای $\partial Y/\partial v$ ، $\partial Y/\partial u$ ، $\partial X/\partial v$ پیدا کنید.

۲. دو معادله $x + y = uv$ و $xy = u - v$ ، x و v را به‌عنوان توابعی از u و y معین می‌کنند؛ مثلاً، $x = X(u, y)$ و $v = V(u, y)$. نشان دهید که اگر $1 + yu \neq 0$ ، $\partial X/\partial u = (u + v)/(1 + yu)$ ، و فرمولهای مشابهی برای $\partial V/\partial y$ ، $\partial V/\partial u$ ، $\partial X/\partial y$ پیدا نمایید.

۳. دو معادله $F(x, y, u, v) = 0$ و $G(x, y, u, v) = 0$ ، x و y را به‌عنوان توابعی از u و v به‌طور ضمنی معین می‌کنند؛ مثلاً، $x = X(u, v)$ و $y = Y(u, v)$. نشان دهید در نقاطی که ژاکوبی $\partial(F, G)/\partial(x, y) \neq 0$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial(F, G)/\partial(y, u)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)},$$

و فرمولهای مشابهی برای مشتقات جزئی $\partial X/\partial v$ ، $\partial Y/\partial u$ ، و $\partial Y/\partial v$ پیدا نمایید.

۴. فصل مشترک دو سطح به معادلات دکارتی $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 25$ و $x^2 + y^2 = z^2$ شامل منحنی است مانند C که از نقطه $P = (\sqrt{7}, 3, 4)$ می‌گذرد. این معادلات را می‌توان نسبت به x و y و برحسب z حل کرد و نمایش پارامتری C را با z به‌عنوان پارامتر به‌دست آورد.

(آ) بردار یکجهته مماس T بر C در نقطه P را بدون استفاده صریح از نمایش پارامتری به‌دست آورید.

(ب) نتیجه قسمت (آ) را با تعیین نمایش پارامتری C با z به‌عنوان پارامتر امتحان کنید.

۵. سه معادله $F(u, v) = 0$ ، $u = xy$ ، و $v = \sqrt{x^2 + z^2}$ یک سطح در فضای xyz تعریف

می‌کنند. اگر بدانیم که $D_1F(1, 2) = 1$ و $D_2F(1, 2) = 2$ ، یک بردار قائم به این سطح در نقطه $x = 1, y = 1, z = \sqrt{3}$ را به دست آورید.

۶. سه معادله

$$x^2 - y \cos(uv) + z^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2,$$

$$xy - \sin u \cos v + z = 0,$$

x, y, z را به عنوان توابعی از u و v تعریف می‌کنند. مشتقات جزئی $\partial x / \partial u$ و $\partial x / \partial v$ را در نقطه $x = y = 1, u = \pi/2, v = 0, z = 0$ حساب کنید.

۷. معادله $f(y/x, z/x) = 0$ را به عنوان تابعی از x و y به طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً، $z = g(x, y)$. نشان دهید در نقاطی که $D_2f[y/x, g(x, y)/x]$ صفر نباشد،

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = g(x, y).$$

۸. فرض کنید F یک تابع حقیقی از دو متغیر حقیقی بوده و مشتقات جزئی D_1F و D_2F هیچگاه صفر نباشند. همچنین، u تابع حقیقی دیگری از دو متغیر حقیقی باشد بطوری که مشتقات جزئی $\partial u / \partial x$ و $\partial u / \partial y$ با معادله $F(\partial u / \partial x, \partial u / \partial y) = 0$ بهم مربوط شده‌اند. نشان دهید که ثابتی مانند n وجود دارد بطوری که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^n,$$

و n را پیدا نمایید. فرض کنید $\partial^2 u / (\partial x \partial y) = \partial^2 u / (\partial y \partial x)$.

۹. معادله $x + z + (y + z)^2 = 6$ را به عنوان تابعی از x و y به طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً، $z = f(x, y)$. مشتقات جزئی $\partial f / \partial x$ ، $\partial f / \partial y$ ، و $\partial^2 f / (\partial x \partial y)$ را بر حسب x, y, z و حساب کنید.

۱۰. معادله $\sin(x + y) + \sin(y + z) = 1$ را به عنوان تابعی از x و y به طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً، $z = f(x, y)$. مشتق دوم $D_{1,2}f$ را بر حسب x, y, z و حساب کنید.

۱۱. معادله $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ را به عنوان تابعی از x و y تعریف می‌کند؛ مثلاً، $z = f(x, y)$. مشتقات جزئی $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ را بر حسب x, y, z و

مشتقات جزئی D_1F و D_2F معین نمایید.

۱۲. فرض کنید f و g توابعی از یک متغیر حقیقی بوده و تعریف کنید $F(x, y) = f[x + g(y)]$. برای تمام مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم F فرمولهایی برحسب مشتقات f و g پیدا کنید. رابطه

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

را اثبات نمایید.

۹.۹ ماکزیمما، مینیمما، و نقاط زینی

یک سطح که با معادله‌ای به شکل $z = f(x, y)$ به‌طور ضمنی توصیف شده را می‌توان یک سطح تراز میدان اسکالری مانند F گرفت که با معادله

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

تعریف شده است. اگر f مشتق‌پذیر باشد، گرادیان این میدان عبارت است از بردار

$$\nabla F = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j - k.$$

معادله خطی صفحه مماس در نقطه $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$z - z_1 = A(x - x_1) + B(y - y_1),$$

که در آن

$$A = D_1 f(x_1, y_1) \quad \text{و} \quad B = D_2 f(x_1, y_1)$$

وقتی ضرایب A و B هر دو صفر باشند، نقطه P_1 را یک نقطه ایستای سطح، و نقطه (x_1, y_1) یک نقطه ایستا یا نقطه بحرانی تابع f نام دارد. صفحه مماس در یک نقطه ایستا افقی است. نقاط ایستای یک سطح معمولاً به سه دسته تقسیم می‌شوند: ماکزیمما، مینیمما، و نقاط زینی. اگر سطح دامنه یک کوه تصور شود، این رسته‌ها بترتیب متناظرند با قله‌ها، دره‌ها، و جاده‌های کوهستانی.

مفاهیم ماکزیمما، مینیمما، و نقاط زینی را می‌توان برای میدانهای اسکالر دلخواه

تعریف شده بر زیر مجموعه‌های \mathbb{R}^n نیز تعریف کرد.

تعریف. گوئیم میدان اسکالر f در نقطه a از مجموعه S در \mathbb{R}^n ماکزیمم مطلق دارد

اگر، به ازای هر x در S ،

$$(۳۳.۹) \quad f(x) \leq f(a) .$$

عدد $f(a)$ ماکزیمم مطلق f بر S نامیده می شود. گوییم تابع f در a ماکزیمم نسبی دارد اگر نامساوی (۳۳.۹) به ازای هر x در n - گویی مانند $B(a)$ جز S برقرار باشد.

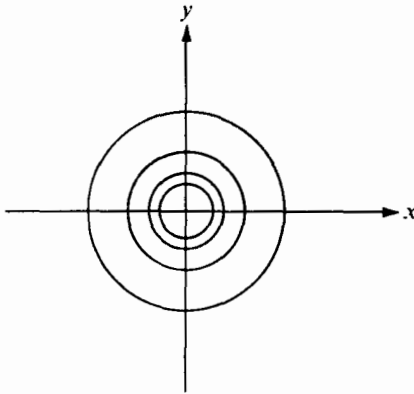
به عبارت دیگر، ماکزیمم نسبی در a ماکزیمم مطلق در همسایگی از a است. اصطلاحات مینیمم مطلق و مینیمم نسبی به همین نحو، با استفاده از نامساوی مخالف (۳۳.۹)، تعریف می شوند. صفات همه جایی و موضعی نیز گاهی بترتیب به جای مطلق و نسبی به کار خواهند رفت.

تعریف. عددی که ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی f باشد یک اکسترمم f نامیده می شود. اگر f در نقطه درونی a اکسترمم داشته و در آن مشتق پذیر باشد، جمع مشتقات جزئی مرتبه اول $D_1 f(a), \dots, D_n f(a)$ باید صفر باشند. به عبارت دیگر، $\nabla f(a) = 0$. (این را می توان، با ثابت نگهداشتن هر مولفه و تحویل مسئله به حالت یک بعدی، به آسانی اثبات کرد.) این، در حالت $n = 2$ ، یعنی یک صفحه، مماس افقی بر سطح $z = f(x, y)$ در نقطه $(a, f(a))$ وجود دارد. از آن سو، به آسانی می توان مثالهایی یافت که در آنها صفر شدن تمام مشتقات جزئی در a لزوماً "اکسترمم در a را ایجاب نمی کند. این امر در نقاط زینی روی می دهد، که به صورت زیر تعریف می شوند.

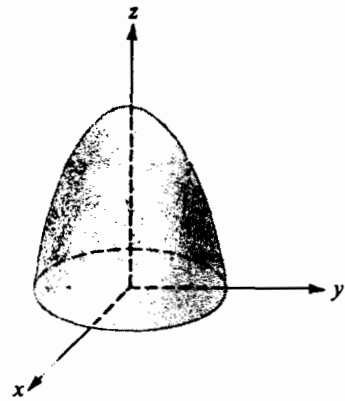
تعریف. فرض کنیم f در a مشتق پذیر باشد. اگر $\nabla f(a) = 0$ ، نقطه a یک نقطه ایستای f نامیده می شود. یک نقطه ایستا یک نقطه زینی نام دارد اگر هر n - گوی $B(a)$ شامل نقاطی که در آنها $f(x) < f(a)$ و نقاطی که در آنها $f(x) > f(a)$ باشد.

وضع بنوعی شبیه حالت یک بعدی است که در آن نقاط ایستای یک تابع به ماکزیممها، مینیممها، و نقاط عطف تقسیم می شوند. مثالهای زیر چند نوع نقطه ایستا را نشان می دهند. در هر حالت، نقطه ایستای مورد نظر مبدا است.

مثال ۱. ماکزیمم نسبی. $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. این سطح یک سهمی گون دوار

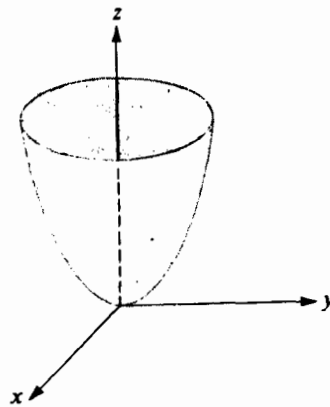


(ب) منحنیهای تراز: $x^2 + y^2 = c$



(آ) $z = 2 - x^2 - y^2$

مثال ۱. ماکزیمم نسبی در مبدأ



(پ) $z = x^2 + y^2$

مثال ۲. مینیمم نسبی در مبدأ

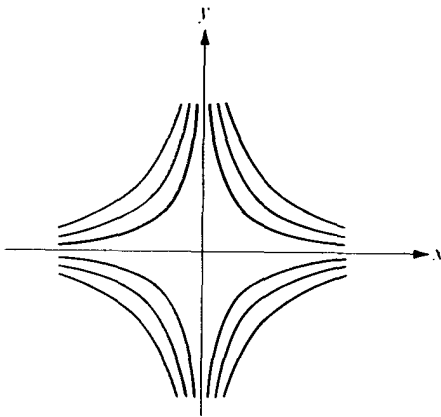
شکل ۳.۹ مثالهای ۱ و ۲

است. شکل ۳.۹ (آ) آن را در مجاورت مبدأ نشان می‌دهد. منحنیهای تراز آن دایره‌ای هستند که بعضی از آنها در شکل ۳.۹ (ب) نموده شده‌اند. چون به ازای هر (x, y) ،
 $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2) \leq 2 = f(0, 0)$ نتیجه می‌شود که f نه فقط در $(0, 0)$

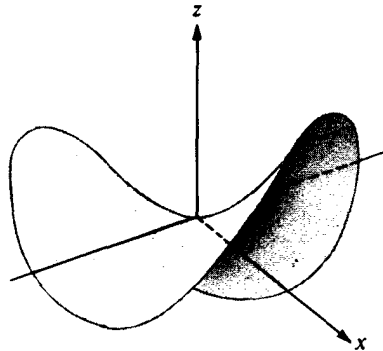
ماکزیم نسبی دارد بلکه در آنجا ماکزیمم مطلق نیز خواهد داشت. هر دو مشتق جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در مبدا صفر می‌شوند.

مثال ۲. مینیمم نسبی. $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. این مثال، که سهمی‌گون دوار دیگری است، اساساً همان مثال ۱ است، جز آنکه به‌جای ماکزیمم در مبدا مینیمم دارد. این سطح در شکل ۳.۹ (پ) در نزدیکی مبدا نموده شده است، و بعضی از منحنیهای تراز در شکل ۳.۹ (ب) نشان داده شده‌اند.

مثال ۳. نقطهٔ زینی. $z = f(x, y) = xy$. این سطح یک سهمی‌گون هذلولوی است. همانطور که شکل ۴.۹ (آ) نشان داده، سطح در نزدیکی مبدا زینی شکل است. هر دو مشتق جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در مبدا صفرند، ولی در آنجا نه ماکزیمم نسبی وجود دارد نه مینیمم نسبی. در واقع، به‌ازای هر (x, y) در ربع‌های اول و سوم، x و y متحدالعلامه‌اند، و نتیجه می‌شود که $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$ ، حال آنکه، به‌ازای نقاط ربع‌های دوم و چهارم، x و y مختلف‌العلامه‌اند، و نتیجه می‌شود که $f(x, y) < 0 = f(0, 0)$. لذا، در هر همسایگی مبدا نقاطی وجود دارند که تابع در آنها کوچکتر از $f(0, 0)$ است، و نقاطی وجود دارند که تابع در آنها بزرگتر از $f(0, 0)$ است؛ در نتیجه، مبدا یک نقطهٔ زینی

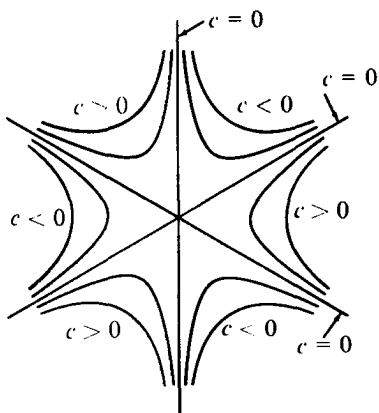


(ب) منحنیهای تراز: $xy = c$

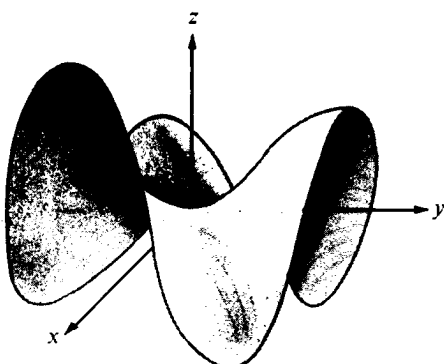


(آ) $z = xy$

شکل ۴.۹ مثال ۳. نقطهٔ زینی در مبدا



(ب) منحنیهای تراز: $x^3 - 3xy^2 = c$



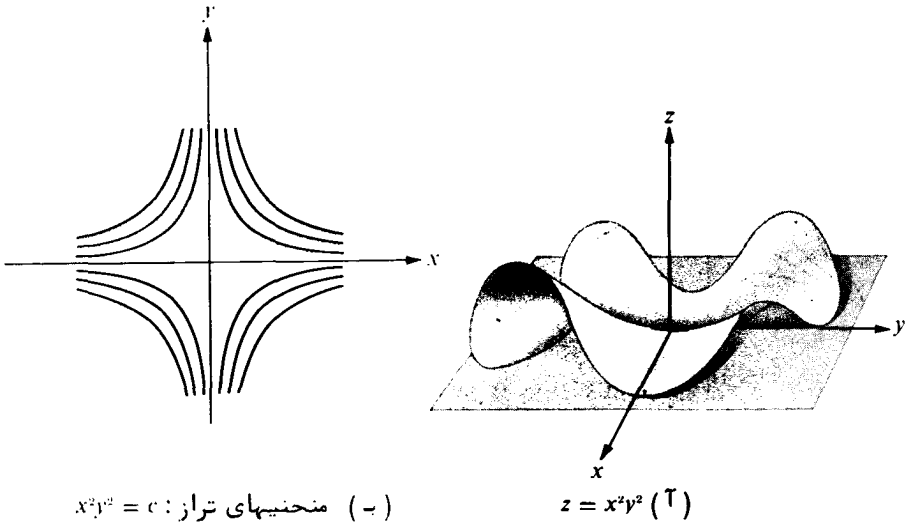
(ت) $z = x^3 - 3xy^2$

شکل ۵.۹ مثال ۴. نقطهٔ زینی در مبدا

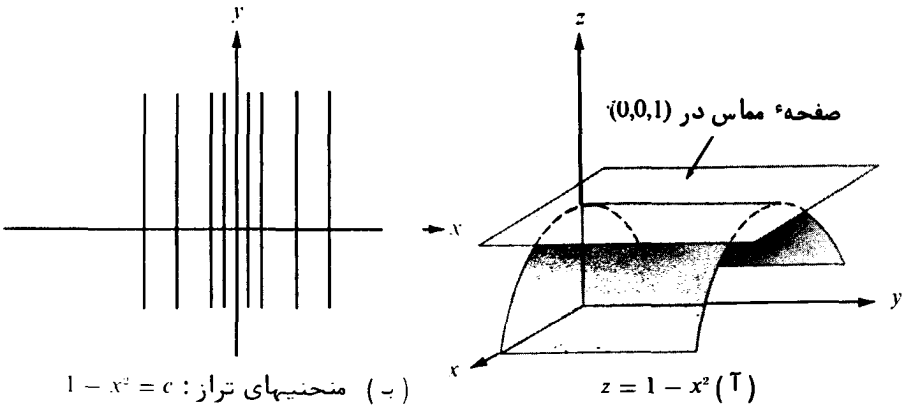
می‌باشد. وجود نقطهٔ زینی با شکل ۴.۹ (ب) نیز آشکار می‌شود، که چند منحنی تراز را نزدیک $(0, 0)$ نشان می‌دهد. اینها هذلولیهایی هستند که محورهای x و y مجانبهای آنها می‌باشند.

مثال ۴. نقطهٔ زینی. $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. این سطح، نزدیک مبدا، به شکل یک جادهٔ کوهستانی در مجاورت سه قله است. این سطح، که گاهی "زمین میمون" خوانده می‌شود، در شکل ۵.۹ (ت) نموده شده است. برخی از منحنیهای تراز در شکل ۵.۹ (ب) نموده شده است. واضح است که در مبدا یک نقطهٔ زینی وجود دارد.

مثال ۵. مینیمم نسبی. $z = f(x, y) = x^2y^2$. همانطور که شکل ۶.۹ (ت) نشان داده، این سطح به شکل یک دره است که چهار کوه آن را احاطه کرده است. در مبدا مینیمم مطلق وجود دارد، زیرا، به ازای هر (x, y) ، $f(x, y) \geq f(0, 0)$. منحنیهای تراز [که در شکل ۶.۹ (ب) نموده شده‌اند] هذلولیهایی هستند که محورهای x و y مجانبهای آنهایند. توجه کنید که این منحنیهای تراز شبیه منحنیهای تراز مثال ۳ اند. اما، در این حالت، تابع بر منحنیهای تراز خود فقط مقادیر نامنفی می‌گیرد.



شکل ۶.۹ مثال ۵. مینیمم نسبی در مبدا



شکل ۷.۹ مثال ۶. ماکزیمم نسبی در مبدا

مثال ۶. ماکزیمم نسبی. $z = f(x, y) = 1 - x^2$. در این حالت، همانطور که شکل ۷.۹ (T) نشان داده، سطح یک استوانه است که مولدهایش موازی محور y اند. مقاطع عرضی یا صفحات موازی محور x سهمیهایی هستند. واضح است که در مبدا ماکزیمم مطلق وجود دارد زیرا، بهازای هر (x, y) ، $f(x, y) = 1 - x^2 \leq 1 = f(0, 0)$ ، همانطور

که شکل ۷۰۹ (ب) نشان داده، منحنیهای تراز خانوادهای از خطوط مستقیم موازی تشکیل میدهند.

۱۰۰۹ فرمول تیلور مرتبه دوم برای میدانهای اسکالر

اگر میدان اسکالر و مشتقپذیر f در a نقطه ایستا داشته باشد، سرشت نقطه ایستا را می توان با علامت جبری تفاضل $f(x) - f(a)$ بموازای x های نزدیک a مشخص کرد. اگر $x = a + y$ ، فرمول تیلور مرتبه اول را داریم:

$$f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \|y\| E(a, y),$$

وقتی $y \rightarrow 0$ ،

$E(a, y) \rightarrow 0$. در نقطه ایستا داریم $\nabla f(a) = 0$ و فرمول تیلور خواهد شد

$$f(a + y) - f(a) = \|y\| E(a, y).$$

برای تعیین علامت جبری $f(a + y) - f(a)$ با اطلاعات بیشتری از جمله خطای $\|y\| E(a, y)$ نیاز داریم. قضیه بعدی نشان می دهد که اگر f مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در a داشته باشد، جمله خطا مساوی یک فرم درجه دوم است:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} f(a) y_i y_j$$

بعلاوه یک جمله با مرتبه ای کوچکتر از $\|y\|^2$. ضرایب فرم درجه دوم مشتقات جزئی مرتبه دوم $D_{ij} f = D_i(D_j f)$ اند که در a حساب شده اند. ماتریس $n \times n$ مشتقات مرتبه دوم $D_{ij} f(x)$ ماتریس هسی* نام دارد و با $H(x)$ نموده می شود. بنابراین،

$$H(x) = [D_{ij} f(x)]_{i,j=1}^n$$

هروقت مشتقات وجود داشته باشند. فرم درجه دوم را می توان با نماد ماتریس به صورت ساده تر نوشت:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} f(a) y_i y_j = y H(a) y^t,$$

که در آن $y = (y_1, \dots, y_n)$ به صورت یک ماتریس سطری $1 \times n$ ، و ترانهاده آن y^t به صورت یک ماتریس ستونی $n \times 1$ در نظر گرفته شده است. وقتی مشتقات جزئی $D_{ij} f$

* به نام لودویگ توهس (Ludwig Otto Hesse) (۱۸۷۴ - ۱۸۱۱)، ریاضیدان آلمانی، که در نظریه سطوح گارهای زیادی کرده است.

پیوسته باشند، داریم $D_{ij}f = D_{ji}f$ و ماتریس $H(a)$ متقارن می باشد.

حال فرمول تیلور، که تقریب درجه دوم برای $f(a+y) - f(a)$ است، شکل زیر را بخود می گیرد.

قضیه ۴۰۹. فرمول تیلور مرتبه دوم برای میدانهای اسکالر. فرض کنیم f یک میدان اسکالر با مشتقات جزئی دوم پیوسته $D_{ij}f$ در n گوی $B(a)$ باشد. در این صورت، به ازای هر y در \mathbb{R}^n که $a+y \in B(a)$ ، داریم

$$(34.9) \quad f(a+y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} y H(a+cy) y^t$$

این را می توان به شکل زیر نوشت:

$$(35.9) \quad f(a+y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} y H(a) y^t + \|y\|^2 E_2(a, y),$$

که در آن، وقتی $y \rightarrow 0$ ، $E_2(a, y) \rightarrow 0$.

برهان. y را ثابت گرفته و $g(u)$ را به ازای هر u حقیقی با معادله

$$g(u) = f(a+uy) \quad \text{به ازای } -1 \leq u \leq 1$$

تعریف می کنیم. در این صورت، $f(a+y) - f(a) = g(1) - g(0)$. قضیه را با اعمال فرمول تیلور مرتبه دوم بر g و بر بازه $[0, 1]$ ثابت می کنیم. خواهیم داشت

$$(36.9) \quad g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2!} g''(c)$$

که در آن $0 < c < 1$.

در اینجا از شکل لاگرانژ باقیمانده استفاده شده است (ر.ک. بخش ۷.۷ از جلد یک).

چون g یک تابع مرکب است که با $g(u) = f[r(u)]$ تعریف شده است، که در آن

$$r(u) = a + uy$$

در نتیجه، از قاعده زنجیرهای خواهیم داشت

$$g'(u) = \nabla f[r(u)] \cdot r'(u) = \nabla f[r(u)] \cdot y = \sum_{j=1}^n D_{ij} f[r(u)] y_j,$$

مشروط بر اینکه $r(u) \in B(a)$. بخصوص، $g'(0) = \nabla f(a) \cdot y$. اگر یکبار دیگر از قاعده

زنجیره ای استفاده کنیم، در می یابیم که

$$g''(u) = \sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n D_j f[r(u)] y_j \right) y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} f[r(u)] y_i y_j = yH[r(u)]y^t.$$

بنابراین، $g''(c) = yH(a + cy)y^t$ ؛ در نتیجه، معادله (۳۶.۹) به صورت (۳۴.۹) درمی آید.

برای اثبات (۳۵.۹) $E_2(a, y)$ را با معادله زیر تعریف می کنیم:

$$(۳۷.۹) \quad \|y\|^2 E_2(a, y) = \frac{1}{2!} y \{ H(a + cy) - H(a) \} y^t, \quad y \neq 0$$

و فرض می کنیم $E_2(a, 0) = 0$. در این صورت، معادله (۳۴.۹) شکل زیر را بخود می گیرد:

$$f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} yH(a)y^t + \|y\|^2 E_2(a, y).$$

برای اتمام برهان باید نشان دهیم که، وقتی $y \rightarrow 0$ ، $E_2(a, y) \rightarrow 0$ از (۳۷.۹) معلوم می شود که

$$\begin{aligned} \|y\|^2 |E_2(a, y)| &= \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{ D_{ij} f(a + cy) - D_{ij} f(a) \} y_i y_j \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |D_{ij} f(a + cy) - D_{ij} f(a)| \|y\|^2. \end{aligned}$$

با تقسیم بر $\|y\|^2$ ، نامساوی

$$|E_2(a, y)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |D_{ij} f(a + cy) - D_{ij} f(a)|$$

بمازای $O \neq y$ به دست می آید. چون هر مشتق جزئی مرتبه دوم $D_{ij} f$ در a پیوسته است، وقتی $y \rightarrow 0$ ، داریم $D_{ij} f(a + cy) \rightarrow D_{ij} f(a)$ ؛ در نتیجه، وقتی $y \rightarrow 0$ ، $E_2(a, y) \rightarrow 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۱.۹ سرشت نقطه ایستا که با مقادیر ویژه ماتریس هسی معین می شود

در نقطه ایستا داریم $\nabla f(a) = 0$ ؛ در نتیجه، فرمول تیلور در معادله (۳۵.۹) خواهد شد

$$f(a + y) - f(a) = \frac{1}{2} yH(a)y^t + \|y\|^2 E_2(a, y).$$

چون جمله خطای $\|y\|^2 E_2(a, y)$ سریعتر از $\|y\|^2$ به صفر میل می کند، انتظار داریم علامت

جبری $f(a+y) - f(a)$ به ازای y های کوچک با علامت فرم درجه دوم $yH(a)y'$ یکی باشد. لذا، سرشت نقطه ایستا باید با علامت جبری فرم درجه دوم معین شود. این بخش به اثبات این امر اختصاص یافته است.

ابتدا رابطه بین علامت جبری یک فرم درجه دوم و مقادیر ویژه اش را بیان می کنیم.

قضیه ۵.۹. فرض کنیم $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس متقارن حقیقی $n \times n$ بوده، و

$$Q(y) = yAy' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}y_iy_j.$$

در این صورت،

(آ) به ازای هر $y \neq 0$ ، $Q(y) > 0$ اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه A مثبت باشند.
 (ب) به ازای هر $y \neq 0$ ، $Q(y) < 0$ اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه A منفی باشند.

تذکره. در حالت (آ)، فرم درجه دوم مثبت معین نام دارد؛ در حالت (ب)، این فرم منفی معین نامیده می شود.

برهان. طبق قضیه ۱۱.۵، یک ماتریس متعامد مانند C هست که فرم درجه دوم yAy' را به شکل قطری تحویل می کند. یعنی،

$$Q(y) = yAy' = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad (38.9)$$

که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ ماتریس سطری $x = yC$ است و $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A می باشند. مقادیر ویژه حقیقی اند، زیرا A متقارن می باشد.

اگر همه مقادیر ویژه مثبت باشند، معادله (۳۸.۹) نشان می دهد که، هر وقت $x \neq 0$ ، $Q(y) > 0$. اما چون $x = yC$ ، داریم $y = xC^{-1}$. در نتیجه، اگر $x \neq 0$ و فقط اگر $y \neq 0$. از اینرو، به ازای هر $y \neq 0$ ، $Q(y) > 0$.

بعکس، اگر به ازای هر $y \neq 0$ ، $Q(y) > 0$ ، می توان y را طوری اختیار کرد که $x = yC$ بردار k ام مختصات e_k باشد. به ازای این y ، معادله (۳۸.۹) ایجاب می کند که $Q(y) = \lambda_k$. در نتیجه، هر $\lambda_k > 0$. این قسمت (آ) را ثابت می کند. برهان (ب) کاملاً مشابه خواهد بود.

قضیه بعدی سرشت نقطه ایستا را بر حسب علامت جبری فرم درجه دوم $y^t H(a)y$ توصیف می کند.

قضیه ۶۰۹. فرض کنیم f یک میدان اسکالر با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته $D_{ij}f$ در n - گوی $B(a)$ بوده، و $H(a)$ ماتریس هسی در نقطه ایستای a باشد. در این صورت،

(آ) اگر همه مقادیر ویژه $H(a)$ مثبت باشند، f در a مینیمم نسبی دارد.

(ب) اگر همه مقادیر ویژه $H(a)$ منفی باشند، f در a ماکزیمم نسبی دارد.

(پ) اگر $H(a)$ مقادیر ویژه مثبت و منفی داشته باشند، f در a نقطه زینی خواهد داشت.

برهان. فرض کنیم $Q(y) = y^t H(a)y$. از فرمول تیلور نتیجه می شود که

$$(39.9) \quad f(a+y) - f(a) = \frac{1}{2}Q(y) + \|y\|^2 E_2(a, y),$$

که در آن، وقتی $y \rightarrow 0$ ، $E_2(a, y) \rightarrow 0$. ثابت می کنیم عدد مثبتی مانند r هست بطوری که، اگر $0 < \|y\| < r$ ، علامت جبری $f(a+y) - f(a)$ با $Q(y)$ یکی است.

ابتدا فرض کنیم همه مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ، $H(a)$ مثبت باشند. فرض کنیم

h کوچکترین مقدار ویژه باشد. اگر $u < h$ ، عدد

$$\lambda_1 - u, \dots, \lambda_n - u$$

نیز مثبت هستند. این اعداد مقادیر ویژه ماتریس متقارن حقیقی $H(a) - uI$ اند، که

I ماتریس همانی $n \times n$ است. بنابر قضیه ۵۰۹، فرم درجه دوم $y^t [H(a) - uI]y$ مثبت معین است؛ و در نتیجه، به ازای هر $y \neq 0$ ، $y^t [H(a) - uI]y > 0$. لذا، به ازای هر $u < h$ حقیقی،

$$y^t H(a)y > y^t (uI)y = u \|y\|^2.$$

با فرض $u = \frac{1}{2}h$ ، نامساوی

$$Q(y) > \frac{1}{2}h \|y\|^2$$

به ازای هر $y \neq 0$ به دست می آید. چون وقتی $y \rightarrow 0$ ، $E_2(a, y) \rightarrow 0$ ، عدد مثبتی مانند r هست بطوری که، هر وقت $0 < \|y\| < r$ ، $|E_2(a, y)| < \frac{1}{4}h$. به ازای چنین

y ، داریم

$$0 \leq \|y\|^2 |E_2(a, y)| < \frac{1}{2} h \|y\|^2 < \frac{1}{2} Q(y),$$

و فرمول تیلور (۳۹۰۹) نشان می‌دهد که

$$f(a + y) - f(a) \geq \frac{1}{2} Q(y) - \|y\|^2 |E_2(a, y)| > 0.$$

بنابراین، f در a مینیمم نسبی دارد، که قسمت (T) را ثابت می‌کند. برای اثبات (ب)، می‌توان از استدلالی مشابه استفاده کرد و یا قسمت (T) را در مورد $-f$ به‌کار برد.

برای اثبات (پ)، فرض کنیم λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژه $H(a)$ با علامات مخالف باشند. قرار می‌دهیم $h = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. در این صورت، به‌ازای هر u حقیقی صادق در $-h < u < h$ ، اعداد

$$\lambda_2 - u \quad \text{و} \quad \lambda_1 - u$$

مقادیر ویژهٔ مختلف‌العلامه‌ای برای ماتریس $H(a) - uI$ اند. لذا، اگر $u \in (-h, h)$ ، فرم درجهٔ دوم $y[H(a) - uI]y$ در هر همسایگی $y = O$ مقادیر مثبت و منفی می‌گیرد. $r > 0$ را مثل بالا می‌گیریم بطوری که، هر وقت $\|y\| < r$ ، $0 < |E_2(a, y)| < \frac{1}{2} h$. در این صورت، اگر مثل بالا استدلال کنیم، می‌بینیم که، به‌ازای چنین y ، علامت جبری $f(a + y) - f(a)$ با $Q(y)$ یکی است. چون وقتی $y \rightarrow O$ ، مقادیر مثبت و منفی وجود دارند، f در a نقطهٔ زینی خواهد داشت. این برهان را تمام خواهد کرد.

تذکره. اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ $H(a)$ صفر باشند، قضیهٔ ۶.۹ اطلاعاتی از نقطهٔ ایستا به دست نمی‌دهد. برای بررسی چنین مثالهایی می‌توان از آزمونهایی شامل مشتقات مراتب بالاتر استفاده کرد، اما ما آنها را اینجا مطرح نمی‌کنیم.

۱۲.۹ آزمون مشتق دوم برای اکسترممهای توابع دومتغیره

سرشت نقطهٔ ایستا در حالت $n = 2$ را می‌توان به‌وسیلهٔ علامت جبری مشتق دوم $D_{1,1}f(a)$ و دترمینان ماتریس هسی نیز معین کرد.

قضیهٔ ۷.۹. فرض کنیم a نقطهٔ ایستای میدان اسکالر $f(x_1, x_2)$ با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته در ۲-گوی $B(a)$ باشد. همچنین،

$$A = D_{1,1}f(a), \quad B = D_{1,2}f(a), \quad C = D_{2,2}f(a),$$

$$\Delta = \det H(a) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = AC - B^2.$$

در این صورت ،

- (آ) اگر $\Delta < 0$ ، f در a نقطهٔ زینی دارد ؛
 (ب) اگر $\Delta > 0$ و $A > 0$ ، f در a مینیمم نسبی دارد ؛
 (پ) اگر $\Delta > 0$ و $A < 0$ ، f در a ماکزیمم نسبی دارد ؛
 (ت) اگر $\Delta = 0$ ، از آزمون نتیجه‌ای به دست نمی‌آید .

برهان . در این حالت ، معادلهٔ مشخص $\det [\lambda I - H(a)] = 0$ یک معادلهٔ درجهٔ دوم است :

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \Delta = 0.$$

مقادیر ویژهٔ λ_1, λ_2 با معادلات

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + C, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \Delta$$

به ضرایب مربوط می‌شوند. اگر $\Delta < 0$ ، مقادیر ویژه مختلف العلاماند ؛ در نتیجه ، f در a نقطهٔ زینی دارد ، که (آ) را ثابت می‌کند. اگر $\Delta > 0$ ، مقادیر ویژه متحدالعلامه می‌باشند. در این حالت ، $AC > B^2 \geq 0$ ؛ در نتیجه ، A و C متحدالعلامه می‌باشند. این علامت باید علامت λ_1 و λ_2 باشد ، زیرا $A + C = \lambda_1 + \lambda_2$. این (ب) و (پ) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (ت) ، به مثالهای ۴ و ۵ از بخش ۹.۹ رجوع می‌کنیم . در هر دو مثال ، در مبداء ، داریم $\Delta = 0$. در مثال ۴ مبداء یک نقطهٔ زینی است ، و در مثال ۵ یک مینیمم نسبی می‌باشد .

حتی وقتی قضیهٔ ۷.۹ قابل اجرا باشد ، ممکن است که ساده‌ترین راه برای تعیین سرشت نقطهٔ ایستا نباشد . مثلاً ، وقتی $f(x, y) = e^{1/2}(x, y)$ ، کسه دز آن $g(x, y) = x^2 + 2 + \cos^2 y - 2 \cos y$ ، آزمون قابل انجام است ، ولی محاسبات طولانی می‌باشند. در این حالت ، می‌توان $g(x, y)$ را بانوشتن $g(x, y) = 1 + x^2 + (1 - \cos y)^2$ به صورت مجموع مربعات نوشت . فوراً دیده می‌شود که f در نقاطی که $x^2 = 0$ و $(1 - \cos y)^2 = 0$ دارای ماکزیمم نسبی است. اینها ، وقتی n عدد صحیح دلخواهی باشد ،

نقاط $(0, 2n\pi)$ می‌باشند.

۱۳۰۹ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۵، نقاط ایستای (در صورت وجود) سطوحی که با معادلات دکارتی داده شده‌اند را پیدا و رده‌بندی کنید.

۱. $z = x^2 + (y - 1)^2$
۲. $z = x^2 - (y - 1)^2$
۳. $z = 1 + x^2 - y^2$
۴. $z = (x - y + 1)^2$
۵. $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$
۶. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$
۷. $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$
۸. $z = x^2y^3(6 - x - y)$
۹. $z = x^3 + y^3 - 3xy$
۱۰. $z = \sin x \cosh y$
۱۱. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$
۱۲. $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$
۱۳. $z = \sin x \sin y \sin(x + y)$, $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$
۱۴. $z = x - 2y + \log \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \arctan \frac{y}{x}$, $x > 0$
۱۵. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

۱۶. فرض کنید $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. نشان دهید که تابع بر هر خط $y = mx$ در $(0, 0)$ مینیمم دارد، ولی در هیچ همسایگی دو بعدی مبدأ مینیمم نسبی وجود ندارد. مجموعه نقاط (x, y) که در آنها $f(x, y) > 0$ و مجموعه نقاطی که در آنها $f(x, y) < 0$ را رسم کنید.

۱۷. فرض کنید $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$.
- (آ) مجموعه نقاط (x, y) که در آنها $f(x, y) \geq 0$ را رسم کنید.
 - (ب) جميع نقاط (x, y) در صفحه را بیابید که در آنها $D_1f(x, y) = D_2f(x, y) = 0$ [راهنمایی: $(3 - y)$ یک سازه $D_1f(x, y)$ است.]
 - (پ) از نقاط ایستا کدامها ماکزیمم نسبی‌اند؟ کدامها مینیمم نسبی‌اند؟ کدامها هیچک نیستند؟ برای جوابهای خود دلیل بیاورید.
 - (ت) آیا f بر تمام صفحه مینیمم مطلق یا ماکزیمم مطلق دارد؟ برای جوابهای خود دلیل بیاورید.

۱۸. همه مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق و نقاط زینی تابع $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ بر مربع $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ را تعیین کنید.

۱۹. ثابتهای a و b را طوری تعیین کنید که انتگرال

$$\int_0^1 \{ax + b - f(x)\}^2 dx$$

در صورتی که $f(x) = x^2$ (۱)؛ $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ (۲) حتی الامکان کوچک باشد.

۲۰. فرض کنید $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ ، که در آن $A > 0$ و

$$B^2 < AC$$

(۱) ثابت کنید نقطه‌ای مانند (x_1, y_1) هست که f در آن مینیمم دارد. [راهنمایی .

قسمت درجه دوم را به مجموع مربعات تبدیل کنید .

(۲) ثابت کنید که در این مینیمم $f(x_1, y_1) = Dx_1 + Ey_1 + F$

(۳) نشان دهید که

$$f(x_1, y_1) = \frac{1}{AC - B^2} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

۲۱. روش کمترین مربعات، به ازای n عدد متمایز x_1, \dots, x_n و n عدد دیگر y_1, \dots, y_n

(نه لزوماً متمایز)، عموماً "خط مستقیم" مانند $f(x) = ax + b$ وجود دارد که

از جمیع نقاط (x_i, y_i) می‌گذرد؛ یعنی، به ازای هر i ، $f(x_i) = y_i$ ، بهر حال،

می‌توان تابعی خطی جستجو کرد که "خطای مربعی کل"، یعنی

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2,$$

را مینیمم کند. مقادیر a و b را طوری بیابید که این کار عملی باشد.

۲۲. روش کمترین مربعات را به فضای ۳ تعمیم دهید. یعنی، تابع خطی

$f(x, y) = ax + by + c$ را طوری بیابید که خطای مربعی کل

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^n [f(x_i, y_i) - z_i]^2$$

را مینیمم کند، که در آن (x_i, y_i) ، n نقطه متمایز بوده و z_1, \dots, z_n ، n عدد حقیقی

می‌باشند.

۲۳. فرض کنید z_1, \dots, z_n ، n نقطه متمایز در فضای m باشند. اگر $x \in \mathbb{R}^m$ ، تعریف

کنید

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \|x - z_k\|^2.$$

ثابت کنید f در نقطه $a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$ (مرکز گون) دارای مینیمم است.

۲۴. فرض کنید a نقطه ایستای میدان اسکالر f با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در n گوی $B(a)$ باشد. ثابت کنید اگر دست کم دو دراپه قطری ماتریس هسی $H(a)$ مختلف‌العلامه باشند، f در a نقطه زینی خواهد داشت.

۲۵. تحقیق کنید که میدان اسکالر $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ در $(1, 1, 1)$ نقطه ایستادارد، و سرشت این نقطه ایستا را با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس هسی آن مشخص نمایید.

۱۴.۹ اکسترممها با قیود. ضرایب لاگرانژ

این بخش را با دو مثال از مسائل اکسترمم با قیود آغاز می‌کنیم.

مثال ۱. به فرض آنکه S سطحی است که از مبدأ نمی‌گذرد، نقاطی از S را که نزدیکترین به مبدأ هستند مشخص نمایید.

مثال ۲. اگر $f(x, y, z)$ دما در (x, y, z) باشد، ماکزیمم و مینیمم دما را بر منحنی مفروض C در فضای 3 معین نمایید.

هر دو مثال حالات خاصی از مسئله کلی زیراند: مقادیر اکسترمم میدان اسکالر $f(x, y, z)$ را، وقتی x در زیرمجموعه مفروضی از قلمرو f باشد، معین نمایید. در مثال ۱، میدان اسکالری که باید مینیمم شود تابع فاصله است:

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2};$$

زیرمجموعه قید گذار سطح مفروض S است. در مثال ۲، زیر مجموعه قید گذار منحنی مفروض C می‌باشد.

مسائل اکسترمم مقید اغلب بسیار مشکل‌اند؛ هیچ روش کلی برای حل آنها در کلیترین حالت وجود ندارد. وقتی زیر مجموعه قید گذار نهاد نسبتاً ساده‌ای دارد، مثلاً

سطحی است مانند مثال ۱ یا منحنیی مانند مثال ۲، روشهای خاصی در دست می‌باشند. در این بخش، روش ضرایب لاگرانژ را برای حل این مسائل مطرح می‌کنیم. ابتدا روش را به شکل کلی توصیف می‌کنیم، و سپس، با استدلالهایی هندسی، نشان می‌دهیم که چرا در دو مثال فوق قابل انجام است.

روش ضرایب لاگرانژ. هرگاه میدان اسکالر $f(x_1, \dots, x_n)$ تحت m قید، مثلاً

$$(۴۰.۹) \quad g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \dots, \quad g_m(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

که $m < n$ ، اکسترم موضعی داشته باشد، آنگاه m اسکالر $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ وجود دارند بطوری که، در هر نقطه اکسترم،

$$(۴۱.۹) \quad \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \dots + \lambda_m \nabla g_m.$$

برای تعیین نقاط اکسترم در عمل، دستگاه $n + m$ معادله حاصل از m معادله قیدی در (۴۰.۹) همراه با n معادله اسکالر ناشی از رابطه برداری (۴۱.۹) را در نظر می‌گیریم. این معادلات باید (در صورت امکان) نسبت به $n + m$ مجهول x_1, \dots, x_n و $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ حل شوند. نقاط (x_1, \dots, x_n) که در آنها اکسترم نسبی داریم بین جوابهای این معادلات قرار خواهند داشت.

اسکالرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ، که در حل این نوع مسائل کمک می‌کنند، ضرایب لاگرانژ نام دارند. برای هر قید یک ضرب در کار می‌آید. میدان اسکالر f و توابع قیدی g_1, \dots, g_m مشتق‌پذیر فرض می‌شوند. روش در صورتی معتبر است که تعداد قیود، یعنی m ، از تعداد متغیرها، یعنی n ، کمتر باشد، و همه دترمینانهای ژاکوبی توابع قیدی نسبت به m متغیر از x_1, \dots, x_n در مقدار اکسترم مورد بحث صفر باشند. اثبات اعتبار روش نتیجه مهمی است در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته و در اینجا بحث نخواهد شد. (ر.ک. فصل ۷ کتاب آنالیز ریاضی اپوستل^۱). در عوض، با استدلالهایی هندسی، نشان می‌دهیم که چرا این روش در دو مثال توصیف شده در ابتدای این بخش قابل انجام است.

حل هندسی مثال ۱. می‌خواهیم بر سطح مفروض S نقاطی تعیین کنیم که نزدیکترین نقاط به مبدا باشند. نقطه (x, y, z) در فضای 3 به فاصله r از مبدا قرار دارد اگر و فقط اگر بر کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

واقع باشد. این کره یک سطح تراز تابع $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ است که مینیمم شده است. اگر با $r = 0$ شروع کرده و r را افزایش دهیم تا سطح تراز نظیر ابتدا با سطح مفروض S تماس یابد، هر نقطه تماس نقطه‌ای از S است که نزدیکترین نقطه به مبدا است.

برای تعیین مختصات نقاط تماس، فرض کنیم S با معادله دکارتی $g(x, y, z) = 0$ توصیف شده باشد. اگر S در نقطه‌ای از تماس صفحه مماس داشته باشد، این صفحه باید بر سطح تراز تماس یافته نیز مماس باشد. لذا، بردار گرادیان سطح $g(x, y, z) = 0$ باید موازی بردار گرادیان سطح تراز تماس یافته $f(x, y, z) = r$ باشد. از اینرو، ثابتی چون λ هست بطوری که، در هر نقطه تماس،

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z).$$

این معادله برداری (۴۱.۹) است که به روش لاگرانژ، وقتی یک قید وجود داشته باشد، به دست می‌آید.

حل هندسی مثال ۲. مقادیر اکسترمیم تابع دمای $f(x, y, z)$ بر منحنی مفروض C را جستجو می‌کنیم. اگر منحنی C را فصل مشترک دو سطح، مثلاً

$$g_1(x, y, z) = 0 \quad \text{و} \quad g_2(x, y, z) = 0$$

بگیریم، یک مسئله اکسترمیم با دو قید خواهیم داشت. دو بردار گرادیان ∇g_1 و ∇g_2 به این سطوح قائم هستند. در نتیجه، به C ، یعنی منحنی فصل مشترک، نیز قائم خواهند بود. (ر.ک. شکل ۰.۸.۹). حال نشان می‌دهیم که بردار گرادیان ∇f تابع دما نیز در هر اکسترمیم نسبی بر C قائم به C است. این ایجاب می‌کند که ∇f در صفحه ∇g_1 و ∇g_2 قرار داشته باشد. لذا، اگر ∇g_1 و ∇g_2 مستقل باشند، می‌توان ∇f را به صورت ترکیبی خطی از ∇g_1 و ∇g_2 بیان کرد؛ مثلاً،

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2.$$

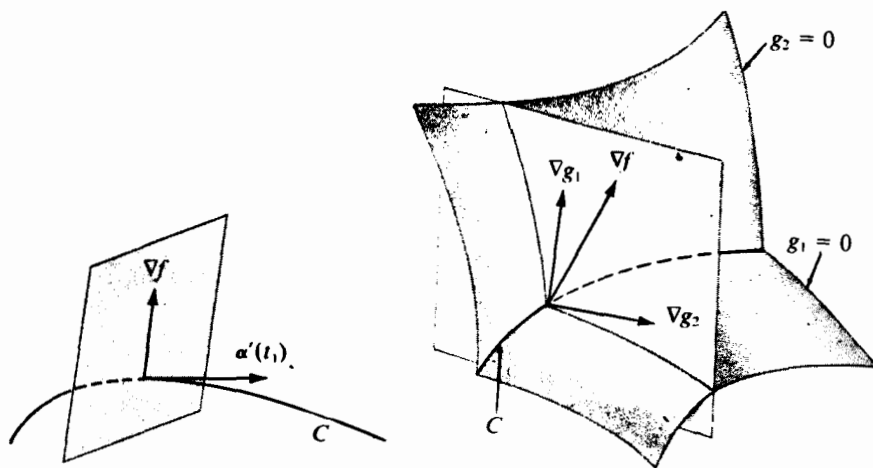
این معادله برداری (۴۱.۹) است که به روش لاگرانژ، وقتی دو قید وجود دارند، به دست

می‌آید.

برای اثبات اینکه ∇f در یکاکسترمم قائم به C است، فرض کنیم C با تابع برداری $\alpha(t)$ ، که روی بازه $[a, b]$ تغییر می‌کند، توصیف شده باشد. بر منحنی C دما تابعی از t است؛ مثلاً، " $\varphi(t) = f[\alpha(t)]$ ". اگر φ یک اکسترمم نسبی در نقطهٔ درونی t_1 از $[a, b]$ باشد، باید داشته باشیم $\varphi'(t_1) = 0$. از آن سو، قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌گوید که $\varphi'(t)$ با حاصل ضرب نقطه‌ای

$$\varphi'(t) = \nabla f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t)$$

داده می‌شود. این حاصل ضرب نقطه‌ای در t_1 صفر است؛ در نتیجه، ∇f بر $\alpha'(t_1)$ عمود است. اما $\alpha'(t_1)$ بر C مماس است؛ در نتیجه، همانطور که شکل ۹.۹ نشان داده، $\nabla f[\alpha(t_1)]$ در صفحهٔ قائم به C قرار دارد.



شکل ۹.۹ بردار گرادینان ∇f در صفحهٔ قائم به C قرار دارد.

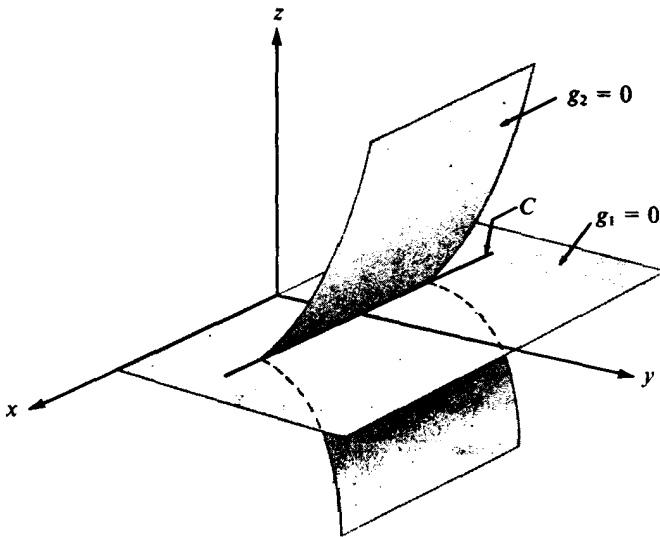
شکل ۸.۹ بردارهای ∇g_1 ، ∇g_2 ، و ∇f در یک صفحه قرار دارند.

دو بردار گرادینان ∇g_1 و ∇g_2 مستقل اند اگر و فقط اگر حاصل ضرب خارجی آنها ناصفر باشد. حاصل ضرب خارجی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\nabla g_1 \times \nabla g_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)} i + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z, x)} j + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)} k.$$

بنابراین، استقلال ∇g_2 و ∇g_1 یعنی هر سه دترمینان ژاکوبی سمت راست صفر نیستند. همانطور که قبلاً "متذکر شدیم"، روش لاگرانژ، وقتی این شرط برقرار باشد، قابل اجرا می‌باشد.

اگر ∇g_2 و ∇g_1 وابسته باشند، روش ممکن است قابل اجرا نباشد. مثلاً، سعی می‌کنیم روش لاگرانژ را برای یافتن مقادیر اکستریم $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ بر منحنی فصل مشترک دو سطح $g_1(x, y, z) = 0$ و $g_2(x, y, z) = 0$ ، که $g_1(x, y, z) = z$ و $g_2(x, y, z) = z^2 - (y-1)^2$ ، به کار ببریم. دو سطح، یعنی یک صفحه و یک استوانه، هم را در امتداد خط مستقیم C که در شکل ۱۰.۹ نشان داده شده قطع می‌کنند.



شکل ۱۰.۹ یک مثال که در آن روش لاگرانژ قابل اجرا نیست.

واضح است که مسئله جواب دارد، زیرا $f(x, y, z)$ نمایش فاصله نقطه (x, y, z) تا محور z است و این فاصله بر C وقتی مینیمم است که نقطه $(0, 1, 0)$ باشد. بهر حال، بردارهای گرادیان در این نقطه عبارتند از $\nabla g_1 = k$ ، $\nabla g_2 = 0$ ، و $\nabla f = 2j$ ، و واضح است که اسکالرهایی چون λ_1 و λ_2 که در معادله (۴۱.۹) صدق کنند وجود ندارند.

۱۵.۹ تمرین

۱. مقادیر اکستریم $z = xy$ را تحت شرط $x + y = 1$ پیدا کنید.
۲. فواصل ماکزیمم و مینیمم مبدا تا منحنی $8 = 5x^2 + 6xy + 5y^2$ را بیابید.
۳. فرض کنید a و b اعداد مثبت ثابتی باشند.
 - (آ) مقادیر اکستریم $z = x/a + y/b$ را تحت شرط $x^2 + y^2 = 1$ بیابید.
 - (ب) مقادیر اکستریم $z = x^2 + y^2$ را تحت شرط $x/a + y/b = 1$ بیابید. در هر حالت، مسئله را تعبیر هندسی نمایید.
۴. مقادیر اکستریم $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ را تحت شرط جانبی $x - y = \pi/4$ بیابید.
۵. مقادیر اکستریم میدان اسکالر $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ را بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بیابید.
۶. نزدیکترین نقاط سطح $z^2 - xy = 1$ را به مبدا بیابید.
۷. کوتاهترین فاصله نقطه $(1, 0)$ تا سهمی $y^2 = 4x$ را بیابید.
۸. نزدیکترین نقاط منحنی فصل مشترک دو سطح $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ به مبدا را بیابید.
۹. هرگاه a ، b ، و c اعداد مثبتی باشند، ماکزیمم $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ را تحت شرط جانبی $x + y + z = 1$ بیابید.
۱۰. کمترین حجم محدود به صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، و صفحه مماس بر بیضی کون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

در یک نقطه یکپهشتم $x > 0$ ، $y > 0$ ، $z > 0$ را به دست آورید.

۱۱. ماکزیمم $\log x + \log y + 3 \log z$ را بر بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ که

$x > 0, y > 0, z > 0$ پیدا کنید. با استفاده از این نتیجه، ثابت کنید به ازای اعداد حقیقی مثبت a, b, c

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5.$$

۱۲. مقطع مخروطی $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ ، که در آن $A > 0$ و $B^2 < AC$ ، مفروض است. فرض کنید m و M فواصل مبدا تا نزدیکترین و دورترین نقاط مخروطی باشند. نشان دهید که

$$M^2 = \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2(AC - B^2)}$$

و فرمول لنگه را برای m^2 پیدا نمایید.

۱۳. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، بیشترین و کمترین فاصله یک نقطه بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ تا خط مستقیم $x + y = 4$ را بهابید.

۱۴. مقطع عرضی یک تغار یک دوزنقه متساوی الساقین است. اگر تغار با خم کردن اضلاع یک نوار فلزی به عرض c اینچ ساخته شده باشد، زاویه میل اضلاع و پهنای قاعده چقدر باید باشند تا سطح مقطع عرضی ماکزیمم گردد؟

۱۶.۹ قضیه مقدار اکستریم برای میدانهای اسکالر پیوسته

قضیه مقدار اکستریم برای توابع حقیقی پیوسته بر یک بازه بسته و کراندار را می توان به میدانهای اسکالر تعمیم داد. ما میدانهای اسکالر پیوسته بر یک بازه بسته n بعدی را در نظر می گیریم. چنین بازه به صورت حاصل ضرب دکارتی n بازه بسته یک بعدی تعریف می شود. اگر $a = (a_1, \dots, a_n)$ و $b = (b_1, \dots, b_n)$ ، می نویسیم

$$\begin{aligned} [a, b] &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in [a_1, b_1], \dots, x_n \in [a_n, b_n]\}. \end{aligned}$$

مثلاً، وقتی $n = 2$ ، حاصل ضرب دکارتی $[a, b]$ یک مستطیل است.

برهان قضیه مقدار اکستریم به موازات برهان حالت 1 بعدی که در جلد یک داده شده پیش می رود. ابتدا ثابت می کنیم پیوستگی f کراندار آن را ایجاب می کند، و بعد ثابت می کنیم f جایی در $[a, b]$ ماکزیمم و مینیمم خود را خواهد گرفت.

قضیه ۸.۹. قضیه کرانداری برای میدانهای اسکالر پیوسته. هرگاه f یک میدان اسکالر پیوسته در هر نقطه a از بازه بسته $[a, b]$ در \mathbb{R}^n باشد، آنگاه f بر $[a, b]$ کراندار خواهد بود. یعنی، عددی مانند $C \geq 0$ وجود دارد بطوری که، بهازای هر x در $[a, b]$ ، $|f(x)| \leq C$.

برهان. با استفاده از روش تنصیف متوالی، به برهان خلف عمل می‌کنیم. شکل ۱۱.۹ روش را در حالت $n = 2$ نشان می‌دهد.

فرض کنیم f بر $[a, b]$ بی‌کران باشد. قرار می‌دهیم $I^{(1)} = [a, b]$ و $I_k^{(1)} = [a_k, b_k]$ در نتیجه،

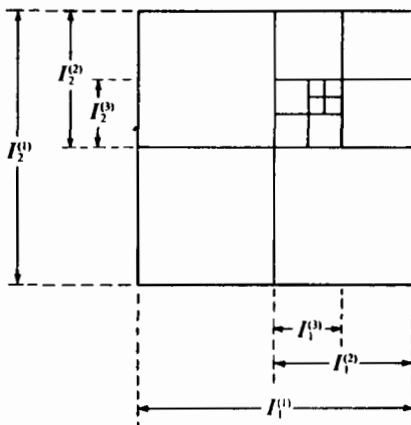
$$I^{(1)} = I_1^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)}.$$

هر بازه یک بعدی $I_k^{(1)}$ را به دوزیر بازه تنصیف می‌کنیم، نیمه چپ $I_{k,1}^{(1)}$ و نیمه راست $I_{k,2}^{(1)}$. حال تمام حاصل ضربهای دکارتی به شکل

$$I_{1,j_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{n,j_n}^{(1)}$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن هر j_i مساوی 1 یا 2 است.

دقیقا "2" حاصل ضرب این چنینی وجود دارند. هر حاصل ضرب یک زیر بازه n بعدی از $[a, b]$ است، و اجتماع آنها مساوی $[a, b]$ می‌باشد. تابع f در I اقل یکی از این زیر بازه‌ها بی‌کران است (اگر در هر یک کراندار می‌بود، بر $[a, b]$ کراندار می‌شد). یکی از



شکل ۱۱.۹ نمایش روش تنصیف متوالی در صفحه

اینها را با $I^{(2)}$ نشان می‌دهیم ، و به‌صورت زیر بیان می‌کنیم :

$$I^{(2)} = I_1^{(2)} \times \cdots \times I_n^{(2)},$$

که در آن هر $I_k^{(2)}$ یکی از زیر بازه‌های یک بعدی $I_k^{(1)}$ به طول $\frac{1}{2}(b_k - a_k)$ است .

حال با $I^{(2)}$ همان عمل با $I^{(1)}$ را می‌کنیم ، هریک از بازه‌های مولف یک بعدی $I_k^{(2)}$ را نصف کرده‌به یک بازه n بعدی مانند $I^{(3)}$ می‌رسیم که در آن f بی‌کران است . با ادامه این عمل ، یک مجموعه نامتناهی از بازه‌های n بعدی $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots$ به دست می‌آید ، با خاصیت $I^{(m+1)} \subseteq I^{(m)}$ ، که در هریک از آنها f بی‌کران است . بازه m ، یعنی $I^{(m)}$ ، را می‌توان به شکل زیر بیان کرد :

$$I^{(m)} = I_1^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}.$$

چون هر بازه $I_k^{(m)}$ یک بعدی $m-1$ با $[a_k, b_k]$ تنصیف متوالی به دست می‌آید ، اگر بنویسیم $I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}]$ ، داریم

$$(۴۳.۹) \quad b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{b_k - a_k}{2^{m-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

لذا ، به‌ازای هر k ثابت ، سوپریم تمام نقاط انتهایی چپ $a_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$) باید مساوی اینفیم تمام نقاط انتهایی راست $b_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots$) بوده و مقدار مشترک را با t_k نشان می‌دهیم . نقطه $t = (t_1, \dots, t_n)$ در $[a, b]$ قرار دارد . بنا بر پیوستگی f در t ، یک n -گوی مانند $B(t; r)$ وجود دارد که در آن

$$|f(x) - f(t)| \leq 1, \quad B(t; r) \cap [a, b]$$

این نامساوی ایجاب می‌کند که

$$|f(x)| < 1 + |f(t)|, \quad B(t; r) \cap [a, b]$$

در نتیجه ، f بر مجموعه $B(t; r) \cap [a, b]$ کراندار می‌باشد . اما این مجموعه ، وقتی m آنقدر بزرگ باشد که هر یک از n عدد (۴۳.۹) از r/\sqrt{n} کوچکتر باشد ، شامل تمام بازه $I^{(m)}$ خواهد بود . لذا ، به‌ازای هر چنین m ی ، تابع f بر $I^{(m)}$ کراندار است ، که با بی‌کران بودن f بر $I^{(m)}$ تناقض دارد . این تناقض برهان را تمام خواهد کرد .

اگر f بر $[a, b]$ کراندار باشد ، مجموعه تمام مقادیر تابعی $f(x)$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که از بالا و پایین کراندار است . لذا ، این مجموعه سوپریم و اینفیم دارد ، که به ترتیب آنها را با $\sup f$ و $\inf f$ نشان می‌دهیم . یعنی ، می‌نویسیم

$$\sup f = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \quad \inf f = \inf \{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

حال ثابت می‌کنیم یک تابع پیوسته مقادیر $\inf f$ و $\sup f$ را جایی در $[a, b]$ می‌گیرد.

قضیه ۹.۹. قضیه مقدار اکستریم برای میدانهای اسکالر پیوسته. هرگاه f بر بازه بسته $[a, b]$ در \mathbb{R}^n پیوسته باشد، نقاطی مانند c و d در $[a, b]$ وجود دارند بطوری‌که

$$f(d) = \inf f \quad \text{و} \quad f(c) = \sup f$$

برهان. کافی است ثابت کنیم f سوپریم خود را در $[a, b]$ می‌گیرد. سپس، نتیجه‌برای اینفیم حاصل است، زیرا اینفیم f سوپریم $-f$ است.

فرض کنیم $M = \sup f$. همچنین، x در $[a, b]$ نباشد که $f(x) = M$ و تناقضی به دست می‌آوریم. فرض کنیم $g(x) = M - f(x)$. در این صورت، به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $g(x) > 0$ ؛ در نتیجه، $1/g$ بر $[a, b]$ پیوسته می‌باشد. بنا بر قضیه کرانداری، $1/g$ بر $[a, b]$ کراندار است؛ مثلاً، "به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $1/g(x) < C$ ، که در آن $C > 0$." این ایجاب می‌کند که $M - f(x) > 1/C$ ؛ در نتیجه، به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $f(x) < M - 1/C$. این نقیض آن است که M کوچکترین کران بالایی f بر $[a, b]$ است. بنابراین، به‌ازای دست کم یک x در $[a, b]$ ، $f(x) = M$.

۱۷.۹ قضیه پیمای کوچک برای میدانهای اسکالر پیوسته (پیوستگی یکنواخت)

فرض کنیم f بر بازه بسته کراندار $[a, b]$ در \mathbb{R}^n پیوسته بوده، و $M(f)$ و $m(f)$ ترتیب ماکزیمم و مینیمم f بر $[a, b]$ باشند. تفاضل

$$M(f) - m(f)$$

پیمای f بر $[a, b]$ نام دارد. مثل حالت یک بعدی، قضیه پیمای کوچک برای توابع پیوسته را داریم، که می‌گوید می‌توان بازه $[a, b]$ را طوری افزایش داد که پیمای f در هر زیربازه بدلخواه کوچک باشد.

می‌نویسیم $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ، و فرض می‌کنیم P_k مجموعه‌ای

از نقاط

$$P_k = \{x_0, x_1, \dots, x_{r-1}, x_r\}$$

باشد بطوری‌که $a_k = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{r-1} \leq x_r = b_k$. حاصل ضرب دکارتی

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n$$

یک افراز بازه^{۱۰۰۹} $[a, b]$ نامیده می‌شود. حال قضیه^{۱۰۰۹} پیمای کوچک، که قضیه^{۱۰۰۹} پیوستگی یکنواخت نیز نام دارد، شکل زیر را خواهد گرفت.

قضیه^{۱۰۰۹}. فرض کنیم f یک میدان اسکالر پیوسته بر بازه^{۱۰۰۹} بسته^{۱۰۰۹} $[a, b]$ در \mathbb{R}^n باشد. در این صورت، به ازای هر $\epsilon > 0$ ، افرازی از $[a, b]$ به تعدادی متناهی زیر بازه وجود دارد بطوری که پیمای f در هر زیر بازه کوچکتر از ϵ است.

برهان. برهان کاملاً "شبهه حالت یک بعدی است؛ در نتیجه، ما مراحل عمده را به اختصار شرح می‌دهیم. با استفاده از روش تنصیف متوالی، به برهان خلف می‌رویم. فرض کنیم قضیه برقرار نباشد؛ یعنی، به ازای ϵ_0 ، بازه^{۱۰۰۹} $[a, b]$ را نتوان به تعدادی متناهی زیربازه افراز کرد که در هر یک پیمای f از ϵ_0 کمتر باشد. با تنصیف متوالی، یک مجموعه^{۱۰۰۹} نامتناهی از زیر بازه‌های $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots$ به دست می‌آید که در هر یک پیمای f دست کم ϵ_0 است. با توجه به کوچکترین کران بالایی نقاط انتهایی چپ بازه‌های مولف $I^{(1)}, I^{(2)}, \dots$ ، نقطه‌های مانند t در $[a, b]$ به دست می‌آید که در همه^{۱۰۰۹} این بازه‌ها قرار دارد. بنابراین پیوستگی f در t ، یک n -گوی مانند $B(t; r)$ هست که پیمای f در $B(t; r) \cap [a, b]$ از $\frac{1}{2}\epsilon_0$ کمتر است. اما، وقتی m به قدر کافی بزرگ باشد، بازه^{۱۰۰۹} $I^{(m)}$ در مجموعه^{۱۰۰۹} $B(t; r) \cap [a, b]$ واقع می‌شود؛ در نتیجه، پیمای f در $I^{(m)}$ بزرگتر از $\frac{1}{2}\epsilon_0$ نیست، که با این امر که پیمای f در $I^{(m)}$ دست کم ϵ_0 است تعارض دارد.

انتگرالهای خط

۱.۱۰ مقدمه

در جلد یک انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ ابتدای توابع حقیقی تعریف شده و کراندار بر بازه‌های متناهی و سپس برای توابع بی‌کران و بازه‌های نامتناهی بحث شد. این مفهوم بعداً "به توابع برداری و، در فصل ۷ جلد دو، به توابع ماتریسی تعمیم یافت.

در این فصل مفهوم انتگرال در جهتی دیگر تعمیم می‌یابد. بازه $[a, b]$ با یک منحنی در فضای n که به وسیله تابعی برداری مانند α توصیف می‌شود، تعویض می‌گردد، و انتگرالده میدانی برداری مانند f بوده که بر این منحنی تعریف شده و کراندار است. انتگرال حاصل **انتگرال خط، انتگرال منحنی الخط، یا انتگرال گنتوری** نام داشته و با $\int_C f \cdot d\alpha$ یا علامت مشابه نموده می‌شود. نقطه عمداً "برای القای حاصل ضرب داخلی دو بردار به‌کار رفته است. منحنی یک **مسیر انتگرالگیری** نامیده خواهد شد.

انتگرالهای خط در ریاضیات محض و کار بسته اهمیتی اساسی دارند. این انتگرالها در رابطه با کار، انرژی پتانسیل، جریان گرما، تغییر در آنتروپی، جریان مایعات، و هر وضعیت فیزیکی دیگری که در آن رفتار یک بردار یا میدان اسکالر در امتداد یک منحنی مطالعه می‌شود ظاهر می‌شوند.

۲.۱۰ مسیرها و انتگرالهای خط

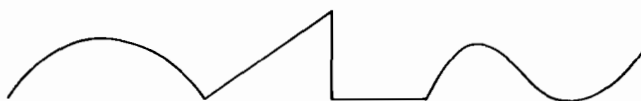
پیش از تعریف انتگرالهای خط، تعریف منحنی را که در جلد یک داده شد به یاد می‌آوریم. فرض کنیم α یک تابع برداری باشد که بر بازه بسته متناهی $J = [a, b]$ تعریف شده است. وقتی t در J تغییر کند، مقادیر تابعی $\alpha(t)$ مجموعه‌ای از نقاط در فضای n را

می‌پیماید بنام نمودار تابع. اگر α بر J پیوسته باشد، نمودار یک منحنی، به‌طور مشخص، منحنی که به‌وسیله α توصیف می‌شود، نامیده می‌شود.

در بررسی منحنیها در جلد یک معلوم شد که توابع مختلف می‌توانند یک منحنی را به طرق مختلف، مثلاً "درجهات مختلف یا سرعتهای مختلف، بپیمایند. در انتگرالهای خط ما نه فقط به مجموعه نقاط یک منحنی بلکه به نحوه پیمایش منحنی، یعنی به خود تابع α ، نیز توجه داریم. چنین تابع یک مسیر پیوسته نامیده می‌شود.

تعریف. فرض کنیم $J = [a, b]$ یک بازه بسته متناهی در \mathbb{R}^1 باشد. تابع $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ که بر J پیوسته باشد یک مسیر پیوسته در فضای n نامیده می‌شود. مسیر را هموار گوئیم اگر که α' در بازه باز (a, b) موجود و پیوسته باشد. مسیر را قطعه قطعه هموار گوئیم اگر که بازه $[a, b]$ را بتوان به تعدادی متناهی زیر بازه طوری افراز کرد که در هر یک از آنها مسیر همواره باشد.

شکل ۱۰۱۰ نمودار یک مسیر قطعه قطعه هموار را نشان می‌دهد. در این مثال، منحنی



شکل ۱۰۱۰ نمودار یک مسیر قطعه قطعه هموار در صفحه

در همه نقاط جز تعدادی متناهی نقطه خط مماس دارد. این نقاط استثنایی منحنی را به قوسهایی تقسیم می‌کنند که در امتداد هر یک خط مماس به‌طور پیوسته در تغییر است.

تعریف انتگرال خط. فرض کنیم α یک مسیر قطعه قطعه هموار در فضای n باشد که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است، و f میدانی برداری باشد که بر نمودار α تعریف شده و کراندار است. انتگرال خط f در امتداد α با علامت $\int f \cdot d\alpha$ نموده و با معادله

$$(10.10) \quad \int f \cdot d\alpha = \int_a^b f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) dt,$$

هر وقت انتگرال سمت راست به‌صورت حقیقی یا مجازی موجود باشد، تعریف می‌شود.

تذکره. در اغلب مثالهایی که در عمل پیش می‌آیند، حاصل ضرب نقطه‌ای $f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t)$ بر $[a, b]$ کراندار و جزا احتمالاً "در تعدادی متناهی نقطه پیوسته است، که در این حالت انتگرال به عنوان یک انتگرال حقیقی وجود دارد.

۳.۱۰ نمادهای دیگر برای انتگرالهای خط

اگر C نمودار α باشد، انتگرال خط $\int_C f \cdot d\alpha$ به صورت $\int_C f \cdot d\alpha$ نیز نوشته شده و انتگرال f در امتداد C نامیده می‌شود.

اگر $a = \alpha(a)$ و $b = \alpha(b)$ نقاط انتهایی C باشند، انتگرال خط گاهی به صورت $\int_a^b f \cdot d\alpha$ یا $\int_a^b f \cdot d\alpha$ نوشته شده و انتگرال خط f از a تا b در امتداد α نامیده می‌شود. در استعمال نماد $\int_a^b f \cdot d\alpha$ باید بخاطر داشت که انتگرال نه فقط به نقاط انتهایی a و b بلکه به مسیر α که آنها را بهم وصل می‌کند نیز بستگی دارد.

وقتی $a = b$ ، مسیر بسته نامیده می‌شود. علامت \oint اغلب برای انتگرالگیری در امتداد یک مسیر بسته به کار می‌رود.

وقتی f و α بر حسب مولفه‌هایشان بیان شده‌اند، مثلاً

$$f = (f_1, \dots, f_n) \quad \text{و} \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

انتگرال سمت راست (۱.۱۰) به صورت مجموعی از انتگرالها در می‌آید:

$$\sum_{k=1}^n \int_a^b f_k[\alpha(t)] \alpha'_k(t) dt.$$

در این حالت، انتگرال خط به صورت $\int f_1 d\alpha_1 + \dots + f_n d\alpha_n$ نیز نوشته می‌شود. در حالت دو بعدی، مسیر α معمولاً "با یک جفت معادله پارامتری توصیف می‌شود:

$$x = \alpha_1(t), \quad y = \alpha_2(t),$$

و انتگرال خط $\int_C f \cdot d\alpha$ به صورت $\int_C f_1 dx + f_2 dy$ یا $\int_C f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$ نوشته می‌شود.

در حالت سه بعدی، از سه معادله پارامتری

$$x = \alpha_1(t), \quad y = \alpha_2(t), \quad z = \alpha_3(t)$$

استفاده می‌کنیم، و انتگرال خط $\int_C f \cdot d\alpha$ را به صورت $\int_C f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ یا

$$\int_C f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz$$

می‌نویسیم .

مثال . فرض کنیم f یک میدان برداری دو بعدی باشد که به ازای هر (x, y) که $y \geq 0$ با

$$f(x, y) = \sqrt{y}i + (x^3 + y)j$$

داده شده است . انتگرال خط f را از $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ در امتداد هریک از مسیرهای زیر حساب کنید :

$$(A) \text{ خط به معادلات پارامتری } x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$$

$$(B) \text{ مسیر به معادلات پارامتری } x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$$

حل . برای مسیر قسمت (A) اختیار می‌کنیم $\alpha(t) = ti + tj$. در این صورت ، $\alpha'(t) = i + j$ و $f[\alpha(t)] = \sqrt{t}i + (t^3 + t)j$. از اینرو ، حاصل ضرب نقطه‌ای $f[\alpha(t)]$ و $\alpha'(t)$ مساوی است با $\sqrt{t} + t^3 + t$ و معلوم می‌شود که

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} f \cdot d\alpha = \int_0^1 (\sqrt{t} + t^3 + t) dt = \frac{17}{12} .$$

برای مسیر قسمت (B) اختیار می‌کنیم $\alpha(t) = t^2i + t^3j$. در این صورت ، $\alpha'(t) = 2ti + 3t^2j$ و $f[\alpha(t)] = t^{3/2}i + (t^6 + t^3)j$. بنابراین ،

$$f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) = 2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5 ;$$

در نتیجه ،

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} f \cdot d\alpha = \int_0^1 (2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5) dt = \frac{59}{42} .$$

این مثال نشان می‌دهد که انتگرال از یک نقطه به نقطه دیگر ممکن است به مسیر بین دو نقطه بستگی داشته باشد .

حال ، با استفاده از همین منحنی ولی با نمایش پارامتری متفاوت ، محاسبه قسمت

(B) را بار دیگر انجام می‌دهیم . همین منحنی را می‌توان با تابع

$$\beta(t) = ti + t^{3/2}j \quad \text{که در آن } 0 \leq t \leq 1$$

توصیف کرد . این نتیجه می‌دهد که

$$f[\beta(t)] \cdot \beta'(t) = (t^{3/2}i + (t^3 + t^{3/2})j) \cdot (i + \frac{3}{2}t^{1/2}j) = t^{3/2} + \frac{3}{2}t^{5/2} + \frac{3}{2}t^2,$$

که انتگرال آن از 0 تا 1 ، مثل قبل ، مساوی 59/42 است . این محاسبه نشان می دهد که مقدار انتگرال از نمایش پارامتری منحنی مستقل است . این یک خاصیت کلی انتگرالهای خط است که در بخش بعد ثابت می شود .

۴.۱۵ خواص اساسی انتگرالهای خط

چون انتگرالهای خط برحسب انتگرالهای معمولی تعریف شده اند ، برخوردار از آنها از بسیاری از خواص انتگرالهای معمولی تعجبی ندارد . مثلاً ، این انتگرالها نسبت به انتگرالده خاصیت خطی دارند :

$$\int (af + bg) \cdot d\alpha = a \int f \cdot d\alpha + b \int g \cdot d\alpha,$$

و نسبت به مسیر انتگرالگیری خاصیت جمعی دارند :

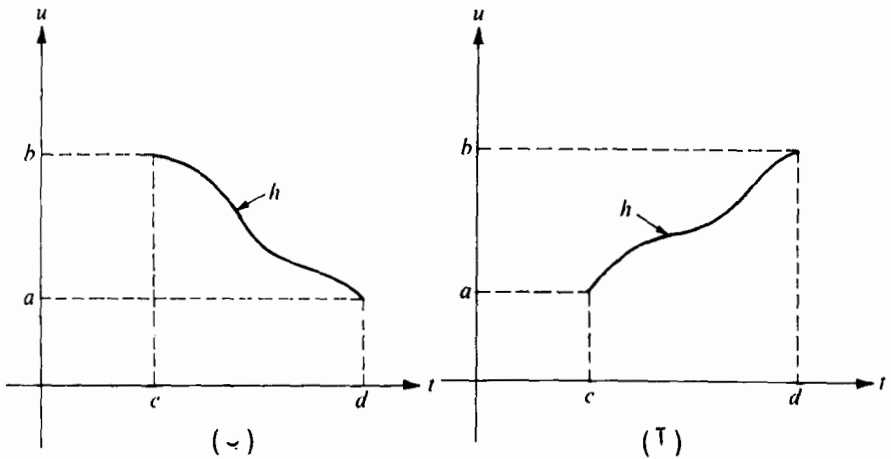
$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_{C_1} f \cdot d\alpha + \int_{C_2} f \cdot d\alpha,$$

که در آن دو منحنی C_1 و C_2 منحنی C را تشکیل می دهند . یعنی ، C با تابعی مانند α که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده توصیف می شود ، و منحنیهای C_1 و C_2 به وسیله $\alpha(t)$ با تغییر t بترتیب درزیر بازه های $[a, c]$ و $[c, b]$ ، به ازای c ای که $a < c < b$ ، پیموده می شوند . این خواص فوراً از تعریف انتگرال خط نتیجه می شوند ، و اثبات آنها به عنوان تمرین به خواننده محول می گردد .

حال رفتار انتگرالهای خط را تحت تغییر پارامتر بررسی می کنیم . فرض کنیم α یک مسیری پیوسته باشد که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است ، u تابعی حقیقی باشد که مشتق پذیر بوده و u' بر بازه $[c, d]$ هیچگاه صفر نشود و برد u $[a, b]$ باشد . در این صورت ، تابع β که بر $[c, d]$ با معادله

$$\beta(t) = \alpha[u(t)]$$

تعریف می شود یک مسیر پیوسته است که همان نمودار α را دارد . دو مسیر α و β که این طور بهم مربوط باشند معادل نامیده می شوند . کوپیم اینها نمایشهای پارامتری متفاوتی از یک منحنی هستند ، و تابع u یک تغییر پارامتر را تعریف می کند . فرض کنیم C نمودار مشترک دو مسیر معادل α و β باشد . اگر مشتق u همواره بر



شکل ۲۰۱۰ تغییر پارامترها $u = h(t)$ تعریف شده است. در (ت)، تابع h جهت را ننگه می‌دارد. در (ب)، تابع h جهت را برمی‌گرداند.

$[c, d]$ مثبت باشد، تابع u صعودی است و می‌گوییم دو مسیر α و β منحنی C را در یک جهت می‌پیمایند. اگر مشتق u همواره منفی باشد، گوییم α و β منحنی C را در جهات مختلف می‌پیمایند. در حالت اول تابع u را جهت‌نگهدار، و در حالت دوم جهت‌برگردان می‌نامیم. مثالی در شکل ۲۰۱۰ نشان داده شده است.

قضیه زیر نشان می‌دهد که انتگرال خط تحت تغییر پارامتری که جهت را ننگه می‌دارد تغییر نمی‌کند، و تحت تغییر پارامتری که جهت را برمی‌گرداند تغییر علامت می‌دهد. فرض می‌کنیم هر دو انتگرال $\int_C f \cdot d\alpha$ و $\int_C f \cdot d\beta$ موجود باشند.

قضیه ۱۰۱۰. رفتار انتگرال خط تحت تغییر پارامتر. فرض کنیم α و β مسیرهای قطعه قطعه هموار معادلی باشند. در این صورت، اگر α و β منحنی C را در یک جهت بپیمایند،

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_C f \cdot d\beta;$$

و اگر α و β منحنی C را در جهت مخالف بپیمایند،

$$\int_C f \cdot d\alpha = -\int_C f \cdot d\beta.$$

برهان. کافی است قضیه را برای مسیرهای هموار ثابت کنیم؛ سپس، به کمک خاصیت جمعی نسبت به مسیرانتگرالگیری، مطلب را برای مسیرهای قطعه قطعه هموار نتیجه می‌گیریم. اثبات کاربرد ساده‌ای از قاعدهٔ زنجیره‌ای است. مسیرهای α و β با معادله‌ای به شکل $\beta(t) = \alpha[u(t)]$ بهم مربوطند، که در آن u بر بازه $[c, d]$ و α بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است. از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\beta'(t) = \alpha'[u(t)]u'(t).$$

لذا، معلوم می‌شود که

$$\int_C f \cdot d\beta = \int_c^d f[\beta(t)] \cdot \beta'(t) dt = \int_c^d f[\alpha(u(t))] \cdot \alpha'[u(t)]u'(t) dt.$$

در انتگرال اخیر، با جانشانی $v = u(t)$ ، $dv = u'(t) dt$ ، به دست می‌آید

$$\int_C f \cdot d\beta = \int_{u(c)}^{u(d)} f(\alpha(v)) \cdot \alpha'(v) dv = \pm \int_a^b f(\alpha(v)) \cdot \alpha'(v) dv = \pm \int_C f \cdot d\alpha,$$

که در آن علامت + در صورت $a = u(c)$ و $b = u(d)$ ، و علامت - در صورت $a = u(d)$ و $b = u(c)$ است که α و β منحنی C را در یک جهت، و حالت دوم وقتی است که اینها C را در جهات مختلف می‌پیمایند.

۵.۱۰ تمرین

در هر یک از تمرینهای ۱ تا ۸، انتگرال خط میدان برداری f را در امتداد مسیر ذکر شده محاسبه کنید.

۱. $f(x, y) = (x^2 - 2xy)i + (y^2 - 2xy)j$ ، از $(-1, 1)$ تا $(1, 1)$ در امتداد سهمی $y = x^2$.

۲. $f(x, y) = (2a - y)i + xj$ ، در امتداد مسیر توصیف شده به وسیلهٔ

$$\alpha(t) = a(t - \sin t)i + a(1 - \cos t)j, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

۳. $f(x, y, z) = (y^2 - z^2)i + 2yzj - x^2k$ ، در امتداد مسیر توصیف شده به وسیلهٔ

$$\alpha(t) = ti + t^2j + t^3k, 0 \leq t \leq 1.$$

۴. $f(x, y) = (x^2 + y^2)i + (x^2 - y^2)j$ ، از $(0, 0)$ تا $(2, 0)$ در امتداد منحنی $y = 1 - |1 - x|$.

۵. $f(x, y) = (x + y)i + (x - y)j$ ، یکبار حول بیضی $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ در جهت

خلاف حرکت عقربه‌های ساعت .

۶ . $f(x, y, z) = 2xyi + (x^2 + z)j + yk$ ، از $(1, 0, 2)$ تا $(3, 4, 1)$ در امتداد یک پاره خط.

۷ . $f(x, y, z) = xi + yj + (xz - y)k$ ، از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 2, 4)$ در امتداد یک پاره خط.

۸ . $f(x, y, z) = xi + yj + (xz - y)k$ ، در امتداد مسیر توصیف شده به وسیله
 $\alpha(t) = t^2i + 2tj + 4t^3k, 0 \leq t \leq 1$

در هر یک از تمرینهای ۹ تا ۱۲ ، مقدار انتگرال خط را حساب کنید .

۹ . $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ ، که در آن C مسیری از $(-2, 4)$ تا $(1, 1)$ در امتداد سهمی $y = x^2$ است .

۱۰ . $\int_C \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$ ، که در آن C دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است که یکبار در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

۱۱ . $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ ، که در آن C مربعی است به رئوسهای $(i, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ ، و $(0, -1)$ که یکبار در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

۱۲ . $\int_C y dx + z dy + x dz$ ، که در آن

(آ) C منحنی فصل مشترک دو سطح $x + y = 2$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ است . منحنی یکبار در جهتی پیموده می‌شود که از مبدأ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دیده می‌شود .

(ب) C فصل مشترک دو سطح $z = xy$ و $x^2 + y^2 = 1$ است که یکبار در جهتی پیموده می‌شود که از بالای صفحه xy در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دیده می‌شود .

۶.۱۰ مفهوم کار به صورت انتگرال خط

جسمی را در نظر می‌گیریم که در امتداد یک منحنی و تحت میدان نیروی f در حرکت است . اگر منحنی نمودار مسیر قطعه قطعه هموار α باشد ، کار انجام شده به وسیله f مساوی انتگرال خط $\int f \cdot d\alpha$ تعریف می‌شود . مثالهای زیر چند خاصیت اساسی کار را توضیح می‌دهند .

مثال ۱. کار انجام شده به وسیله یک نیروی ثابت. اگر f نیروی ثابتی باشد، مثلاً " $f = c$ "، می توان نشان داد که کار انجام شده به وسیله f در حرکت جسم از نقطه a تا نقطه b در امتداد هر مسیر قطعه هموار بین a و b مساوی است با $c \cdot (b - a)$ ، یعنی حاصل ضرب نقطه‌ای نیرو در بردار تغییر مکان $b - a$. این مطلب را در حالتی خاص ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ یک مسیر بین a و b باشد، و مثلاً " $\alpha(a) = a$ " و " $\alpha(b) = b$ "، و می‌نویسیم $c = (c_1, \dots, c_n)$. همچنین، α' بر $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت، کار انجام شده به وسیله f مساوی است با

$$\int f \cdot d\alpha = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b \alpha'_k(t) dt = \sum_{k=1}^n c_k [\alpha_k(b) - \alpha_k(a)] = c \cdot [\alpha(b) - \alpha(a)] = c \cdot (b - a).$$

برای این میدان نیرو، کار انجام شده فقط به نقاط انتهایی a و b بستگی دارد نه به منحنی واصل بین آنها. میدانهای نیرو همه این خاصیت را ندارند. آنهایی که دارند **محافظه‌کار** نامیده می‌شوند. مثال ص ۴۴۰ یک میدان نیروی غیر محافظه‌کار است. در یکی از بخشهای آتی همه میدانهای نیروی محافظه‌کار معین خواهند شد.

مثال ۲. اصل کار و انرژی. جسمی به جرم m در امتداد یک منحنی و تحت میدان نیروی f حرکت می‌کند. اگر سرعت جسم در لحظه t مساوی $v(t)$ باشد، انرژی جنبشی آن مساوی $\frac{1}{2}mv^2(t)$ تعریف می‌شود. ثابت کنید تغییر انرژی جنبشی در هر بازه زمانی مساوی کار انجام شده به وسیله f در این بازه است.

حل. فرض کنیم $r(t)$ موضع جسم در لحظه t باشد. کار انجام شده به وسیله f در بازه زمانی $[a, b]$ عبارت است از $\int_{r(a)}^{r(b)} f \cdot dr$. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\int_{r(a)}^{r(b)} f \cdot dr = \frac{1}{2}mv^2(b) - \frac{1}{2}mv^2(a).$$

از قانون دوم حرکت نیوتن داریم

$$f[r(t)] = mr''(t) = mv'(t),$$

که در آن $v(t)$ بردار سرعت در لحظه t است. سرعت طول بردار سرعت است:

$$v(t) = \|v(t)\|,$$

$$f[r(t)] \cdot r'(t) = f[r(t)] \cdot v(t) = mv'(t) \cdot v(t) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(v(t) \cdot v(t)) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(v^2(t)).$$

با انتگرالگیری از a تا b ، خواهیم داشت

$$\int_{r(a)}^{r(b)} f \cdot dr = \int_a^b f[r(t)] \cdot r'(t) dt = \frac{1}{2}mv^2(t) \Big|_a^b = \frac{1}{2}mv^2(b) - \frac{1}{2}mv^2(a),$$

که مطلوب ما می باشد.

۷.۱۰ انتگرالهای خط نسبت به طول قوس

فرض کنیم α یک مسیر باشد که α' آن بر بازه $[a, b]$ پیوسته است. نمودار α یک منحنی با طول متناهی است. در جلد یک ثابت شد که تابع طول قوس نظیر s با انتگرال

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$$

داده می شود. مشتق طول قوس عبارت است از

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|.$$

فرض کنیم φ یک میدان اسکالر باشد که بر C ، یعنی نمودار α ، تعریف شده و کراندار است. انتگرال خط φ نسبت به طول قوس در امتداد C با علامت $\int_C \varphi ds$ نموده و با معادله

$$\int_C \varphi ds = \int_a^b \varphi[\alpha(t)]s'(t) dt,$$

در صورت موجود بودن انتگرال طرف راست، تعریف می شود.

حال میدان اسکالر φ را که با $\varphi[\alpha(t)] = f[\alpha(t)] \cdot T(t)$ ، یعنی حاصل ضرب نقطه‌ای میدان برداری f تعریف شده بر C و بردار یک‌ماس $T(t) = (d\alpha/ds)$ ، داده می شود، در نظر می گیریم. در این حالت انتگرال خط $\int_C \varphi ds$ همان انتگرال خط $\int_C f \cdot d\alpha$ است، زیرا

$$f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) = f[\alpha(t)] \cdot \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt} = f[\alpha(t)] \cdot T(t)s'(t) = \varphi[\alpha(t)]s'(t).$$

وقتی f یک میدان سرعت باشد، حاصل ضرب نقطه‌ای $f \cdot T$ مولفه ماسی سرعت است، و انتگرال خط $\int_C f \cdot T ds$ انتگرال جریان f در امتداد C نام دارد. وقتی C یک منحنی

بسته باشد، انتگرال جریان جریان بسته f در امتداد C نامیده می‌شود. این اصطلاحها در نظریهٔ جریان مایعات معمولاً "به‌کار می‌روند".

۸.۱۰ کاربردهای دیگر انتگرالهای خط

انتگرالهای خط نسبت به طول قوس در مسائل مربوط به توزیع جرم در امتداد یک منحنی پدید می‌آیند. مثلاً، C را یک منحنی در فضای 3 به صورت سیمی نازک بگیرید که از ماده‌ای با چگالی متغیر ساخته شده است. فرض کنیم چگالی با میدان اسکالر φ توصیف شود، که در آن $\varphi(x, y, z)$ جرم در واحد طول در نقطه (x, y, z) از C است. در این صورت، جرم کل M سیم مساوی انتگرال خط φ نسبت به طول قوس تعریف می‌شود:

$$M = \int_C \varphi(x, y, z) ds.$$

مرکز جرم سیم نقطه $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ تعریف می‌شود که مختصاتش با معادلات زیر معین می‌شوند:

$$\bar{x}M = \int_C x\varphi(x, y, z) ds, \quad \bar{y}M = \int_C y\varphi(x, y, z) ds, \quad \bar{z}M = \int_C z\varphi(x, y, z) ds.$$

یک سیم با چگالی ثابت را یکنواخت می‌نامند. در این حالت مرکز جرم مرکزگون نام دارد.

مثال ۱. جرم M حلقه‌ای از یک فنر به شکل مارپیچ به معادله برداری

$$\alpha(t) = a \cos t i + a \sin t j + btk$$

را در صورتی که چگالی در (x, y, z) مساوی $x^2 + y^2 + z^2$ است حساب کنید.

حل. انتگرال برای M مساوی است با

$$M = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) s'(t) dt.$$

چون $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ و $\alpha'(t) = -a \sin t i + a \cos t j + bk$ ، داریم $s'(t) = \sqrt{a^2 + b^2}$ ؛ و در نتیجه،

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt = \sqrt{a^2 + b^2} \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2 \right).$$

در این مثال، مختص z مرکز جرم، یعنی \bar{z} ، عبارت است از

$$\begin{aligned} zM &= \int_C z(x^2 + y^2 + z^2) ds = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2z} bt(a^2 + b^2t^2) dt \\ &= b\sqrt{a^2 + b^2} (2\pi^2a^2 + 4\pi^4b^2). \end{aligned}$$

مختصات \bar{x} و \bar{y} در تمرین ۱۵ از بخش ۹.۱۰ خواسته شده‌اند.

انتهای خط‌رانی توان برای تعریف گشتاور ماند یک سیم نسبت به یک محور به‌کار برد. اگر $\delta(x, y, z)$ نمایش فاصله عمودی نقطه (x, y, z) از C تا محور L باشد، گشتاور ماند I_L مساوی انتگرال خط

$$I_L = \int_C \delta^2(x, y, z) \varphi(x, y, z) ds$$

تعریف می‌شود، که در آن $\varphi(x, y, z)$ چگالی در (x, y, z) است. گشتاورهای ماند حول محورهای مختصات با I_x ، I_y ، و I_z نموده می‌شوند.

مثال ۲. گشتاور ماند I_z حلقه فنر مثال ۱ را حساب کنید.

حل. در اینجا $\delta^2(x, y, z) = x^2 + y^2 = a^2$ و $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ؛ در نتیجه، داریم

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds = a^2 \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = Ma^2,$$

که در آن M جرم، بصورتی که در مثال ۱ حساب شد، می‌باشد.

۹.۱۰ تمرین

۱. میدان نیروی f در فضای ۳ با $f(x, y, z) = xi + yzj + (xz - y)k$ داده شده است. کار انجام شده به وسیله این نیرو در حرکت یک جسم از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 2, 4)$ در امتداد پاره خط بین این دو نقطه را حساب کنید.
۲. کار انجام شده به وسیله نیروی $f(x, y) = (x^2 - y^2)i + 2xyj$ در حرکت یک جسم یکبار (در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) حول مربع محدود به محورهای مختصات و خطوط $x = a$ و $y = a$ ، $a > 0$ را به دست آورید.

۳. میدان نیروی دوبعدی f با معادله $f(x, y) = cxy\mathbf{i} + x^2y^2\mathbf{j}$ داده شده است، که در آن c یک ثابت مثبت می‌باشد. این نیرو بر جسمی که باید از $(0, 0)$ تا خط $x = 1$ در امتداد منحنی

$$y = ax^b, \quad a > 0, \quad b > 0$$

حرکت کند وارد می‌شود. مقدار a (برحسب c) را طوری بیابید که کار انجام شده به وسیله این نیرو از b مستقل باشد.

۴. میدان نیروی f در فضای 3 با فرمول $f(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x(y+1)\mathbf{k}$ داده شده است. کار انجام شده به وسیله f در حرکت یکبار جسمی حول مثلث به رئوس $(-1, 1, -1)$ ، $(1, 1, 1)$ ، $(0, 0, 0)$ با همین ترتیب را محاسبه کنید.

۵. کار انجام شده به وسیله میدان نیروی $f(x, y, z) = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$ در امتداد منحنی فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و صفحه $z = y \tan \theta$ ، که $0 < \theta < \pi/2$ ، را محاسبه کنید. مسیر مورد نظر در جهتی پیموده می‌شود که از بالای صفحه xy در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دیده می‌شود.

۶. کار انجام شده به وسیله میدان نیروی $f(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ در امتداد منحنی فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و استوانه $x^2 + y^2 = ax$ ، که $z \geq 0$ و $a > 0$ ، را حساب کنید. مسیر در جهتی پیموده می‌شود که از بالای صفحه xy در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دیده می‌شود.

در هریک از تمرینهای ۷ تا ۱۰، انتگرال خط را نسبت به طول قوس حساب کنید.

۷. $\int_C (x+y) ds$ ، که در آن C مثلث به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، و $(0, 1)$ است که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

۸. $\int_C y^2 ds$ ، که در آن C به معادله برداری زیر است:

$$\alpha(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

۹. $\int_C (x^2 + y^2) ds$ ، که در آن C به معادله برداری زیر است:

$$\alpha(t) = a(\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + a(\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

۱۰. $\int_C z ds$ ، که در آن C به معادله برداری زیر است:

$$\alpha(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

۱۱. یک سیم نیمه مستدیر یکنواخت به شعاع a را در نظر بگیرید.

(T) نشان دهید که مرکزگرم بر محور تقارن و به فاصله $2a/\pi$ از مرکز قرار دارد.

(ب) نشان دهید که گشتاور ماند حول قطر ماربر نقاط انتهایی سیم مساوی $\frac{1}{2}Ma^2$ است، که در آن M جرم سیم است.

۱۲. سیمی به شکل دایره $a^2 = x^2 + y^2 = a^2$ است. جرم و گشتاور ماند آن را حول یک قطر در صورتی تعیین کنید که چگالی در (x, y) مساوی $|x| + |y|$ باشد.

۱۳. جرم سیمی به شکل منحنی فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و صفحه $x + y + z = 0$ را در صورتی بیابید که چگالی سیم در (x, y, z) مساوی x^2 باشد.

۱۴. یک سیم یکنواخت به شکل قسمتی از منحنی فصل مشترک دو سطح $x^2 + y^2 = z^2$ و $x = y^2$ بین نقاط $(0, 0, 0)$ و $(1, 1, \sqrt{2})$ است. مختص z مرکزگرم آن را بیابید.

۱۵. مختصات \bar{x} و \bar{y} مرکز جرم حلقه فنر مثال ۱ از بخش ۸.۱۰ را معین کنید.

۱۶. برای حلقه فنر مذکور در مثال ۱ از بخش ۸.۱۰، گشتاورهای ماند I_x و I_y را حساب کنید.

۱۰.۱۰ مجموعه‌های همبند باز. استقلال از مسیر

فرض کنیم S مجموعه‌ای بازی در \mathbb{R}^n باشد. مجموعه S را همبند نامیم اگر که هر جفت از نقاط در S را بتوان با یک مسیر قطعه قطعه هموار که نمودارش در S قرار دارد بهم وصل کرد. یعنی، به ازای هر جفت نقطه a و b در S ، یک مسیر قطعه قطعه هموار مانند α که بسر $[a, b]$ تعریف شده وجود دارد بطوری که به ازای هر t در $[a, b]$ ، $\alpha(t) \in S$ و نیز $\alpha(a) = a$ و $\alpha(b) = b$.

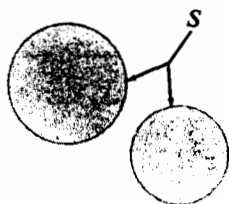
سه مثال از مجموعه‌های همبند باز در صفحه در شکل ۳.۱۰ نموده شده‌اند. مثالهایی در فضای ۳ شبه به اینها عبارتند از (T) بیضی‌گون توپر، (ب) چندوجهی توپر، و (پ) چنبره توپر؛ در هر مورد فقط نقاط درونی در نظر گرفته می‌شوند.

مجموعه S باز را ناهمبند گوئیم اگر که S اجتماع دو یا چند مجموعه باز ناتهی از هم جدا باشد. مثالی در شکل ۴.۱۰ نموده شده است. می‌توان نشان داد که رده S مجموعه‌های همبند باز با رده S مجموعه‌های باز که ناهمبند نیستند یکی است. *

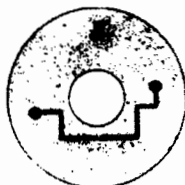
حال فرض کنیم f یک میدان برداری باشد که بر مجموعه S همبند باز پیوسته است.

* برای بحث بیشتر در باب همبندی، ر.گ. فصل ۸ کتاب اپوستل:

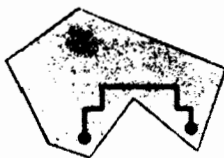
دو نقطه a و b در S اختیار کرده و انتگرال خط f از a تا b در امتداد یک مسیر قطعه قطعه هموار در S را در نظر می‌گیریم. مقدار این انتگرال، در حالت کلی، به مسیر بین a تا b بستگی دارد. برای بعضی از میدانهای برداری، این انتگرال فقط به نقاط انتهایی a و b بستگی دارد نه به مسیر بین آنها. در این حالت گوئیم انتگرال از مسیر بین a تا b مستقل است. گوئیم انتگرال خط f از مسیر در S مستقل است اگر که، به ازای هر جفت نقطه a و b در S ، از مسیر بین a تا b مستقل باشد.



شکل ۴۰۱۰ یک مجموعه ناهمبند، که اجتماع دو قرص مستدیر از هم جداست



(۴)



(۲)



(۱)

شکل ۳۰۱۰ چند نمونه از مجموعه‌های همبند باز

می‌پرسیم: چه میدانهای برداری انتگرالهای خط مستقل از مسیر دارند؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، اولین و دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را به انتگرالهای خط تعمیم می‌دهیم.

۱۱۰۱۰ دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انتگرالهای خط

دومین قضیه اساسی برای توابع حقیقی، بصورتی که در جلد یک (قضیه ۳۰۵) ثابت شد، می‌گوید که

$$\int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a),$$

مشروط بر اینکه φ' بر بازه a و b پیوسته باشد. برای تعمیم این نتیجه به انتگرالهای خط، به شکل قدری قویتر این قضیه نیاز است که در آن پیوستگی φ' فقط در بازه (a, b) فرض باشد.

قضیه ۲۰۱۰. فرض کنیم φ تابعی حقیقی باشد که بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته بوده،

وانتگرال $\int_a^b \varphi'(t) dt$ وجود داشته باشد. اگر φ' بر بازه (a, b) پیوسته باشد، داریم

$$\int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

برهان. به ازای هر x در $[a, b]$ تعریف می‌کنیم $f(x) = \int_a^x \varphi'(t) dt$. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$f(b) = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (2.10)$$

طبق قضیه ۴.۳ از جلد یک، f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است. بنا بر قضیه ۱.۵ از جلد یک، f بر بازه (a, b) مشتق‌پذیر است، با $f'(x) = \varphi'(x)$ به ازای هر x در (a, b) . بنا بر این، طبق قضیه مشتق صفر (قضیه ۲.۵ از جلد یک)، تفاضل $f - \varphi$ بر بازه (a, b) ثابت است. بنا بر پیوستگی، $f - \varphi$ نیز بر بازه بسته $[a, b]$ ثابت است. بخصوص، $f(b) - \varphi(b) = f(a) - \varphi(a)$. اما، چون $f(a) = 0$ ، این (۲.۱۰) را ثابت می‌کند.

قضیه ۳.۱۰. دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انتگرالهای خط. فرض کنیم φ یک میدان اسکالر مشتق‌پذیر با گرادیان پیوسته $\nabla\varphi$ بر مجموعه همبند باز S در \mathbb{R}^n باشد. در این صورت، به ازای هر دو نقطه a و b که با مسیر قطعه قطعه هموار α در S بهم وصل شده‌اند، خواهیم داشت

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\alpha = \varphi(b) - \varphi(a).$$

برهان. دو نقطه a و b را در S اختیار کرده و آنها را با مسیر قطعه قطعه هموار α در S که بر $[a, b]$ تعریف شده بهم وصل می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم α بر $[a, b]$ هموار باشد. در این صورت، انتگرال خط $\nabla\varphi$ از a تا b در امتداد α برابر است با

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\alpha = \int_a^b \nabla\varphi[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) dt.$$

بنا بر قاعده زنجیره‌ای، داریم

$$\nabla\varphi[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) = g'(t),$$

که در آن g تابع مرکب است که بر $[a, b]$ با فرمول

$$g(t) = \varphi[\alpha(t)]$$

تعریف شده است. g' بر بازه (a, b) پیوسته است، زیرا $\nabla \varphi$ بر S پیوسته و α هموار می باشد. بنابراین، می توان قضیه ۳.۱۰ را در مورد g به کار برد و به دست آورد که

$$\int_a^b \nabla \varphi \cdot d\alpha = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = \varphi[\alpha(b)] - \varphi[\alpha(a)] = \varphi(b) - \varphi(a).$$

این قضیه را در صورت هموار بودن α ثابت می کند.

وقتی α قطعه قطعه هموار باشد، بازه $[a, b]$ را به تعدادی متناهی (مثلاً، r) زیر بازه $[t_{k-1}, t_k]$ تقسیم می کنیم که در هر یک α هموار باشد، و نتیجه ای که هم اینک ثابت شد را در هر زیر بازه اعمال می کنیم. این کار نتیجه می دهد که

$$\int_a^b \nabla \varphi = \sum_{k=1}^r \int_{\alpha(t_{k-1})}^{\alpha(t_k)} \nabla \varphi = \sum_{k=1}^r \{\varphi[\alpha(t_k)] - \varphi[\alpha(t_{k-1})]\} = \varphi(b) - \varphi(a),$$

که همان مطلوب می باشد.

به عنوان نتیجه ای از قضیه ۳.۱۰، ملاحظه می شود که انتگرال خطی یک گرادیان از هر مسیر در مجموعه همبند بازی چون S که در آن گرادیان پیوسته است مستقل می باشد. در مورد یک مسیر بسته داریم $b = a$ ؛ در نتیجه، $\varphi(b) - \varphi(a) = 0$. به عبارت دیگر، انتگرال خطی یک گرادیان پیوسته حول هر مسیر بسته، قطعه قطعه هموار در S صفر است. در بخش ۱۴.۱۰ (در قضیه ۴.۱۰) ثابت خواهیم کرد که گرادیانها تنها میدانهای برداری پیوسته دارای این خاصیت می باشند.

۱۴.۱۰ کاربردهایی در مکانیک

اگر میدان برداری f گرادیان میدان اسکالر φ باشد، φ یک تابع پتانسیل برای f نامیده می شود. در فضای ۳ مجموعه های تراز φ را سطوح همپتانسیل، و در فضای ۲ آنها را خطوط همپتانسیل می نامند. (اگر φ دما باشد، واژه "همپتانسیل" با "همگرم" عوض می شود؛ اگر φ فشار باشد، واژه "همفشار" به کار می رود.)

مثال ۱. در فضای ۳، فرض کنیم $\varphi(x, y, z) = r^n$ ، که در آن $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

به‌ازای هر عدد صحیح n ، داریم

$$\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r},$$

که در آن $\mathbf{r} = xi + yj + zk$. (ر.ک. تمرین ۸ از بخش ۱۴۰۸). بنابراین φ پتانسیل میدان برداری

$$f(x, y, z) = nr^{n-2}\mathbf{r}$$

است. سطح همپتانسیل φ کره‌های متحدالمרכזی به مرکز مبدا می‌باشند.

مثال ۲. پتانسیل نیوتنی. قانون جاذبه نیوتن می‌گوید که نیروی f که جسمی به جرم M بر جسم دیگری به جرم m وارد می‌کند برداری است به طول GmM/r^2 ، که در آن G ثابت بوده و r فاصله بین دو جسم می‌باشد. مبدا را جسم به جرم M می‌گیریم، و فرض می‌کنیم $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ بردار موقع از مبدا تا جسم به جرم m باشد. در این صورت، $r = \|\mathbf{r}\|$ و $-\mathbf{r}/r$ بردار یکه‌ای همجهت f است؛ در نتیجه، قانون نیوتن خواهد شد

$$f = -GmMr^{-3}\mathbf{r}.$$

با اختیار $n = -1$ در مثال ۱، می‌بینیم که نیروی ثقل f گرادیان میدان اسکالر

$$\varphi(x, y, z) = GmMr^{-1}$$

است. این را پتانسیل نیوتنی می‌نامند.

کار انجام شده به‌وسیله نیروی ثقل در حرکت جسمی به جرم m از (x_1, y_1, z_1) تا

(x_2, y_2, z_2) برابر است با

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_2, y_2, z_2) = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

که در آن $r_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}$ و $r_2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2}$.

اگر دو نقطه بر یک سطح همپتانسیل واقع باشند، $r_1 = r_2$ و کاری انجام نشده است.

مثال ۳. اصل بقای انرژی مکانیکی. فرض کنیم f یک میدان نیروی پیوسته باشد که در مجموعه همبند باز S دارای پتانسیل φ است. قضیه ۳.۱۰ می‌گوید که کار انجام شده به‌وسیله f در حرکت جسمی از a تا x در امتداد یک مسیر قطعه قطعه هموار در S مساوی $\varphi(x) - \varphi(a)$ ، یعنی تغییر در تابع پتانسیل، است. در مثال ۲ از بخش ۶.۱۰ ثابت شد که این کار مساوی تغییر انرژی جنبشی جسم، یعنی $k(x) - k(a)$ ، نیز هست، که

در آن $k(x)$ انرژی جنبشی جسم در موضع x است. بنابراین، داریم

$$k(x) - k(a) = \varphi(x) - \varphi(a),$$

یا

$$(۳.۱۰) \quad k(x) - \varphi(x) = k(a) - \varphi(a).$$

اسکالر $\varphi(x) - k(x)$ انرژی پتانسیل* جسم نامیده می شود.

اگر a را ثابت گرفته و x روی مجموعه S تغییر کند، معادله (۳.۱۰) می گوید که مجموع $k(x)$ و $\varphi(x) -$ ثابت است. به عبارت دیگر، اگر میدان نیرو گرا دیان باشد، مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل یک جسم متحرک در این میدان ثابت است. در مکانیک این را اصل بقای انرژی (مکانیکی) می نامند. گوییم یک میدان نیرو با یک تابع پتانسیل محافظه کار است، زیرا انرژی کل، یعنی جنبشی بعلاوه پتانسیل، حفظ می شود. در یک میدان محافظه کار، در حرکت یک جسم حول یک منحنی بسته تا نقطه شروع کاری صورت نمی گیرد. اگر در دستگاه اصطکاک یا چسبندگی وجود داشته باشد، میدان نیرو محافظه کار نخواهد بود، زیرا اینها سعی می کنند انرژی مکانیکی را به انرژی حرارتی تبدیل کنند.

۱۳.۱۰ تمرین

۱. از مجموعه های باز S زیر در R^2 کدامها همبند هستند؟ برای هر مجموعه همبند، دونقطه متمایز دلخواه در S اختیار کرده و طرز یافتن یک منحنی قطعه قطعه هموار در S که دو نقطه را بهم وصل کنند را توضیح دهید.

(ا) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$ (ب) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 0\}$

(پ) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ (ت) $S = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$

(ث) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ ، $S = \{(x, y) \mid (x-3)^2 + y^2 > 1\}$

(ج) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ یا $S = \{(x, y) \mid (x-3)^2 + y^2 < 1\}$

۲. میدان برداری دوبعدی

$$f(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$$

داده شده است، که در آن مشتقات جزئی $\partial P/\partial y$ و $\partial Q/\partial x$ بر مجموعه باز S پیوسته اند.

* برخی مولفان $\varphi -$ را تابع پتانسیل f می نامند. در نتیجه، انرژی پتانسیل در x مساوی مقدار تابع پتانسیل φ در x است.

هرگاه f گرادیان پتانسیلی چون φ باشد، ثابت کنید در هر نقطه S

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

۳. به ازای هر میدان برداری زیر، با استفاده از تمرین ۲ ثابت کنید که f گرادیان

نیست. سپس، مسیر بسته C را طوری بیابید که $\oint_C f \neq 0$.

$$\cdot f(x, y) = yi - xj \quad (\text{آ})$$

$$\cdot f(x, y) = yi + (xy - x)j \quad (\text{ب})$$

۴. میدان برداری سه بعدی

$$f(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

داده شده است، که در آن مشتقات جزئی

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$$

بر مجموعه S پیوسته اند. هرگاه f گرادیان تابع پتانسیلی چون φ باشد،

ثابت کنید در هر نقطه از S

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

۵. به ازای هر میدان برداری زیر، با استفاده از تمرین ۴ ثابت کنید که f گرادیان

نیست. سپس، مسیر بسته C را طوری بیابید که $\oint_C f \neq 0$.

$$\cdot f(x, y, z) = yi + xj + zk \quad (\text{آ})$$

$$\cdot f(x, y, z) = xyi + (x^2 + 1)j + z^2k \quad (\text{ب})$$

۶. میدان نیروی f در فضای ۳ با معادله

$$f(x, y, z) = yi + zj + yzk$$

تعریف شده است.

(آ) معین کنید که f محافظه کار است یا نه.

(ب) کار انجام در حرکت یک جسم در امتداد منحنی توصیف شده به وسیله

$$\alpha(t) = \cos t i + \sin t j + e^t k$$

وقتی t از ۰ تا π تغییر می کند، را حساب کنید.

۷. میدان نیروی دوبعدی F به وسیله معادله

$$F(x, y) = (x + y)i + (x - y)j$$

توصیف می‌شود.

(آ) نشان دهید که کار انجام شده به وسیله این نیرو در حرکت یک جسم در امتداد منحنی

$$\alpha(t) = f(t)i + g(t)j, \quad a \leq t \leq b,$$

فقط به $f(a), f(b), g(a), g(b)$ بستگی دارد.

(ب) کار انجام شده وقتی $f(a) = 1, f(b) = 2, g(a) = 3, g(b) = 4$ را به دست آورید.

۸. یک میدان نیرو در مختصات قطبی با معادله

$$F(r, \theta) = -4 \sin \theta i + 4 \sin \theta j$$

داده شده است. کار انجام شده در حرکت یک جسم از نقطه $(1, 0)$ تا مبدا در امتداد مارپیچ به معادله قطبی $r = e^{-\theta}$ را حساب کنید.

۹. میدان نیروی شعاعی یا "مرکزی" F در صفحه را می‌توان به شکل $F(x, y) = f(r)r$ نوشت، که در آن $r = xi + yj$ و $r = \|r\|$. نشان دهید چنین میدان نیرویی محافظه‌کار است.

۱۰. کار انجام شده به وسیله نیروی $F(x, y) = (3y^2 + 2)i + 16xj$ در حرکت یک جسم از $(-1, 0)$ تا $(1, 0)$ در امتداد نیمه بالایی بیضی $b^2x^2 + y^2 = b^2$ را بیابید. کدام بیضی (یعنی، کدام مقدار از b) کار را مینیمم می‌کند؟

۱۴۰۱۰ اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انتگرالهای خط در بخش ۱۱۰۱۰ دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به انتگرالهای خط تعمیم یافت. در این بخش، اولین قضیه اساسی تعمیم خواهد یافت. به یاد می‌آوریم که اولین قضیه اساسی می‌گوید که هر انتگرال نامعین تابع پیوسته f مشتقی مساوی f دارد. یعنی، هرگاه

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

آنگاه در نقاط پیوستگی f داریم

$$\varphi'(x) = f(x).$$

برای تعمیم این قضیه به انتگرالهای خط، با میدان برداری f ، که بر مجموعه^۴ همبند باز S پیوسته است، شروع کرده، و از آن درامتداد منحنی قطعه قطعه هموار C از نقطه^۵ ثابت a در S تا نقطه^۶ دلخواه x انتگرال می‌گیریم. سپس، فرض می‌کنیم φ میدان اسکالر تعریف شده با انتگرال خط

$$\varphi(x) = \int_a^x f \cdot d\alpha$$

باشد، که در آن α منحنی C را توصیف می‌کند. چون S همبند است، به هر نقطه^۷ x در S می‌توان با چنین منحنی رسید. برای آنکه این تعریف $\varphi(x)$ بی‌ابهام باشد، لازم است بدانیم که انتگرال فقط تابع x بوده و از مسیر خاص بین a و x مستقل است. از اینرو طبیعی است انتگرال خطی از f را جستجو کنیم که از مسیر در S مستقل باشد. تحت این شرایط، تعمیم اولین قضیه^۸ اساسی شکل زیر را خواهد داشت.

قضیه^۹ ۴۰۱۰. اولین قضیه^{۱۰} اساسی برای انتگرالهای خط. فرض کنیم f یک میدان برداری باشد که بر مجموعه^{۱۱} همبند باز S در \mathbb{R}^n پیوسته است، و نیز انتگرال خط f از مسیر در S مستقل باشد. همچنین، a نقطه^{۱۲} ثابتی از S بوده و میدان اسکالر φ بر S را با معادله^{۱۳}

$$\varphi(x) = \int_a^x f \cdot d\alpha$$

تعریف می‌کنیم، که در آن α یک مسیر قطعه قطعه هموار در S بین a و x است. در این صورت، گرادیان φ موجود و مساوی f می‌باشد؛ یعنی،

$$\nabla\varphi(x) = f(x), \quad S \text{ در } x \text{ هر بازای}$$

برهان. ثابت می‌کنیم مشتق جزئی $D_k\varphi(x)$ به‌ازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ و هر x در S موجود و مساوی $f_k(x)$ ، یعنی مولفه^{۱۴} k ام $f(x)$ ، است.

فرض کنیم $B(x; r)$ یک n -گوی به مرکز x و شعاع r باشد که در S واقع است. هرگاه y یک بردار یک‌بکه باشد، نقطه^{۱۵} $x + hy$ نیز به‌ازای هر h حقیقی صادق در $0 < |h| < r$ در S است، و می‌توان خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{\varphi(x + hy) - \varphi(x)}{h}$$

را تشکیل داد. بخاطر خاصیت جمعی انتگرالهای خط، صورت این کسر را می‌توان به شکل

زیر نوشت :

$$\varphi(x + hy) - \varphi(x) = \int_x^{x+hy} f \cdot d\alpha,$$

و مسیر بین x و $x + hy$ می‌تواند هر مسیر قطعه قطعه هموار واقع در S باشد. بخصوص، می‌توان از پاره خط توصیف شده به وسیله^۴

$$\alpha(t) = x + thy, \quad 0 \leq t \leq 1$$

استفاده کرد. چون $\alpha'(t) = hy$ ، خارج قسمت تفاضلی خواهد شد

$$(۴.۱۰) \quad \frac{\varphi(x + hy) - \varphi(x)}{h} = \int_0^1 f(x + thy) \cdot y \, dt.$$

حال $y = e_k$ ، یعنی بردار یکه^۵ k ام مختصات، را اختیار کرده، و توجه می‌کنیم که انتگرالده به صورت $f(x + thy) \cdot y = f_k(x + te_k)$ درمی‌آید. سپس، تغییر متغیر — تغییر متغیر $u = ht$ ، $du = h \, dt$ را به شکل زیر می‌نویسیم :

$$(۵.۱۰) \quad \frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h f_k(x + ue_k) \, du = \frac{g(h) - g(0)}{h},$$

که در آن g تابعی است که بر بازه^۶ باز $(-r, r)$ با معادله^۶

$$g(t) = \int_0^t f_k(x + ue_k) \, du$$

تعریف می‌شود. چون هر مولفه^۶ f_k بر S پیوسته است، اولین قضیه^۶ اساسی برای انتگرالهای معمولی می‌گوید که $g'(t)$ به ازای هر t در $(-r, r)$ وجود دارد و

$$g'(t) = f_k(x + te_k).$$

بخصوص، $g'(0) = f_k(x)$. لذا، اگر در (۵.۱۰) فرض کنیم $h \rightarrow 0$ ، معلوم می‌شود که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = f_k(x).$$

این ثابت می‌کند که مشتق جزئی $D_k \varphi(x)$ موجود و مساوی $f_k(x)$ است، که حکم مطلوب می‌باشد.

۱۵.۱۰ شرایط لازم و کافی برای گرادیان بودن یک میدان برداری

اولین و دومین قضیه^۶ اساسی برای انتگرالهای خط با هم می‌گویند که شرط لازم و کافی

برای آنکه یک میدان برداری پیوسته بر مجموعه^۵ باز همبندی گرادیان باشد آن است که انتگرال خط آن بین دو نقطه از مسیر مستقل باشد. حال ثابت می‌کنیم این شرط معادل این است که انتگرال خط حول هر مسیر قطعه قطعه هموار بسته صفر است. همه^۶ این شرطها در قضیه^۶ زیر خلاصه شده‌اند.

قضیه^{۵.۱۰}. شرایط لازم و کافی برای گرادیان بودن یک میدان برداری. فرض کنیم f یک میدان برداری پیوسته بر مجموعه^۷ همبند باز S در \mathbb{R}^n باشد. در این صورت، سه حکم زیر معادل می‌باشند:

(۱) f گرادیان تابع پتانسیلی در S است؛

(ب) انتگرال خط f از مسیر در S مستقل است؛

(پ) انتگرال خط f حول هر مسیر قطعه قطعه هموار بسته در S صفر است.

برهان. ثابت می‌کنیم (ب) حکم (۱)، (۱) حکم (پ)، و (پ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند. حکم (ب) حکم (۱) را بخاطر اولین قضیه^۸ اساسی ایجاب می‌کند. دومین قضیه^۹ اساسی نشان می‌دهد که (۱) حکم (پ) را نتیجه می‌دهد.

برای اتمام برهان، نشان می‌دهیم (پ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم (پ) برقرار بوده و C_1 و C_2 دو منحنی قطعه قطعه هموار در S با نقاط انتهایی یکسان باشند. همچنین، C_1 نمودار تابعی چون α باشد که بر بازه^{۱۰} $[a, b]$ تعریف شده است، و C_2 نمودار تابعی چون β باشد که بر $[c, d]$ تعریف شده است.

تابع جدید γ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & , a \leq t \leq b \\ \beta(b + d - t) & , b \leq t \leq b + d - c \end{cases}$$

در این صورت، γ منحنی بسته^{۱۱} C را توصیف می‌کند بطوری که

$$\oint_C f \cdot d\gamma = \int_{C_1} f \cdot d\alpha - \int_{C_2} f \cdot d\beta.$$

چون بخاطر (پ) $\oint_C f \cdot d\gamma = 0$ ، داریم $\int_{C_1} f \cdot d\alpha = \int_{C_2} f \cdot d\beta$ ؛ در نتیجه، انتگرال f از مسیر مستقل است. این (ب) را ثابت می‌کند. بنابراین، (۱)، (ب)، و (پ) معادل می‌باشند.

تذکره. اگر به ازای منحنی بسته خاص C ، $f_C \neq 0$ ، f گرادیان نیست. با اینحال، اگر انتگرال خط f_C به ازای منحنی بسته خاصی چون C یا حتی به ازای بی نهایت منحنی بسته صفر باشد، f لزوماً "گرادیان نمی باشد". مثلاً، به آسانی می توان تحقیق کرد که انتگرال خط میدان برداری $f(x, y) = xi + xyj$ به ازای هر دایره C به مرکز مبدا صفر است. معهداً، این میدان برداری خاص گرادیان نیست.

۱۶.۱۵ شرایط لازم برای گرادیان بودن یک میدان برداری

با استفاده از اولین قضیه اساسی، می توان گرادیان بودن یا نبودن یک میدان برداری بر مجموعه همبند بازی چون S را معین کرد. اگر انتگرال خط f از مسیر در S مستقل باشد، میدان اسکالر q را با انتگرالگیری از f از نقطه ثابتی تا نقطه دلخواه x در S در امتداد یک مسیر مناسب در S تعریف می کنیم. سپس، مشتقات جزئی q را حساب کرده و $D_k q$ را با f_k ، یعنی مولفه k ام f ، مقایسه می کنیم. هرگاه به ازای هر x در S و هر k ، $D_k q(x) = f_k(x)$ ، آنگاه f بر S گرادیان و q پتانسیل است. هرگاه به ازای k و x ، $D_k q(x) \neq f_k(x)$ ، آنگاه f بر S گرادیان نمی باشد.

قضیه زیر آزمون دیگری برای تعیین گرادیان نبودن میدان برداری f به دست می دهد. این آزمون بخصوص در عمل مفید است، زیرا به انتگرالگیری نیازی ندارد.

قضیه ۱۶.۱۵. شرایط لازم برای گرادیان بودن یک میدان برداری. فرض کنیم $f = (f_1, \dots, f_n)$ یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر بر مجموعه باز S در \mathbb{R}^n باشد. هرگاه f بر S گرادیان باشد، آنگاه مشتقات جزئی مولفه های f با معادلات زیر بهم مربوط می باشند. به ازای $i, j = 1, 2, \dots, n$ و هر x در S ،

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x). \quad (16.15)$$

برهان. اگر f گرادیان باشد، به ازای تابع پتانسیلی چون φ ، $f = \nabla \varphi$. این یعنی به ازای هر $j = 1, 2, \dots, n$ ،

$$f_j = D_j \varphi.$$

با مشتقگیری از طرفین این معادله نسبت به x_i ، معلوم می شود که

$$D_i f_j = D_i D_j \varphi.$$

بهمین نحو، داریم

$$D_j f_i = D_j D_i \varphi.$$

چون مشتقات جزئی $D_i f_j$ و $D_j f_i$ بر S پیوسته‌اند، دو مشتق جزئی مخلوط $D_i D_j \varphi$ و $D_j D_i \varphi$ باید بر S مساوی باشند. این (۶.۱۵) را ثابت خواهد کرد.

مثال ۱. معین کنید که میدان برداری

$$f(x, y) = 3x^2 y i + x^3 y j$$

بر زیر مجموعه‌ای بازی از \mathbb{R}^2 گرادیان هست یا نه.

حل. در اینجا داریم

$$f_1(x, y) = 3x^2 y, \quad f_2(x, y) = x^3 y.$$

مشتقات جزئی $D_1 f_2$ و $D_2 f_1$ عبارتند از

$$D_2 f_1(x, y) = 3x^2, \quad D_1 f_2(x, y) = 3x^2 y.$$

چون $D_2 f_1(x, y) \neq D_1 f_2(x, y)$ جز وقتی $x = 0$ یا $y = 1$ ، این میدان برداری بر هیچ زیرمجموعه‌ای بازی از \mathbb{R}^2 گرادیان نیست.

مثال زیر نشان می‌دهد که شرایط قضیه ۶.۱۵ همیشه برای گرادیان بودن یک میدان

برداری کافی نیستند.

مثال ۲. فرض کنیم S مجموعه‌ای تمام $(0, 0) \neq (x, y)$ هایی در \mathbb{R}^2 باشد، و میدان برداری f بر S با معادله

$$f(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} i + \frac{x}{x^2 + y^2} j$$

تعریف شده باشد. نشان دهید که همه‌جا بر S ، $D_1 f_2 = D_2 f_1$ ولی، با اینحال، f بر S گرادیان نیست.

حل. به آسانی می‌شود تحقیق کرد که به‌ازای هر (x, y) در S ، $D_1 f_2(x, y) = D_2 f_1(x, y)$.

(ر.ک. تمرین ۱۷ در بخش ۱۸.۱۰).

برای اثبات گرادیان نبودن f بر S ، انتگرال خط f را حول دایره^۱ یکه^۲

$$\alpha(t) = \cos t i + \sin t j, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

حساب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\oint_C f \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

چون انتگرال خط حول این مسیر بسته صفر نیست، f بر S گرادیان نمی‌باشد. خواص دیگر این میدان برداری در تمرین ۱۸ از بخش ۱۸.۱۰ مطرح می‌شوند.

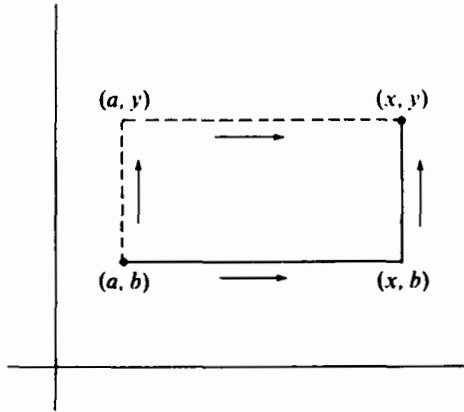
در آخر این فصل ثابت می‌کنیم که شرایط لازم قضیه^۳ ۶.۱۰ اگر بر مجموعه^۴ محدب بازی برقرار باشند کافی نیز هستند. (ر.ک. قضیه^۵ ۰.۹.۱۰).

۱۷.۱۰ روشهای خاص برای ساختن توابع پتانسیل

اولین قضیه^۶ اساسی برای انتگرالهای خط روشی را نیز برای ساختن توابع پتانسیل به دست می‌دهد. هرگاه f گرادیان پیوسته‌ای بر مجموعه^۷ همبند باز S باشد، انتگرال خط f از مسیر در S مستقل است. بنابراین، می‌توان پتانسیل φ را با صرفاً^۸ "انتگرالگیری از f از نقطه^۹ ثابتی مانند a تا نقطه^{۱۰} دلخواه x در S ، با استفاده از یک مسیر قطعه قطعه هموار واقع در S ، به دست آورد. میدان اسکالر حاصل به نقطه^{۱۱} شروع a بستگی دارد. اگر با نقطه^{۱۲} شروع دیگری، مثلاً^{۱۳} " b ، آغاز کنیم، پتانسیل جدید ψ را خواهیم داشت. اما، بخاطر خاصیت جمعی انتگرالهای خط، φ و ψ فقط می‌توانند در یک ثابت تفاوت داشته باشند، و این ثابت انتگرال f از a تا b می‌باشد. امثله^{۱۴} زیر استفاده از مسیرهای مختلف انتگرالگیری را توضیح خواهند داد.

مثال ۱. ساختن پتانسیل بزرگ مستطیل باز. هرگاه f گرادیان پیوسته‌ای بر یک مستطیل باز در \mathbb{R}^n باشد، پتانسیل φ را می‌توان با انتگرالگیری از یک نقطه^{۱۵} ثابت تا نقطه‌ای دلخواه در امتداد مجموعه‌ای از پاره خطهای موازی محورهای مختصات ساخت. یک مثال دوبعدی در شکل ۵.۱۰^{۱۶} نموده شده است.

می‌توان ابتدا از (a, b) تا (x, b) در امتداد یک پاره خط افقی، بعد از (x, b) تا (x, y) در امتداد یک پاره خط قائم انتگرال گرفت. در امتداد پاره خط افقی از نمایش پارامتری



شکل ۵.۱۰ دو مسیر چندضلعی از (a, b) تا (x, y)

$$\alpha(t) = ti + bj, \quad a \leq t \leq x,$$

و در امتداد پاره خط قائم از نمایش

$$\alpha(t) = xi + tj, \quad b \leq t \leq y$$

استفاده می‌کنیم. اگر $f(x, y) = f_1(x, y)i + f_2(x, y)j$ ، فرمول حاصل برای پتانسیل $\varphi(x, y)$ عبارت است از

$$(۷.۱۰) \quad \varphi(x, y) = \int_a^x f_1(t, b) dt + \int_b^y f_2(x, t) dt.$$

می‌شد ابتدا از (a, b) تا (a, y) در امتداد یک پاره خط قائم و سپس از (a, y) تا (x, y) در امتداد یک پاره خط افقی، بصورتی که با خطوط منقطع در شکل ۵.۱۰ نشان داده شده، نیز انتگرال گرفت. با این‌کار فرمول دیگری برای $\varphi(x, y)$ به دست می‌آید:

$$(۸.۱۰) \quad \varphi(x, y) = \int_b^y f_2(a, t) dt + \int_a^x f_1(t, y) dt.$$

هر دو فرمول (۷.۱۰) و (۸.۱۰) یک مقدار برای $\varphi(x, y)$ به دست می‌دهند، زیرا انتگرال خطی یک گرادیان از مسیر مستقل است.

مثال ۲. ساختن تابع پتانسیل با استفاده از انتگرالهای نامعین. انتگرالهای نامعین

اغلب در ساده سازی محاسبات توابع پتانسیل یاری دهنده اند. مثلاً، فرض کنیم میدان برداری سهمی $f = (f_1, f_2, f_3)$ گرادیان تابع پتانسیل φ بر مجموعه S در \mathbb{R}^3 باشد. در این صورت، همگرا بر S داریم

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3.$$

با استفاده از انتگرالهای نامعین و انتگرالگیری از معادله اول نسبت به x (ثابت گرفتن y و z)، معلوم می شود که

$$\varphi(x, y, z) = \int f_1(x, y, z) dx + A(y, z),$$

که در آن $A(y, z)$ "ثابت انتگرالگیری" است که باید معین شود. به همین نحو، اگر از معادله $\partial \varphi / \partial y = f_2$ نسبت به y و از معادله $\partial \varphi / \partial z = f_3$ نسبت به z انتگرال بگیریم، روابط دیگر

$$\varphi(x, y, z) = \int f_2(x, y, z) dy + B(x, z)$$

و

$$\varphi(x, y, z) = \int f_3(x, y, z) dz + C(x, y)$$

را خواهیم داشت، که در آنها $B(x, z)$ و $C(x, y)$ توابعی هستند که باید معین شوند. یافتن φ یعنی یافتن سه تابع $A(y, z)$ ، $B(x, z)$ ، و $C(x, y)$ بطوری که طرفهای راست هر سه معادله برای $\varphi(x, y, z)$ یکی باشند. این، همانطور که مثال زیر نشان می دهد، در بسیاری حالات با امتحان صورت می گیرد.

مثال ۳. برای میدان برداری تعریف شده بر \mathbb{R}^3 با معادله

$$f(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1)i + (x^2z - 4xy)j + (x^2y + 2xz - 2)k$$

تابع پتانسیل φ را پیدا کنید.

حل. بی آنکه از قبل بدانیم که f تابع پتانسیلی چون φ دارد یا نه، سعی می کنیم، با فرض وجود پتانسیل φ ، پتانسیلی همانند مثال ۲ که مختصراً توضیح شده بسازیم.

با انتگرالگیری از مولفه f_1 نسبت به x ، معلوم می شود که

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1) dx + A(y, z) \\ &= x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x + A(y, z). \end{aligned}$$

با انتگرالگیری از f_2 نسبت به y و سپس از f_3 نسبت به z ، داریم

$$\varphi(x, y, z) = \int (x^2z - 4xy) dy + B(x, z) = x^2yz - 2xy^2 + B(x, z).$$

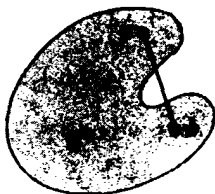
$$\varphi(x, y, z) = \int (x^2y + 2xz - 2) dz + C(x, y) = x^2yz + xz^2 - 2z + C(x, y).$$

با امتحان دیده می‌شود که انتخابهای $A(y, z) = -2z$ ، $B(x, z) = xz^2 + x - 2z$ ، و $C(x, y) = x - 2xy^2$ سه معادله را یکسان می‌کند؛ بنابراین، تابع φ که با معادله

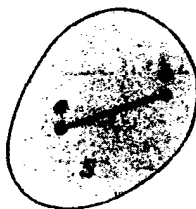
$$\varphi(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z$$

داده می‌شود یک پتانسیل برای f بر R^3 است.

مثال ۴. ساختن پتانسیل بر یک مجموعهٔ محدب. مجموعهٔ S در R^n را محدب نامیم اگر که هر جفت نقطه در S را بتوان با پاره خطی که همهٔ نقاطش در S است بهم وصل کرد. مثالی در شکل ۶.۱۰ نموده شده است. هر مجموعهٔ محدب باز همینند است.



نامحدب



محدب

شکل ۶.۱۰ در مجموعهٔ محدب S ، پاره خط واصل بین a و b به‌ازای هر دو نقطهٔ a و b در S است.

اگر f گرادیان پیوسته‌ای بر یک مجموعهٔ محدب باز باشد، پتانسیل φ را می‌توان با انتگرالگیری از f از نقطهٔ ثابت a در S تا نقطهٔ دلخواه x در امتداد پاره خط واصل بین a و x ساخت. این پاره خط را می‌توان با تابع

$$\alpha(t) = a + t(x - a), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

پارامتریزه کرد. از این نتیجه می‌شود که $\alpha'(t) = x - a$ ؛ در نتیجه، پتانسیل نظیر از

$$(9.10) \quad \varphi(x) = \int_0^1 f(a + t(x - a)) \cdot (x - a) dt$$

به دست می‌آید.

اگر γ شامل مبدا باشد، می‌توان $a = 0$ را اختیار کرد و (۹.۱۰) را به‌طور ساده‌تر به صورت

$$(10.10) \quad \varphi(x) = \int_0^1 f(tx) \cdot x dt$$

نوشت.

۱۸.۱۰ تمرین

درهریک از تمرینهای ۱ تا ۱۲، میدان برداری f با فرمولهای داده شده تعریف شده است. در هر حالت معین کنید که f گرادیان یک میدان اسکالر هست یا نه. وقتی f گرادیان است، تابع پتانسیل نظیر φ را بیابید.

$$1. f(x, y) = xi + yj$$

$$2. f(x, y) = 3x^2yi + x^3zj$$

$$3. f(x, y) = (2xe^y + y)i + (x^2e^y + x - 2y)j$$

$$4. f(x, y) = (\sin y - y \sin x + x)i + (\cos x + x \cos y + y)j$$

$$5. f(x, y) = [\sin(xy) + xy \cos(xy)]i + x^2 \cos(xy)j$$

$$6. f(x, y, z) = xi + yj + zk$$

$$7. f(x, y, z) = (x + z)i - (y + z)j + (x - y)k$$

$$8. f(x, y, z) = 2xy^2i + x^2z^3j + 3x^2yz^2k$$

$$9. f(x, y, z) = 3y^4z^2i + 4x^3z^2j - 3x^2y^2k$$

$$10. f(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2)i + (3x^3y - 3xy)j - (4y^2z^2 + 2x^3z)k$$

$$11. f(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3)i - (4 - 2y \sin x)j + (3xz^2 + 2)k$$

$$12. f(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1)i + 2(x^2 + 1)j - (2x^3z + 3z^2)k$$

۱۳. مایعی در صفحه xy جریان دارد. هر ذره به‌طور مستقیم از مبدا دور می‌شود. اگر

یک ذره در فاصله r از مبدا سرعتش ar^n باشد که در آن a و n ثابت‌اند،

(T) مقادیر a و n را طوری بیابید که میدان برداری سرعت گرادیان میدان اسکالری باشد؛

(ب) وقتی سرعت گرادیان است، تابع پتانسیلی برای آن به دست آورید. حالت $n = -1$ باید جداگانه بررسی شود.

۱۴. اگر φ و ψ هر دو تابع پتانسیل برای میدان برداری پیوسته f بر مجموعه S همبند باز در \mathbb{R}^n باشند، ثابت کنید که $\varphi - \psi$ بر S ثابت است.

۱۵. فرض کنید S مجموعه تمام $x \neq 0$ های در \mathbb{R}^n باشد. همچنین، $r = \|x\|$ ، و f میدان برداری تعریف شده بر S با معادله

$$f(x) = r^p x$$

باشد، که در آن p یک ثابت حقیقی است. برای f یک تابع پتانسیل بر S پیدا کنید. حالت $p = -2$ باید جداگانه بررسی شود.

۱۶. تمرین ۱۵ را برای میدان برداری تعریف شده با معادله

$$f(x) = \frac{g'(r)}{r} x,$$

که در آن g تابعی حقیقی است که همه جا بر \mathbb{R}^1 مشتق پیوسته دارد، حل کنید. تمرینهای زیر در رابطه با میدان برداری f است که بر مجموعه S مرکب از تمام نقاط $(x, y) \neq (0, 0)$ در \mathbb{R}^2 با معادله

$$f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

تعریف شده است. در مثال ۲ از بخش ۱۶.۱ نشان دادیم که، اگرچه همه جا بر S ،

$$D_1 f_2 = D_2 f_1$$

تحقیق کنید که به ازای هر نقطه (x, y) در S ، داریم

$$D_1 f_2(x, y) = D_2 f_1(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

۱۸. این تمرین نشان می دهد که f بر مجموعه

$$T = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid y = 0, x \leq 0\}$$

مرکب از تمام نقاط صفحه xy جز نقاط واقع بر محور نامثبت x یک گرادیان است.

(A) اگر $(x, y) \in T$ ، x و y را در مختصات قطبی

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

بیان کنید، که در آنها $r > 0$ و $-\pi < \theta < \pi$. ثابت کنید θ از فرمولهای زیر به دست می‌آید:

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & , \quad x > 0 \text{ اگر} \\ \frac{\pi}{2} & , \quad x = 0 \text{ اگر} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & , \quad x < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

[تعریف تابع آرک تانژانت را به یاد آورید: به ازای هر t حقیقی، $\arctan t$ عدد حقیقی منحصر بفرد φ است که در دو شرط $\tan \varphi = t$ و $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ صدق می‌کند.]

(ب) نتیجه بگیرید که به ازای هر (x, y) در T ,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

این ثابت می‌کند که θ یک تابع پتانسیل برای f بر مجموعه T است. این تمرین نشان می‌دهد که وجود تابع پتانسیل نه فقط به میدان برداری f بلکه به مجموعه‌ای که میدان برداری در آن تعریف شده نیز بستگی دارد.

۱۹.۱۰ کاربردهایی در معادلات دیفرانسیل کامل مرتبه اول

بعضی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را می‌توان به کمک توابع پتانسیل حل کرد. فرض کنیم یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به شکل

$$y' = f(x, y)$$

داشته باشیم. اگر طرفین آن را در سازه صفر نشو $Q(x, y)$ ضرب کنیم، این معادله به شکل $0 = Q(x, y)y' - f(x, y)Q(x, y)$ درمی‌آید. سپس، اگر به جای $-f(x, y)Q(x, y)$ بنویسیم $P(x, y)$ ، با استفاده از نماد لایب‌نیتز برای مشتقها، به جای y' بنویسیم dy/dx ، معادله دیفرانسیل شکل زیر را خواهد گرفت:

$$(11.10) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

فرض کنیم P و Q بر مجموعه همبند بازی چون S در صفحه پیوسته باشند. به هرچنین معادله دیفرانسیلی می‌توان یک میدان برداری مانند \mathcal{V} مربوط کرد، که

$$V(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j.$$

مولفه‌های P و Q ضرایب dx و dy در معادله^{۱۱.۱۰} اند. معادله^{۱۱.۱۰} دیفرانسیل (۱۱.۱۰) را در S کامل گویند اگر که میدان برداری V گرادیان یک پتانسیل باشد؛ یعنی، اگر به ازای هر نقطه^{۱۱.۱۰} $(x, y) \in S$ ، $V(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$ ، که در آن φ یک میدان اسکالر است. وقتی چنین φ ای موجود باشد، خواهیم داشت $\partial\varphi/\partial x = P$ و $\partial\varphi/\partial y = Q$ ، و معادله^{۱۱.۱۰} دیفرانسیل خواهد شد

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = 0.$$

حال ثابت می‌کنیم هر جواب این معادله^{۱۱.۱۰} دیفرانسیل در رابطه^{۱۱.۱۰} $\varphi(x, y) = C$ صدق می‌کند، که در آن C ثابت است. به طور دقیقتر، فرض کنیم جوابی از معادله^{۱۱.۱۰} دیفرانسیل (۱۱.۱۰) مانند γ وجود داشته باشد که بر بازه^{۱۱.۱۰} (a, b) تعریف شده است بطوری که نقطه^{۱۱.۱۰} $(x, Y(x))$ به ازای هر x در S در (a, b) می‌باشد. ثابت می‌کنیم به ازای ثابتی چون C ،

$$\varphi[x, Y(x)] = C.$$

برای این کار تابع مرکب g که بر (a, b) با معادله^{۱۱.۱۰}

$$g(x) = \varphi[x, Y(x)]$$

تعریف شده است را معرفی می‌کنیم. طبق قاعده^{۱۱.۱۰} زنجیره‌ای، مشتق g عبارت است از (۱۲.۱۰) $g'(x) = D_1\varphi[x, Y(x)] + D_2\varphi[x, Y(x)]Y'(x) = P(x, y) + Q(x, y)y'$ ، که در آن $y = Y(x)$ و $y' = Y'(x)$. اگر y در (۱۱.۱۰) صدق کند، لذا $g'(x) = 0$ ، در نتیجه، به ازای هر x در (a, b) ، $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ ، و g بر (a, b) ثابت است. این ثابت می‌کند که هر جواب y در معادله^{۱۱.۱۰} $\varphi(x, y) = C$ صدق می‌کند.

حال می‌توان با همین استدلال در جهت عکس جوابی از معادله^{۱۱.۱۰} دیفرانسیل به دست آورد. فرض کنیم معادله^{۱۱.۱۰}

$$\varphi(x, y) = C \quad (13.10)$$

y رابطه صورت تابع مشتق‌پذیری از x ، مثلاً $y = Y(x)$ به ازای هر x در بازه^{۱۱.۱۰} (a, b) ، تعریف کند، و قرار می‌دهیم $g(x) = \varphi[x, Y(x)]$ معادله^{۱۳.۱۰} $g(x) = C$ ایجاب می‌کند که g بر (a, b) ثابت باشد. لذا، طبق (۱۲.۱۰)، $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ ؛ در نتیجه، y یک جواب است. پس، قضیه^{۱۱.۱۰} زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۷.۱۰. فرض کنیم معادله دیفرانسیل

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (14.10)$$

در مجموعه همبند باز S کامل بوده، و φ یک میدان اسکالر باشد که همه جا در S در

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \quad \text{و} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$$

صدق می‌کند. در این صورت، هر جواب $y = Y(x)$ از (۱۴.۱۰) که نمودارش در S باشد در معادله $\varphi[x, Y(x)] = C$ با زای ثابتی چون C صدق خواهد کرد. بعکس، هرگاه معادله

$$\varphi(x, y) = C$$

y را به‌طور ضمنی به‌صورت تابع مشتق‌پذیری از x تعریف کند، این تابع جواب معادله دیفرانسیل (۱۴.۱۰) خواهد بود.

قضیه فوق روش سرراستی برای حل معادلات دیفرانسیل کامل مرتبه اول به‌دست می‌دهد. کافی است یک تابع پتانسیل مانند φ ساخت و سپس معادله $\varphi(x, y) = C$ را نوشت، که در آن C ثابت است. وقتی این معادله y را به‌طور ضمنی به‌صورت تابعی از x تعریف کند، این y در (۱۴.۱۰) صدق خواهد کرد. لذا، می‌توان معادله (۱۳.۱۰) را به‌عنوان نمایش یک خانواده یک پارامتری از منحنیهای انتگرال به‌کار برد. البته، تنها مقادیر مجاز C آنهایی هستند که به‌زای (x_0, y_0) در S ، $\varphi(x_0, y_0) = C$.

مثال ۱. معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2y + 4y^3}$$

را در نظر می‌گیریم. با از بین بردن مخرجها، می‌توان معادله را به‌صورت زیر نوشت:

$$(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0.$$

این حالت خاصی از (۱۴.۱۰) است به‌زای $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ و $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$. با انتگرالگیری از P نسبت به x و انتگرالگیری از Q نسبت به y و مقایسه نتایج، معلوم می‌شود که یک تابع پتانسیل مانند φ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\varphi(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

طبق قضیه ۷.۱۰، هر جواب معادله دیفرانسیل به ازای C ای در

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

صدق می‌کند. این یک نمایش ضمنی خانواده‌ای از منحنیهای انتگرال است. در این حالت خاص، معادله نسبت به y^2 از درجه دو است و می‌توان با حل آن فرمول صریحی نسبت به y برحسب x و C به دست آورد.

مثال ۲. معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$y \, dx + 2x \, dy = 0 \quad (15.10)$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا $P(x, y) = 2x$ و $Q(x, y) = y$. چون $\partial P/\partial y = 1$ و $\partial Q/\partial x = 2$ ، این معادله دیفرانسیل کامل نیست. با اینحال، اگر طرفین را در y ضرب کنیم، معادله‌ای به دست می‌آید که کامل است:

$$y^2 \, dx + 2xy \, dy = 0. \quad (16.10)$$

یک پتانسیل میدان برداری $2xyj + y^2i$ عبارت است از $\varphi(x, y) = xy^2$ ، و هر جواب (16.10) در رابطه $xy^2 = C$ صدق می‌کند. این رابطه نیز نمایش خانواده‌ای از منحنیهای انتگرال برای معادله (15.10) است.

ضریب y که (15.10) را به یک معادله کامل بدل می‌کند سازه انتگرالگیری نام دارد. در حالت کلی، اگر با ضرب یک معادله خطی مرتبه اول در سازه ناصفر $\mu(x, y)$ معادله کاملی حاصل شود، ضریب $\mu(x, y)$ را سازه انتگرالگیری معادله اصلی می‌نامند. یک معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک سازه انتگرالگیری داشته باشد. مثلاً، $\mu(x, y) = 2xy^2$ سازه انتگرالگیری دیگری از (15.10) است. برخی از معادلات دیفرانسیل خاص که سازه‌های انتگرالگیری آنها ساده به دست می‌آیند در مجموعه تمرینات زیر مطرح شده‌اند.

۲۰۱۰ تمرین

نشان دهید که معادلات دیفرانسیل تمرینهای ۱ تا ۵ کامل‌اند، و در هر حالت یک خانواده یک پارامتری از منحنیهای انتگرال را پیدا کنید.

۱ . $(x + 2y) dx + (2x + y) dy = 0$

۲ . $2xy dx + x^2 dy = 0$

۳ . $(x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy = 0$

۴ . $4 \sin x \sin 3y \cos x dx - 3 \cos 3y \cos 2x dy = 0$

۵ . $(3x^2y + 8xy^2) dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^{xy}) dy = 0$

۶ . نشان دهید که یک معادله مرتبه اول خطی، یعنی $y' + P(x)y = Q(x)$ ، دارای

سازه انتگرالگیری $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$ است. با استفاده از این، معادله را حل کنید.

۷ . فرض کنید $\mu(x, y)$ یک سازه انتگرالگیری معادله دیفرانسیل

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ نشان دهید که

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial}{\partial x} \log |\mu| - P \frac{\partial}{\partial y} \log |\mu|.$$

با استفاده از این معادله، قواعد زیر را برای یافتن سازه‌های انتگرالگیری نتیجه بگیرید:

(آ) هرگاه $(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)/Q$ فقط تابع x باشد، مثلاً "به صورت $f(x)$ ، آنگاه $e^{\int f(x) dx}$ یک سازه انتگرالگیری است؛

(ب) هرگاه $(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)/P$ فقط تابع y باشد، مثلاً "به صورت $g(y)$ ، آنگاه $e^{\int g(y) dy}$ یک سازه انتگرالگیری است.

۸ . با استفاده از تمرین ۷، سازه‌های انتگرالگیری معادلات زیر را یافته، و یک خانواده یک پارامتری از منحنیهای انتگرال را معین نمایید:

(آ) $y dx - (2x + y) dy = 0$

(ب) $(x^3 + y^3) dx - xy^2 dy = 0$

۹ . هرگاه $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x = f(x)Q(x, y) - g(y)P(x, y)$ ، نشان دهید که

$\exp\{\int f(x) dx + \int g(y) dy\}$ یک سازه انتگرالگیری معادله دیفرانسیل

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ است. این سازه انتگرالگیری را برای هر یک از معادلات

زیر پیدا کرده و یک خانواده یک پارامتری از منحنیهای انتگرال را به دست آورید:

(آ) $(2x^2y + y^2) dx + (2x^3 - xy) dy = 0$

(ب) $(e^x \sec y - \tan y) dx + dy = 0$

۱۰ . معادلات دیفرانسیل

$$(3y + 4xy^2) dx + (4x + 5x^2y) dy = 0,$$

$$(6y + x^2y^2) dx + (8x + x^3y) dy = 0$$

یک سازه^۶ انتگرالگیری مشترک دارند. این سازه^۶ انتگرالگیری را یافته و برای هر معادله یک خانواده^۶ یک پارامتری از منحنیهای انتگرال به دست آورید.

۲۱.۱۰ توابع پتانسیل بر مجموعه‌های محدب

در قضیه^۶ ۶.۱۰ ثابت شد که شرایط

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x)$$

برای گرادیان بودن میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر $f = (f_1, \dots, f_n)$ بر مجموعه^۶ بازی چون S در \mathbb{R}^n لازم‌اند. بعد، با مثال، نشان دادیم که این شرایط همیشه کافی نیستند. در این بخش ثابت می‌کنیم این شرایط در صورت محدب بودن مجموعه^۶ S کافی‌اند. در اثبات خود از قضیه^۶ زیر که مربوط به مشتقگیری زیر علامت انتگرال است استفاده می‌کنیم.

قضیه^۶ ۸.۱۰. فرض کنیم S یک بازه^۶ بسته در \mathbb{R}^n با درون ناتهی بوده و $J = [a, b]$

بازه^۶ بسته‌ای در \mathbb{R}^1 باشد. همچنین، J_{n+1} بازه^۶ بسته^۶ $S \times J$ در \mathbb{R}^{n+1} باشد. هر

نقطه در J_{n+1} را به صورت (x, t) می‌نویسیم، که در آن $x \in S$ و $t \in J$:

$$(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t).$$

فرض کنیم ψ یک میدان اسکالر تعریف شده بر J_{n+1} باشد بطوری که مشتق جزئی $D_k \psi$ بر J_{n+1} ، که k یکی از $1, 2, \dots, n$ است، پیوسته می‌باشد. میدان اسکالر φ را بر S با معادله^۶

$$\varphi(x) = \int_a^b \psi(x, t) dt$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، مشتق جزئی $D_k \varphi$ در هر نقطه^۶ درونی S موجود بوده و از فرمول

$$D_k \varphi(x) = \int_a^b D_k \psi(x, t) dt$$

به دست می‌آید. به عبارت دیگر، داریم

$$D_k \int_a^b \psi(x, t) dt = \int_a^b D_k \psi(x, t) dt.$$

تذکره. این قضیه را معمولاً "این طور توصیف می‌کنند که می‌گویند می‌توان زیر علامت انتگرال مشتق گرفت."

برهان. نقطه دلخواه x را در درون S اختیار می‌کنیم. چون S باز است، $r > 0$ هست بطوری که به‌ازای هر h صادق در $0 < |h| < r$ ، $x + he_k \in \text{int } S$ ، در اینجا e_k بردار یکه k ام مختصات در \mathbb{R}^n است. برای چنین h ی داریم

$$(17.10) \quad \varphi(x + he_k) - \varphi(x) = \int_a^b \{\psi(x + he_k, t) - \psi(x, t)\} dt.$$

با اعمال قضیه مقدار میانگین در مورد انتگرالده، داریم

$$\psi(x + he_k, t) - \psi(x, t) = h D_k \psi(z, t),$$

که در آن z بر پاره خط واصل بین x و $x + he_k$ قرار دارد. لذا (17.10) خواهد شد

$$\frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} = \int_a^b D_k \psi(z, t) dt.$$

بنابراین،

$$\frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} - \int_a^b D_k \psi(x, t) dt = \int_a^b \{D_k \psi(z, t) - D_k \psi(x, t)\} dt.$$

انتگرال اخیر قدر مطلقیش از

$$\int_a^b |D_k \psi(z, t) - D_k \psi(x, t)| dt \leq (b - a) \max |D_k \psi(z, t) - D_k \psi(x, t)|$$

ندارد، که در آن ماکزیم روی تمام z های واقع بر پاره خط بین x و $x + he_k$ و همه t های در $[a, b]$ گرفته شده است. حال، به کمک پیوستگی یکنواخت D_k بر $S \times J$ (قضیه 10.9)، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست بطوری که این ماکزیم، هر وقت $0 < |h| < \delta$ ، از $\epsilon/(b - a)$ کوچکتر است. بنابراین،

$$\left| \frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} - \int_a^b D_k \psi(x, t) dt \right| < \epsilon \quad 0 < |h| < \delta.$$

این ثابت می‌کند که، همانطور که مطلوب است، $D_k \varphi(x)$ موجود و مساوی $\int_a^b D_k \psi(x, t) dt$ می‌باشد.

حال، با استفاده از این قضیه، شرط لازم و کافی زیر را برای گرادیان بودن یک میدان برداری بر یک مجموعهٔ محدب اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ ۹.۱۰. فرض کنیم $f = (f_1, \dots, f_n)$ یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بر مجموعهٔ محدب باز S در \mathbb{R}^n باشد. در این صورت، f یک گرادیان بر S است اگر و فقط اگر به‌ازای هر x در S و هر $k, j = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم

$$D_k f_j(x) = D_j f_k(x). \quad (18.10)$$

برهان. از قضیهٔ ۶.۱۰ می‌دانیم که این شرایط لازمند. برای اثبات کافی بودن، (۱۸.۱۰) را فرض کرده و پتانسیل φ را بر S می‌سازیم.

بخاطر سادگی، فرض می‌کنیم S شامل مبدا باشد. فرض کنیم $\varphi(x)$ انتگرال f در امتداد پاره خط از O تا نقطهٔ دلخواه x در S باشد. همانطور که قبلاً در معادلهٔ (۱۰.۱۰) نشان داده شد، داریم

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(tx) \cdot x \, dt = \int_0^1 \psi(x, t) \, dt,$$

که در آن $\psi(x, t) = f(tx) \cdot x$. یک زیر بازهٔ n بعدی بسته از S مانند T با درون ناتهی وجود دارد بطوری که ψ در مقروضات قضیهٔ ۸.۱۰ در $J \times T$ صدق می‌کند، که $J = [0, 1]$. از اینرو، مشتق جزئی $D_k \varphi(x)$ به‌ازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ وجود دارد و می‌توان آن را با مشتقگیری زیر علامت انتگرال حساب کرد:

$$D_k \varphi(x) = \int_0^1 D_k \psi(x, t) \, dt.$$

برای محاسبهٔ $D_k \psi(x, t)$ ، از حاصل ضرب نقطه‌ای $f(tx) \cdot x$ مشتق گرفته به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} D_k \psi(x, t) &= f(tx) \cdot D_k x + D_k \{f(tx)\} \cdot x \\ &= f(tx) \cdot e_k + t(D_k f_1(tx), \dots, D_k f_n(tx)) \cdot x \\ &= f_k(tx) + t(D_1 f_k(tx), \dots, D_n f_k(tx)) \cdot x, \end{aligned}$$

که در آخرین مرحله از رابطهٔ (۱۸.۱۰) استفاده شده است. بنابراین، داریم

$$D_k \varphi(x, t) = f_k(tx) + t \nabla f_k(tx) \cdot x.$$

حال قرار می‌دهیم $g(t) = f_k(tx)$. بنا بر قاعده زنجیره‌ای، داریم

$$g'(t) = \nabla f_k(tx) \cdot x;$$

در نتیجه، آخرین فرمول برای $D_k \psi(x, t)$ خواهد شد

$$D_k \psi(x, t) = g(t) + t g'(t).$$

با انتگرالگیری از این از 0 تا 1، معلوم می‌شود که

$$(19.10) \quad D_k \varphi(x) = \int_0^1 D_k \psi(x, t) dt = \int_0^1 g(t) dt + \int_0^1 t g'(t) dt.$$

با انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء در آخرین انتگرال، به دست می‌آید

$$\int_0^1 t g'(t) dt = t g(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 g(t) dt = g(1) - \int_0^1 g(t) dt.$$

بنابر این، (19.10) خواهد شد

$$D_k \varphi(x) = g(1) = f_k(x).$$

این نشان می‌دهد که $\nabla \varphi = f$ بر S ، که برهان را تمام خواهد کرد.

انتگرالهای چندگانه

۱.۱۱ مقدمه

در جلد یک انتگرالهای $\int_a^b f(x) dx$ ، ابتدا برای توابع تعریف شده و کراندار بر بازه‌های متناهی، و بعد برای توابع بی‌کران و بازه‌های نامتناهی، بحث شدند. در فصل ۱۰ جلد دو این مفهوم با معرفی انتگرالهای خطی تعمیم یافت. در این فصل این مفهوم را در جهت دیگر تعمیم می‌دهیم. بازه یک بعدی $[a, b]$ را با مجموعه دو بعدی Q ، به نام ناحیه انتگرالگیری، عوض می‌کنیم. ابتدا ناحیه‌های مستطیلی شکل، و بعداً "نواحی کلیتر با کرانه‌های منحنی‌الخطی را در نظر خواهیم گرفت. انتگرالده یک میدان اسکالر مانند f است که بر Q تعریف شده و کراندار است. انتگرال حاصل *انتگرال مضاعف* نام داشته و با علامت

$$\iint_Q f(x, y) dx dy \quad \text{یا} \quad \iint_Q f$$

نموده می‌شود. مثل حالت یک بعدی، علامت dx و dy نقشی در تعریف انتگرال مضاعف ندارند؛ با اینحال، در محاسبه و تبدیل انتگرال مفید خواهند بود.

طرح کار در این فصل از چند مرحله تشکیل شده است. ابتدا تعریف انتگرال مضاعف را مطرح می‌کنیم. روش در اینجا شبیه حالت یک بعدی است که در جلد یک بحث شد. انتگرال ابتدا برای توابع پله‌ای و سپس برای توابع کلیتر تعریف شده است. این تعریف، مثل حالت یک بعدی، راه ساده‌ای برای محاسبه عملی انتگرالها به ما نمی‌دهد. خواهیم دید که اغلب انتگرالهای مضاعف در عمل را می‌توان با تکرار انتگرالگیری یک بعدی حساب کرد. همچنین، به رابطه‌ای بین انتگرالهای مضاعف و انتگرالهای خطی دست خواهیم یافت. کاربردهای انتگرالهای مضاعف در مسائل مربوط به مساحت، حجم، جرم، مرکز جرم، و

مفاهیم مربوطه نیز عرضه خواهند شد. بالاخره، شیوه^۳ تعمیم این مفاهیم را به فضای n نشان خواهیم داد.

۲.۱۱ افراز مستطیلها. توابع پلهای

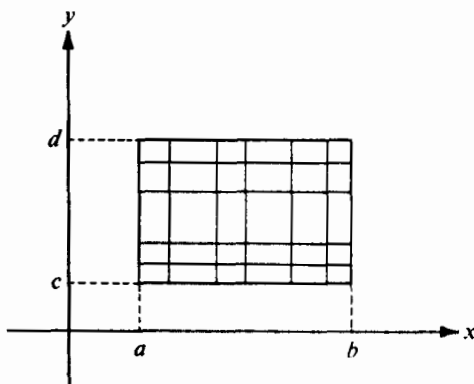
فرض کنیم Q یک مستطیل باشد؛ یعنی، حاصل ضرب دکارتی دو بازه^۴ بسته مانند $[a, b]$ و $[c, d]$:

$$Q = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}.$$

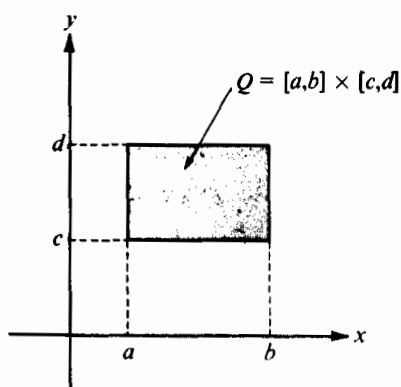
مثالی در شکل ۱.۱۱. (نموده شده است. دو افراز P_1 و P_2 را بترتیب برای $[a, b]$ و $[c, d]$ در نظر می‌گیریم؛ مثلاً،

$$P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m\} \quad \text{و} \quad P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

که در آنها $x_0 = a, x_n = b, y_0 = c, y_m = d$. گوئیم حاصل ضرب دکارتی $P_1 \times P_2$ یک افراز Q است. چون P_1 بازه^۵ $[a, b]$ را به n زیر بازه و P_2 بازه^۶ $[c, d]$ را به m زیر بازه تقسیم می‌کند، افراز $P = P_1 \times P_2$ مستطیل Q را به mn زیر مستطیل تقسیم خواهد کرد. شکل ۲.۱۱ افرازی از یک Q به 30 زیر مستطیل را نشان می‌دهد. گوئیم افراز P' از Q از افراز P ظریفتر است اگر $P \subseteq P'$ ؛ یعنی، اگر هر نقطه در P در P' نیز باشد. حاصل ضرب دکارتی دو زیر بازه^۷ باز از P_1 و P_2 یک زیر مستطیل بدون اضلاع است. این زیر مستطیل یک زیر مستطیل باز P یا Q نامیده می‌شود.



شکل ۲.۱۱ یک افراز مستطیل Q

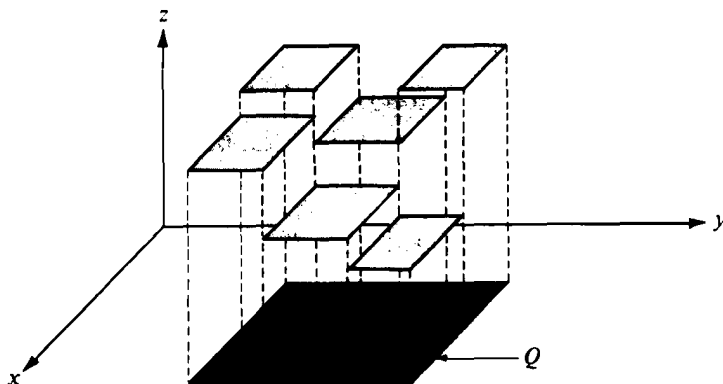


شکل ۱.۱۱ مستطیل Q حاصل ضرب

دکارتی دوبازه

تعریف تابع پله‌ای. تابع f تعریف شده بر مستطیل Q را یک تابع پله‌ای گوییم اگر افزایش از Q مانند P باشد بطوری که f بر هر زیر مستطیل باز P ثابت باشد.

نمودار یک تابع پله‌ای در شکل ۳.۱۱ نموده شده است. بخش اعظم این نمودار از



شکل ۳.۱۱ نمودار یک تابع پله‌ای تعریف شده بر مستطیل Q

قطعات مستطیلی شکل افقی تشکیل شده است. یک تابع پله‌ای در هر نقطه کرانه‌ای زیر مستطیلها مقدار تعریف شده دارد، اما مقادیر آن در این نقاط در نظریه انتگرالگیری اهمیتی ندارند.

اگر f و g دو تابع پله‌ای تعریف شده بر مستطیل Q باشند، ترکیب خطی $c_1f + c_2g$ نیز یک تابع پله‌ای است. در واقع، اگر P و P' افزایشهایی از Q باشند بطوری که f بر زیرمستطیلهای باز P و g بر زیرمستطیلهای باز P' ثابت باشد، $c_1f + c_2g$ بر زیرمستطیلهای باز اجتماع $P \cup P'$ (که می‌توان آن را یک تطزیف مشترک P و P' نامید) نیز ثابت است. لذا، مجموعه توابع پله‌ای تعریف شده بر Q یک فضای خطی تشکیل می‌دهد.

۳.۱۱ انتگرال مضاعف یک تابع پله‌ای

فرض کنیم $P = P_1 \times P_2$ افزایش از مستطیل Q به mn زیر مستطیل بوده، و f تابعی پله‌ای باشد که بر زیرمستطیلهای باز Q ثابت است. زیرمستطیل معین شده به وسیله $[x_{i-1}, x_i]$ و $[y_{j-1}, y_j]$ را با Q_{ij} نموده، و فرض می‌کنیم c_{ij} مقدار ثابتی باشد که f در نقاط درونی

Q_{ij} می‌گیرد. اگر f مثبت باشد، حجم جعبه مکعب مستطیل به قاعده Q_{ij} و ارتفاع c_{ij} حاصل ضرب

$$c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

است. به‌ازای هر تابع پله‌ای f ، مثبت یا نه، مجموع تمام این حاصل ضربها مساوی انتگرال مضاعف f روی Q تعریف می‌شود. لذا، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف انتگرال مضاعف یک تابع پله‌ای. فرض کنیم f یک تابع پله‌ای باشد که بر زیر مستطیل باز $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ از مستطیل Q مقدار ثابت c_{ij} را می‌گیرد. انتگرال مضاعف f روی Q با فرمول

$$(10.11) \quad \iint_Q f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

تعریف می‌شود.

مثل حالت یک بعدی، مقدار این انتگرال در صورت تعویض P با هر افراز ظریفتر P' عوض نمی‌شود. لذا، مقدار انتگرال، تا وقتی f بر زیر مستطیلهای باز Q ثابت باشد، از انتخاب P مستقل است.

برای اختصار، گاهی به‌جای $(x_i - x_{i-1})$ می‌نویسیم Δx_i و به‌جای $(y_j - y_{j-1})$ می‌نویسیم Δy_j ، و مجموع آمده در (10.11) خواهد شد

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j.$$

برای به‌یاد آوردن طرز تشکیل این مجموع، انتگرال را با علامت

$$\iint_Q f(x, y) dx dy$$

نشان می‌دهیم. این علامت صرفاً "نماد دیگری است برای $\iint_Q f$ ".

توجه کنید که اگر f درون Q ثابت باشد، مثلاً وقتی $a < x < b$ و $c < y < d$ ، $f(x, y) = k$ ، بی‌توجه به مقدار f بر اضلاع Q ، خواهیم داشت

$$(20.11) \quad \iint_Q f = k(b - a)(d - c).$$

چون داریم

$$d - c = \int_c^d dy \quad \text{و} \quad b - a = \int_a^b dx$$

فرمول (۲۰۱۱) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$(۳۰۱۱) \quad \iint_Q f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

انتگرالهای سمت راست انتگرالهایی یک بعدی‌اند، و گوییم با این فرمول انتگرال مضاعف با تکرار انتگرالگیری یا انتگرالگیری مکرر حساب می‌شود. بخصوص، وقتی f یک تابع پله‌ای از نوع بالا باشد، می‌توان نوشت

$$\iint_Q f = \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \right] dy = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \right] dx.$$

با جمع‌بندی روی i و j و استفاده از (۱۰۱۱)، معلوم می‌شود که (۳۰۱۱) برای توابع پله‌ای برقرار است.

خواص دیگر زیر از انتگرال مضاعف یک تابع پله‌ای تعمیم‌های قضایای یک بعدی نظیر هستند. آنها را می‌توان مستقیماً "از تعریف (۱۰۱۱) یا با استفاده از فرمول (۳۰۱۱) و قضایای نظیر برای انتگرالهای یک بعدی نتیجه گرفت. در قضایای زیر، علامات s و t توابعی پله‌ای‌اند که بر مستطیلی چون Q تعریف شده‌اند. برای اجتناب از حالات خاص بدیهی، فرض می‌کنیم Q یک مستطیل تنه‌ناشده باشد؛ به عبارت دیگر، Q فقط یک نقطه یا یک پاره خط نباشد.

قضیه ۱۰۱۱. خاصیت خطی. به ازای هر دو عدد حقیقی c_1 و c_2 داریم

$$\iint_Q [c_1 s(x, y) + c_2 t(x, y)] dx dy = c_1 \iint_Q s(x, y) dx dy + c_2 \iint_Q t(x, y) dx dy.$$

قضیه ۲۰۱۱. خاصیت جمعی. هرگاه Q به دو مستطیل Q_1 و Q_2 تقسیم شده باشد،

نگاه

$$\iint_Q s(x, y) dx dy = \iint_{Q_1} s(x, y) dx dy + \iint_{Q_2} s(x, y) dx dy.$$

قضیه ۳.۱۱. قضیه مقایسه‌ای. هرگاه به‌ازای هر (x, y) در Q ، $s(x, y) \leq t(x, y)$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$\iint_Q s(x, y) dx dy \leq \iint_Q t(x, y) dx dy.$$

بخصوص، هرگاه به‌ازای هر (x, y) در Q ، $t(x, y) \geq 0$ ، آنگاه

$$\iint_Q t(x, y) dx dy \geq 0.$$

اثبات این قضایا را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

۴.۱۱. تعریف انتگرال مضاعف یک تابع تعریف شده و کراندار بر یک مستطیل

فرض کنیم f تابعی باشد که بر مستطیل Q تعریف شده و کراندار است؛ به‌طور مشخص،

$$|f(x, y)| \leq M, (x, y) \in Q$$

در این صورت، f می‌تواند از بالا و پایین با دو تابع پله‌ای ثابت s و t محدود شود، که به‌ازای هر (x, y) در Q ، $t(x, y) = M$ و $s(x, y) = -M$. حال دو تابع پله‌ای دلخواه

s و t تعریف شده بر Q را در نظر می‌گیریم بطوری که

$$(4.11) \quad s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y), (x, y) \in Q$$

تعریف انتگرال یک تابع کراندار روی یک مستطیل. هرگاه یک و فقط یک عدد مانند I باشد بطوری که به‌ازای هر جفت تابع پله‌ای صادق در نامساویهای (۴.۱۱) داشته‌باشیم

$$(5.11) \quad \iint_Q s \leq I \leq \iint_Q t,$$

آنگاه این I انتگرال مضاعف f روی Q نامیده و با علامت

$$\iint_Q f(x, y) dx dy \quad \text{یا} \quad \iint_Q f$$

نموده می‌شود. وقتی این I وجود دارد، گوئیم تابع f بر Q انتگرالپذیر است.

۵.۱۱. انتگرالهای مضاعف بالایی و پایینی

تعریف انتگرال مضاعف کاملاً "شبه حالت یک بعدی" است. انتگرالهای مضاعف بالایی و

پایینی را نیز می‌توان مثل حالت یک بعدی تعریف کرد.

فرض کنیم f بر مستطیل Q کراندار بوده، و s و t توابعی پله‌ای باشند که در (۴.۱۱) صدق می‌کنند. گوئیم s زیر f است، و t روی f است، و می‌نویسیم $s \leq f \leq t$. فرض کنیم S مجموعه تمام اعداد $\int_Q s$ ، وقتی s همه توابع پله‌ای زیر f را می‌گیرد، و T مجموعه تمام اعداد $\int_Q t$ ، وقتی t تمام توابع پله‌ای روی f را می‌گیرد، باشد. هر دو مجموعه S و T ناتهی‌اند، زیرا f کراندار است. همچنین، اگر $s \leq f \leq t$ ، $\int_Q s \leq \int_Q t$ ؛ در نتیجه، هر عدد در S کوچکتر از هر عدد در T است. لذا، S دارای سوپرم و T دارای اینفیم است، و اینها در نامساویهای

$$\int_Q s \leq \sup S \leq \inf T \leq \int_Q t,$$

بهازای هر s و t صادق در $s \leq f \leq t$ ، صدق می‌کنند. این نشان می‌دهد که هر دو عدد $\sup S$ و $\inf T$ در (۵.۱۱) صدق می‌کنند. لذا، f بر Q انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر $\sup S = \inf T$ ، که در این حالت داریم

$$\int_Q f = \sup S = \inf T.$$

عدد $\sup S$ انتگرال پایینی f نامیده و با $I(f)$ نموده می‌شود. عدد $\inf T$ انتگرال بالایی f نامیده و با $I(f)$ نموده می‌شود. لذا، داریم

$$I(f) = \sup \left\{ \int_Q s \mid s \leq f \right\}, \quad I(f) = \inf \left\{ \int_Q t \mid f \leq t \right\}.$$

استدلال فوق قضیه زیر را ثابت می‌کند.

قضیه ۴.۱۱. هر تابع f کراندار بر مستطیل Q دارای انتگرال پایینی $I(f)$ و انتگرال بالایی $I(f)$ است که در نامساویهای

$$\int_Q s \leq I(f) \leq I(f) \leq \int_Q t$$

بهازای هر دو تابع پله‌ای s و t که $s \leq f \leq t$ صدق می‌کنند. تابع f بر Q انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر انتگرالهای بالایی و پایینی آن مساوی باشند، که در این حالت خواهیم

$$\iint_Q f = I(f) = \bar{I}(f).$$

چون تعاریف بالا کاملاً "شبه حالت یک بعدی" اند، برقراری خاصیت خطی، خاصیت جمعی، و قضیه مقایسه‌ای مذکور برای توابع پله‌ای در بخش ۳.۱۱ برای انتگرالهای مضاعف در حالت کلی تعجبی ندارد. برهانهای این احکام شبه برهانها در حالت یک بعدی اند و لذا حذف می‌شوند.

۶.۱۱ محاسبه انتگرال مضاعف به وسیله تکرار انتگرالگیری یک بعدی

در نظریه انتگرالگیری یک بعدی، دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال روشی عملی برای محاسبه انتگرالها می‌باشد. قضیه زیر همین نتیجه در نظریه دو بعدی خواهد بود. این قضیه به ما توان محاسبه بعضی انتگرالهای مضاعف را به وسیله دو انتگرالگیری یک بعدی متوالی می‌دهد. این نتیجه تعمیمی است از فرمول (۳.۱۱)، که قبلاً آن را برای توابع پله‌ای ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۵.۱۱. فرض کنیم f بر مستطیل $Q = [a, b] \times [c, d]$ تعریف شده و گراندار باشد، و نیز f بر Q انتگرالپذیر باشد. به ازای هر y ثابت در $[c, d]$ ، انتگرال یک بعدی $\int_a^b f(x, y) dx$ را موجود گرفته و آن را با $A(y)$ نشان می‌دهیم. اگر انتگرال $\int_c^d A(y) dy$

موجود باشد، مساوی انتگرال مضاعف $\iint_Q f$ است. به عبارت دیگر، فرمول زیر را داریم:

$$(۶.۱۱) \quad \iint_Q f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

برهان. دو تابع پله‌ای s و t صادق در $s \leq f \leq t$ بر Q را اختیار می‌کنیم. با انتگرالگیری نسبت به x روی بازه $[a, b]$ ، داریم

$$\int_a^b s(x, y) dx \leq A(y) \leq \int_a^b t(x, y) dx.$$

چون انتگرال $\int_0^a A(y) dy$ وجود دارد، می‌توان با انتگرالگیری از هر دو این نامساویها نسبت به y روی $[c, d]$ و استفاده از معادله (۳.۱۱)، به دست آورد

$$\iint_Q s \leq \int_0^a A(y) dy \leq \iint_Q t.$$

از اینرو، $\int_0^a A(y) dy$ عددی است که به‌ازای هر دو تابع پله‌ای s و t که به‌ترتیب f را از زیر و رو تقریب می‌زنند بین $\iint_Q s$ و $\iint_Q t$ قرار دارد. چون f بر Q انتگرالپذیر است، تنها عدد واجد این خاصیت انتگرال مضاعف f روی Q است. لذا، $\int_0^a A(y) dy = \iint_Q f$ ، معادله (۶.۱۱) را ثابت خواهد کرد.

گوییم با فرمول (۶.۱۱) انتگرال مضاعف به‌وسیله تکرار انتگرالگیری و یا انتگرالگیری مکرر حساب می‌شود. روند کار این‌طور توصیف می‌شود که ابتدا از f نسبت به x از a تا b (با ثابت گرفتن y) انتگرال گرفته، و سپس از حاصل نسبت به y از c تا d انتگرال می‌گیریم. اگر ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم، فرمول مشابهی خواهیم داشت؛ یعنی،

$$(۷.۱۱) \quad \iint_Q f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

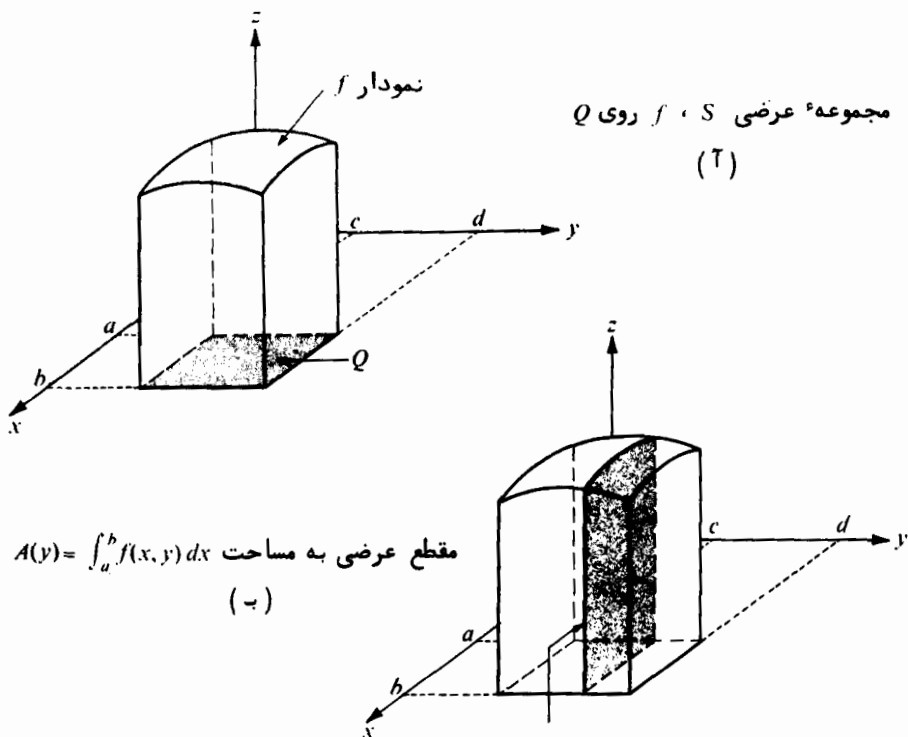
که با فرض وجود $\int_0^a f(x, y) dy$ به‌ازای هر x ثابت در $[a, b]$ و انتگرالپذیری بودن بر $[a, b]$ برقرار می‌باشد.

۷.۱۱ تعبیر هندسی انتگرال مضاعف به‌عنوان حجم

قضیه ۵.۱۱ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد، که در شکل ۴.۱۱ نموده شده است. اگر f نامنفی باشد، مجموعه S مرکب از نقاط (x, y, z) در فضای ۳ که (x, y) در Q بوده و $0 \leq z \leq f(x, y)$ مجموعه عرضی f روی Q نامیده می‌شود. این مجموعه از نقاط بین مستطیل Q و سطح $z = f(x, y)$ تشکیل شده است. (ر.ک. شکل ۴.۱۱ (ت)). به‌ازای هر y در بازه $[c, d]$ ، انتگرال

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

مساحت مقطع عرضی S با یک صفحه موازی صفحه xz است (ناحیه سایه‌دار شکل ۴.۱۱ (ب)). چون مساحت مقطع عرضی $A(y)$ بر $[c, d]$ انتگرالپذیر است، قضیه ۷.۲



شکل ۴.۱۱ حجم S انتگرال مساحت مقطع عرضی است:

$$v(S) = \int_c^d A(y) dy.$$

از جلد یک می‌گویید که انتگرال $\int_c^d A(y) dy$ مساوی $v(S)$ ، یعنی حجم S ، است. لذا، به‌ازای انتگرالدهای نامنفی، قضیه ۵.۱۱ نشان می‌دهد که حجم مجموعه عرضی f روی Q مساوی انتگرال مضاعف $\iint_Q f$ می‌باشد.

معادله (۷.۱۱) راه دیگر محاسبه حجم مجموعه عرضی را به‌دست می‌دهد. این بار از مساحت مقاطع عرضی حاصل از صفحات موازی صفحه yz انتگرال می‌گیریم.

۸.۱۱ مثالهای حل شده

در این بخش قضیه ۵.۱۱ را با دو مثال عددی توضیح می‌دهیم.

مثال ۰۱. اگر $Q = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$ را با فرض وجود $\iint_Q (x \sin y - ye^x) dx dy$ حساب کنید. ناحیه انتگرالگیری در شکل ۵.۱۱ نموده شده است.

حل. اگر ابتدا نسبت به x انتگرال گرفته و نتیجه را $A(y)$ بنامیم، داریم

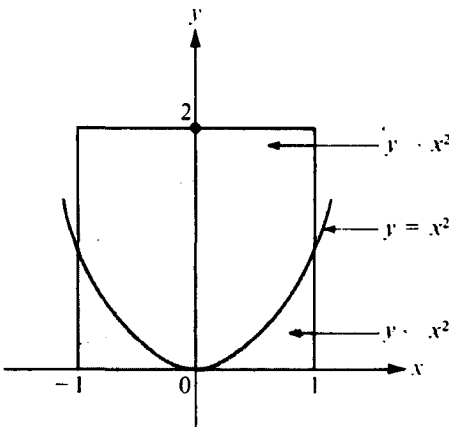
$$A(y) = \int_{-1}^1 (x \sin y - ye^x) dx = \left(\frac{x^2}{2} \sin y - ye^x \right) \Big|_{x=-1}^{x=1} = -ey + y/e.$$

با اعمال قضیه ۵.۱۱، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \iint_Q (x \sin y - ye^x) dx dy &= \int_0^{\pi/2} A(y) dy = \int_0^{\pi/2} (-ey + y/e) dy \\ &= (1/e - e) \int_0^{\pi/2} y dy = (1/e - e)\pi^2/8. \end{aligned}$$

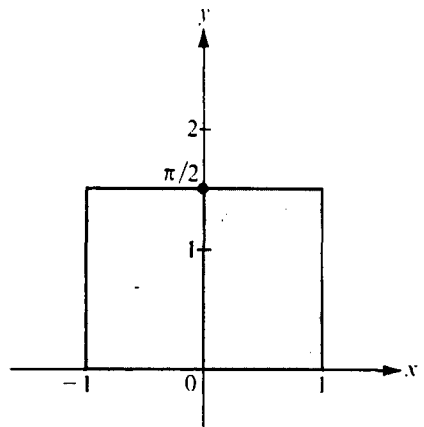
برای امتحان محاسبات، می‌توان ابتدا نسبت به y انتگرال گرفت:

$$\begin{aligned} \iint_Q (x \sin y - ye^x) dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_0^{\pi/2} (x \sin y - ye^x) dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(-x \cos y - \frac{1}{2} y^2 e^x \right) \Big|_{y=0}^{y=\pi/2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(-\pi^2 e^x / 8 + x \right) dx = (1/e - e)\pi^2/8. \end{aligned}$$



شکل ۶.۱۱ ناحیه انتگرالگیری

برای مثال ۲



شکل ۵.۱۱ ناحیه انتگرالگیری

برای مثال ۱

مثال ۰۲. اگر $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$ ، انتگرال مضاعف $\iint_Q \sqrt{|y - x^2|} dx dy$ را ، با فرض وجود ، حساب کنید .

حل . اگر ابتدا نسبت به y انتگرال گرفته و نتیجه را $H(x)$ بنامیم ، داریم
 $H(x) = \int_0^2 \sqrt{|y - x^2|} dy$. ناحیه ، انتگرالگیری مستطیلی است که در شکل ۶.۱۱ نموده شده است . سهمی $y = x^2$ نیز بخاطر وجود $|y - x^2|$ در انتگرالده نشان داده شده است . بالای این سهمی داریم $y > x^2$ و پایین آن داریم $y < x^2$. این پیشنهاد می کند که انتگرال مربوط به $H(x)$ را به صورت زیر تجزیه کنیم :

$$H(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{|y - x^2|} dy = \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy .$$

به یاد می آوریم که x در هر یک از این انتگرالها ثابت گرفته می شود . در انتگرال اول تغییر متغیر $t = x^2 - y$ داده ، و در انتگرال دوم قرار می دهیم $t = y - x^2$. این نتیجه می دهد که

$$H(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{|y - x^2|} dy = -\int_{x^2}^0 \sqrt{t} dt + \int_0^{2-x^2} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}(2 - x^2)^{3/2} .$$

با اعمال قضیه ۵.۱۱ ، معلوم می شود که

$$\begin{aligned} \iint_Q \sqrt{|y - x^2|} dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}(2 - x^2)^{3/2} \right] dx = \frac{4}{3} \int_0^1 (2 - x^2)^{3/2} dx \\ &= \frac{1}{3} \left[x(2 - x^2)^{3/2} + 3x\sqrt{2 - x^2} + 6 \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right] \Big|_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

همین نتیجه را می توان با انتگرالگیری ابتدا نسبت به x به دست آورد ، اما محاسبات مشکلتر خواهند بود .

۹.۱۱ تمرین

انتگرالهای مضاعف تمرینهای ۱ تا ۸ را ، با فرض وجود ، با تکرار انتگرالگیری حساب کنید .

۱ . $\iint_Q xy(x + y) dx dy$ ، که در آن $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

۲. $\iint_Q (x^3 + 3x^2y + y^3) dx dy$ ، که در آن $Q = [0, 1] \times [0, 1]$

۳. $\iint_Q (\sqrt{y} + x - 3xy^2) dx dy$ ، که در آن $Q = [0, 1] \times [1, 3]$

۴. $\iint_Q \sin^2 x \sin^2 y dx dy$ ، که در آن $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$

۵. $\iint_Q \sin(x + y) dx dy$ ، که در آن $Q = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$

۶. $\iint_Q |\cos(x + y)| dx dy$ ، که در آن $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$

۷. $\iint_Q f(x + y) dx dy$ ، که در آن $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ و $f(t)$ بزرگترین عدد صحیح

نابیشتر از t است.

۸. $\iint_Q y^{-3} e^{t^2/y} dx dy$ ، که در آن $Q = [0, t] \times [1, t]$ ، $t > 0$

۹. اگر Q یک مستطیل باشد، نشان دهید که انتگرال مضاعف $\iint_Q f(x)g(y) dx dy$ مساوی

حاصل ضرب دو انتگرال یک‌بعدی است. مفروضات مربوط به وجود که مورد استفاده‌اند را بیان نمایید.

۱۰. فرض کنید f بر مستطیل $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y, & x + y \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مجموعهٔ عرضی f روی Q را رسم کرده و حجم این مجموعهٔ عرضی را با انتگرالگیری مضاعف حساب کنید. (فرض کنید این انتگرال موجود باشد.)

۱۱. تمرین ۱۰ را در صورتی حل کنید که

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۲. تمرین ۱۰ را در صورتی حل کنید که $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ و

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۳. فرض کنید f بر مستطیل $Q = [1, 2] \times [1, 4]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^{-2}, & x \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به کمک ترسیم، آن بخش از Q را که در آن f ناصفر است نشان داده و مقدار انتگرال مضاعف $\iint_Q f$ را، با فرض وجود، حساب کنید.

۱۴. فرض کنید f بر مستطیل $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

ثابت کنید انتگرال مضاعف $\iint_Q f$ موجود و مساوی 0 است.

۱۵.۱۱ انتگرالپذیری توابع پیوسته

با استفاده از قضیه پیمای کوچک (قضیه ۱۵.۹)، می توان انتگرالپذیری تابعی که بر یک مستطیل پیوسته است را اثبات کرد.

قضیه ۱۵.۱۱. انتگرالپذیری توابع پیوسته. هرگاه تابع f بر مستطیل $Q = [a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر Q انتگرالپذیر است. بعلاوه، مقدار انتگرال را می توان با انتگرالگیری مکرر به دست آورد:

$$(۸.۱۱) \quad \iint_Q f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

برهان. قضیه ۸.۹ نشان می دهد که f بر Q کراندار است؛ در نتیجه، f انتگرال بالایی و انتگرال پایینی دارد. ثابت می کنیم $I(f) = I(f)$ با $\epsilon > 0$ را اختیار می کنیم. طبق قضیه پیمای کوچک، به ازای این ϵ افزای از Q مانند P به تعدادی متناهی (مثلاً، n) زیر مستطیل Q_1, \dots, Q_n هست بطوری که پیمای f در هر زیر مستطیل کمتر از ϵ است. ماکزیمم و مینیمم مطلق f در Q_k را به ترتیب با $M_k(f)$ و $m_k(f)$ نشان

می‌دهیم. در این صورت، به‌ازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ ، داریم

$$M_k(f) - m_k(f) < \epsilon.$$

حال فرض کنیم s و t دو تابع پله‌ای باشند که درون هر Q_k به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$s(x) = m_k(f), \quad t(x) = M_k(f), \quad x \in \text{int } Q_k$$

در نقاط کرانه‌ای تعریف می‌کنیم $s(x) = m$ و $t(x) = M$ ، که m و M به‌ترتیب
مینیمم و ماکزیمم مطلق f بر Q اند. در این صورت، به‌ازای هر x در Q ، داریم

$$s \leq f \leq t. \quad \text{همچنین، داریم}$$

$$\iint_Q t = \sum_{k=1}^n M_k(f) a(Q_k) \quad \text{و} \quad \iint_Q s = \sum_{k=1}^n m_k(f) a(Q_k)$$

که در آن‌ها $a(Q_k)$ مساحت مستطیل Q_k است. تفاضل بین این دو انتگرال عبارت است از

$$\iint_Q t - \iint_Q s = \sum_{k=1}^n \{M_k(f) - m_k(f)\} a(Q_k) < \epsilon \sum_{k=1}^n a(Q_k) = \epsilon a(Q),$$

که در آن $a(Q)$ مساحت Q است. چون $\iint_Q t \leq I(f) \leq \iint_Q s$ ، نامساوی زیر
به‌دست می‌آید:

$$0 \leq I(f) - I(f) \leq \epsilon a(Q).$$

با فرض $\epsilon \rightarrow 0$ ، می‌بینیم که $I(f) = I(f)$ ؛ در نتیجه، f بر Q انتگرال‌پذیر می‌باشد.

حال ثابت می‌کنیم که انتگرال مضاعف مساوی اولین انتگرال مکرر در (۸.۱۱) است.

به‌ازای هر y ثابت در $[c, d]$ ، انتگرال یک بعدی $\int_a^b f(x, y) dx$ ، بدلیل پیوستگی

انتگرالده بر Q ، وجود دارد. فرض کنیم $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. ثابت می‌کنیم که A

بر $[c, d]$ پیوسته است. اگر y و y_1 دو نقطه دلخواه در $[c, d]$ باشند، داریم

$$A(y) - A(y_1) = \int_a^b \{f(x, y) - f(x, y_1)\} dx,$$

که از این معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} |A(y) - A(y_1)| &\leq (b - a) \max_{a \leq x \leq b} |f(x, y) - f(x, y_1)| \\ &= (b - a) |f(x_1, y) - f(x_1, y_1)|, \end{aligned}$$

که در آن x_1 نقطه‌ای در $[a, b]$ است که $|f(x, y) - f(x, y_1)|$ به ماکزیمم خود می‌رسد.

این نامساوی نشان می‌دهد که، وقتی $y \rightarrow y_1$ ، $A(y) \rightarrow A(y_1)$ ؛ در نتیجه، A در y_1

پیوسته می‌باشد. لذا، انتگرال $\int_c^d A(y) dy$ وجود دارد و، طبق قضیه ۵.۱۱، مساوی

\iint_D می‌باشد. درحالتی که تکرار بترتیب عکس صورت می‌گیرد، استدلال مشابهی به‌کار خواهد آمد.

۱۱.۱۱ انتگرالپذیری توابع کراندار با ناپیوستگیها

فرض کنیم f بر مستطیل Q تعریف شده و کراندار باشد. در قضیه ۶.۱۱ ثابت شد که انتگرال مضاعف f روی Q در صورت پیوستگی f همه‌جا بر Q وجود دارد. در این بخش ثابت می‌کنیم این انتگرال در صورتی که f در Q ناپیوستگی داشته باشد نیز موجود است، به شرط آنکه مجموعه ناپیوستگیها چندان بزرگ نباشد. برای سنجش اندازه مجموعه ناپیوستگیها، مفهوم زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف مجموعه کراندار با محتوای صفر. فرض کنیم A زیر مجموعه کراندار از صفحه باشد. گوئیم A دارای محتوای صفر است اگر که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ مجموعه‌ای متناهی از مستطیلها باشد که اجتماعشان شامل A بوده و مجموع مساحت آنها از ϵ تجاوز نکند.

به عبارت دیگر، یک مجموعه مسطح کراندار با محتوای صفر را می‌توان در اجتماعی از مستطیلها گنجانده که مساحت کل آنها بدخواه کوچک باشد.

احکام زیر مربوط به مجموعه‌های کراندار با محتوای صفر نتایج ساده این تعریف‌اند. اثبات آنها به‌عنوان تمرین به خواننده محول می‌شود.

(آ) هر مجموعه متناهی از نقاط در صفحه دارای محتوای صفر است.

(ب) اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه‌های کراندار با محتوای صفر نیز با محتوای صفر است.

(پ) هر زیر مجموعه از یک مجموعه با محتوای صفر دارای محتوای صفر است.

(ت) هر پاره خط دارای محتوای صفر است.

قضیه ۷.۱۱. فرض کنیم f بر مستطیل $Q = [a, b] \times [c, d]$ تعریف شده و کراندار باشد. هرگاه مجموعه ناپیوستگیهای f در Q مجموعه‌ای با محتوای صفر باشد، آنگاه انتگرال مضاعف f وجود خواهد داشت.

برهان. فرض کنیم $M > 0$ چنان باشد که بر Q ، $|f| \leq M$. همچنین، D مجموعه ناپیوستگیهای f در Q باشد. به ازای $\delta > 0$ ، P را افزای از Q می‌گیریم که مجموع مساحت همه زیر مستطیلهای P که شامل نقاطی از D اند کمتر از δ باشد. (این امکان دارد، زیرا D دارای محتوای صفر است.) برای زیر مستطیلهای تابع پلهای s و t راه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s(x) = -M, \quad t(x) = M.$$

بر زیر مستطیلهای باقی P ، s و t را بصورتی که در برهان قضیه ۶.۱۱ شد تعریف می‌کنیم. در این صورت، سرتاسر Q داریم $s \leq f \leq t$. با استدلالی شبیه آنکه در برهان ۶.۱۱ شد، نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$(9.11) \quad \iint_Q t - \iint_Q s \leq \epsilon a(Q) + 2M\delta.$$

اولین جمله، یعنی $\epsilon a(Q)$ ، از تخمین انتگرال $t - s$ روی زیر مستطیلهایی که فقط شامل نقاط پیوستگی f اند می‌آید. دومین جمله، یعنی $2M\delta$ ، از تخمین انتگرال $t - s$ روی زیر مستطیلهایی که شامل نقاط D اند ناشی می‌شود. از (۹.۱۱) نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$0 \leq I(f) - I(f) \leq \epsilon a(Q) + 2M\delta.$$

با فرض $\epsilon \rightarrow 0$ ، معلوم می‌شود که $0 \leq I(f) - I(f) \leq 2M\delta$ ، چون δ دلخواه است، این ایجاب می‌کند که $I(f) = I(f)$ ؛ در نتیجه، f بر Q انتگرالپذیر می‌باشد.

۱۲.۱۱ تعمیم انتگرالهای مضاعف روی ناحیه‌های کلیتر

تا اینجا انتگرال مضاعف فقط برای نواحی انتگرالگیری مستطیلی شکل تعریف شده است. لیکن، تعمیم این مفهوم به نواحی کلیتر مشکل نیست.

فرض کنیم S یک ناحیه کراندار بوده، و S را در مستطیلی مانند Q قرار داده باشیم. همچنین، f بر S تعریف شده و کراندار باشد. تابع جدید \tilde{f} را بر Q به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(10.11) \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in S \\ 0, & (x, y) \in Q - S \end{cases}$$

به عبارت دیگر، با صفر گرفتن مقادیر تابع در خارج از S ، تعریف f را به تمام مستطیل Q

تعمیم می‌دهیم. حال می‌پرسیم: آیا تابع تعمیم یافته f بر Q انتگرالپذیر است یا نه. اگر چنین باشد، گوییم f بر S انتگرالپذیر است و، طبق تعریف،

$$\iint_S f = \iint_Q \tilde{f}.$$

ابتدا مجموعه‌هایی از نقاط مانند S در صفحه xy را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

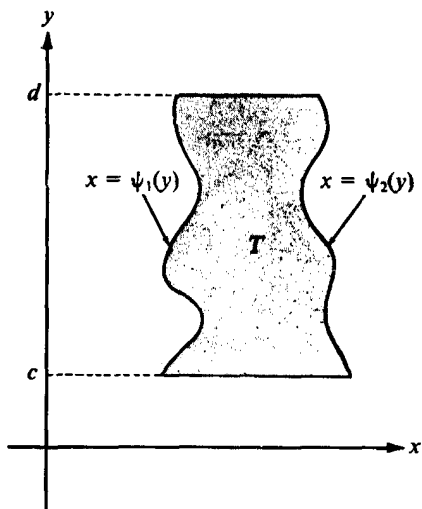
$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

که در آن φ_1 و φ_2 توابع پیوسته‌ای بر بازه بسته $[a, b]$ و صادق در $\varphi_1 \leq \varphi_2$ می‌باشند. مثالی از این نوع ناحیه، که آن را یک ناحیه از نوع یک نامیم، در شکل ۷.۱۱ نموده شده است. در یک ناحیه از نوع یک، به ازای هر نقطه t در $[a, b]$ ، خط قائم $x = t$ مجموعه S را در پاره خطی که منحنی $y = \varphi_1(x)$ را به $y = \varphi_2(x)$ وصل می‌کند قطع می‌نماید. این ناحیه کراندار است، زیرا φ_1 و φ_2 پیوسته‌اند؛ و در نتیجه، بر $[a, b]$ کراندار می‌باشند.

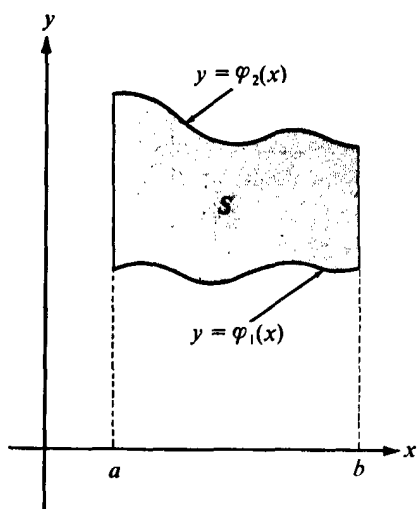
نوع دیگر ناحیه (از نوع دو) را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$T = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

که در آن ψ_1 و ψ_2 بر بازه $[c, d]$ پیوسته بوده و $\psi_1 \leq \psi_2$. مثالی در شکل ۸.۱۱ نموده شده است. در این حالت،



شکل ۸.۱۱ ناحیه T از نوع دو



شکل ۷.۱۱ ناحیه S از نوع یک

خطوط افقی T را در پاره خطهایی قطع می‌کنند. نواحی از نوع دو نیز کراندارند. همه نواحی مورد نظر ما یا از این دو نوعند و یا می‌توان آنها را به تعدادی متناهی قطعه تجزیه کرد که هریک از یکی از این دو نوع می‌باشد.

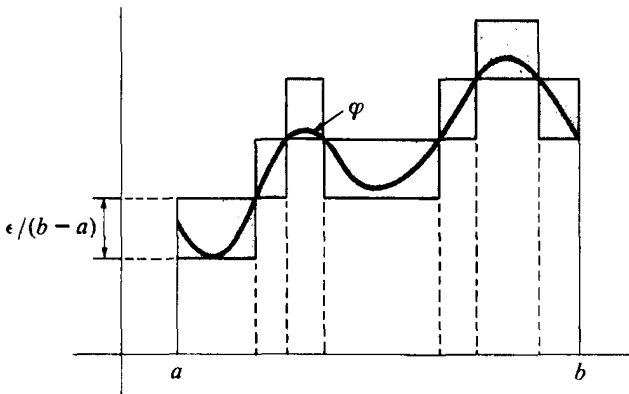
فرض کنیم f بر ناحیه S از نوع یک تعریف شده و کراندار باشد. S را در مستطیل Q جا داده و T را بر Q با معادله (۱۰.۱۱) تعریف می‌کنیم. ناپیوستگیهای T در Q عبارت است از ناپیوستگیهای f در S بعلاوه نقاطی بر کرانه S که در آنها f ناصفر است. کرانه S از نمودار φ_1 ، نمودار φ_2 ، و دو پاره خط قائم واصل بین این نمودارها تشکیل شده است. هریک از این پاره خطها دارای محتوای صفر است. قضیه بعد نشان می‌دهد که هریک از این نمودارها نیز دارای محتوای صفر می‌باشد.

قضیه ۸.۱۱. فرض کنیم φ یک تابع حقیقی باشد که بر بازه $[a, b]$ پیوسته است. در این صورت، نمودار φ دارای محتوای صفر می‌باشد.

برهان. فرض کنیم A نمودار φ باشد؛ یعنی،

$$A = \{(x, y) \mid y = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b\}.$$

$\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. با اعمال قضیه پیمای کوچک (قضیه ۱۳.۳ از جلد یک)، افزاز P از $[a, b]$ به تعدادی متناهی زیر بازه به دست می‌آید که پیمای φ در هر زیر بازه از P کمتر از $\epsilon/(b-a)$ است. لذا، روی هر زیر بازه P ، نمودار φ داخل مستطیلی



شکل ۹.۱۱ اثبات اینکه نمودار یک تابع پیوسته φ دارای محتوای صفر است

به ارتفاع $\epsilon/(b-a)$ قرار می‌گیرد. از اینرو، تمام نمودار φ در اجتماعی متناهی از مستطیلهای که مجموع مساحت آنها ϵ است قرار دارد. (مثالی در شکل ۹.۱۱ نموده شده است.) این ثابت می‌کند که نمودار φ دارای محتوای صفر است.

قضیه بعد نشان می‌دهد که انتگرال مضاعف $\iint_S f$ در صورت پیوسته بودن f بر $\text{int } S$ ، یعنی درون S ، وجود دارد. این مجموعه عبارت است از

$$\text{int } S = \{(x, y) \mid a < x < b \text{ و } \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}.$$

قضیه ۹.۱۱. فرض کنیم S ناحیه‌ای از نوع یک باشد، بین نمودارهای φ_1 و φ_2 . همچنین، f بر S تعریف شده و گراندار باشد و f درون S پیوسته باشد. در این صورت، انتگرال مضاعف $\iint_S f$ وجود دارد و می‌توان آن را با تکرار انتگرالگیری یک بعدی محاسبه کرد:

$$(11.11) \quad \iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx.$$

برهان. فرض کنیم $Q = [a, b] \times [c, d]$ مستطیلی حاوی S بوده، و \tilde{f} به وسیله

(۱۵.۱۱) تعریف شده باشد. تنها نقاط ناپیوستگی ممکن \tilde{f} نقاط کرانه‌ای S اند. چون کرانه S محتوای صفر دارد، \tilde{f} بر Q انتگرالپذیر است. به ازای هر x ثابت در (a, b) ، انتگرال یک بعدی $\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy$ موجود است، زیرا انتگرالده حداکثر دوناپیوستگی بر $[c, d]$ دارد. با اعمال صورتی از قضیه ۵.۱۱ که با معادله (۷.۱۱) داده شده، داریم

$$(12.11) \quad \iint_Q \tilde{f} = \int_a^b \left[\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy \right] dx.$$

اما، اگر $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ ، $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ ، و به ازای مقادیر باقی از y در $[c, d]$ ، $\tilde{f}(x, y) = 0$ ، لذا،

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) \, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy;$$

و در نتیجه، معادله (۱۲.۱۱) معادله (۱۱.۱۱) را ایجاب می‌کند.

البته، قضیه مشابهی برای ناحیه T از نوع دو نیز وجود دارد. اگر f بر T تعریف شده و کراندار باشد و نیز درون T پیوسته باشد، f بر T انتگرالپذیر است و فرمول مربوط به تکرار انتگرالگیری خواهد شد

$$(13.11) \quad \iint_T f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

برخی از ناحیه‌ها از هر دو نوع یک و دو اند. (نواحی محدود به دوایر و بیضیها از این قماشند.) در این حالت، ترتیب انتگرالگیری مهم نیست و می‌توان نوشت

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

در بعضی حالات، ممکن است محاسبه یکی از این انتگرالها از دیگری آسانتر باشد. معمولاً، پیش از محاسبه یک انتگرال مضاعف، بهتر است هر دو را امتحان کنیم.

۱۳.۱۱ کاربردهایی در مساحت و حجم

فرض کنیم S ناحیه‌ای از نوع یک به صورت زیر باشد:

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ و } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

با اعمال قضیه ۹.۱۱ با $f(x, y) = 1$ هم‌ا‌زای هر (x, y) در S ، به دست می‌آید که

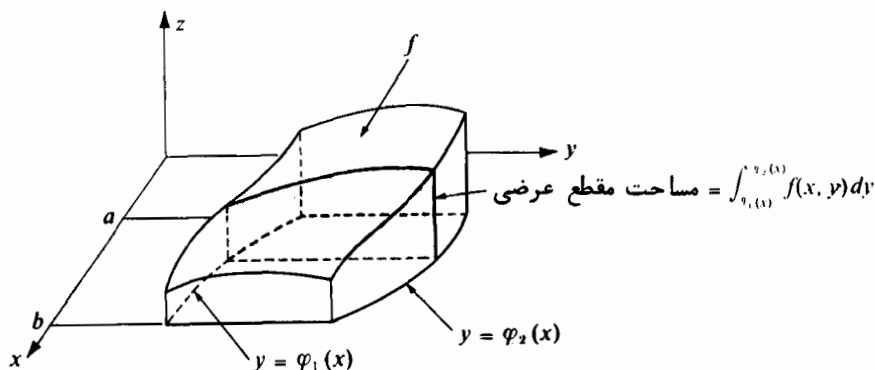
$$\iint_S dx dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx.$$

طبق قضیه ۱۰.۲ از جلد یک، انتگرال سمت راست مساوی مساحت ناحیه S است. لذا، انتگرالهای مضاعف را می‌توان برای محاسبه مساحت به کار برد.

اگر f نامنفی باشد، مجموعه نقاط (x, y, z) در فضای 3 که $(x, y) \in S$ و $0 \leq z \leq f(x, y)$ روی S نامیده می‌شود. مثالی در شکل ۱۰.۱۱ نموده شده است. اگر f بر S نامنفی و پیوسته باشد، انتگرال

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

مساحت یک مقطع عرضی حاصل از تقاطع یک صفحه موازی صفحه yz با مجموعه عرضی را نمایش می‌دهد (ناحیه سایه‌دار شکل ۱۰.۱۱). فرمول (۱۱.۱۱) قضیه ۹.۱۱ نشان می‌دهد که انتگرال مضاعف f روی S مساوی انتگرال مساحت مقطع عرضی است. لذا،



شکل ۱۰.۱۱ انتگرال $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ مساحت یک مقطع عرضی مجموعه عرضی است. انتگرال مکرر $\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$ حجم مجموعه عرضی می باشد.

انتگرال مضاعف $\iint_S f$ مساوی حجم مجموعه عرضی f روی S می باشد. (ر.ک. قضیه ۷.۲ از جلد یک، ص ۱۴۲)

بطور کلی، اگر f و g هر دو بر S پیوسته بوده و $f \leq g$ ، انتگرال مضاعف $\iint_S (g - f)$ مساوی حجم جسم واقع بین نمودارهای تابع f و g است. البته، نکات مشابهی را می توان در باب نواحی از نوع دو بیان کرد.

۱۴.۱۱ مثالهای حل شده

مثال ۰۱ حجم جسم محصور به بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

را حساب کنید.

حل. جسم مورد نظر بین نمودارهای دو تابع f و g قرار دارد، که

$$f(x, y) = -g(x, y) \quad \text{و} \quad g(x, y) = c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$$

در اینجا $(x, y) \in S$ ، که S ناحیه بیضوی

$$S = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

است. با اعمال قضیه ۹.۱۱ و استفاده از تقارن، معلوم می‌شود که حجم V جسم بیضی گون عبارت است از

$$V = \iint_S (g - f) = 2 \iint_S g = 8c \int_0^a \left[\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2} dy \right] dx.$$

فرض کنیم $A = \sqrt{1-x^2/a^2}$. در این صورت، انتگرال داخلی عبارت است از

$$\int_0^{bA} \sqrt{A^2 - y^2/b^2} dy = A \int_0^{bA} \sqrt{1 - y^2/(Ab)^2} dy.$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = Ab \sin t$ ، $dy = Ab \cos t dt$ ، معلوم می‌شود که آخرین انتگرال مساوی است با

$$A^2 b \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4} A^2 b = \frac{\pi b}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

بنابراین،

$$V = 8c \int_0^a \frac{\pi b}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

در حالت خاص $a = b = c$ ، جسم کره‌ای است به شعاع a و حجم $\frac{4}{3}\pi a^3$.

مثال ۲. انتگرال مضاعف تابع مثبت f ، یعنی $\iint_S f(x, y) dx dy$ ، به انتگرال مکرر

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 f(x, y) dy \right] dx$$

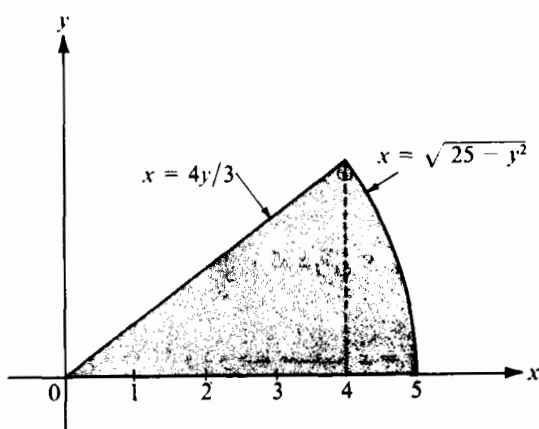
تحويل می‌شود. ناحیه S را تعیین کرده و ترتیب انتگرالگیری را تغییر دهید.

حل. به ازای هر x ثابت بین ۰ و ۱، انتگرالگیری نسبت به y روی بازه x^2 تا x است. این یعنی ناحیه از نوع یک است و بین دو منحنی $y = x^2$ و $y = x$ قرار دارد.

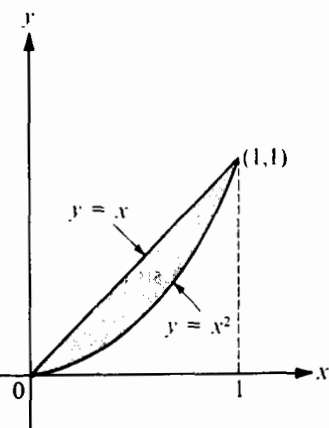
ناحیه S مجموعه نقاط بین این دو منحنی و روی بازه $[0, 1]$ است. (ر.ک. شکل ۱۱.۱۱).

چون S نیز از نوع دو است، می‌توان با تغییر ترتیب انتگرالگیری به دست آورد

$$\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right] dy.$$



شکل ۱۲.۱۱ مثال ۳



شکل ۱۱.۱۱ مثال ۲

مثال ۳. انتگرال مضاعف تابع مثبت f ، یعنی $\iint_S f(x, y) dx dy$ ، به انتگرال مکرر

$$\int_0^3 \left[\int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx \right] dy$$

تحویل می‌شود. ناحیه S را تعیین کرده و ترتیب انتگرالگیری را تغییر دهید.

حل. به ازای هر y ثابت بین ۰ و ۳، انتگرالگیری نسبت به x روی بازه از $4y/3$ تا $\sqrt{25-y^2}$ است. لذا، ناحیه S از نوع دو است و بین دو منحنی $x = 4y/3$ و $x = \sqrt{25-y^2}$ قرار دارد. این ناحیه، که در شکل ۱۲.۱۱ نموده شده است، قطاعی از یک دایره است. وقتی ترتیب انتگرالگیری عکس شود، ناحیه باید به دو ناحیه از نوع یک تجزیه گردد؛ نتیجه مجموع دو انتگرال می‌باشد:

$$\int_0^4 \left[\int_0^{3x/4} f(x, y) dy \right] dx + \int_4^5 \left[\int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy \right] dx.$$

۱۵.۱۱ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۵، ناحیه انتگرالگیری را رسم و انتگرال مضاعف را حساب کنید.

۱. $\iint_S x \cos(x+y) dx dy$ ، که در آن S یک ناحیه مثلثی شکل به راسهای $(0, 0)$ ، $(\pi, 0)$ ، (π, π) است.

۲. $\iint_S (1+x) \sin y \, dx \, dy$ ، که در آن S یک دوزنقه به راسهای $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 2)$ ، $(0, 1)$ است.

۳. $\iint_S e^{x+y} \, dx \, dy$ ، که در آن $S = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

۴. $\iint_S x^2 y^2 \, dx \, dy$ ، که در آن S بخش کراندار ربع اول واقع بین دو هذلولی $xy = 1$ و $xy = 2$ است.

۵. $\iint_S (x^2 - y^2) \, dx \, dy$ ، که در آن S به منحنی $y = \sin x$ و بازه $[0, \pi]$ محدود شده است.

۶. یک هرم به سه صفحه مختصات و صفحه $6 = x + 2y + 3z$ محدود شده است. آن را رسم کرده و حجمش را با انتگرالگیری مضاعف حساب کنید.

۷. جسمی به سطح $z = x^2 - y^2$ ، صفحه xy ، صفحات $x = 1$ و $x = 3$ محدود شده است. آن را رسم کرده و حجمش را با انتگرالگیری مضاعف حساب کنید.

۸. با انتگرالگیری مضاعف ، حجم مجموعه عرضی f را روی S در صورتی حساب کنید که

$$(آ) \quad S = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \text{ و } f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$(ب) \quad S = \{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36, x > 0, y > 0\} \text{ و } f(x, y) = 3x + y$$

$$(پ) \quad S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\} \text{ و } f(x, y) = y + 2x + 20$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۸ فرض است که انتگرال مضاعف تابع مثبت f روی ناحیه S به انتگرال مکرر داده شده تحویل می‌شود. در هر حالت ، ناحیه S را رسم کرده و ترتیب انتگرالگیری را تغییر دهید.

$$\int_0^1 \left[\int_{y^2}^{2y} f(x, y) \, dx \right] dy \quad \cdot 10 \qquad \int_0^1 \left[\int_0^y f(x, y) \, dx \right] dy \quad \cdot 9$$

$$\int_1^2 \left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) \, dy \right] dx \quad \cdot 12 \qquad \int_1^4 \left[\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) \, dy \right] dx \quad \cdot 11$$

$$\int_1^e \left[\int_0^{\log x} f(x, y) \, dy \right] dx \quad \cdot 14 \qquad \int_{-6}^2 \left[\int_{(x^2-4)/4}^{2-x} f(x, y) \, dy \right] dx \quad \cdot 13$$

$$\cdot \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{z^2} f(x, y) dy \right] dx \cdot 16 \quad \cdot \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy \right] dx \cdot 15$$

$$\cdot \int_0^4 \left[\int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} f(x, y) dx \right] dy \cdot 18 \quad \cdot \int_0^\pi \left[\int_{-\sin(x/2)}^{\sin x} f(x, y) dy \right] dx \cdot 17$$

۱۹. وقتی برای حجم V جسم تحت سهمی گون $z = x^2 + y^2$ و بالای ناحیه S از صفحه xy انتگرال مضاعف تشکیل دادیم، مجموع زیر از انتگرالهای مکرر به دست آمد:

$$V = \int_0^1 \left[\int_0^y (x^2 + y^2) dx \right] dy + \int_1^2 \left[\int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right] dy.$$

ناحیه S را رسم کرده و V را به صورت انتگرال مکرری که در آن ترتیب انتگرالگیری عکس شده است بیان دارید. همچنین، انتگرالگیری را انجام داده و V را محاسبه نمایید.

۲۰. وقتی برای حجم V جسم تحت سطح $z = f(x, y)$ و بالای ناحیه S از صفحه xy انتگرال مضاعف تشکیل دادیم، مجموع زیر از انتگرالهای مکرر به دست آمد:

$$V = \int_0^{a \sin c} \left[\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x, y) dx \right] dy + \int_{a \sin c}^{b \sin c} \left[\int_{y \cot c}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x, y) dx \right] dy.$$

به ازای $0 < a < b$ و $0 < c < \pi/2$ داده شده، ناحیه S را رسم کرده و معادلات همه منحنیهایی که کرانه آن را می سازند بنویسید.

۲۱. وقتی برای حجم V جسم تحت سطح $z = f(x, y)$ و بالای ناحیه S از صفحه xy انتگرال مضاعف تشکیل دادیم، مجموع زیر از انتگرالهای مکرر به دست آمد:

$$V = \int_1^2 \left[\int_x^3 f(x, y) dy \right] dx + \int_2^8 \left[\int_x^8 f(x, y) dy \right] dx.$$

(آ) ناحیه S را رسم کرده و V را به صورت یک انتگرال مکرر که در آن ترتیب انتگرالگیری عکس شده است بیان دارید.

(ب) انتگرالگیری را وقتی $f(x, y) = e^x(x/y)^{1/2}$ انجام داده و V را محاسبه نمایید.

۲۲. فرض کنید $A = \int_0^8 e^{-t^2} dt$ و $B = \int_0^{1/8} e^{-t^2} dt$. انتگرال مکرر

$$I = 2 \int_{-1/2}^1 \left[\int_0^x e^{-y^2} dy \right] dx$$

را بر حسب A و B حساب کنید. اینها اعداد صحیح مثبتی مانند m و n اند بطوری که

$$I = mA - nB + e^{-1} - e^{-1/1}.$$

با استفاده از این، جواب خود را امتحان کنید.

۲۳. مخروط توپری با اتصال هر نقطه از ناحیه^۲ سطح S به راسی که در صفحه^۳ S نیست به دست آمده است. فرض کنید A مساحت S بوده، و h ارتفاع مخروط باشد. ثابت کنید

(آ) مساحت مقطع عرضی حاصل به وسیله^۴ یک صفحه^۵ موازی قاعده در فاصله^۶ t

از راس مساوی $(t/h)^2 A$ است اگر $0 \leq t \leq h$ ؛

(ب) حجم مخروط مساوی است با $\frac{1}{3} Ah$.

۲۴. با عکس کردن ترتیب انتگرالگیری، فرمول زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_0^a \left[\int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx \right] dy = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx,$$

که در آن a و m ثابت بوده و $a > 0$.

۱۶.۱۱ کاربردهای دیگری از انتگرالهای مضاعف

قبلاً دیدیم که انتگرالهای مضاعف را می‌توان در محاسبه^۷ حجم اجسام و مساحت نواحی مسطح به‌کار برد. بسیاری از مفاهیم دیگر نظیر جرم، مرکز جرم، و گشتاور ماند را نیز می‌توان به کمک انتگرالهای مضاعف تعریف و محاسبه کرد. این بخش شامل بحث کوتاهی از این مباحث است. این نکات در فیزیک و مهندسی از اهمیت خاصی برخوردارند.

فرض کنیم P برداری از مبدا^۸ تا یک نقطه^۹ دلخواه در فضای ۳ باشد. اگر n جرم مثبت m_1, m_2, \dots, m_n را بترتیب در نقاط P_1, P_2, \dots, P_n قرار داده باشیم، مرکز جرم دستگاه نقطه^{۱۰} C تعریف می‌شود که با معادله^{۱۱} برداری

$$C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k P_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

معین می‌گردد. مخرج، یعنی $\sum m_k$ ، جرم کل دستگاه نامیده می‌شود.

اگر هر جرم m_k با بردار معلوم A به نقطه^{۱۲} جدید Q_k که $Q_k = P_k + A$ ، انتقال

داده شود، مرکز جرم نیز به وسیله^{۱۳} A انتقال می‌یابد، زیرا داریم

$$\frac{\sum m_k Q_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k (P_k + A)}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k P_k}{\sum m_k} + A = C + A.$$

این را می توان این طور توصیف کرد که گفت موضع مرکز جرم فقط به نقاط P_1, P_2, \dots, P_n و جرمهای آن بستگی دارد، و از مبدأ مستقل است. مرکز جرم کمیتی است به طور نظری محاسبه شده که، به زبانی، "نقطه تعادل" فرضی دستگاه را نمایش می دهد.

هرگاه جرمها در یک صفحه و در نقاطی به مختصات $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ واقع بوده و مرکز جرم به مختصات (\bar{x}, \bar{y}) باشد، رابطه برداری معرف C را می توان به صورت دو معادله اسکالر بیان کرد:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}$$

در صورت کسر معرف \bar{x} ، جمله k ام مجموع، یعنی $m_k x_k$ را گشتاور جرم m_k حول محور y می نامند. اگر جرم m مساوی جرم کل دستگاه باشد که در مرکز جرم گذارده شده است، گشتاور آن حول محور y مساوی گشتاور دستگاه است:

$$m\bar{x} = \sum_{k=1}^n m_k x_k$$

وقتی در دستگاه ما جرم کل به جای در چند نقطه مجزا در سراسر یک ناحیه در صفحه توزیع شده باشد، مفاهیم جرم، مرکز جرم، و گشتاور به جای مجموع با انتگرال تعریف می شوند. مثلاً، یک صفحه نازک به شکل ناحیه مسطح S را در نظر می گیریم. فرض کنیم ماده روی این صفحه با چگالی (جرم در واحد مساحت) معلوم توزیع شده باشد. این یعنی تابعی نامنفی مانند f وجود دارد که بر S تعریف شده است و $f(x, y)$ جرم در واحد مساحت در نقطه (x, y) را نمایش می دهد. اگر صفحه از ماده همگنی ساخته شده باشد، چگالی ثابت است. در این حالت جرم کل صفحه مساوی حاصل ضرب چگالی در مساحت صفحه تعریف می شود.

وقتی چگالی نقطه به نقطه تغییر کند، از انتگرال مضاعف چگالی به عنوان تعریف جرم کل استفاده می شود. به عبارت دیگر، اگر تابع چگالی f روی S انتگرال پذیر باشد، جرم کل $m(S)$ صفحه را با معادله

$$m(S) = \iint_S f(x, y) \, dx \, dy$$

تعریف می کنیم. خارج قسمت

$$\frac{\text{جرم}}{\text{مساحت}} = \frac{\iint_S f(x, y) dx dy}{\iint_S dx dy}$$

چگالی متوسط صفحه نامیده می‌شود. اگر S را به جای صفحه نازک یک شکل هندسی بگیریم، این خارج قسمت مقدار متوسط یا میانگین تابع f روی ناحیه S نامیده می‌شود. در این حالات لازم نیست f نامنفی باشد.

برای تشابه با حالت متناهی، مرکز جرم صفحه را نقطه (\bar{x}, \bar{y}) تعریف می‌کنیم که با معادلات

$$\bar{y}m(S) = \iint_S yf(x, y) dx dy \quad \text{و} \quad \bar{x}m(S) = \iint_S xf(x, y) dx dy$$

معین می‌شود. انتگرالهای طرف راست بترتیب گشتاورهای صفحه حول محور y و محور x نامیده می‌شوند. وقتی چگالی ثابت باشد، مثلاً $f(x, y) = c$ ، سازه c در هر یک از معادلات (۱۴.۱۱) حذف شده و خواهیم داشت

$$\bar{y}a(S) = \iint_S y dx dy \quad \text{و} \quad \bar{x}a(S) = \iint_S x dx dy$$

که در آنها $a(S)$ مساحت S است. در این حالت، نقطه (\bar{x}, \bar{y}) مرکزگرم صفحه (یا ناحیه S) نامیده خواهد شد.

هرگاه L خطی در این صفحه باشد، $\delta(x, y)$ را فاصله عمودی نقطه (x, y) در S تا خط L می‌گیریم. در این صورت، عدد I_L تعریف شده با معادله

$$I_L = \iint_S \delta^2(x, y) f(x, y) dx dy$$

گشتاور ماند صفحه حول L نام دارد. وقتی $f(x, y) = 1$ ، I_L گشتاور ماند یا گشتاور دوم ناحیه S حول L نام دارد. گشتاورهای ماند بترتیب حول محورهای x و y با I_x و I_y نموده، و با انتگرالهای زیر داده می‌شوند:

$$I_y = \iint_S x^2 f(x, y) dx dy \quad \text{و} \quad I_x = \iint_S y^2 f(x, y) dx dy$$

مجموع این دو انتگرال گشتاور ماند قطبی I_0 حول مبدأ نام دارد:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_S (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy.$$

تذکره. جرم و مرکز جرم یک صفحه از خواص جسم بوده و از موضع مبدا و جهات محورهای مختصات مستقل اند. گشتاور ماند قطبی تابع موضع مبدا است ولی از جهات محورهای مختصات مستقل است. گشتاورها و گشتاورهای ماند حول محورهای x و y تابع موضع مبدا و جهات محورها می‌باشند. اگر یک صفحه با چگالی ثابت محور تقارن داشته باشد، مرکزگون آن برای محور واقع است. اگر دو محور تقارن وجود داشته باشند، مرکزگون بر نقطه برخورد آنها قرار دارد. این احکام، که از تعاریف پیش قابل اثبات اند، اغلب در ساده کردن محاسبات مرکز جرم و گشتاور ماند کمک خواهند بود.

مثال ۱. یک صفحه نازک به چگالی ثابت c به دو دایره متحدالمرکز با شعاعهای a و b محدود شده، که $0 < b < a$ ، و مرکزش در مبدا است. گشتاور ماند قطبی آن را حساب کنید.

حل. انتگرال مربوط به I_0 عبارت است از

$$I_0 = c \iint_S (x^2 + y^2) dx dy,$$

که در آن $S = \{(x, y) \mid b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$. برای ساده کردن محاسبات، انتگرال فوق را به صورت تفاضل دو انتگرال می‌نویسیم:

$$I_0 = c \iint_{S(a)} (x^2 + y^2) dx dy - c \iint_{S(b)} (x^2 + y^2) dx dy,$$

که در آن $S(a)$ و $S(b)$ بترتیب قرصهای مستدیر به شعاعهای a و b اند. می‌توان از انتگرالگیری مکرر برای محاسبه انتگرال روی $S(a)$ استفاده کرد، و معلوم داشت که

$$\iint_{S(a)} (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2) dy \right] dx = \frac{\pi a^4}{2}.$$

(جزئیات محاسبه را حذف کرده‌ایم، زیرا این انتگرال را می‌توان با استفاده از مختصات قطبی، که در بخش ۲۷-۱۱ بحث می‌شود، ساده‌تر حساب کرد.) بنابراین،

$$I_0 = \frac{\pi c}{2} (a^4 - b^4) = \pi c (a^2 - b^2) \frac{(a^2 + b^2)}{2} = m \frac{a^2 + b^2}{2},$$

که در آن $m = \pi c (a^2 - b^2)$ جرم صفحه است.

مثال ۲. مرکزگون ناحیه^۱ مسطح محدود به یک قوس از منحنی سینوس را معین کنید .

حل . ناحیه^۱ S محدود به منحنی $y = \sin x$ و بازه^۲ $0 \leq x \leq \pi$ را اختیار می‌کنیم . بنابراین تقارن ، مختص x مرکزگون مساوی است با $\bar{x} = \pi/2$. مختص y آن ، یعنی \bar{y} ، از رابطه^۳ زیر به دست می‌آید :

$$\bar{y} = \frac{\iint_S y \, dx \, dy}{\iint_S dx \, dy} = \frac{\int_0^\pi [\int_0^{\sin x} y \, dy] \, dx}{\int_0^\pi \sin x \, dx} = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin^2 x \, dx}{2} = \frac{\pi}{8} .$$

۱۷.۱۱ دو قضیه از پاپوس^۱

پاپوس اسکندری ، که حدود ۳۰۰ ب.م . می‌زیسته ، یکی از آخرین هندسه‌دانان مدرسه^۲ ریاضیات یونانی در اسکندریه است . وی هشت کتاب نوشت و در آنها بخش اعظم اطلاعات ریاضی زمان خود را تلخیص کرد . (شش تای آخر و بخشی از کتاب دوم به جا مانده‌اند .) پاپوس چند خاصیت جالب مرکزگونها را کشف کرد ، که دو تای آنها در این بخش توصیف می‌شوند . اولین خاصیت مرکزگون یک ناحیه^۳ مسطح را با حجم جسم دوار حاصل از دوران این ناحیه حول خطی در صفحه^۴ آن مربوط می‌کند .

ناحیه^۱ مسطح Q را که بین نمودارهای دو تابع پیوسته^۲ f و g روی بازه^۳ $[a, b]$ ، که $0 \leq g \leq f$ ، قرار دارد در نظر می‌گیریم . فرض کنیم S جسم دوار حاصل از دوران Q حول محور x باشد . همچنین ، $a(Q)$ مساحت ، $v(S)$ حجم S ، و \bar{y} مختص y مرکزگون Q باشد . وقتی Q برای تولید S می‌چرخد ، مرکزگون در امتداد دایره‌ای به شعاع \bar{y} حرکت می‌کند . قضیه^۴ پاپوس می‌گوید که حجم S مساوی محیط این دایره ضربدر مساحت Q است ؛ یعنی ،

$$(15.11) \quad v(S) = 2\pi\bar{y}a(Q) .$$

برای اثبات این فرمول کافی است توجه کنیم که حجم از انتگرال

$$v(S) = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] \, dx$$

و \bar{y} از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\bar{y}a(Q) = \iint_Q y \, dy \, dx = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} y \, dy \right] dx = \int_a^b \frac{1}{2} [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

از مقایسه این دو فرمول فوراً (۱۵.۱۱) به دست خواهد آمد.

مثال ۱. حجم یک چنبره. فرض کنیم S چنبره حاصل از دوران قرص مستدیر Q به شعاع R حول محوری در فاصله $R > b$ از مرکز Q باشد. حجم S به آسانی از قضیه پاپوس حساب می‌شود. داریم $b = \bar{y}$ و $a(Q) = \pi R^2$ ؛ در نتیجه،

$$v(S) = 2\pi \bar{y} a(Q) = 2\pi^2 R^2 b.$$

مثال بعدی نشان می‌دهد که قضیه پاپوس را می‌توان برای محاسبه مرکزگونها نیز به کار برد.

مثال ۲. مرکزگون یک قرص نیمه مستدیر. فرض کنیم \bar{y} مختص \bar{y} مرکزگون قرص نیمه مستدیر

$$Q = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$$

باشد. مساحت Q مساوی است با $\frac{1}{2}\pi R^2$. وقتی Q حول محور x بچرخد، یک کره توپر به حجم $\frac{4}{3}\pi R^3$ تولید می‌کند. طبق فرمول پاپوس، داریم

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi \bar{y} \left(\frac{1}{2}\pi R^2\right);$$

$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}.$$

قضیه بعدی پاپوس می‌گوید که مرکزگون اجتماع دو ناحیه مسطح از هم جدای ۱ و B بر پاره خط واصل بین مرکزگون A و مرکزگون B واقع است. بطور کلی، فرض کنیم A و B دو صفحه نازک باشند یا از هم جدا و یا در مجموعه‌ای با محتوای صفر یکدیگر را قطع کنند. همچنین، $m(A)$ و $m(B)$ جرمهای آنها بوده، و C_{A1} و C_{B1} بردارهایی از مبداء تا مراکز جرم آنها باشند. در این صورت، اجتماع $A \cup B$ به جرم $m(A) + m(B)$ بوده، و مرکز جرم آن با بردار C معین می‌شود، که

$$C = \frac{m(A)C_{A1} + m(B)C_{B1}}{m(A) + m(B)} \quad (۱۶.۱۱)$$

کسر مربوط به C ترکیبی است خطی به شکل $aC_A + bC_B$ ، که در آن a و b اسکالرهایی نامنفی با مجموع ۱ می‌باشند. هر ترکیب خطی به این شکل یک ترکیب محدب از C_B و C_A نامیده می‌شود. نقطه انتهایی C بر پاره خط واصل بین نقاط انتهایی C_A و C_B واقع است.

فرمول پاپوس (۱۶.۱۱) فوراً "از تعریف مرکز جرم که با (۱۴.۱۱) داده شده نتیجه می‌شود. اثبات را به عنوان تمرین به خواننده محول می‌کنیم. قضیه را می‌توان به طرز روشن به اجتماع سه یا چند ناحیه تعمیم داد. این قضیه بویژه در عمل وقتی صفحه‌ای با چگالی ثابت از چند قطعه ساخته شده است و هر قطعه دارای تقارن هندسی است سودمند است. مرکزگرم هر قطعه را معین کرده و سپس، برای یافتن مرکزگرم اجتماع، ترکیب محدب مناسبی را تشکیل می‌دهیم. مثالهایی در تمرین ۲۱ بخش بعد آورده شده‌اند.

۱۸.۱۱ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۸، ناحیه S به یک یا چند منحنی که با معادلاتی توصیف شده‌اند محدود شده است. در هر حالت ناحیه S را رسم کرده و مختصات \bar{x} و \bar{y} مرکزگرم را معین نمایید.

۱. $x + y = 2$ ، $y = x^2$ ، $x^2 = 5 - y$ ، $y^2 = x + 3$.

۳. $x = -2$ ، $x = 4$ ، $x + 3y + 5 = 0$ ، $x - 2y + 8 = 0$.

۴. $y = \sin^2 x$ ، $y = 0$ ، $0 \leq x \leq \pi$.

۵. $y = \sin x$ ، $y = \cos x$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

۶. $y = \log x$ ، $y = 0$ ، $1 \leq x \leq a$.

۷. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ، $x = 0$ ، $y = 0$.

۸. $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 1$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، در ربع اول.

۹. یک صفحه نازک به یک قوس از سهمی $y = 2x - x^2$ و بازه $0 \leq x \leq 2$ محدود شده است. اگر چگالی در هر نقطه (x, y) مساوی $(1 + x)/(1 - y)$ باشد، جرم آن را معین نمایید.

۱۰. مرکز جرم یک صفحه نازک به شکل مستطیل $ABCD$ را در صورتی بیابید که چگالی در هر نقطه حاصل ضرب فواصل آن نقطه تا دو ضلع مجاور AB و AD باشد. در تمرینهای ۱۱ تا ۱۶، گشتاورهای ماند I_x و I_y صفحه نازک S در صفحه xy

که با یک یا چند منحنی به معادلات داده شده توصیف شده‌اند را محاسبه کنید.
در هر حالت، $f(x, y)$ چگالی در نقطه دلخواه (x, y) از S است.

$$11. \quad y = \sin^2 x, \quad y = -\sin^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi; \quad f(x, y) = 1$$

$$12. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1, \quad y = 0, \quad 0 < c < a, \quad b > 0; \quad f(x, y) = 1$$

$$13. \quad (x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq y \leq r; \quad f(x, y) = 1$$

$$14. \quad xy = 1, \quad xy = 2, \quad x = 2y, \quad y = 2x, \quad x > 0, \quad y > 0; \quad f(x, y) = 1$$

$$15. \quad y = e^x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq a; \quad f(x, y) = xy$$

$$16. \quad y = \sqrt{2x}, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 2; \quad f(x, y) = |x - y|$$

۱۷. فرض کنید S یک صفحه نازک به جرم m بوده، و L و L_0 دو خط موازی در صفحه S باشند بطوری که L_0 از مرکز جرم S بگذرد. قضیه محور موازی را اثبات کنید:

$$I_L = I_{L_0} + mh^2,$$

که در آن h فاصله عمودی بین دو خط L و L_0 است.

[راهنمایی. انتخاب دقیق محورهای مختصات کار را ساده می‌کند.]

۱۸. کرانه یک صفحه نازک یک بیضی با نیم محوره‌های a و b است. فرض کنید L خطی در این صفحه باشد که از مرکز بیضی گذشته و با محور به طول $2a$ زاویه α می‌سازد. اگر چگالی ثابت بوده و جرم صفحه m باشد، نشان دهید که گشتاور ماند I_L مساوی است با $\frac{1}{4}m(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$.

۱۹. فاصله متوسط یک گوشه از یک مربع به ضلع h تا نقاط داخل مربع را پیدا کنید.
۲۰. فرض کنید δ فاصله نقطه دلخواه P داخل یک دایره به شعاع r تا نقطه ثابت P_0 که فاصله‌اش تا مرکز دایره h است باشد. متوسط تابع δ^2 روی ناحیه محصور به دایره را پیدا نمایید.

۲۱. فرض کنید A, B, C مستطیلهای زیر در صفحه xy باشند:

$$A = [0, 4] \times [0, 1], \quad B = [2, 3] \times [1, 3], \quad C = [2, 4] \times [3, 4].$$

با استفاده از قضیه پاپوس، مرکزگرم هر یک از اشکال زیر را معین نمایید:

$$A \cup B \quad (T) \quad ; \quad A \cup C \quad (ب) \quad ; \quad B \cup C \quad (پ) \quad ; \quad A \cup B \cup C \quad (ت)$$

۲۲. مثلث متساوی‌الساقین T به قاعده 1 و ارتفاع h است. قاعده T بر یکی از اضلاع مستطیل R به قاعده 1 و ارتفاع 2 منطبق شده است. مقدار h را طوری بیابید که مرکزگرم $R \cup T$ بر ضلع مشترک R و T قرار گیرد.

۲۳. مثلث متساوی الساقین T به قاعده $2r$ و ارتفاع h است. قاعده T بر ضلع قرص نیمه مستدیر D به شعاع r منطبق شده است. رابطه‌ای که باید بین r و h برقرار باشد تا مرکزگون $T \cup D$ داخل مثلث قرار گیرد را معین کنید.

۱۹۰۱۱ قضیه گرین^۱ در صفحه

دومین قضیه^۲ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انتگرالهای خطی می‌گوید که انتگرال خطی گرادینان ∇f در امتداد یک مسیر بین نقاط a و b را می‌توان برحسب مقادیر تابعی $f(a)$ و $f(b)$ بیان کرد. مشابه دو بعدی این قضیه وجود دارد که انتگرال مضاعف روی یک ناحیه^۳ مسطح مانند R را به صورت انتگرال خطی بیان می‌کند که در امتداد منحنی بسته^۴ متشکل از کرانه^۵ R گرفته شده است. این قضیه را معمولاً "قضیه گرین" می‌گویند. * آن را می‌توان به چند طریق بیان کرد، که متداولترین آنها اتحاد زیر است:

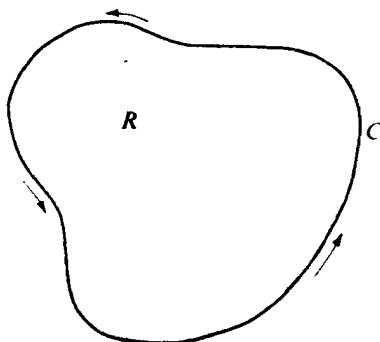
$$(17.11) \quad \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy.$$

منحنی C در سمت راست کرانه^۶ ناحیه^۷ R است، و علامت انتگرالگیری \oint می‌گوید، همانطور که شکل ۱۳.۱۱ نشان داده، منحنی باید در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیچیده شود.

برای برقراری این اتحاد به دو نوع فرض نیاز داریم. اولاً، قیودی بر توابع P و Q برای وجود انتگرالها اعمال می‌شوند. مفروضات معمول این است که P و Q بر مجموعه^۸ بازی چون S شامل ناحیه^۹ R به طور پیوسته مشتقپذیر باشند. این امر پیوستگی P و Q بر C و نیز پیوستگی $\partial P/\partial y$ و $\partial Q/\partial x$ بر R را ایجاب می‌کند، اگرچه این قضیه با مفروضات ضعیفتر نیز معتبر است. ثانیاً، شرایطی وجود دارند با طبیعت هندسی که بر ناحیه^{۱۰} R و کرانه‌اش منحنی C اعمال می‌شوند. منحنی C می‌تواند هر منحنی بسته^{۱۱} ساده با

1. Green

* به افتخار جرج گرین (George Green (1793-1841)، ریاضیدان انگلیسی که درباره^{۱۲} کاربردهای ریاضیات در الکتریسیته و مغناطیس، جریان مایعات، و انعکاس و تفرق نور و صوت مطالبی نوشته است. قضیه که نام گرین را دارد قبلاً "در تحقیقات گاوس و لاگرانژ آمده است.



شکل ۱۳.۱۱ منحنی C کرانه R است، که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

طول متناهی باشد. البته، واژه "با طول متناهی" یعنی C دارای طول قوس متناهی است. برای توضیح معنی یک منحنی بسته ساده، به تابع برداری که منحنی را توصیف می‌کند متوسل می‌شویم.

فرض کنیم C با تابع برداری پیوسته α که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده توصیف شده باشد. اگر $\alpha(a) = \alpha(b)$ ، منحنی بسته است. یک منحنی بسته که به ازای هر جفت مقدار $t_1 \neq t_2$ در بازه $[a, b]$ نیمباز $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ ، یک منحنی بسته ساده نامیده می‌شود. این یعنی، جز نقاط انتهایی بازه $[a, b]$ ، مقادیر متمایز از t نقاط متمایز بر منحنی را به دست می‌دهند. دایره نمونه‌ای است از یک منحنی بسته ساده.

منحنیهای بسته ساده واقع در یک صفحه را معمولاً، به افتخار کامیل ژردان^۱ (۱۹۲۲ - ۱۸۳۸)، ریاضیدان مشهور فرانسوی که اغلب کارهای اولیه بر مفاهیمی نظیر منحنیهای بسته ساده و طول قوس را انجام داده است، منحنیهای ژردان می‌نامند. هر منحنی ژردان C صفحه را به دو مجموعه همبند باز از هم جدا که منحنی C کرانه مشترک آنهاست تجزیه می‌کند. یکی از این نواحی گراندا^۲ است و درون (یا ناحیه داخلی) C نام دارد. (مثلاً، ناحیه سایه دار شکل ۱۳.۱۱). دیگری بی‌کران است و بیرون (یا ناحیه خارجی) C نامیده می‌شود. در بعضی از منحنیهای ژردان آشنا نظیر دایره، بیضیها،

1. Camille Jordan

یا چند ضلعیهای مقدماتی، شهودا" واضح است که منحنی صفحه را به یک ناحیهء داخلی و خارجی تقسیم می‌کند، ولی اثبات این امر برای یک منحنی ژردان دلخواه آسان نیست. ژردان اولین کسی بود که لزوم اثبات این امر را متذکر شد. این مطلب امروزه به قضیهء منحنی ژردان معروف است. در اواخر قرن ۱۹، ژردان و دیگران برهانهای ناقصی منتشر کردند. در سال ۱۹۰۵، ریاضیدان امریکایی اسوالد ویلن^۱ (۱۹۶۰ - ۱۸۸۰)، اولین برهان کامل این قضیه را ارائه داد. قضیهء گرین در صورتی که C یک منحنی ژردان با طول متناهی بوده و ناحیهء R اجتماع C و درونش باشد معتبر است. * چون انتگرالهای خط در امتداد منحنیهای با طول متناهی دلخواه تعریف نشده‌اند، بحث خود را در اینجا به منحنیهای قطعه قطعه هموار محدود می‌کنیم.

مشکل فنی دیگری نیز در تنظیم قضیهء گرین وجود دارد. قبلا" گفتیم که، برای برقراری اتحاد (۱۷.۱۱)، باید منحنی C در جهت خلاف حرکت ساعت پیموده شود. بطور شهودی، این یعنی شخصی که در امتداد منحنی در این جهت حرکت کند همیشه ناحیهء R را سمت چپ خود دارد. مجددا"، در بعضی از منحنیهای ژردان آشنا، نظیر آنهایی که پیشتر ذکر شدند، معنی عبارت "پیمودن یک منحنی در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت" شهودا" واضح است. با اینحال، در بیان کاملا" دقیق قضیهء گرین، این عبارت باید به‌طور کاملا" تحلیلی تعریف شود؛ یعنی، بر حسب تابع برداری α که منحنی را توصیف می‌کند. یکی از تعاریف ممکن در بخش ۲۴.۱۱ به اختصار شرح داده شده است.

حال که به چند مشکل در تنظیم قضیهء گرین اشاره شد، قضیه را به شکل نسبتا" کلی بیان کرده سپس مختصرا" صحت آن را برای چند ناحیهء خاص نشان می‌دهیم. در این بحث معنی "خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت" شهودی است؛ در نتیجه، بحث کاملا" دقیق نخواهد بود.

قضیهء ۱۰.۱۱. قضیهء گرین برای نواحی مسطح محدود به منحنیهای ژردان قطعه قطعه

1. Oswald Veblen

* برهان قضیهء گرین برای نواحی با این عمومیت را می‌توان در فصل ۱۰ (کتاب آنالیز ریاضی اپوستل یافت).

هموار. فرض کنیم P و Q میدانهایی اسکالر باشند که بر مجموعه S باز در صفحه xy به طور پیوسته مشتقپذیر هستند. همچنین، C یک منحنی ژردان قطعه قطعه هموار بوده، و R اجتماع C با درونش باشد. فرض کنیم R زیر مجموعه‌ای از S باشد. در این صورت، اتحاد زیر را داریم

$$(18.11) \quad \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

که در آن انتگرال خط حول C و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده است.

تذکره. اتحاد (18.11) با دو فرمول

$$(19.11) \quad \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy$$

و

$$(20.11) \quad - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx$$

معادل است. در واقع، اگر هر دوی اینها درست باشند، (18.11) با جمع نتیجه می‌شود. بعکس، اگر (18.11) درست باشد، می‌توان (19.11) و (20.11) را به عنوان حالاتی خاص بترتیب با فرض $P = 0$ و $Q = 0$ به دست آورد.

برهان برای نواحی خاص. (20.11) را برای ناحیه R از نوع یک ثابت می‌کنیم. یک چنین ناحیه به شکل زیر است:

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

که در آن f و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $f \leq g$. کرانه C ی R از چهار بخش تشکیل شده است، قوس پایینی C_1 (نمودار f)، قوس بالایی C_2 (نمودار g)، و دو پاره‌خط قائم، که در جهات نموده شده در شکل ۱۴.۱۱ پیموده می‌شوند.

ابتدا انتگرال مضاعف $\iint_R (\partial P / \partial y) dx dy$ را با انتگرالگیری مکرر حساب می‌کنیم. اگر ابتدا نسبت به y انتگرال بگیریم، داریم

$$(21.11) \quad - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx$$

$$= \int_a^b P[x, f(x)] dx - \int_a^b P[x, g(x)] dx.$$

از آن سو، انتگرال خط $\int_C P dx$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx,$$

زیرا انتگرال خط در امتداد هر پاره خط قائم صفر است. برای محاسبه انتگرال در امتداد C_1 ، از نمایش برداری $\alpha(t) = ti + f(t)j$ استفاده کرده به دست می آوریم

$$\int_{C_1} P dx = \int_a^b P[t, f(t)] dt.$$

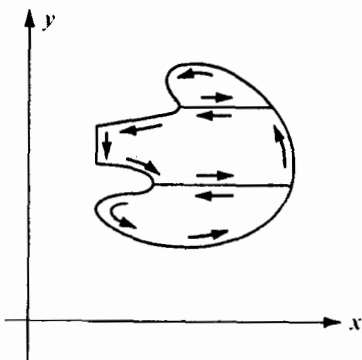
برای محاسبه انتگرال در امتداد C_2 ، از نمایش $\alpha(t) = ti + g(t)j$ استفاده کرده، با محسوب کردن جهت عکس، به دست می آوریم

$$\int_{C_2} P dx = -\int_a^b P[t, g(t)] dt.$$

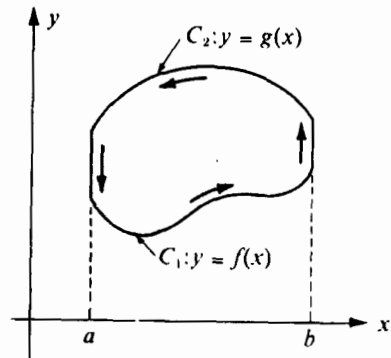
لذا، داریم

$$\int_C P dx = \int_a^b P[t, f(t)] dt - \int_a^b P[t, g(t)] dt.$$

از مقایسه این معادله با فرمول (۲۱.۱۱)، (۲۰.۱۱) را به دست خواهیم آورد. با استدلال مشابهی، می توان (۱۹.۱۱) را برای نواحی از نوع دواشبات کرد.



شکل ۱۵.۱۱ برهان قضیه گرین برای یک ناحیه کلیتر



شکل ۱۴.۱۱ برهان قضیه گرین برای یک ناحیه خاص

بدین طریق، برهان قضیه^۲ گرین برای نواحی هم از نوع یک هم از نوع دو به دست می آید. پس از این کار، قضیه را می توان برای نواحی R که قابل تجزیه به تعدادی متناهی ناحیه از هر دو نوعند اثبات کرد. "برشهای عرضی" مثل شکل ۱۵.۱۱ وارد کار می شوند، قضیه بر هر زیر ناحیه اعمال می شود، و نتایج با هم جمع می گردند. همانطور که شکل نشان می دهد، انتگرالهای خط در امتداد برشهای عرضی جفت جفت حذف می شوند، و مجموع انتگرالهای خط در امتداد کرانه های زیر ناحیه ها مساوی انتگرال خط در امتداد کرانه^۳ R است.

۲۰.۱۱ چند کاربرد قضیه گرین

مثالهای زیر چند کاربرد قضیه^۴ گرین را توضیح می دهند.

مثال ۱. با استفاده از قضیه^۵ گرین، کار انجام شده به وسیله میدان نیروی

$f(x, y) = (y + 3x)i + (2y - x)j$ در حرکت جسمی حول بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت را محاسبه کنید

برهان. این کار مساوی است با $\int_C P dx + Q dy$ ، که در آن $P = y + 3x$ ، $Q = 2y - x$ بیضی است. چون $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = -2$ ، قضیه^۶ گرین نتیجه می دهد که

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R (-2) dx dy = -2a(R),$$

که در آن $a(R)$ مساحت ناحیه^۷ محصور به بیضی است. چون این بیضی دارای نیم محوره های $a = 1$ و $b = 2$ است، مساحت آن مساوی است با $\pi ab = 2\pi$ و مقدار انتگرال خط برابر -4π می باشد.

مثال ۲. انتگرال خط $\int_C (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy$ را در صورتی که C مربعی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(0, 1)$ بوده و در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت پیموده شود حساب کنید.

حل. در اینجا $P = 5 - xy - y^2$ ، $Q = x^2 - 2xy$ ، و $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 3x$

لذا، طبق قضیه گرین، داریم

$$\int_C P dx + Q dy = 3 \iint_R x dx dy = 3\bar{x},$$

که در آن \bar{x} مختص x مرکزگرم مربع است. چون \bar{x} بوضوح $\frac{1}{2}$ است، مقدار انتگرال خط $\frac{3}{2}$ می‌باشد.

مثال ۳. مساحت بیان شده با یک انتگرال خط. انتگرال مضاعف برای مساحت $a(R)$ ناحیه R را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$a(R) = \iint_R dx dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

که در آن P و Q طوری هستند که $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$ ، مثلاً "می‌توان $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ و $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ را اختیار کرد. اگر R ناحیه محصور به منحنی زردان C باشد، می‌توان، با اعمال قضیه گرین، $a(R)$ را به صورت انتگرال خط بیان کرد:

$$a(R) = \int_C P dx + Q dy = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy.$$

اگر منحنی کرانه C با معادلات پارامتری توصیف شده باشد، مثلاً

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad a \leq t \leq b,$$

انتگرال خط برای مساحت خواهد شد

$$a(R) = \frac{1}{2} \int_a^b \{ -Y(t)X'(t) + X(t)Y'(t) \} dt = \frac{1}{2} \int_a^b \begin{vmatrix} X(t) & Y(t) \\ X'(t) & Y'(t) \end{vmatrix} dt.$$

۲۱.۱۱ شرط لازم و کافی برای گرادیان بودن یک میدان برداری دوبعدی

فرض کنیم میدان برداری $f(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ بر مجموعه S در صفحه به طور پیوسته مشتقپذیر باشد. اگر f یک گرادیان بر S باشد، همه جا بر S داریم

$$(22.11) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

به عبارت دیگر، شرط (۲۲:۱۱) شرطی لازم برای گرادیان بودن f است. همانطور که قبلاً دیدیم، این شرط کافی نیست. مثلاً، میدان برداری

$$f(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} i + \frac{x}{x^2 + y^2} j$$

همه جا بر مجموعه $S = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ در (۲۲.۱۱) صدق می‌کند، ولی f یک گرادیان بر S نیست. در قضیه ۹.۱۰ ثابت کردیم که اگر مجموعه S محدب باشد، شرط (۲۲.۱۱) هم لازم و هم کافی برای گرادیان بودن f بر S است. به کمک قضیه گرین می‌توان این نتیجه را به رده کلیتری از مجموعه‌های مسطح به نام مجموعه‌های همبند ساده تعمیم داد. این مجموعه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف مجموعه مسطح همبند ساده. فرض کنیم S یک مجموعه همبند باز در صفحه باشد. S را همبند ساده گوئیم اگر، به ازای هر منحنی ژردان C واقع در S ، ناحیه داخلی C نیز زیر مجموعه S باشد.

یک طوق (مجموعه نقاط بین دو دایره متحدالمرکز) همبند ساده نیست، زیرا ناحیه داخلی یک دایره متحدالمرکز با دوایر کرانه و شعاعی بین شعاعهای آنها زیر مجموعه‌ای از طوق نیست. بطور شهودی، S را وقتی همبند ساده گوئیم که دارای "سوراخ" نباشد. راه دیگر توصیف همبندی ساده این است که بگوئیم منحنی C_1 در S که دو نقطه را بهم وصل می‌کند را می‌توان به هر منحنی دیگر C_2 در S که این دو نقطه را بهم وصل می‌کند به طور پیوسته تغییر داد، بطوری که همه منحنیهای میانی در طول تغییر شکل کاملاً در S قرار داشته باشند. تعریف دیگر، که می‌توان معادل بودنش را با تعریف فوق نشان داد، می‌گوید که مجموعه همبند باز S همبند ساده است اگر متمم آن (نسبت به تمام صفحه) همبند باشد. مثلاً، یک طوق همبند ساده نیست، زیرا متمم آن ناهمبند است. یک مجموعه همبند باز که همبند ساده نباشد همبند چندگانه نام دارد.

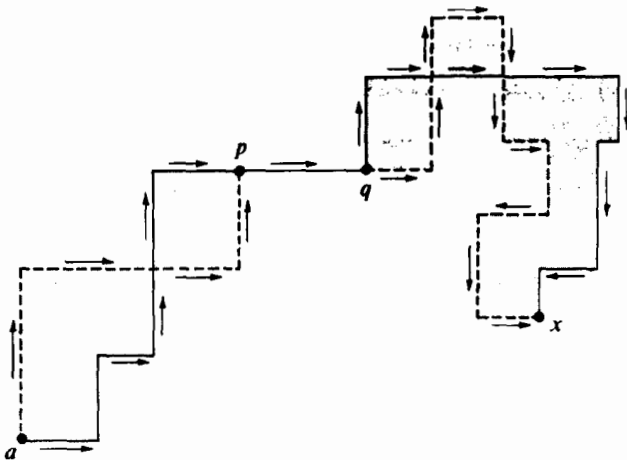
قضیه ۱۱.۱۱. فرض کنیم میدان برداری $f(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ بر مجموعه همبند ساده S در صفحه به طور پیوسته مشتقپذیر باشد. در این صورت، f یک گرادیان بر S است اگر و فقط اگر

$$(۲۳.۱۱) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{همه جا بر } S \text{ داشته باشیم}$$

برهان. همانطور که قبلاً دیدیم، شرط (۲۳.۱۱) شرطی لازم برای گرادیان بودن f است. حال ثابت می‌کنیم این شرط کافی نیز هست.

می‌توان نشان داد که، در هر مجموعهٔ مسطح همبند باز S ، هر جفت نقطهٔ a و x را می‌توان با یک چندضلعی پله‌ای ساده، یعنی چند ضلعی که اضلاعش موازی محورهای مختصات بوده و خود قطعی ندارد، بهم وصل کرد. اگر انتگرال خط f از a تا x به‌ازای هر چند ضلعی پله‌ای ساده در S واصل بین a و x یک مقدار داشته باشد، دقیقاً "استدلال به‌کار رفته در اثبات قضیهٔ ۴.۱۰ نشان می‌دهد که f یک گرادیان بر S است. لذا، کافی است تحقیق کنیم که انتگرال خط f از a تا x ، به‌ازای هر چند ضلعی پله‌ای ساده در S واصل بین a و x ، دارای یک مقدار است.

فرض کنیم C_1 و C_2 دو چند ضلعی پله‌ای ساده در S واصل بین a و x باشند. بخشهایی از این چند ضلعیها ممکن است در امتداد پاره خطهایی منطبق باشند. بخشهای دیگر حداکثر تعدادی متناهی بار متقاطعند، و کرانه‌های تعدادی متناهی ناحیهٔ چند ضلعی، مثلاً " R_1, \dots, R_m " را تشکیل می‌دهند. چون S همبند ساده فرض شده است، هریک از نواحی R_i زیر مجموعه‌ای از S است. مثالی در شکل ۱۶.۱۱ نموده شده است. خط ممتد نمایش C_1 است، خط منقطع نمایش C_2 است، و نواحی سایه‌دار نمایش R_1, \dots, R_m می‌باشند. (این دو چند ضلعی خاص در امتداد پاره خط pq بر هم منطبق‌اند.) حال می‌بینیم که انتگرال خط f از a تا x در امتداد C_1 علاوهٔ انتگرال از x تا



شکل ۱۶.۱۱ استقلال مسیر در یک ناحیهٔ همبند ساده

a در امتداد C_2 صفر است، زیرا انتگرال در امتداد مسیر بسته مجموع انتگرالهایی است که روی پاره خطهای مشترک در C_1 و C_2 گرفته می‌شوند. بعلاوه، مجموع انتگرالهایی که حول کرانه‌های نواحی R_k گرفته می‌شوند. انتگرالها روی پاره خطهای مشترک جفت جفت حذف می‌شوند، زیرا هر پاره خط مشترک دوبار، در جهت‌های مخالف، پیموده می‌شوند، و مجموع آنها صفر می‌باشد. انتگرال روی کرانه Γ_k هر ناحیه R_k نیز صفر است، زیرا، طبق قضیه گرین، می‌توان نوشت

$$\int_{\Gamma_k} P dx + Q dy = \pm \iint_{R_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

و انتگرالده انتگرال مضاعف بخاطر فرض $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صفر است. از اینجا نتیجه می‌شود که انتگرال از a تا x در امتداد C_1 مساوی انتگرال در امتداد C_2 است. همانطور که قبلاً دیدیم، این ایجاب می‌کند که f یک گرادیان در S باشد.

۲۲.۱۱ تمرین

۱. با استفاده از قضیه گرین، انتگرال خط $\oint_C y^2 dx + x dy$ را وقتی

(ت) C مربعی به راسهای $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$, $(0, 0)$ باشد؛

(ب) C مربعی به راسهای $(\pm 1, \pm 1)$ باشد؛

(پ) C مربعی به راسهای $(0, \pm 2)$, $(\pm 2, 0)$ باشد؛

(ت) C دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ باشد؛

(ث) C به معادله برداری $0 \leq t \leq 2\pi$ $\alpha(t) = 2 \cos^3 t i + 2 \sin^3 t j$ باشد

را حساب کنید.

۲. هرگاه $P(x, y) = xe^{-y^2}$ و $Q(x, y) = -x^2y e^{-y^2} + 1/(x^2 + y^2)$ ، انتگرال خط

$\oint_C P dx + Q dy$ را حول کرانه مربعی به ضلع $2a$ که با نامعادلات $|x| \leq a$ و

$|y| \leq a$ معین می‌شود حساب کنید.

۳. فرض کنید C یک منحنی بسته ساده در صفحه xy بوده، و I_z گشتاور ماند (حول

محور z) ناحیه محصوره C باشد. نشان دهید که عددی صحیح مانند n هست

بطوری که

$$nI_z = \oint_C x^2 dy - y^2 dx.$$

۴. دو میدان اسکالر u و v داده شده‌اند که بر مجموعهٔ E بازی شامل قرص مستدیر R که کرانه‌اش دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ است به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر می‌باشند. دو میدان برداری f و g را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x, y) = v(x, y)i + u(x, y)j, \quad g(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)i + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)j.$$

اگر بر کرانهٔ R داشته باشیم $u(x, y) = 1$ و $v(x, y) = y$ ، مقدار انتگرال مضاعف $\iint_R f \cdot g \, dx \, dy$ را پیدا نمایید.

۵. هرگاه f و g در مجموعهٔ E همبند باشند باز S در صفحه به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید که به‌ازای هر منحنی زردان قطعه قطعه هموار C در S ،

$$\oint_C f \nabla g \cdot d\alpha = -\oint_C g \nabla f \cdot d\alpha$$

۶. فرض کنید میدانهای اسکالر u و v در مجموعهٔ E همبند باشند باز S در صفحه دارای مشتقات جزئی مراتب اول و دوم پیوسته باشند. همچنین، R ناحیه‌ای در S باشد که به منحنی زردان قطعه قطعه هموار C محدود شده است. نشان دهید که

$$\oint_C uv \, dx + uv \, dy = \iint_R \left\{ v \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} dx \, dy \quad (\tau)$$

$$\frac{1}{2} \oint_C \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \iint_R \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx \, dy \quad (\nu)$$

مشتقهای قائم. در بخش ۱۰.۷ انتگرالهای خطی را نسبت به طول قوس طوری تعریف کردیم که معادلهٔ زیر برقرار باشد:

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \int_C f \cdot T \, ds,$$

که در آن $f = Pi + Qj$ و T بردار یکهٔ مماس بر C است. (حاصل ضرب نقطه‌ای $f \cdot T$ مولفهٔ مماسی f در امتداد C نام دارد.) اگر C یک منحنی زردان باشد که باتابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر α ، مثلاً $\alpha(t) = X(t)i + Y(t)j$ ، توصیف می‌شود، قائم یکهٔ خارجی n از C ، وقتی $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ ، با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$n(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} (Y'(t)i - X'(t)j).$$

اگر φ یک میدان اسکالر با گرادینان $\nabla\varphi$ بر C باشد، مشتق قائم $\partial\varphi/\partial n$ بر C با

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}$$

تعریف می‌شود. البته، این مشتق جهتی φ در جهت \mathbf{n} است. این مفاهیم در بقیه تمرینات این بخش ظاهر خواهند شد.

۷. هرگاه $f = Qi - Pj$ ، نشان دهید که

$$\int_C P dx + Q dy = \int_C f \cdot \mathbf{n} ds.$$

(حاصل ضرب نقطه‌ای $f \cdot \mathbf{n}$ مولفه قائم f در امتداد C نام دارد.)

۸. فرض کنید میدانهای اسکالر f و g بر مجموعه S در صفحه دارای مشتقات جزئی مراتب اول و دوم پیوسته باشند. همچنین، R ناحیه‌ای (در S) باشد که کرانه‌اش یک منحنی ژردان قطعه قطعه هموار مانند C است. اتحادهای زیر را ثابت کنید، که در آنها $\nabla^2 u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2$:

$$\oint_C \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R \nabla^2 g dx dy \quad (\text{ا})$$

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy \quad (\text{ب})$$

$$\oint_C \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = \iint_R (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy \quad (\text{پ})$$

اتحاد (پ) به فرمول گرین معروف است. این فرمول نشان می‌دهد که هرگاه هر دو f و g بر R توافقی باشند (یعنی، وقتی بر R ، $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$)،

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \oint_C g \frac{\partial f}{\partial n} ds.$$

۹. فرض کنید معادله دیفرانسیل

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

دارای سازه انتگرالگیری $\mu(x, y)$ باشد که به یک خانواده یک پارامتری از جوابها به شکل $\varphi(x, y) = C$ منجر می‌شود. اگر شیب منحنی $\varphi(x, y) = C$ در (x, y) مساوی $\tan \theta$ باشد، بردار یکه قائم \mathbf{n} به معنی

$$n = \sin \theta i - \cos \theta j$$

گرفته می‌شود. یک میدان اسکالر مانند $g(x, y)$ وجود دارد بطوری که مشتق قائم φ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mu(x, y)g(x, y),$$

که در آن $\nabla \varphi \cdot n = \partial \varphi / \partial n$. برای $g(x, y)$ یک فرمول صریح بر حسب $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ پیدا کنید.

* ۲۳.۱۱ قضیه گرین برای ناحیه‌های همبند چندگانه

قضیه گرین را می‌توان طوری تعمیم داد که بر پاره‌ای از نواحی همبند چندگانه قابل اعمال باشد.

قضیه ۱۲.۱۱. قضیه گرین برای نواحی همبند چندگانه. فرض کنیم C_1, \dots, C_n ، n منحنی ژردان قطعه قطعه هموار با خواص زیر باشند:

(آ) هیچ دو منحنی متقاطع نباشند؛

(ب) منحنیهای C_2, \dots, C_n همه درون C_1 واقع باشند؛

(پ) به ازای هر $i > 1, j > 1, i \neq j$ ، منحنی C_i برون منحنی C_j واقع باشد.

فرض کنیم R ناحیه متشکل از C_1 با آن بخش از درون C_1 باشد که داخل هیچیک از منحنیهای C_2, C_3, \dots, C_n قرار ندارد. (مثالی از چنین ناحیه در شکل ۱۷.۱۱ نموده شده است.) همچنین، P و Q بر مجموعه S شامل R به طور پیوسته مشتق پذیر باشد. در این صورت، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$(۲۴.۱۱) \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1} (P dx + Q dy) - \sum_{k=2}^n \oint_{C_k} (P dx + Q dy).$$

قضیه را می‌توان با استفاده از برشهای عرضی که R را به اجتماع تعدادی متناهی ناحیه همبند ساده محدود به منحنیهای ژردان تبدیل می‌کنند ثابت کرد. قضیه گرین بر هر بخش جداگانه اعمال شده، و نتایج بهم افزوده می‌شوند. نشان می‌دهیم که این اثبات، وقتی $n = 2$ ، چگونه صورت می‌گیرد. حالت کلیتر را می‌توان با استفاده از

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}$$

تعریف می‌شود. البته، این مشتق جهتی φ در جهت \mathbf{n} است. این مفاهیم در بقیه تمرینات این بخش ظاهر خواهند شد.

۷. هرگاه $f = Qi - Pj$ ، نشان دهید که

$$\int_C P dx + Q dy = \int_C f \cdot \mathbf{n} ds.$$

(حاصل ضرب نقطه‌ای $f \cdot \mathbf{n}$ مولفه قائم f در امتداد C نام دارد.)

۸. فرض کنید میدانهای اسکالر f و g بر مجموعه S در صفحه دارای مشتقات جزئی

مراتب اول و دوم پیوسته باشند. همچنین، R ناحیه‌ای (در S) باشد که کرانه‌اش یک منحنی زردان قطعه قطعه هموار مانند C است. اتحادهای زیر را ثابت کنید، که

$$\text{در آنها } \nabla^2 u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 :$$

$$: \oint_C \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R \nabla^2 g dx dy \quad (\text{ا})$$

$$: \oint_C f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy \quad (\text{ب})$$

$$: \oint_C \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = \iint_R (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy \quad (\text{پ})$$

اتحاد (پ) به فرمول گرین معروف است. این فرمول نشان می‌دهد که هرگاه هر دو

f و g بر R توافقی باشند (یعنی، وقتی بر R ، $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$)،

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \oint_C g \frac{\partial f}{\partial n} ds .$$

۹. فرض کنید معادله دیفرانسیل

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

دارای سازه انتگرالگیری $\mu(x, y)$ باشد که به یک خانواده یک پارامتری از جوابها

به شکل $\varphi(x, y) = C$ منجر می‌شود. اگر شیب منحنی $\varphi(x, y) = C$ در (x, y) مساوی

$\tan \theta$ باشد، بردار بیکه قائم \mathbf{n} به معنی

$$n = \sin \theta i - \cos \theta j$$

گرفته می‌شود. یک میدان اسکالر مانند $g(x, y)$ وجود دارد بطوری که مشتق قائم φ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mu(x, y)g(x, y),$$

که در آن $\partial \varphi / \partial n = \nabla \varphi \cdot n$. برای $g(x, y)$ یک فرمول صریح برحسب $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ پیدا کنید.

* ۲۳.۱۱ قضیهٔ گرین برای ناحیه‌های همبند چندگانه

قضیهٔ گرین را می‌توان طوری تعمیم داد که بر پاره‌ای از نواحی همبند چندگانه قابل اعمال باشد.

قضیهٔ ۱۲.۱۱. قضیهٔ گرین برای نواحی همبند چندگانه. فرض کنیم C_1, \dots, C_n ,

n منحنی ژردان قطعه قطعه هموار با خواص زیر باشند:

(آ) هیچ دو منحنی متقاطع نباشند؛

(ب) منحنیهای C_2, \dots, C_n همه درون C_1 واقع باشند؛

(پ) به ازای هر $i > 1, j > 1, i \neq j$ ، منحنی C_i برون منحنی C_j واقع باشد.

فرض کنیم R ناحیهٔ متشکل از C_1 با آن بخش از درون C_1 باشد که داخل هیچیک از

منحنیهای C_2, C_3, \dots, C_n قرار ندارد. (مثالی از چنین ناحیه در شکل (۱۷.۱) نموده

شده است.) همچنین P و Q بر مجموعهٔ S شامل R به طور پیوسته مشتقپذیر باشد.

در این صورت، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

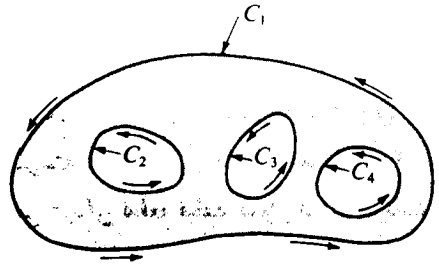
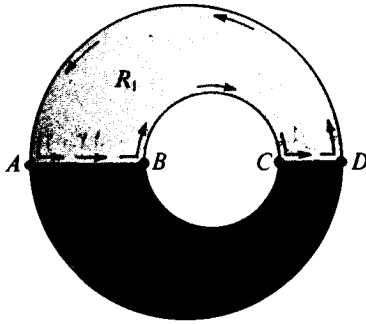
$$(24.11) \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1} (P dx + Q dy) - \sum_{k=2}^n \oint_{C_k} (P dx + Q dy).$$

قضیه را می‌توان با استفاده از برشهای عرضی که R را به اجتماع تعدادی متناهی

ناحیهٔ همبند سادهٔ محدود به منحنیهای ژردان تبدیل می‌کنند ثابت کرد. قضیهٔ گرین

بر هر بخش جداگانه اعمال شده، و نتایج بهم افزوده می‌شوند. نشان می‌دهیم که این

اثبات، وقتی $n = 2$ ، چگونه صورت می‌گیرد. حالت کلیتر را می‌توان با استفاده از



شکل ۱۷۰۱۱ یک ناحیهء همبند چندگانه شکل ۱۸۰۱۱ اثبات قضیهء گرین برای یک ناحیهء همبند چندگانه

استقرا بر تعداد n منحنی ثابت کرد.

ابدهء اثبات در حالت $n = 2$ با مثالی در شکل ۱۸۰۱۱ نموده شده است، که در آن C_1 و C_2 دو دایره بوده و C_1 دایرهء بزرگتر است. برشهای عرضی AB و CD را، مطابق شکل، وارد کار می‌کنیم. فرض کنیم K_1 منحنی ژردان مرکب از نیمهء بالایی C_2 ، نیمهء بالایی C_1 ، و پاره خطهای AB و CD باشد. همچنین، K_2 منحنی ژردان مرکب از نیمهء پایینی C_1 ، نیمهء پایینی C_2 ، و دو پاره خط AB و CD باشد. حال قضیهء گرین را بر هر ناحیهء محدود به K_1 و K_2 اعمال کرده و دو اتحاد حاصل را بهم می‌افزاییم. انتگرالهای خط در امتداد برشهای عرضی حذف می‌شوند (چون هر برش عرضی در هر جهت یکبار پیموده می‌شود)، و معادلهء زیر نتیجه خواهد شد:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1} (P dx + Q dy) - \oint_{C_2} (P dx + Q dy).$$

علامت منهای بخاطر جهتی است که C_2 در آن جهت پیموده می‌شود. این همان معادلهء (۲۴۰۱۱)، وقتی $n = 2$ ، می‌باشد.

برای یک ناحیهء همبند ساده، شرط $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$ ایجاب می‌کند که انتگرال خط $\int P dx + Q dy$ از مسیر مستقل باشد (قضیهء ۱۱۰۱۱). همانطور که قبلاً دیدیم، اگر S همبند ساده نباشد، شرط $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$ لزوماً استقلال مسیر را ایجاب نمی‌کند.

با اینحال، در این حالت جانشینی برای استقلال هست که می‌تواند از قضیه ۱۲.۱۱ نتیجه شود.

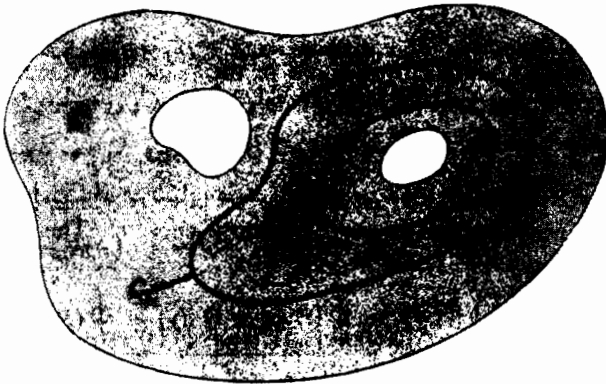
قضیه ۱۳.۱۱. پایایی انتگرال خط تحت تغییر شکل مسیر. فرض کنیم P و Q بر مجموعه همبند باز S در صفحه به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده، و همه جا بر S ، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. همچنین، C_1 و C_2 دو منحنی ژردان قطعه قطعه هموار در S بوده و در شرایط زیر صدق کنند:

(آ) C_2 درون C_1 واقع باشد؛

(ب) نقاط داخل C_1 که خارج C_2 واقع‌اند در S قرار داشته باشند. (شکل ۱۹.۱۱ مثالی را نشان می‌دهد.) در این صورت، داریم

$$(25.11) \quad \oint_{C_1} P dx + Q dy = \oint_{C_2} P dx + Q dy,$$

که در آن هر دو منحنی در یک جهت پیموده می‌شوند.



شکل ۱۹.۱۱ پایایی انتگرال خط تحت تغییر شکل مسیر

برهان. با شرط‌های بیان شده، معادله (۲۴.۱۱) وقتی $n = 2$ قابل اعمال است. ناحیه R از نقاط بین دو منحنی C_1 و C_2 و خود منحنیها تشکیل شده است. چون در S ، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ، طرف چپ معادله (۲۴.۱۱) صفر است و (۲۵.۱۱) به دست می‌آید.

قضیه ۱۳.۰۱۱ گاهی این طور توصیف می شود که می گویند اگر در S ، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ، مقدار یک انتگرال خط در امتداد یک منحنی بسته ساده، قطعه قطعه هموار در S با تغییر شکل مسیر به منحنی بسته ساده، قطعه قطعه هموار دیگر در S ثابت می ماند، مشروط بر اینکه همه منحنیهای میانی در طول تغییر شکل در S بمانند. مجموعه S باز و همبند گرفته شده است - لازم نیست همبند ساده باشد.

* ۲۴.۰۱۱ عدد گردشی

دیدیم که مقدار یک انتگرال خط اغلب هم به منحنی که در امتدادش انتگرالگیری صورت می گیرد و هم به جهت پیموده شدن منحنی بستگی دارد. مثلاً، در اتحاد قضیه گرین باید انتگرال خط در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت گرفته شود. در بحث کاملاً دقیق قضیه گرین لازم است معنی پیمودن یک منحنی بسته در "جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت" به طور تحلیلی معلوم شود. برای بعضی از منحنیهای خاص، این را می توان با عبارات خاصی در باب تابع برداری α که منحنی را توصیف می کند انجام داد. مثلاً، تابع برداری α تعریف شده بر $[0, 2\pi]$ با معادله

$$(24.011) \quad \alpha(t) = (a \cos t + x_0)i + (a \sin t + y_0)j$$

یک دایره به شعاع a و به مرکز (x_0, y_0) را توصیف می کند. گوئیم این تابع خاص دایره را در جهت مثبت یا خلاف حرکت عقربه های ساعت توصیف می کند. از آن سو، اگر درست راست (۲۴.۰۱۱) t را با $-t$ عوض کنیم، تابع جدیدی به دست می آید که گوئیم دایره را در جهت منفی یا حرکت عقربه های ساعت توصیف می کند. بدین طریق، توصیف کاملاً تحلیلی "در جهت حرکت عقربه های ساعت" و "در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت" برای یک دایره به دست می آید. با اینحال، توصیف این ایده برای یک منحنی بسته دلخواه چندان ساده نیست. برای منحنیهای قطعه قطعه هموار، این کار را می توان با مفهوم عدد گردشی انجام داد، روشی تحلیلی که به ما راه دقیق ریاضی شمارش دفعاتی که بردار شعاعی α حول یک نقطه معلوم در پیمایش یک منحنی بسته مفروض می گردد به ما می دهد. در این بخش به اختصار روشی را برای معرفی عدد گردشی توصیف می کنیم. سپس طرز استفاده از آن برای دادن جهت مثبت یا منفی به منحنیهای بسته را نشان می دهیم.

فرض کنیم C یک منحنی بسته قطعه قطعه هموار در صفحه باشد که به وسیله تابع

برداري α تعریف شده بر بازه $[a, b]$ ، مثلاً

$$\alpha(t) = X(t)i + Y(t)j, \quad a \leq t \leq b$$

توصیف می‌شود. فرض کنیم نقطه $P_0 = (x_0, y_0)$ بر منحنی C واقع نباشد. در این صورت، عدد گردش α نسبت به نقطه P_0 با $W(\alpha; P_0)$ نموده می‌شود، و با انتگرال زیر تعریف می‌گردد:

$$(27.11) \quad W(\alpha; P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{[X(t) - x_0]Y'(t) - [Y(t) - y_0]X'(t)}{[X(t) - x_0]^2 + [Y(t) - y_0]^2} dt.$$

این همان انتگرال خط

$$(28.11) \quad \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{-(y - y_0) dx + (x - x_0) dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

می‌باشد. می‌توان نشان داد که مقدار این انتگرال همیشه یک عدد صحیح، مثبت، منفی، یا صفر، است. بعلاوه، هرگاه C یک منحنی زردان (منحنی بسته ساده) باشد، این عدد 0 است اگر P_0 خارج C باشد و 1 یا -1 است اگر P_0 داخل C باشد. (ر.ک. شکل ۲۵.۱۱). بعلاوه، $W(\alpha; P_0)$ به‌ازای هر نقطه P_0 داخل C +1 است یا به‌ازای



شکل ۲۵.۱۱ مقادیر ممکن عدد گردش منحنی زردان C نسبت به P_0

هر چنین نقطه -1 می‌باشد. با این می‌توان جهت‌های مثبت و منفی برای C را این‌طور تعریف کرد: اگر به‌ازای هر نقطه P_0 داخل C عدد گردش $W(\alpha; P_0)$ مساوی +1 باشد، گوئیم α منحنی C را در جهت مثبت یا خلاف حرکت عقربه‌های ساعت رسم می‌کند. اگر عدد گردش -1 باشد، گوئیم α منحنی C را در جهت منفی یا حرکت عقربه‌های ساعت رسم می‌کند. [به‌نونه‌ای از انتگرال (28.11) که به‌ازای $x_0 = y_0 = 0$ به دست می‌آید

قبلاً" در مثال ۲ از بخش ۱۶.۱۵ برخوردیم.]

برای اثبات اینکه انتگرال معرف عدد گردش به‌ازای یک منحنی بسته ساده حول

(x_0, y_0) همیشه $+1$ یا -1 است، از قضیه ۱۳.۱۱ استفاده می‌کنیم. فرض کنیم S ناحیه همبند باز مرکب از تمام نقاط در صفحه جز (x_0, y_0) باشد. در این صورت، انتگرال خط در (28.11) را می‌توان به صورت $\int_C P dx + Q dy$ نوشت، و به آسانی ثابت می‌شود که، هم‌جا در S ، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. لذا، اگر (x_0, y_0) داخل C باشد، قضیه ۱۳.۱۱ می‌گوید که می‌توان بدون تغییر مقدار انتگرال، منحنی C را با دایره‌ای به مرکز (x_0, y_0) عوض کرد. حال تحقیق می‌کنیم که، برای یک دایره، انتگرال معرف عدد گردشی، بسته به اینکه دایره به‌طور مثبت یا منفی جهت‌دار شده باشد، $+1$ یا -1 است. برای یک دایره جهت‌دار با جهت مثبت، می‌توان از نمایش مذکور در معادله (۲۶.۱۱) استفاده کرد. در این حالت، داریم

$$X(t) = a \cos t + x_0, \quad Y(t) = a \sin t + y_0,$$

و انتگرالده در (۲۷.۱۱) متحد I است. لذا، خواهیم داشت.

$$W(\alpha; P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1.$$

با استدلالی مشابه، معلوم می‌شود که این انتگرال، وقتی C جهت‌دار با جهت منفی باشد، -1 است. این ثابت می‌کند که، به‌ازای هر منحنی بسته ساده حول نقطه (x_0, y_0) ، عدد گردشی $+1$ یا -1 است.

* ۲۵.۱۱ تمرین

۱. فرض کنید $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 0\}$ ، و اگر $(x, y) \in S$ ،

$$P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

همچنین، C یک منحنی زردان قطعه قطعه هموار در S باشد.

(آ) اگر $(0, 0)$ داخل C باشد، نشان دهید که انتگرال خط $\int_C P dx + Q dy$ دارای

مقدار $\pm 2\pi$ است، و توضیح دهید چه وقت علامت بعلاوه خواهیم داشت.

(ب) مقدار انتگرال خط $\int_C P dx + Q dy$ ، وقتی $(0, 0)$ خارج C است، را حساب

کنید.

۲. اگر $r = xi + yj$ و $r = \|r\|$ ، به‌ازای $r > 0$ قرار دهید

$$f(x, y) = \frac{\partial(\log r)}{\partial y} i - \frac{\partial(\log r)}{\partial x} j.$$

فرض کنید C یک منحنی ژردان قطعه قطعه هموار در طوق $1 < x^2 + y^2 < 25$ بوده، و تمام مقادیر ممکن انتگرال خط f در امتداد C را بیابید.

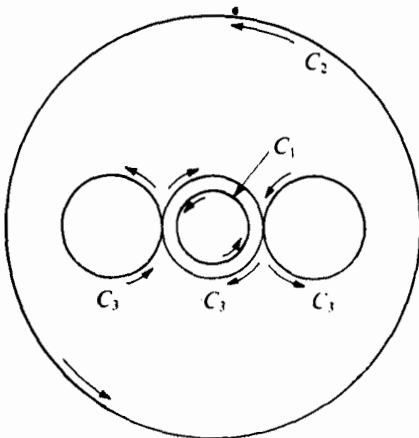
۳. یک ناحیه مسطح همبند که درست یک "سوراخ" داشته باشد همبند مضاعف نامیده می شود. (طوق $1 < x^2 + y^2 < 2$ یک نمونه است.) اگر P و Q بر ناحیه همبند مضاعف R به طور پیوسته مشتقپذیر بوده، و همه جا در R ، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ، انتگرالهای خط $\int_C P dx + Q dy$ چند مقدار متمایز حول منحنیهای ژردان قطعه قطعه هموار در R بخود می گیرند؟

۴. تمرین ۳ را برای نواحی همبند سه گانه، یعنی نواحی مسطح همبندی که درست دو سوراخ دارند، حل کنید.

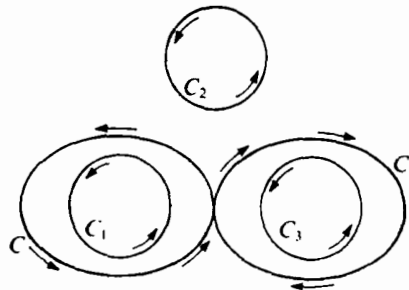
۵. فرض کنید P و Q دو میدان اسکالر دارای مشتقات پیوسته باشند که همه جا در صفحه جز در سه نقطه در $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ صدق می کنند. همچنین، C_1, C_2, C_3 سه دایره نامتقاطع به مرکز این سه نقطه، مثل شکل ۲۱.۱۱، بوده، و $I_k = \oint_{C_k} P dx + Q dy$. فرض کنید $I_1 = 12, I_2 = 10, I_3 = 15$.

(آ) مقدار $\int_C P dx + Q dy$ ، که در آن C منحنی شکل هشت نموده شده است، را پیدا کنید.

(ب) منحنی بسته دیگر Γ را طوری رسم کنید که در امتدادش $\int P dx + Q dy = 1$ روی آن جهت پیمایش Γ را نشان دهید.



شکل ۲۲.۱۱. تمرین ۶



شکل ۲۱.۱۱. تمرین ۵

(پ) اگر $I_1 = 12$ ، $I_2 = 9$ ، و $I_3 = 15$ ، نشان دهید که منحنی بسته‌ای چون

$$\Gamma \text{ نیست که در امتدادش } \int P dx + Q dy = 1$$

۶. فرض کنید $I_k = \oint_{C_k} P dx + Q dy$ ، که در آن

$$P(x, y) = -y \left[\frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right]$$

و

$$Q(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$$

در شکل ۲۲۰۱۱ ، C_1 کوچکترین دایره یعنی $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ است (که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده است) ، C_2 بزرگترین دایره یعنی $x^2 + y^2 = 4$ (که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده است) ، و C_3 از سه دایره میانی $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ، $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ و $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ تشکیل شده که در جهت نموده پیموده شده است . اگر $I_2 = 6\pi$ و $I_3 = 2\pi$ ، مقدار I_1 را پیدا کنید .

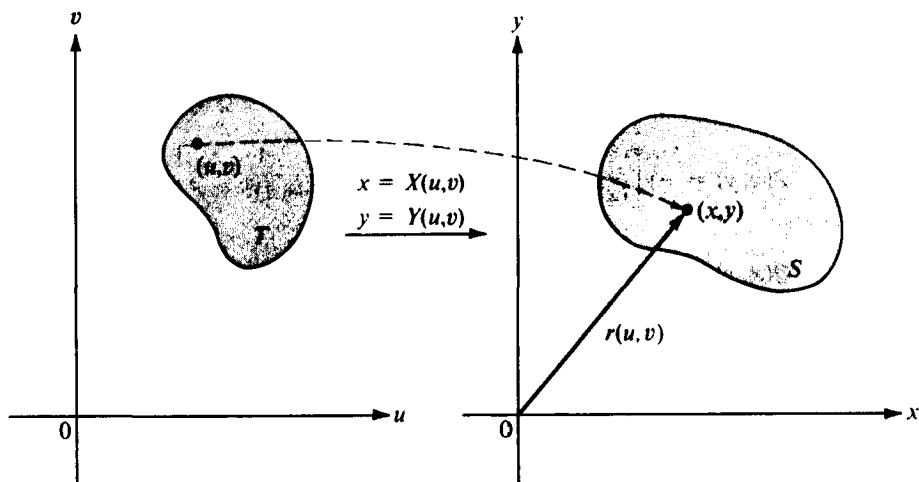
۲۶۰۱۱ تغییر منبیر در انتگرال مضاعف

در نظریه انتگرالگیری یک بعدی اغلب به روش جانسانی می‌توان انتگرالهای پیچیده را با تبدیلیشان به انتگرالهای ساده‌تر یا به‌انواعی که بشود ساده‌تر آنها را شناخت محاسبه کرد . روش کار مبتنی بر فرمول

$$(29.11) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t) dt$$

است ، که در آن $a = g(c)$ و $b = g(d)$. این فرمول را (در جلد یک) با این مفروضات که g مشتق پیوسته بر بازه $[c, d]$ داشته و f بر مجموعه مقادیر $g(t)$ ، وقتی t در بازه $[c, d]$ تغییر می‌کند ، پیوسته است ثابت شد .

مشابه دو بعدی (۲۹۰۱۱) ، به‌نام فرمول تغییر منبیر در انتگرال مضاعف ، وجود دارد . این فرمول یک انتگرال به شکل $\iint_S f(x, y) dx dy$ ، که روی ناحیه S در صفحه xy گرفته شده ، را به انتگرال مضاعف دیگر $\iint_T F(u, v) du dv$ ، که روی ناحیه جدید T در صفحه uv گرفته شده ، تبدیل می‌کند . رابطه دقیق بین نواحی T و S و انتگرالده $f(x, y)$ و $F(u, v)$ عنقریب مورد بحث قرار می‌گیرد . روش جانسانی برای انتگرالهای مضاعف



شکل ۲۳.۱۱ نگاشت تعریف شده با معادله برداری $r(u, v) = X(u, v)i + Y(u, v)j$

از حالت یک‌بعدی پیچیده‌تر است، زیرا باید دو جانشانی صوری انجام داد، یکی برای x و دیگری برای y . این یعنی، در اینجا به جای یک تابع g که در معادله (۲۹.۱۱) ظاهر شده، دو تابع، مثلاً X و Y ، داریم که x, y را با u, v به صورت زیر مربوط می‌سازند:

$$(۳۰.۱۱) \quad x = X(u, v), \quad y = Y(u, v).$$

دو معادله در (۳۰.۱۱) نگاشتی را تعریف می‌کنند که نقطه (u, v) در صفحه uv را به نقطه (x, y) در صفحه xy می‌برد. مجموعه T از نقاط در صفحه uv بروی مجموعه دیگر S در صفحه xy ، مثل شکل ۲۳.۱۱، نگاشته می‌شود. این نگاشت را می‌توان با یک تابع برداری نیز توصیف کرد. از مبدا در صفحه xy بردار شعاعی r را به نقطه دلخواه (x, y) از S ، مثل شکل ۲۳.۱۱، رسم می‌کنیم. بردار r تابع هم u و هم v است، و می‌توان آن را یک تابع برداری دو متغیره گرفت که با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$(۳۱.۱۱) \quad r(u, v) = X(u, v)i + Y(u, v)j, \quad (u, v) \in T$$

این معادله یک معادله برداری این نگاشت نامیده می‌شود. وقتی (u, v) نقاط T را بگیرد، نقطه انتهایی $r(u, v)$ نقاط S را رسم خواهد کرد.

گاهی دو معادله (۳۰.۱۱) را می‌توان نسبت به u و v و برحسب x و y حل کرد. در صورت امکان آن، می‌توان نتیجه را به شکل

$$u = U(x, y), \quad v = V(x, y)$$

بیان کرد. این معادلات نگاشتی از صفحه xy به صفحه uv تعریف می‌کنند، به نام نگاشت معکوس نگاشت تعریف شده با (۳۰.۱۱)، زیرا نقاط S را به نقاط T برمی‌گرداند. نگاشتهای یک به یک از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. اینها نقاط متمایز T را به نقاط متمایز S می‌برند. به عبارت دیگر، هیچ دو نقطه متمایز T با یک نگاشت یک به یک روی یک نقطه از S نگاشته نمی‌شوند. هرچنین نگاشتی یک تناظر یک به یک بین نقاط T و نقاط S برقرار می‌کند، و می‌توان (دست کم به طور نظری) با نگاشت معکوس (که، البته، آن نیز یک به یک است) از S به T برگشت.

نگاشتهایی را در نظر می‌گیریم که در آنها توابع X و Y بر S پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی پیوسته $\partial X/\partial u$ ، $\partial X/\partial v$ ، $\partial Y/\partial u$ ، و $\partial Y/\partial v$ برایین مجموعه باشند. فرضهای مشابهی برای توابع U و V می‌شود. اینها قیودی جدی نیستند، زیرا اغلب توابع موجود در عمل از آنها تبعیت می‌کنند.

فرمول تبدیل انتگرالهای مضاعف را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۳۲.۱۱) \quad \iint_S f(x, y) dx dy = \iint_T f[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| du dv.$$

سازه $J(u, v)$ در انتگرالده سمت راست نقش سازه $g'(t)$ در فرمول یک بعدی (۲۹.۱۱) را دارد. این سازه دترمینان ژاکوبی نگاشت تعریف شده با (۳۰.۱۱) نامیده می‌شود، و مساوی است با

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

گاهی به جای $J(u, v)$ از علامت $\partial(X, Y)/\partial(u, v)$ برای نمایش دترمینان ژاکوبی استفاده می‌شود.

ما کلیترین شرایطی که فرمول تبدیل (۳۲.۱۱) تحت آنها معتبر است را مطرح

نکردیم. می‌توان نشان داد* که اگر، علاوه بر فرضهای پیوستگی فوق درباب X ، Y ، U ، V ، فرض کنیم نگاشت از T به S یک به یک بوده و ژاکوبی $J(u, v)$ هرگز صفر نباشد، (۳۲.۱۱) برقرار می‌باشد. این فرمول در صورت یک به یک نبودن نگاشت بر زیرمجموعه‌ای از T با محتوای صفر، یا صفر شدن ژاکوبی بر زیر مجموعه‌ای با محتوای صفر، نیز معتبر است.

در بخش ۳۵.۱۱ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان فرمول تبدیل (۳۲.۱۱) را به عنوان نتیجه‌ای از یک حالت خاص، یعنی حالتی که در آن S یک مستطیل بوده و تابع f در هر نقطه S مقدار ثابت 1 دارد، به دست آورد. در این حالت خاص، (۳۲.۱۱) خواهد شد

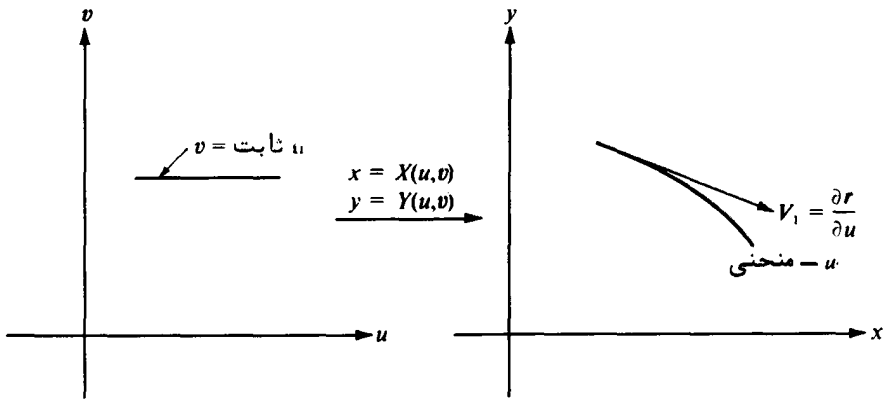
$$(۳۳.۱۱) \quad \iint_S dx \, dy = \iint_T |J(u, v)| \, du \, dv.$$

حتی در این حالت نیز برهان ساده نیست. در بخش ۲۹.۱۱ برهانی از (۳۳.۱۱) به کمک قضیه گرین داده شده است. باقی این بخش استدلال هندسی ساده‌ای به دست می‌دهد که دلیل اینکه چرا باید فرمولی شبیه (۳۳.۱۱) برقرار باشد را توضیح می‌دهد.

انگیزه هندسی معادله (۳۳.۱۱). ناحیه T را در صفحه uv ، مثل شکل ۲۳.۱۱، اختیار کرده، و فرض می‌کنیم S مجموعه نقاطی در صفحه xy باشد که T با تابع برداری r داده شده با (۳۱.۱۱) بروی آن نگاشته می‌شود. حال دو تابع برداری جدید V_1 و V_2 را معرفی می‌کنیم که با مشتق جزئی گرفتن از مولفه‌های r بترتیب نسبت به u و v به دست می‌آیند. یعنی، تعریف می‌کنیم

$$V_2 = \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} i + \frac{\partial Y}{\partial v} j \quad \text{و} \quad V_1 = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} i + \frac{\partial Y}{\partial u} j$$

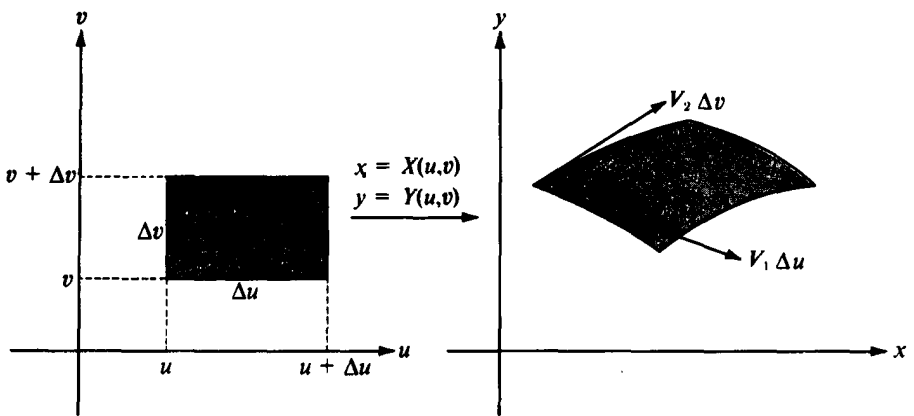
این بردارها را می‌توان این‌طور تعبیر هندسی کرد: در صفحه uv یک پاره خط افقی در نظر می‌گیریم (v برچنین پاره‌خطی ثابت است). تابع برداری r این پاره‌خط را بروی یک منحنی (به نام u - منحنی) در صفحه xy ، مثل شکل ۲۴.۱۱، می‌نگارد. اگر u را پارامتری نمایش‌زمان بگیریم، بردار V_1 نمایش سرعت موضع r بوده، و لذا،



شکل ۲۴.۱۱ یک u - منحنی و یک بردار سرعت نظیر

بر منحنی رسم شده به وسیله نوک m مماس است. بهمین نحو، هر بردار V_2 نمایش بردار سرعت یک v - منحنی است که با قرار دادن ثابت u به دست می آید. از هر نقطه ناحیه S یک u - منحنی و یک v - منحنی می گذرد.

حال یک مستطیل کوچک به ابعاد Δu و Δv ، مثل شکل ۲۵.۱۱، را در نظر می گیریم. هرگاه Δu طول یک بازه زمانی کوچک باشد، آنگاه در مدت Δu یک نقطه از یک u - منحنی



شکل ۲۵.۱۱ نقش یک ناحیه مستطیلی شکل در صفحه uv یک متوازی الاضلاع منحنی الخط در صفحه xy است.

در امتداد منحنی مسافتی تقریباً " مساوی حاصل ضرب Δu $\|V_1\|$ طی می‌کند (چون $\|V_1\|$ نمایش سرعت و Δu نمایش زمان است). بهمین نحو، یک نقطه واقع بر یک v منحنی در مدت Δv مسافتی تقریباً " مساوی Δv $\|V_2\|$ طی خواهد کرد. لذا، ناحیه^۲ مستطیلی شکل به ابعاد Δu و Δv در صفحه^۳ uv روی بخشی از صفحه^۴ xy نگاشته می‌شود که تقریباً " یک متوازی الاضلاع است که، طبق شکل ۲۵.۱۱، اضلاعش بردارهای $V_1 \Delta u$ و $V_2 \Delta v$ می‌باشند. مساحت این متوازی الاضلاع اندازه^۵ حاصل ضرب خارجی دوبردار $V_1 \Delta u$ و $V_2 \Delta v$ است، و مساوی است با

$$\|(V_1 \Delta u) \times (V_2 \Delta v)\| = \|V_1 \times V_2\| \Delta u \Delta v.$$

اگر حاصل ضرب خارجی $V_1 \times V_2$ را برحسب مولفه‌های V_1 و V_2 حساب کنیم، معلوم می‌شود که

$$V_1 \times V_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} k = J(u, v)k.$$

لذا، اندازه^۶ $V_1 \times V_2$ دقیقاً " $|J(u, v)|$ است، و مساحت متوازی الاضلاع منحنی الخط شکل ۲۵.۱۱ تقریباً " مساوی $\Delta u \Delta v |J(u, v)|$ می‌باشد.

اگر به ازای هر نقطه در T ، $J(u, v) = 1$ ، "متوازی الاضلاع" همان مساحت مستطیل را دارد و نگاشت مساحت را حفظ می‌کند. در غیر این صورت، برای به دست آوردن مساحت متوازی الاضلاع، باید مساحت مستطیل را در $|J(u, v)|$ ضرب کنیم. این پیشنهاد می‌کند که ژاکوبی را می‌توان یک "سازه^۷ بزرگ کن" برای مساحت تصور کرد.

حال فرض کنیم P یک افزاز از مستطیل بزرگ R که تمام ناحیه^۸ T را در برگرفته باشد، و یک زیر مستطیل نوعی P ، مثلاً^۹، به ابعاد Δu و Δv را در نظر می‌گیریم. اگر Δu و Δv کوچک باشند، تابع ژاکوبی J بر این زیر مستطیل تقریباً " ثابت است؛ و در نتیجه، J بر R بنوعی مثل یک تابع پله‌ای عمل می‌کند. (J را خارج T صفر تعریف می‌کنیم.) اگر J را یک تابع پله‌ای بگیریم، انتگرال مضاعف $|J|$ روی R (و در نتیجه، روی T) مجموع حاصل ضربهایی به شکل $\Delta u \Delta v |J(u, v)|$ است، و از نکات فوق برمی‌آید که این مجموع تقریباً " مساوی مساحت S است، که می‌دانیم مساوی انتگرال مضاعف

$\iint_S dx dy$ می باشد .

این بحث هندسی، که صرفاً "می گوید چرا انتظار برقراری معادله‌ای چون (۳۳.۱۱) را داریم، می تواند مبنای یک برهان دقیق قرار گیرد، ولی جزئیاتش طولانی و نسبتاً پیچیده است. همانطور که در بالا گفته شد، برهانی از (۳۳.۱۱)، مبتنی بر روشی کاملاً متفاوت، در یکی از بخشهای آتی داده خواهد شد.

اگر در نقطه خاص (u, v) ، $J(u, v) = 0$ ، دو بردار V_1 و V_2 موازی اند (زیرا حاصل ضرب خارجی آنها بردار صفر است) و متوازی الاضلاع به یک پاره خط تباه می شود. چنین نقاط را نقاط منفرد نگاشت می نامند. همانطور که قبلاً ذکر شد، وقتی تعدادی متناهی نقطه منفرد وجود داشته باشند یا، بطور کلی، نقاط منفرد مجموعه‌ای با محتوای صفر سازند، فرمول تبدیل (۳۲.۱۱) باز هم معتبر است. همه نگاشتهای مورد استفاده ما چنین اند. در بخش بعد، از فرمول (۳۲.۱۱) در دو مثال مهم استفاده می کنیم.

۲۷.۱۱ حالات خاص فرمول تبدیل

مثال ۱. مختصات قطبی. در این حالت، به جای u و v می نویسیم r و θ ، و نگاشت را با دو معادله

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

توصیف می کنیم. یعنی، $X(r, \theta) = r \cos \theta$ و $Y(r, \theta) = r \sin \theta$. برای آنکه نگاشت یک به یک باشد، $r > 0$ را گرفته و θ را به بازه‌ای به شکل $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$ محدود می کنیم. مثلاً، نگاشت بر هر زیر مجموعه از مستطیل $[0, 2\pi) \times (0, a]$ در صفحه $r\theta$ یک به یک است. در مینان ژاکوبی این نگاشت عبارت است از

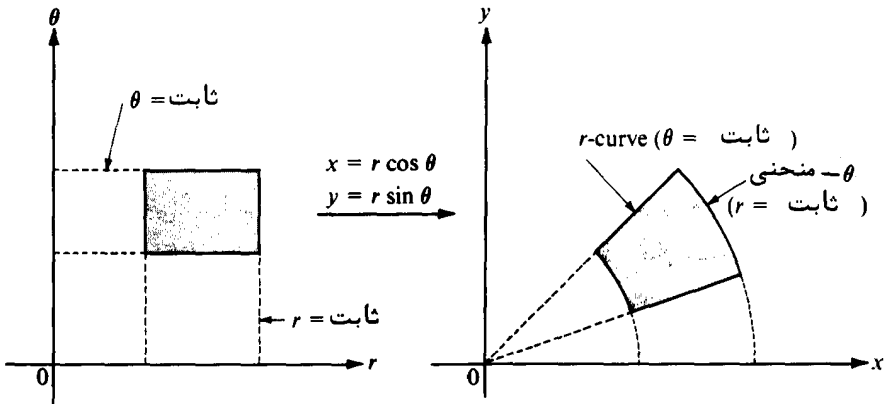
$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

لذا، فرمول تبدیل (۳۲.۱۱) خواهد شد

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_T f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

r -منحنیها خطوط مستقیم ماربر مبداء، و θ -منحنیها دایره‌ای به مرکز مبداء اند. نقش

یک مستطیل در صفحه $r\theta$ یک "متوازی‌الاضلاع" در صفحه xy است که به دو خط شعاعی و دو قوس مستدیر، مثل شکل ۲۶.۱۱، محدود شده است. دترمینان ژاکوبی، وقتی



شکل ۲۶.۱۱ تبدیل به وسیله مختصات قطبی

$r = 0$ ، صفر می‌شود، ولی این بر اعتبار فرمول تبدیل اثری ندارد، زیرا مجموعه نقاط دارای $r = 0$ با محتوای صفر است.

چون $V_1 = \cos \theta i + \sin \theta j$ ، داریم $\|V_1\| = 1$ ؛ در نتیجه، فواصل در امتداد r - منحنیها تغییر نمی‌کنند. از آن سو، داریم

$$V_2 = -r \sin \theta i + r \cos \theta j, \quad \|V_2\| = r;$$

در نتیجه، فواصل در امتداد θ - منحنیها در سازه r ضرب می‌شوند.

مختصات قطبی بویژه وقتی مناسب‌اند که ناحیه انتگرالگیری در امتدادی که r یا θ ثابت است کرانه دارند. مثلاً، انتگرال حجم یک کره به شعاع a را در نظر می‌گیریم:

$$\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

که در آن ناحیه S ربع اول قرص مستدیر $x^2 + y^2 \leq a^2$ است. این انتگرال در مختصات قطبی خواهد شد

$$\iint_T \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr \, d\theta,$$

که در آن ناحیه انتگرالگیری T مستطیل $[0, a] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ است. اگر ابتدا نسبت به

θ و سپس نسبت به r انتگرال بگیریم ، به دست می آید

$$\iint_T \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{-3} \Big|_0^a = \frac{\pi a^3}{6}.$$

همین نتیجه را می توان با انتگرالگیری در مختصات قائم به دست آورد ، ولی محاسبات کمی مشکلتر است .

مثال ۲ . تبدیلات خطی . تبدیل خطی تعریف شده با دو معادله

$$(۳۴.۱۱) \quad x = Au + Bv, \quad y = Cu + Dv$$

را در نظر می گیریم ، که در آن A, B, C, D ثابتهایی معلومند . در مینان ژاکوبی عبارت است از

$$J(u, v) = AD - BC,$$

و برای آنکه معکوس داشته باشیم ، فرض می کنیم $AD - BC \neq 0$. این به ما اطمینان می دهد که دو معادله خطی در (۳۴.۱۱) را می توان نسبت به u و v و بر حسب x و y حل کرد .

تبدیلات خطی خطوط موازی را به خطوط موازی می برند . بنابراین ، نقش یک مستطیل در صفحه uv یک متوازی الاضلاع در صفحه xy است ، و مساحتش مساحت مستطیل ضربدر سازه $|J(u, v)| = |AD - BC|$ می باشد . فرمول تبدیل (۳۲.۱۱) خواهد شد

$$\iint_S f(x, y) dx dy = |AD - BC| \iint_T f(Au + Bv, Cu + Dv) du dv.$$

به عنوان مثالی که در آن تغییر خطی متغیرها مفید است ، انتگرال

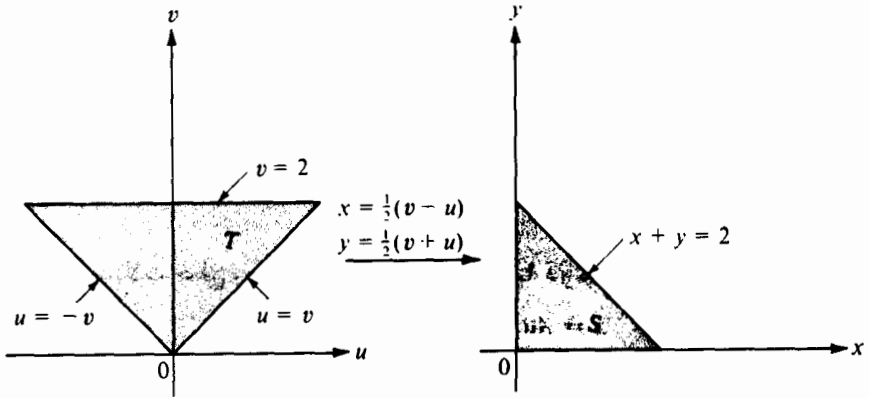
$$\iint_S e^{(v-x)/(v+x)} dx dy$$

را در نظر می گیریم ، که در آن S مثلث محدود به خط $x + y = 2$ و دو محور مختصات است . (ر.ک. شکل ۲۷.۱۱) وجود $y - x$ و $y + x$ در انتگرالده تغییر متغیرهای

$$u = y - x, \quad v = y + x$$

را پیشنهاد می کند . با حل آنها نسبت به x و y ، معلوم می شود که

$$y = \frac{v + u}{2} \quad \text{و} \quad x = \frac{v - u}{2}$$



شکل ۲۷.۱۱ نگاشتن به وسیلهٔ یک تبدیل خطی

دترمینان ژاکوبی عبارت است از $J(u, v) = -\frac{1}{2}$. برای یافتن نقش T از S در صفحه uv ، توجه می‌کنیم که خطوط $x = 0$ و $y = 0$ به ترتیب روی خطوط $u = v$ و $u = -v$ نگاشته می‌شوند؛ خط $x + y = 2$ روی خط $v = 2$ نگاشته می‌شود. نقاط داخل S در $0 < x + y < 2$ صدق می‌کنند، و اینها به نقاطی از T که در $0 < v < 2$ صادقند برده می‌شوند. لذا، ناحیهٔ جدید انتگرالگیری T یک ناحیهٔ مثلثی شکل است، مثل شکل ۲۷.۱۱. انتگرال مضاعف مورد نظر خواهد شد

$$\iint_S e^{(v-x)/(v+x)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_T e^{u/v} du dv.$$

اگر اول نسبت به u انتگرال بگیریم، درمی‌یابیم که

$$\frac{1}{2} \iint_T e^{u/v} du dv = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\int_{-v}^v e^{u/v} du \right] dv = \frac{1}{2} \int_0^2 v \left(e - \frac{1}{e} \right) dv = e - \frac{1}{e}.$$

۲۸.۱۱ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۵، ناحیهٔ S را رسم کرده، و انتگرال مضاعف $\iint_S f(x, y) dx dy$ را به صورت انتگرال مکرری در مختصات قطبی بیان دارید.

۱. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ ، که در آن $a > 0$.

۲. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$

۳. $0 < a < b$ در آن $S = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ ، که در آن

۴. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$

۵. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$

در تمرینهای ۶ تا ۹، انتگرال رابه مختصات قطبی برده و مقدارش را حساب کنید . (a یک ثابت مثبت است .)

۶. $\int_0^{2a} \left[\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy \right] dx$. ۷. $\int_0^a \left[\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy \right] dx$

۸. $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-1/2} dy \right] dx$. ۹. $\int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx \right] dy$

در تمرینهای ۱۰ تا ۱۳، انتگرالها را به یک یا چند انتگرال مکرر در مختصات قطبی تبدیل کنید .

۱۰. $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$. ۱۱. $\int_0^2 \left[\int_x^{\sqrt{x^3}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy \right] dx$

۱۲. $\int_0^1 \left[\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx$. ۱۳. $\int_0^1 \left[\int_0^{x^2} f(x, y) dy \right] dx$

۱۴. با استفاده از یک تبدیل خطی مناسب، انتگرال مضاعف

$$\iint_S (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy,$$

که در آن S متوازی الاضلاع به راسهای $(0, \pi)$ ، $(\pi, 2\pi)$ ، $(2\pi, \pi)$ ، $(\pi, 0)$ است، را حساب کنید .

۱۵. متوازی الاضلاع S در صفحه xy دارای رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 10)$ ، $(3, 17)$ ، و $(1, 7)$ است .

(T) تبدیل خطی $u = ax + by$ ، $v = cx + dy$ را بیابید که S را بروی مستطیل R در صفحه uv با رئوس متقابل $(0, 0)$ و $(4, 2)$ بنگارد . راس $(2, 10)$ باید به نقطه‌ای بر محور u نگاشته شود .

(B) انتگرال مضاعف $\iint_S xy dx dy$ را با تبدیلش به یک انتگرال معادل روی مستطیل

R قسمت (T) حساب کنید .

۱۶. اگر $r > 0$ ، قرار دهید $I(r) = \int_{-r}^r e^{-u^2} du$

(ت) نشان دهید $I^2(r) = \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ ، که در آن R مربع $R = [-r, r] \times [-r, r]$ است .

(ب) هرگاه C_1 و C_2 قرصهای مستدیر محاط و محیطه بد R باشند ، نشان دهید که

$$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy < I^2(r) < \iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy .$$

(پ) انتگرالهای روی C_1 و C_2 را در مختصات قطبی بیان کرده و ، با استفاده از (ب) ، نتیجه بگیرید که وقتی $r \rightarrow \infty$ ، $I(r) \rightarrow \sqrt{\pi}$. این ثابت می‌کند که $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.

(ت) با استفاده از قسمت (پ) ، نتیجه بگیرید $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ، که در آن Γ تابع گاما است .

۱۷ . نگاشت تعریف شده با معادلات

$$x = u + v, \quad y = v - u^2$$

را در نظر بگیرید .

(آ) دترمینان ژاکوبی $J(u, v)$ را حساب کنید .

(ب) مثلث T در صفحه uv دارای رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 0)$ ، $(0, 2)$ است . با ترسیم ، نقش S در صفحه xy را توصیف کنید .

(پ) مساحت S را به وسیله یک انتگرال مضاعف روی S و نیز به وسیله یک انتگرال مضاعف روی T حساب کنید .

(ت) $\iint_S (x - y + 1)^{-2} dx dy$ را حساب کنید .

۱۸ . نگاشت تعریف شده با دو معادله $x = u^2 - v^2$ ، $y = 2uv$ را در نظر بگیرید .

(آ) دترمینان ژاکوبی $J(u, v)$ را حساب کنید .

(ب) فرض کنید T مستطیل در صفحه uv به رئوس $(1, 1)$ ، $(2, 1)$ ، $(2, 3)$ ، $(1, 3)$ باشد . با ترسیم ، نقش S در صفحه xy را توصیف کنید .

(پ) انتگرال مضاعف $\iint_C xy dx dy$ را با تغییر متغیرهای $x = u^2 - v^2$ ، $y = 2uv$

حساب کنید ، که در آن $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

۱۹ . انتگرال مضاعف

$$I(p, r) = \iint_R \frac{dx dy}{(p^2 + x^2 + y^2)^p}$$

را روی قرص مستدیر $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ حساب کنید. مقادیری از p را تعیین کنید که به ازای آنها $I(p, r)$ ، وقتی $r \rightarrow +\infty$ ، به حدی میل نماید. در تمرینهای ۲۰ تا ۲۲، معادلات را با تغییر متغیرهای مناسب ثابت کنید.

۲۰. $\iint_S f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du$ ، که در آن $S = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

۲۱. $\iint_S f(ax+by+c) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) du$ ، که در آن

$a^2 + b^2 \neq 0$ و $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

۲۲. $\iint_S f(xy) dx dy = \log 2 \int_1^2 f(u) du$ ، که در آن S ناحیهٔ محدود به منحنیهای

$xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x$ در ربع اول است.

۲۹۰۱۱ برهان فرمول تبدیل در حالت خاص

همانطور که قبلاً ذکر شد، فرمول تبدیل

$$(۳۵۰۱۱) \quad \iint_S f(x, y) dx dy = \iint_T f[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| du dv$$

را می‌توان به عنوان حالتی خاص که در آن S مستطیل بوده و f متحد ۱ است به دست آورد. در این حالت، فرمول به

$$(۳۶۰۱۱) \quad \iint_R dx dy = \iint_{R^*} |J(u, v)| du dv$$

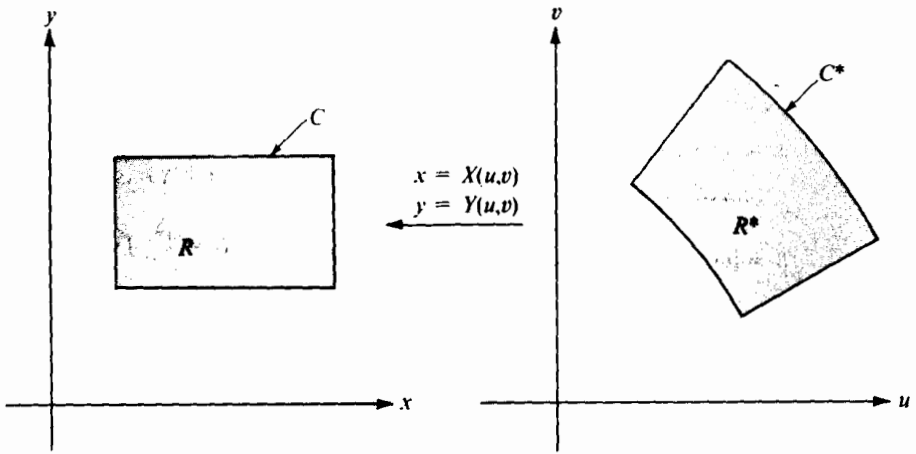
ساده می‌شود. در اینجا R یک مستطیل در صفحهٔ xy بوده، و R^* نقش آن در صفحهٔ uv (ر.ک. شکل ۲۸۰۱۱) تحت نگاشت یک به یک

$$u = U(x, y), \quad v = V(x, y)$$

است. نگاشت معکوس عبارت است از

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v),$$

و $J(u, v)$ دترمینان ژاکوبی است:



شکل ۲۸.۱۱ قانون تبدیل انتگرالهای مضاعف حاصل از قضیه گرین

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

در این بخش، (۳۶.۱۱) را با استفاده از قضیه گرین ثابت می‌کنیم، و در بخش بعد فرمول کلیتر (۳۵.۱۱) را از حالت خاص (۳۶.۱۱) نتیجه می‌گیریم.

برای اثبات، فرض کنیم توابع X و Y مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته و دارای ژاکوبی باشد که در R^* هرگز ۰ نیست. در این صورت، $J(u, v)$ همه‌جا مثبت یا همه‌جا منفی است. معنی علامت $J(u, v)$ یعنی وقتی نقطه (x, y) کرانه R را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید، نقطه نقش (u, v) کرانه R^* را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید اگر $J(u, v)$ مثبت باشد، و در جهت خلاف آن می‌پیماید اگر $J(u, v)$ منفی باشد. در برهان فرض می‌کنیم $J(u, v) > 0$.

ایده اثبات این است که، با استفاده از قضیه گرین، هرانتگرال مضاعف در (۳۶.۱۱) را به صورت یک انتگرال خط بیان می‌کنیم. سپس، با بیان انتگرالها به شکل پارامتری، تساوی دو انتگرال خط را اثبات می‌کنیم.

با انتگرال مضاعف در صفحه xy شروع کرده، می‌نویسیم

$$\iint_R dx dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

که در آن $Q(x, y) = x$ و $P(x, y) = 0$. طبق قضیه گرین، این انتگرال مضاعف مساوی است با انتگرال خط

$$\int_C P dx + Q dy = \int_C x dy.$$

در اینجا C کرانه R است که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. بهمین نحو، انتگرال مضاعف در صفحه uv را به یک انتگرال خط حول کرانه C^* از R^* تبدیل می‌کنیم. انتگرالده، یعنی $J(u, v)$ ، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} - X \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(X \frac{\partial Y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(X \frac{\partial Y}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

با اعمال قضیه گرین بر انتگرال مضاعف روی R^* ، درمی‌یابیم که

$$\iint_{R^*} J(u, v) du dv = \int_{C^*} \left(X \frac{\partial Y}{\partial u} du + X \frac{\partial Y}{\partial v} dv \right):$$

لذا، برای اتمام برهان (۳۶.۱۱) فقط کافی است ثابت کنیم

$$(۳۷.۱۱) \quad \int_C x dy = \int_{C^*} \left(X \frac{\partial Y}{\partial u} du + X \frac{\partial Y}{\partial v} dv \right).$$

برای C^* پارامتری سازی در نظر گرفته و، با استفاده از آن، نمایشی برای C پیدا می‌کنیم. فرض کنیم C^* با تابع α تعریف شده بر $[a, b]$ توصیف شده باشد؛ مثلاً،

$$\alpha(t) = U(t)i + V(t)j.$$

قرار می‌دهیم

$$\beta(t) = X[U(t), V(t)]i + Y[U(t), V(t)]j.$$

در این صورت، وقتی t روی بازه $[a, b]$ تغییر می‌کند، بردار $\alpha(t)$ منحنی C^* و بردار $\beta(t)$ منحنی C را طی می‌کند. طبق قاعده زنجیره‌ای، مشتق β عبارت است از

$$\beta'(t) = \left[\frac{\partial X}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial X}{\partial v} V'(t) \right] i + \left[\frac{\partial Y}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial Y}{\partial v} V'(t) \right] j.$$

لذا .

$$\int_C x \, dy = \int_a^b X[U(t), V(t)] \left(\frac{\partial Y}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial Y}{\partial v} V'(t) \right) dt.$$

آخرین انتگرال روی $[a, b]$ با پارامتریزه کردن انتگرال خطی روی C^* در (۳۷.۱۱) نیز به دست می‌آید. پس، دو انتگرال خطی در (۳۷.۱۱) مساوی‌اند، که (۳۶.۱۱) را ثابت می‌کند.

۳۰.۱۱ برهان فرمول تبدیل در حالت کلی

در این بخش، فرمول کلی تبدیل

$$(38.11) \quad \iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \iint_T f[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| \, du \, dv$$

را از حالت خاص زیر که در بخش پیش مطرح شد:

$$(39.11) \quad \iint_R dx \, dy = \iint_{R^*} |J(u, v)| \, du \, dv,$$

که در آن R یک مستطیل و R^* نقش آن در صفحه uv است، نتیجه خواهیم گرفت. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$(40.11) \quad \iint_R s(x, y) \, dx \, dy = \iint_{R^*} s[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| \, du \, dv,$$

که در آن s یک تابع پله‌ای تعریف شده بر R است. برای این کار، فرض کنیم P یک افراز R به mn زیر مستطیل R_{ij} به ابعاد Δx_i و Δy_j بوده، و c_{ij} مقدار ثابت s بر زیر مستطیل باز R_{ij} باشد. با اعمال (۳۹.۱۱) بر مستطیل R_{ij} ، درمی‌یابیم که

$$\Delta x_i \Delta y_j = \iint_{R_{ij}} dx \, dy = \iint_{R_{ij}^*} |J(u, v)| \, du \, dv.$$

با ضرب طرفین در c_{ij} و جمع‌بندی روی i و j ، داریم

$$(41.11) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \iint_{R_{ij}^*} |J(u, v)| \, du \, dv.$$

چون s یک تابع پله‌ای است، این مساوی است با

$$(۴۲.۱۱) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{R_{ij}^*} s[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| du dv.$$

با استفاده از خاصیت جمعی انتگرالهای مضاعف، می‌بینیم که (۴۲.۱۱) همان (۴۰.۱۱) است. لذا، (۴۰.۱۱) نتیجه‌ای از (۳۹.۱۱) می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم تابع پله‌ای s در (۴۰.۱۱) را می‌توان با هر تابع f که به ازای آن طرفین (۴۰.۱۱) وجود دارند عوض کرد. فرض کنیم f بر مستطیل R انتگرال‌پذیر بوده، و توابع پله‌ای s و t صادق در نامساویهای

$$(۴۳.۱۱) \quad s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y),$$

به‌ازای هر نقطه (x, y) در R ، را اختیار می‌کنیم. در این صورت، به‌ازای هر نقطه (u, v) در نقش R^* ، نیز داریم

$$(۴۴.۱۱) \quad s[X(u, v), Y(u, v)] \leq f[X(u, v), Y(u, v)] \leq t[X(u, v), Y(u, v)].$$

برای اختصار، به‌جای $s[X(u, v), Y(u, v)]$ می‌نویسیم $S(u, v)$ ، و به‌همین ترتیب، $F(u, v)$ و $T(u, v)$ را تعریف می‌کنیم. با ضرب نامساویهای (۴۴.۱۱) در $|J(u, v)|$ و انتگرال‌گیری روی R^* ، خواهیم داشت

$$\iint_{R^*} S(u, v) |J(u, v)| du dv \leq \iint_{R^*} F(u, v) |J(u, v)| du dv \leq \iint_{R^*} T(u, v) |J(u, v)| du dv.$$

بخاطر (۴۰.۱۱)، نامساویهای پیشگفته مساوی‌اند با

$$\iint_R s(x, y) dx dy \leq \iint_R F(u, v) |J(u, v)| du dv \leq \iint_R t(x, y) dx dy.$$

بنابراین، $\iint_{R^*} F(u, v) |J(u, v)| du dv$ عددی است که، به‌ازای هر دو تابع پله‌ای s و t صادق در (۴۳.۱۱)، بین انتگرالهای $\iint_R s(x, y) dx dy$ و $\iint_R t(x, y) dx dy$ قرار دارد.

چون f انتگرال‌پذیر است، این ایجاب می‌کند که

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} F(u, v) |J(u, v)| du dv ;$$

و در نتیجه، (۳۸.۱۱) برای توابع انتگرال‌پذیر تعریف شده بر مستطیلها معتبر است. حال که (۳۸.۱۱) برای مستطیلها معتبر است، به‌آسانی می‌توان آن را، با روش معمول محاط کردن S در یک مستطیل مانند R و تعمیم تابع f به تابع جدید f که بر

S با f یکی بوده و خارج S صفر است، به ناحیه کلیتر S تعمیم داد. در این صورت، توجه می‌کنیم که

$$\iint_S f = \iint_R \tilde{f} = \iint_{R^*} \tilde{f}[X(u, v), Y(u, v)] |J(u, v)| du dv = \iint_T F(u, v) |J(u, v)| du dv$$

و این ثابت می‌کند که (۳۸.۱۱) در واقع نتیجه‌ای است از (۳۹.۱۱).

۳۱.۱۱ تعمیم به ابعاد بالاتر

مفهوم انتگرال چندگانه را می‌توان از فضای ۲ به فضای n ، به‌ازای هر $n \geq 3$ ، تعمیم داد. چون این تعمیم کاملاً "شبه حالت $n = 2$ " است، فقط نتایج عمده را مختصراً "شرح می‌دهیم".

انتگرالده یک میدان اسکالر مانند f است که بر مجموعه S در فضای n تعریف شده است. انتگرال f روی S ، به‌نام انتگرال n گانه، با علامت

$$\int_S \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad \text{یا} \quad \int_S \cdots \int f$$

با n علامت انتگرال، یا ساده‌تر با یک علامت انتگرال، یعنی $\int_S f(x) dx$ که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ ، نموده می‌شود. وقتی $n = 3$ ، به‌جای (x_1, x_2, x_3) می‌نویسیم (x, y, z) و انتگرالهای سه‌گانه را با

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{یا} \quad \iiint_S f$$

نشان می‌دهیم.

ابتدا انتگرال n گانه را برای یک تابع پله‌ای تعریف شده بر بازه n بعدی تعریف می‌کنیم. به‌یاد می‌آوریم که بازه n بسته $[a, b]$ حاصل ضرب دکارتی n بازه n بسته $[a_k, b_k]$ است، که در آن $a = (a_1, \dots, a_n)$ و $b = (b_1, \dots, b_n)$. بازه n باز (a, b) حاصل ضرب دکارتی n بازه n باز (a_k, b_k) است. حجم $[a, b]$ یا (a, b) مساوی حاصل ضرب طولهای بازه‌های مولف، یعنی

$$(b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n),$$

تعریف می‌شود.

هرگاه P_1, \dots, P_n بترتیب افزارهایی از $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ باشند، حاصل

ضرب دکارتی $P = P_1 \times \dots \times P_n$ یک افراز $[a, b]$ نامیده می‌شود. تابع f تعریف شده بر $[a, b]$ را یک تابع پله‌ای نامند اگر بر هر زیر بازه Δ_i از P معین شده با افزای چون P ثابت باشد. انتگرال n گانه چنین تابع پله‌ای با فرمول

$$\int_{[a,b]} \dots \int_{[a,b]} f = \sum_i c_i v_i$$

تعریف می‌شود، که در آن c_i مقدار ثابت f بر زیر بازه Δ_i م و v_i حجم زیر بازه Δ_i است. مجموع یک مجموع متناهی است که روی همه زیر بازه‌های P گرفته می‌شود. حال که انتگرال n گانه برای توابع پله‌ای تعریف شد، به روش معمول، این انتگرال را برای توابع کراندار کلیتر تعریف شده بر بازه‌ها تعریف می‌کنیم. فرض کنیم s و t توابعی پله‌ای باشند بطوری که، بر $[a, b]$ ، $s \leq f \leq t$. هرگاه به ازای هر s و t صادق در $s \leq f \leq t$ یک و فقط یک عدد مانند I باشد که

$$\int_{[a,b]} \dots \int_{[a,b]} s \leq I \leq \int_{[a,b]} \dots \int_{[a,b]} t ,$$

گوییم f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است، و عدد

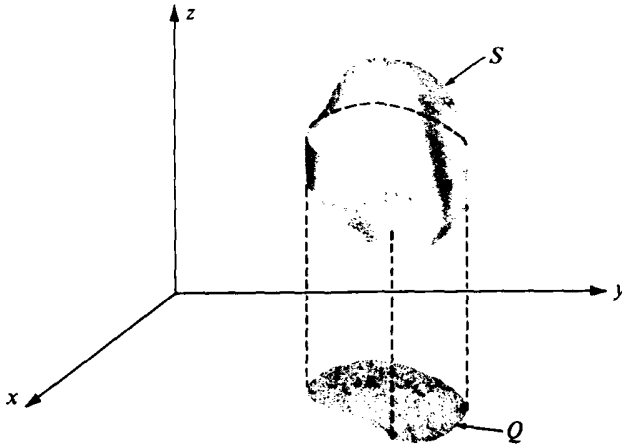
$$I = \int_{[a,b]} \dots \int_{[a,b]} f$$

را انتگرال n گانه f می‌نامیم.

مثل حالت دویبعی، این انتگرال در صورت پیوسته بودن f بر $[a, b]$ وجود دارد. همچنین، اگر f بر $[a, b]$ کراندار بوده و مجموعه ناپیوستگیهای f با محتوای n بعدی 0 باشد، وجود خواهد داشت. مجموعه کراندار S با محتوای n بعدی 0 است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ ، گردآیه‌ای متناهی از بازه‌های n بعدی باشد که اجتماعشان شامل S بوده و مجموع حجمهایشان از ϵ تجاوز نکند.

برای تعریف انتگرال n گانه تابع کراندار f روی مجموعه کراندار و کلیتر S ، f را به تابع جدید f_T توسیع می‌دهیم که با f بر S یکی بوده و خارج S مقدار صفر داشته باشد؛ انتگرال f روی S مساوی انتگرال f_T روی بازه‌های شامل S تعریف می‌شود. بعضی از انتگرالهای چندگانه را می‌توان با استفاده از انتگرالهای مکرر با بعد پایین‌تر حساب کرد. مثلاً، فرض کنیم S مجموعه‌ای در فضای 3 به صورت زیر باشد:

$$(45.11) \quad S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in Q, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\} ,$$



شکل ۲۹.۱۱ جسم S و تصویرش Q در صفحه xy

که در آن Q یک ناحیهٔ دوبعدی، به نام تصویر S بر صفحه xy ، بوده، و φ_1, φ_2 بر S پیوسته می‌باشند. (مثالی در شکل ۲۹.۱۱ نموده شده است.) مجموعه‌های این نوعی به دو سطح به معادلات دکارتی $z = \varphi_1(x, y)$ و $z = \varphi_2(x, y)$ و ("احتمالاً") بخشی از استوانهٔ تولید شده به وسیلهٔ خط متحرک موازی محور z در امتداد کرانهٔ Q محدود شده‌اند. خطوط موازی محور z این مجموعه را در پاره‌خطهایی قطع می‌کنند که سطح پایینی را به سطح بالایی وصل می‌نمایند. اگر f درون S پیوسته باشد، فرمول مکرر زیر را خواهیم داشت:

$$(۴۶.۱۱) \iiint_S f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_Q \left[\int_{\varphi_1(z, y)}^{\varphi_2(z, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dx \, dy.$$

یعنی، به ازای x و y ثابت، اولین انتگرالگیری نسبت به z از سطح کرانه‌ای پایینی تا سطح بالایی انجام می‌گیرد. این امر محاسبات را به انتگرال مضاعفی روی تصویر Q تحویل می‌کند، که می‌توان آن را به روشهای قبلاً ذکر شده حل کرد.

دو نوع دیگر مجموعه‌شبهه (۴۵.۱۱) وجود دارند، که در آنها محورهای x و y نقش محور z را داشته، و تصاویر بترتیب در صفحهٔ yz یا xz گرفته می‌شود. انتگرالهای سه‌گانه روی چنین مجموعه‌ها را می‌توان با فرمولهایی شبیه (۴۶.۱۱)، با تکرار، حساب کرد. اغلب مجموعه‌های ۳ بعدی که با آنها مواجه خواهیم شد یکی از این سه نوعند و یا می‌توان

آنها را به تعدادی متناهی قطعه تقسیم کرد بطوری که هر کدام یکی از این سه نوع باشد. برای انتگرالهای n گانه، وقتی $n > 3$ ، فرمولهای تکرار زیادی وجود دارند. مثلاً، اگر Q یک بازه k بعدی و R یک بازه m بعدی باشد، انتگرال $(m+k)$ گانه روی $Q \times R$ تکرار یک انتگرال m گانه با یک انتگرال k گانه است:

$$\int_{Q \times R} \dots \int f = \int_Q \dots \int \left[\int_R \dots \int f dx_1 \dots dx_m \right] dx_{m+1} \dots dx_{m+k},$$

مشروط براینکه همه انتگرالهای چندگانه مورد بحث وجود داشته باشند. بعداً در این فصل، استفاده از انتگرالهای چندگانه مکرر در محاسبه حجم یک کره n بعدی نشان داده خواهد شد.

۳۲.۱۱ تغییر متغیر در انتگرال n گانه

فرمول تغییر متغیر در یک انتگرال مضاعف تعمیم سراسری برای انتگرالهای n گانه دارد. متغیرهای جدید u_1, \dots, u_n را وارد می‌کنیم، که با n معادله

$$x_1 = X_1(u_1, \dots, u_n), \quad \dots, \quad x_n = X_n(u_1, \dots, u_n)$$

به x_1, \dots, x_n مربوط می‌شوند. فرض کنیم $u = (u_1, \dots, u_n)$ ، $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $X = (X_1, \dots, X_n)$ برداری

$$X: T \rightarrow S$$

را از مجموعه T در فضای n به مجموعه S دیگر در فضای n تعریف می‌کند. فرض کنیم نگاشت X بر T یک به یک و به طور پیوسته مشتقپذیر باشد. فرمول تبدیل برای انتگرالهای n گانه شکل زیر را بخود می‌گیرد:

$$(۴۷.۱۱) \quad \int_S f(x) dx = \int_T f[X(u)] |\det DX(u)| du.$$

که در آن $DX(u) = [D_j X_k(u)]$ ماتریس ژاکوبی میدان برداری X است. برحسب مولفه‌ها، داریم

$$DX(u) = \begin{bmatrix} D_1 X_1(u) & D_2 X_1(u) & \dots & D_n X_1(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 X_n(u) & D_2 X_n(u) & \dots & D_n X_n(u) \end{bmatrix}.$$

مثل حالت دوبعدی، فرمول تبدیل، در صورتی که X بر T یک به یک بوده و دترمینان ژاکوبی $J(u) = \det DX(u)$ هرگز بر T صفر نشود، معتبر است. همچنین، این نگاشت، در صورت یک به یک نبودن بر زیرمجموعه‌ای از T با محتوای n بعدی صفر، و یا صفر شدن دترمینان ژاکوبی بر چنین زیرمجموعه‌ای، نیز اعتبار دارد.

در حالت سه بعدی، به جای (x_1, x_2, x_3) می‌نویسیم (x, y, z) ، به جای (u_1, u_2, u_3) می‌نویسیم (u, v, w) ، و به جای (X_1, X_2, X_3) می‌نویسیم (X, Y, Z) . فرمول تبدیل انتگرالهای سه‌گانه شکل زیر را خواهد گرفت:

$$(۴۸.۱۱)$$

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T f[X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w)] |J(u, v, w)| du dv dw,$$

که در آن $J(u, v, w)$ دترمینان ژاکوبی است:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial w} & \frac{\partial Y}{\partial w} & \frac{\partial Z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

در فضای 3، دترمینان ژاکوبی را می‌توان سازهٔ بزرگ کن حجم تصور کرد. در واقع، اگر تابع برداری r را با معادلهٔ

$$r(u, v, w) = X(u, v, w)\mathbf{i} + Y(u, v, w)\mathbf{j} + Z(u, v, w)\mathbf{k},$$

و بردارهای زیر را با روابط

$$V_1 = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial u} \mathbf{k},$$

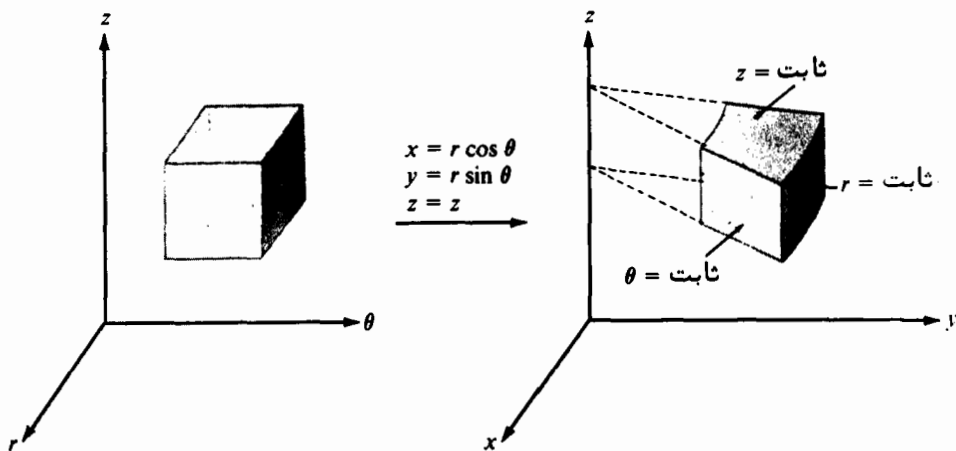
$$V_2 = \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial v} \mathbf{k},$$

$$V_3 = \frac{\partial r}{\partial w} = \frac{\partial X}{\partial w} \mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial w} \mathbf{j} + \frac{\partial Z}{\partial w} \mathbf{k}$$

تعریف کنیم، استدلالی شبیه استدلال بخش ۱۱-۲۶ پیشنهاد می‌کند که یک مکعب

مستطیل به ابعاد $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ در فضای uvw به جسمی برده می شود که تقریباً "یک" متوازی السطوح "منحنی الخط در فضای xyz است که با سه بردار $V_1 \Delta u, V_2 \Delta v, V_3 \Delta w$ و معین می شود (ر.ک. شکل ۳۰.۱۱). کرانه های این جسم سطوحی هستند که به ترتیب با فرض ثابت $u =$ ثابت، $v =$ ثابت، و ثابت $w =$ به دست می آیند. حجم یک متوازی السطوح مساوی قدر مطلق حاصل ضرب سه گانه اسکالر سه بردار معین کننده آن است؛ در نتیجه، حجم متوازی السطوح منحنی الخط تقریباً مساوی است با

$$|(V_1 \Delta u) \cdot (V_2 \Delta v) \times (V_3 \Delta w)| = |V_1 \cdot V_2 \times V_3| \Delta u \Delta v \Delta w = |J(u, v, w)| \Delta u \Delta v \Delta w.$$



شکل ۳۰.۱۱ تبدیل به وسیله مختصات استوانه ای

۳۳.۱۱ مثالهای حل شده

دو حالت خاص مهم (۴۸.۱۱) در دو مثال زیر مطرح می شوند.

مثال ۱. مختصات استوانه ای. در اینجا به جای u, v, w می نویسیم r, θ, z ، و نگاهت را با معادلات

$$(۴۹.۱۱) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

تعریف می کنیم. به عبارت دیگر، x و y را با مختصات قطبی شان در صفحه xy عوض کرده و z را بی تغییر می گذاریم. باز، برای آنکه نگاهت یک به یک باشد، باید r را

بزرگتر از 0 گرفته و θ را به بازه‌ای به شکل $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$ محدود کنیم. شکل ۳۰.۱۱ آنچه را که در مورد یک مکعب مستطیل در فضای $r\theta z$ رخ داده نشان می‌دهد.

در ترمینان زاکوبی نگاشت (۴۹.۱۱) عبارت است از

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r;$$

و در نتیجه، فرمول تبدیل (۴۸.۱۱) خواهد شد

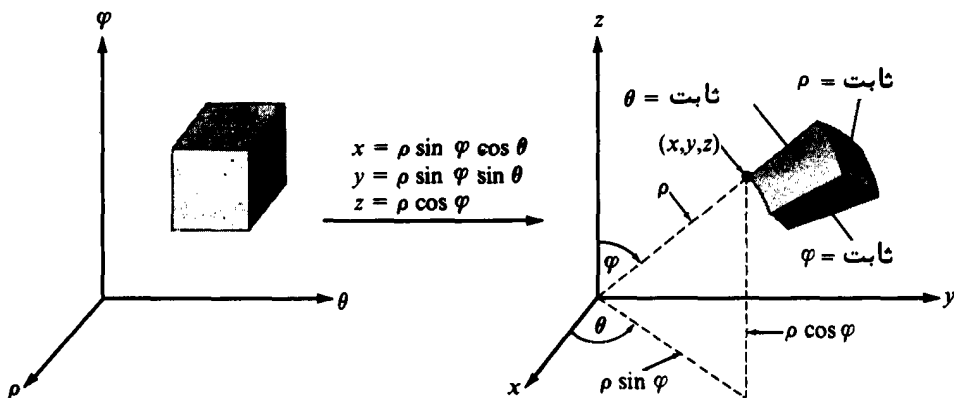
$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

در ترمینان زاکوبی، وقتی $r = 0$ ، صفر می‌شود، ولی این بر اعتبار فرمول تبدیل اثری ندارد، زیرا مجموعه نقاط دارای $r = 0$ با محتوای 3 بعدی 0 است.

مثال ۲. مختصات کروی. در این حالت، به جای u, v, w ، علامات ρ, θ, φ به کار می‌روند. و نگاشت با معادلات

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi$$

تعریف می‌شود. ρ, θ, φ در شکل ۳۱.۱۱ تعبیر هندسی شده‌اند. برای داشتن



شکل ۳۱.۱۱ تبدیل به وسیله مختصات کروی

نگاشت یک به یک، $\rho > 0$ ، $0 \leq \theta < 2\pi$ ، و $0 \leq \varphi < \pi$ را نگه می‌داریم. سطوح

ثابت $\rho =$ کراتی به مرکز مبدا، $\theta =$ سطوح ثابت θ صفحاتی ماربر محور z ، و سطوح ثابت $\varphi =$ مخروطهایی مستدیر با محورهایی در امتداد محور z می باشند. لذا، یک جعبه مکعب مستطیل در فضای $\rho\theta\varphi$ روی یک جسم از نوع نموده در شکل ۳۱.۱۱ نگاشته می شود. دترمینان ژاکوبی نگاشت عبارت است از

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \varphi.$$

چون اگر $0 \leq \varphi < \pi$ ، $\varphi \geq 0$ ، داریم $|J(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2 \sin \varphi$ و فرمول تبدیل انتگرالهای سه گانه خواهد شد

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T F(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi,$$

که در آن $F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$. با آنکه دترمینان ژاکوبی، به ازای $\varphi = 0$ ، صفر است، فرمول تبدیل هنوز معتبر است، زیرا مجموعه نقاط دارای $\varphi = 0$ با محتوای 3 بعدی 0 است.

مفهوم حجم را می توان به رده ای از مجموعه ها (به نام مجموعه های اندازه پذیر) در فضای n چنان تعمیم داد که اگر S اندازه پذیر باشد، حجم مساوی انتگرال تابع ثابت 1 روی S باشد. یعنی، اگر $v(S)$ حجم S باشد، داشته باشیم

$$v(S) = \int_S \cdots \int dx_1 \cdots dx_n.$$

ما به توصیف رده مجموعه هایی که این فرمول برایشان معتبر است نمی پردازیم. در عوض، نشان می دهیم چگونه این انتگرال را می توان در چند حالت خاص محاسبه کرد.

مثال ۳. حجم یک بازه n بعدی. هرگاه S یک بازه n بعدی باشد، مثلاً $S = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ، انتگرال چندگانه مربوطه به $v(S)$ حاصل ضرب n بازه یک بعدی است:

$$v(S) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

این با فرمولی که پیشتر برای حجم یک بازه n بعدی دادیم سازگار است.

مثال ۴. حجم یک کره n بعدی. فرض کنیم $S_n(a)$ کره n توپر n بعدی (یا n - گوی) به شعاع a باشد:

$$S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2\},$$

و برای حجم $S_n(a)$ قرار می‌دهیم

$$V_n(a) = \int_{S_n(a)} \dots \int dx_1 \dots dx_n.$$

ثابت می‌کنیم

$$(50.11) \quad V_n(a) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)} a^n,$$

که در آن Γ تابع گاما است. به‌ازای $n = 1$ ، این فرمول نتیجه می‌دهد که $V_1(a) = 2a$ ، یعنی طول بازه $[-a, a]$. به‌ازای $n = 2$ ، نتیجه می‌دهد که $V_2(a) = \pi a^2$ ، یعنی مساحت یک قرص مستدیر به شعاع a . حال فرمول (50.11) را برای $n \geq 3$ ثابت می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم، به‌ازای هر $a > 0$

$$(51.11) \quad V_n(a) = a^n V_n(1).$$

به عبارت دیگر، حجم یک کره به شعاع a ، برابر حجم یک کره به شعاع 1 است. برای اثبات این امر، از تغییر متغیر خطی $x = au$ استفاده کرده $S_n(1)$ را بروی $S_n(a)$ می‌نگاریم. این نگاشت دارای دترمینان ژاکوبی a^n است. از اینرو،

$$V_n(a) = \int_{S_n(a)} \dots \int dx_1 \dots dx_n = \int_{S_n(1)} \dots \int a^n du_1 \dots du_n = a^n V_n(1).$$

این (51.11) را ثابت می‌کند. پس، برای اثبات (50.11) کافی است ثابت شود که

$$(52.11) \quad V_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}.$$

ابتدا توجه می‌کنیم که $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$ اگر و فقط اگر

$$x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 \quad \text{و} \quad x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1 - x_{n-1}^2 - x_n^2$$

پس، برای $V_n(1)$ می‌توان انتگرالی به صورت تکرار یک انتگرال $(n-2)$ گانه و یک انتگرال مضاعف نوشت:

(۵۳.۱۱)

$$V_n(1) = \iint_{x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1} \left[\int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 \leq 1 - x_{n-1}^2 - x_n^2} dx_1 \cdots dx_{n-2} \right] dx_{n-1} dx_n.$$

انتگرال داخلی روی کره^۲ $(n-2)$ بعدی $S_{n-2}(R)$ ، که $R = \sqrt{1 - x_{n-1}^2 - x_n^2}$ ، گرفته شده است؛ در نتیجه، مساوی است با

$$V_{n-2}(R) = R^{n-2} V_{n-2}(1) = (1 - x_{n-1}^2 - x_n^2)^{n/2-1} V_{n-2}(1).$$

حال به جای x_{n-1} می‌نویسیم x ، و به جای x_n می‌نویسیم y . در این صورت، (۵۳.۱۱) خواهد شد

$$V_n(1) = V_{n-2}(1) \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2)^{n/2-1} dx dy.$$

انتگرال مضاعف را با تبدیلیش به مختصات قطبی حساب کرده، به دست می‌آوریم

$$V_n(1) = V_{n-2}(1) \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{n/2-1} r dr d\theta = V_{n-2}(1) \frac{2\pi}{n}.$$

به عبارت دیگر، اعداد $V_n(1)$ در فرمول بازگشتی

$$V_n(1) = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1), \quad n \geq 3$$

صدق می‌کنند. اما دنباله^۳ $\{f(n)\}$ از اعداد تعریف شده با

$$f(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}$$

در همان فرمول بازگشتی صدق می‌کند، زیرا $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. همچنین، $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ و $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (ر.ک. تمرین ۱۶، بخش ۲۸.۱۱): در نتیجه، $f(1) = V_1(1) = 2$ و نیز، $f(2) = V_2(1) = \pi$. پس، به ازای هر $n \geq 1$ ، داریم $f(n) = V_n(1)$ این (۵۳.۱۱) را ثابت خواهد کرد.

هریک از انتگرالهای سه‌گانه تمرینهای ۱ تا ۵ را حساب کنید. ناحیه انتگرالگیری را در هر حالت رسم کنید. وجود همه انتگرالهایی که با آنها مواجهید را دانسته بگیرید.

۱. $\iiint_S xy^2z^3 dx dy dz$ ، که در آن S جسم محدود به سطح $z = xy$ و صفحات $y = x$ ، $x = 1$ ، و $z = 0$ است.

۲. $\iiint_S (x + y + z)^{-3} dx dy dz$ ، که در آن S جسم محدود به سه صفحه مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ است.

۳. $\iiint_S xyz dx dy dz$ ، که در آن $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

۴. $\iiint_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$ ، که در آن S جسم محدود به بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ است.

۵. $\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ ، که در آن S جسم حاصل از پارچه بالایی مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 1$ است.

در تمرینهای ۶، ۷، ۸، انتگرال سه‌گانه $\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz$ یک تابع مثبت به انتگرال مکرر داده شده تحویل می‌شود. در هر حالت، ناحیه انتگرالگیری S را رسم کرده، تصویرش را بر صفحه xy نشان دهید. سپس، انتگرال سه‌گانه را به صورت یک یا چند انتگرال مکرر که اولین انتگرالگیری نسبت به y باشد بیان دارید.

۶. $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right] dy \right) dx$

۷. $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_{\sqrt{x^2-y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right] dy \right) dx$

۸. $\int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right] dy \right) dx$

۹. نشان دهید که

$$\int_0^x \left(\int_0^v \left[\int_0^u f(t) dt \right] du \right) dv = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt.$$

انتگرالهای تمرینات ۱۰، ۱۱، و ۱۲ را با تبدیل به مختصات استوانه‌ای حساب کنید. وجود همه انتگرالهایی که با آنها مواجهید را دانسته بگیرید.

۱۰. $\iiint_S (x^2 + y^2) dx dy dz$ ، که در آن S جسم محدود به سطح $x^2 + y^2 = 2z$ و صفحه $z = 2$ است.

۱۱. $\iiint_S dx dy dz$ ، که در آن S جسم محدود به سه صفحه مختصات، سطح $z = x^2 + y^2$ ، و صفحه $x + y = 1$ است.

۱۲. $\iiint_S (y^2 + z^2) dx dy dz$ ، که در آن S یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h و قاعده‌ای در صفحه xy به شعاع a و محوری در امتداد محور z است.

انتگرالهای تمرینات ۱۳، ۱۴، و ۱۵ را با تبدیل به مختصات کروی حساب کنید.

۱۳. $\iiint_S dx dy dz$ ، که در آن S کره توپر به شعاع a و به مرکز مبدأ است.

۱۴. $\iiint_S dx dy dz$ ، که در آن S جسم محدود به دو کره متحدالمرکز به شعاعهای a و b ، که $0 < a < b$ ، و به مرکز مبدأ است.

۱۵. $\iiint_S [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{-1/2} dx dy dz$ ، که در آن S کره توپر به

شعاع R و مرکز مبدأ بوده، و (a, b, c) نقطه ثابتی خارج این کره است.

۱۶. مختصات کروی تعمیم یافته را می‌توان با نگاهی زیر تعریف کرد:

$$x = a\rho \cos^m \theta \sin^n \varphi, \quad y = b\rho \sin^m \theta \sin^n \varphi, \quad z = c\rho \cos^n \varphi,$$

که در آن a, b, c, m, n ثابتهای مثبتی هستند. نشان دهید که دترمینان ژاکوبی مساوی است با

$$-abc m n \rho^2 \cos^{m-1} \theta \sin^{m-1} \theta \cos^{n-1} \varphi \sin^{2n-1} \varphi.$$

انتگرالهای سه‌گانه را می‌توان برای محاسبه حجم، جرم، مرکز جرم، گشتاورماند، و مفاهیم دیگر فیزیکی مربوط به اجسام به‌کار گرفت. اگر S یک جسم باشد، حجمش از انتگرال سه‌گانه

$$V = \iiint_S dx dy dz$$

به دست می‌آید. اگر به جسم در هر نقطه (x, y, z) آن چگالی $f(x, y, z)$ (جرم در واحد حجم) نسبت داده شود، جرمش M مساوی

$$M = \iiint_S f(x, y, z) dx dy dz$$

تعریف می شود ، و مرکز جرمش نقطه $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ به مختصات

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_S x f(x, y, z) dx dy dz,$$

و از این قبیل ، خواهد بود . گشتاور ماند I_{xy} حول صفحه xy با معادله

$$I_{xy} = \iiint_S z^2 f(x, y, z) dx dy dz$$

تعریف می شود ، و فرمولهایی مشابه برای تعریف I_{yz} و I_{zx} به کار می روند . گشتاور ماند I_L حول خط L با

$$I_L = \iiint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) dx dy dz$$

تعریف می شود ، که در آن $\delta(x, y, z)$ فاصله عمودی نقطه دلخواه (x, y, z) از S تا خط L است .

۱۷ . نشان دهید که گشتاورهای ماند حول محورهای مختصات عبارتند از

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

۱۸ . حجم جسمی که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ و از پایین به سهمی گون $x^2 + y^2 = 4z$ محدود شده است را بیابید .

۱۹ . حجم جسم محدود به صفحه xy ، استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ ، و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید .

۲۰ . جرم جسم واقع بین دو کره متحدالمرکز به شعاعهای a و b ، که $0 < a < b$ ، را در صورتی حساب کنید که چگالی در هر نقطه مساوی مربع فاصله این نقطه تا مرکز باشد .

۲۱ . یک مخروط مستدیر قائم همگن توپر دارای ارتفاع h است . ثابت کنید فاصله مرکزگون آن تا قاعده مساوی $h/4$ است .

۲۲ . مرکز جرم یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h را در صورتی تعیین کنید که چگالی اش در هر نقطه متناسب با فاصله این نقطه تا قاعده باشد .

۲۳ . مرکز جرم یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h را در صورتی تعیین کنید که چگالی اش در هر نقطه متناسب با فاصله این نقطه تا محور مخروط باشد .

۲۴. جسمی به دو نیمکره متحدمرکز به شعاعهای a و b ، که $0 < a < b$ ، محدود است. اگر چگالی ثابت باشد، مرکز جرم را بیابید.

۲۵. مرکز جرم یک مکعب به ضلع h را در صورتی بیابید که چگالی اش در هر نقطه متناسب با مربع فاصله این نقطه تا یک گوشه قاعده باشد. (قاعده را در صفحه xy گرفته و اضلاع را روی محورهای مختصات بگذارید.)

۲۶. یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h ، شعاع قاعده a ، چگالی ثابت، و جرم M است. گشتاور ماند آن حول محور ماربر راس و موازی قاعده را بیابید.

۲۷. گشتاور ماند یک کره به شعاع R و جرم M را حول یک قطر در صورتی بیابید که چگالی ثابت باشد.

۲۸. گشتاور ماند یک استوانه به شعاع a و جرم M را در صورتی بیابید که چگالی اش در هر نقطه متناسب با فاصله این نقطه تا محور استوانه باشد.

۲۹. ساقه یک قارچ استوانه مستدیر قائمی به قطر ۱ و طول ۲ بوده، و کلاهک آن یک نیمکره به شعاع R است. اگر قارچ یک جسم همگن با محور تقارن بوده، و مرکز جرمش در صفحه‌ای باشد که ساقه به کلاهک وصل می‌شود، R را پیدا نمایید.

۳۰. یک سفینه فضایی جدید دارای بدنه غیر قابل شکست هموار است که از بخشهایی از دو استوانه مستدیر با قطرهای مساوی D که محورهاش در زوایای قائمه هم را تلاقی می‌کنند ساخته شده است. قرار است سفینه در یک جعبه مکعبی به بعد داخلی D حمل شود. ثابت کنید یکسوم فضای جعبه خالی می‌باشد.

۳۱. فرض کنید $S_n(a)$ مجموعه زیر در فضای n باشد، که در آن $a > 0$:

$$S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1| + \dots + |x_n| \leq a\}.$$

وقتی $n = 2$ ، مجموعه یک مربع به رئوس $(0, \pm a)$ و $(\pm a, 0)$ است. وقتی $n = 3$ ، یک هشت وجهی به رئوس $(0, 0, \pm a)$ ، $(0, \pm a, 0)$ ، و $(\pm a, 0, 0)$ می‌باشد. فرض کنید $V_n(a)$ حجم $S_n(a)$ باشد، که با

$$V_n(a) = \int_{S_n(a)} \dots \int dx_1 \dots dx_n$$

داده می‌شود.

(A) ثابت کنید $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

(B) به ازای $n \geq 2$ ، انتگرال مربوط به $V_n(1)$ را به صورت تکرار یک انتگرال یک

بعدی و یک انتگرال $(n - 1)$ گانه بیان کرده، و نشان دهید

$$V_n(1) = V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - |x|)^{n-1} dx = \frac{2}{n} V_{n-1}(1).$$

(پ) با استفاده از قسمتهای (T) و (ب)، نتیجه بگیرید که $V_n(a) = \frac{2^n a^n}{n!}$.

۳۲. فرض کنید $S_n(a)$ مجموعهٔ زیر در فضای n باشد، که در آن $a > 0$ و $n \geq 2$:

$$S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| + |x_n| \leq a, i = 1, \dots, n-1\}.$$

(T) $S_n(1)$ ، وقتی $n = 2$ و وقتی $n = 3$ ، را رسم کنید.

(ب) فرض کنید $V_n(a) = \int \dots \int_{S_n(a)} dx_1 \dots dx_n$ ، و نشان دهید که $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

(پ) انتگرال مربوط به $V_n(1)$ را به صورت تکراری از یک انتگرال یک بعدی و یک

انتگرال $(n - 1)$ گانه بیان کرده، و نتیجه بگیرید که $V_n(a) = 2^n a^n / n$.

۳۳. (T) به مثال ۴، ص ۵۵۶، باز می‌گردیم. انتگرال مربوط به $V_n(1)$ ، یعنی حجم

کره n یک بعدی، را به صورت تکراری از یک انتگرال $(n - 1)$ گانه و یک انتگرال یک

بعدی بیان کرده، و بدینوسیله ثابت کنید

$$V_n(1) = 2V_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - x^2)^{(n-1)/2} dx.$$

(ب) با استفاده از قسمت (T) و معادله (۵۲.۱۱)، نتیجه بگیرید که

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

انتگرالهای سطح

۱۰۱۲ نمایش پارامتری سطح

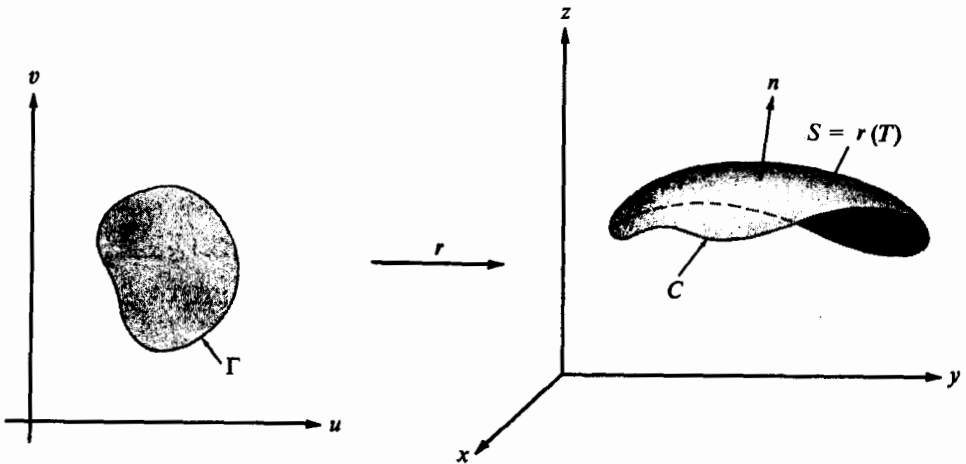
در این فصل به بحث انتگرالهای سطح و کاربردهایشان می‌پردازیم. انتگرال سطح را می‌توان شبیه دوبعدی انتگرال خط دانست، که در آن ناحیه انتگرالگیری به جای منحنی سطح است. پیش از آنکه بتوان انتگرالهای سطح را دقیقاً مطرح کرد، باید در معنی سطح توافق داشته باشیم.

به بیان نادقیق، یک سطح مکان هندسی یک نقطه متحرک در فضا با دو درجه آزادی است. در بررسی هندسه تحلیلی در جلد یک، دو روش برای توصیف این مکان به وسیله فرمولهای ریاضی داده شد. یکی نمایش ضمنی است، که در آن یک سطح مجموعه نقاطی چون (x, y, z) است که در معادله‌ای به شکل $F(x, y, z) = 0$ صدق می‌کنند. گاهی می‌توان این معادله را نسبت به یکی از مختصات و برحسب دوتای دیگر، مثلاً "نسبت به z و برحسب x و y "، حل کرد. در صورت امکان، یک نمایش صریح به دست می‌آید که با یک یا چند معادله به شکل $z = f(x, y)$ بیان می‌شود. مثلاً، کره به شعاع 1 و مرکز مبدأ دارای نمایش ضمنی $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ است. وقتی این معادله نسبت به z حل شود، به دو معادله منجر می‌شود، $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ و $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. اولین نمایش صریح نیمکره بالایی، و دومی از آن نیمکره پایینی است.

روش سوم برای توصیف سطوح در بررسی انتگرالهای سطح مفیدتر است؛ این نمایش پارامتری یا برداری است، که در آن سه معادله داریم که x ، y ، و z را برحسب دو پارامتر u و v بیان می‌کنند:

$$(10.12) \quad x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v).$$

در اینجا نقطه (u, v) روی یک مجموعه همبند دوبعدی T در صفحه uv تغییر می‌کند، و نقاط متناظر (x, y, z) یک سطح در فضای xyz می‌پیمایند. این روش توصیف یک سطح شبیه نمایش یک منحنی فضایی با سه معادله پارامتری شامل یک پارامتر است. وجود دو پارامتر در (۱۰۱۲) انتقال دودرجه آزادی را به نقطه (x, y, z) ، همانند شکل ۱۰۱۲، ممکن می‌سازد. راه دیگر توصیف همین ایده این است که بگوییم یک سطح نقش یک ناحیه مسطح T تحت نگاشت (۱۰۱۲) است.



شکل ۱۰۱۲ نمایش پارامتری یک سطح

اگر بردار شعاعی r از مبدا تا نقطه دلخواه (x, y, z) سطح را معرفی کنیم، می‌توان سه معادله پارامتری (۱۰۱۲) را در یک معادله برداری به شکل

$$r(u, v) = X(u, v)i + Y(u, v)j + Z(u, v)k \quad (2012) \quad (u, v) \in T$$

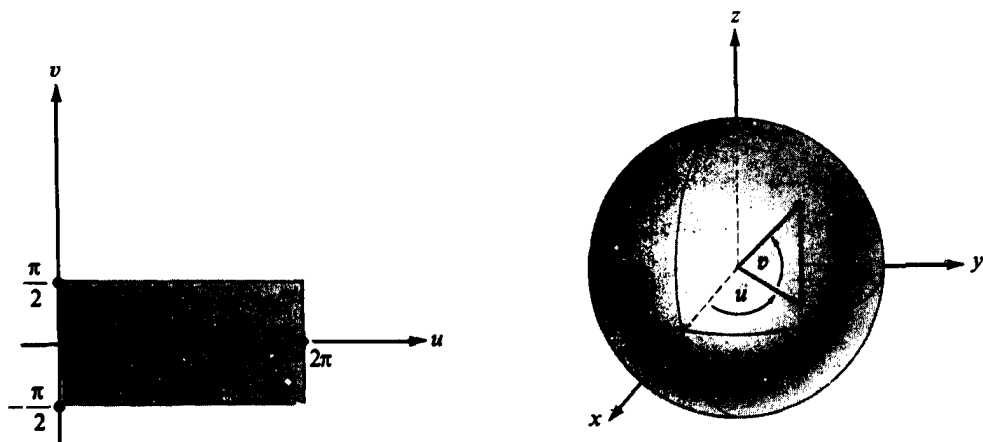
تلفیق کرد. این را یک معادله برداری برای سطح می‌نامند.

البته، برای یک سطح نمایشهای پارامتری زیادی وجود دارند. یکی از اینها را همیشه می‌توان از شکل صریح $z = f(x, y)$ با فرض $Z(u, v) = f(u, v)$ ، $Y(u, v) = v$ ، $X(u, v) = u$ به دست آورد. از آن سو، اگر دو معادله اول (۱۰۱۲) را نسبت به u و v و برحسب x و y حل کرده و در معادله سوم قرار دهیم، یک نمایش صریح مانند $z = f(x, y)$ به دست خواهد آمد.

مثال ۱. نمایش پارامتری کره. سه معادله

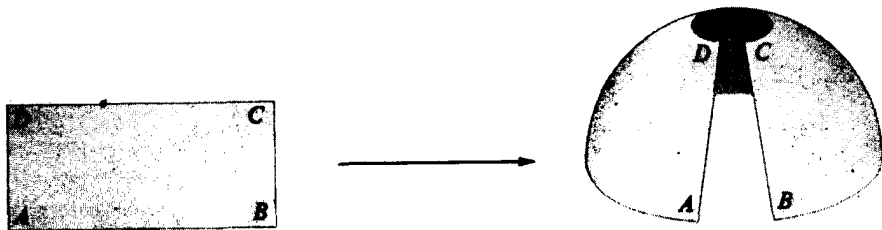
$$(۳.۱۲) \quad x = a \cos u \cos v, \quad y = a \sin u \cos v, \quad z = a \sin v$$

معادلات پارامتری یک کره به شعاع a و مرکز مبدا است. اگر سه معادله (۳.۱۲) را مجذور کرده و بهم بیفزاییم، درمی یابیم که $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ، و می بینیم که هر نقطه (x, y, z) صادق در (۳.۱۲) بر کره قرار دارد. در این مثال، پارامترهای u و v می توان به صورت زوایای شکل ۲.۱۲ تعبیر هندسی کرد.



شکل ۲.۱۲ نمایش پارامتری کره

اگر نقطه (u, v) روی مستطیل $T = [0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ تغییر کند، نقاط معین شده به وسیله (۳.۱۲) تمام کره را می پیمایند. نیمکره بالایی نقش مستطیل $[0, \frac{1}{2}\pi] \times [0, 2\pi]$ و نیمکره پایینی نقش $[0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}\pi, 0]$ است. شکل ۳.۱۲ ایده ملموسی



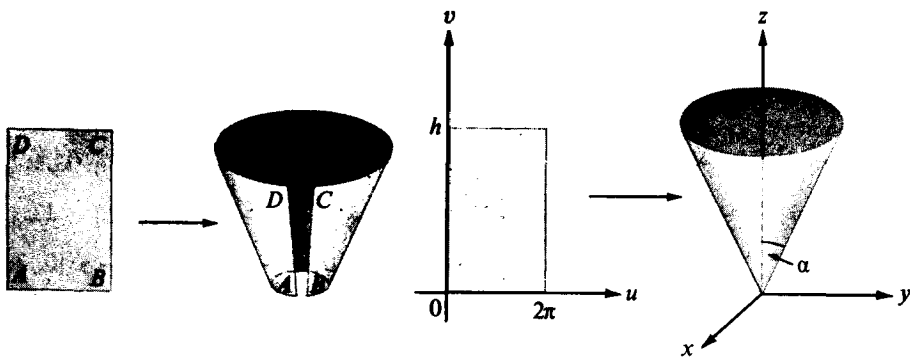
شکل ۳.۱۲ تغییر شکل یک مستطیل به یک نیمکره

از طرز نگاشت مستطیل $[0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ روی نیمکره، بالایی را بهما می‌دهد. فرض کنید مستطیل از یک ماده پلاستیکی قابل انعطاف که می‌تواند منبسط یا منقبض شود ساخته شده باشد. شکل ۳۰۱۲ نشان می‌دهد که مستطیل به یک نیمکره تغییر یافته است. قاعده AB مالا استوا شده، اضلاع مقابل AD و BC برهم منطبق می‌شوند، و ضلع فوقانی DC به یک نقطه منقبض می‌گردد (قطب شمال).

مثال ۲. نمایش پارامتری مخروط. معادله برداری

$$r(u, v) = v \sin \alpha \cos u i + v \sin \alpha \sin u j + v \cos \alpha k$$

نمایش مخروط مستدیر قائم در شکل ۴۰۱۲ است، که در آن α نصف زاویه راس است. مجدداً، پارامترهای u و v را می‌توان تعبیر هندسی کرد؛ v فاصله راس تا نقطه (x, y, z) بر مخروط، و u مختص قطبی زاویه است. وقتی (u, v) روی یک مستطیل به شکل $[0, 2\pi] \times [0, h]$ تغییر کند، نقاط نظیر (x, y, z) یک مخروط به ارتفاع $h \cos \alpha$ را می‌پیمایند. یک مستطیل پلاستیکی را می‌توان با انطباق اضلاع AD و BC ، به شکل ۵۰۱۲، و انقباض ضلع AB به یک نقطه (راس مخروط)، به یک مخروط تغییر داد. سطح شکل ۸۰۱۷ یک مرحله میانی تغییر شکل را نشان می‌دهد.



شکل ۵۰۱۲ تغییر شکل یک مستطیل به یک مخروط

شکل ۴۰۱۲ نمایش پارامتری یک مخروط

در بررسی کلی سطوح، توابع X ، Y ، و Z در معادلات پارامتری (۱۰۱۲) یادار معادله برداری (۲۰۱۲) بر T پیوسته فرض می‌شوند. نقش T تحت نگاشت r یک سطح

پارامتری نام دارد و با علامت $r(T)$ نموده می‌شود. در بسیاری از مثالهای مورد بحث ما، T یک مستطیل، یک قرص مستدیر، یا مجموعه^۴ همبند ساده^۵ دیگری که به یک منحنی بسته^۶ ساده محدود شده می‌باشد. اگر تابع r بر T یک به یک باشد، نقش $r(T)$ یک سطح پارامتری ساده نام دارد. در چنین حالت، نقاط متمایز T به نقاط متمایز سطح نگاشته می‌شود. بخصوص، هر منحنی بسته^۶ ساده در T روی یک منحنی بسته^۶ ساده بر سطح نگاشته می‌شود.

سطح پارامتری $r(T)$ ممکن است به یک نقطه یا یک منحنی تباہ شود. مثلاً، اگر هر سه تابع X ، Y ، و Z ثابت باشند، نقش $r(T)$ یک نقطه است. اگر X ، Y ، و Z مستقل از v باشند، نقش $r(T)$ یک منحنی است. مثال دیگر از یک سطح تباہ شده وقتی است که $X(u, v) = u + v$ ، $Y(u, v) = (u + v)^2$ ، و $Z(u, v) = (u + v)^3$ ، که در آن $T = [0, 1] \times [0, 1]$. اگر بنویسیم $t = u + v$ ، سطح به منحنی فضایی به معادلات پارامتری $x = t$ ، $y = t^2$ ، و $z = t^3$ ، که $0 \leq t \leq 2$ ، تباہ می‌شود. از این تباہی می‌توان با گذاردن قیودی دیگر بر نگاشت r ، بصورتی که در بخش بعد توصیف می‌شود، احتراز کرد.

۲.۱۲ حاصل ضرب برداری اساسی

سطحی را در نظر می‌گیریم که با معادله^۴ برداری

$$r(u, v) = X(u, v)i + Y(u, v)j + Z(u, v)k \quad \text{که } (u, v) \in T$$

توصیف شده است. به فرض مشتق‌پذیر بودن X ، Y ، و Z بر T ، دو بردار

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} i + \frac{\partial Y}{\partial u} j + \frac{\partial Z}{\partial u} k$$

و

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} i + \frac{\partial Y}{\partial v} j + \frac{\partial Z}{\partial v} k$$

را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب خارجی این دو بردار $\partial r / \partial u \times \partial r / \partial v$ را حاصل ضرب برداری اساسی نمایش r می‌نامیم. مولفه‌های آن را می‌توان به صورت دترمینانهای ژاکوبی بیان کرد. در واقع، داریم

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} k$$

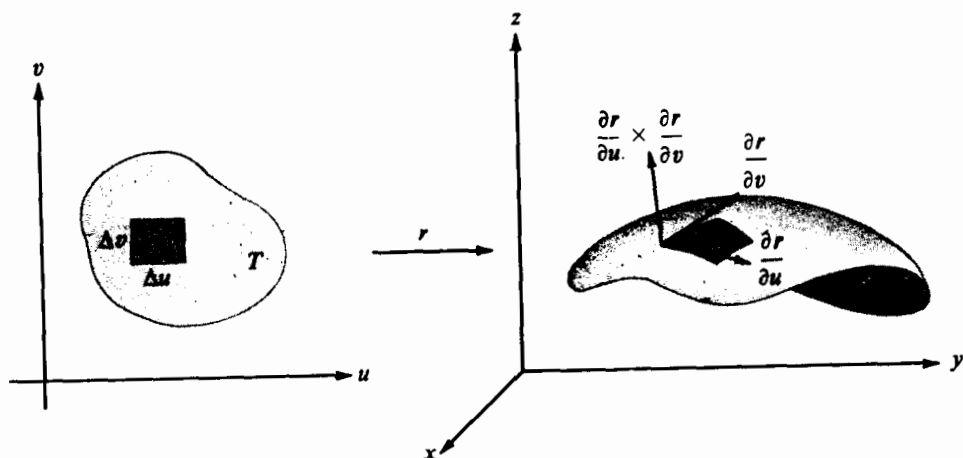
(۴.۱۲)

$$= \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} i + \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} j + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} k.$$

اگر (u, v) نقطه‌ای در T باشد که در آن $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ پیوسته بوده و حاصل ضرب برداری اساسی ناصفر باشد، نقطه $r(u, v)$ نقش یک نقطه منتظم r نامیده می‌شود. نقاطی که در آنها $\partial r/\partial u$ یا $\partial r/\partial v$ پیوسته نبوده یا $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v = 0$ نقاط منفرد r نامیده می‌شوند. سطح $r(T)$ را هموار گویند اگر همه نقاطش نقاط منتظم باشند. هر سطح بیش از یک نمایش پارامتری دارد. بعضی از مثالهای زیر نشان می‌دهند که یک نقطه از یک سطح ممکن است یک نقطه منتظم یک نمایش پارامتری ولی نقطه منفرد نمایش دیگر باشد. معنی هندسی نقاط منتظم و منفرد را می‌توان به صورت زیر توضیح داد:

یک پاره خط افقی را در T در نظر می‌گیریم. نقش آن تحت r یک منحنی (به نام یک u - منحنی) است که بر سطح $r(T)$ قرار دارد. به ازای v ثابت، پارامتر u را نمایش زمان می‌گیریم. بردار $\partial r/\partial u$ بردار سرعت این منحنی است. وقتی u به قدر Δu تغییر کند، نقطه‌ای که در آغاز در $r(u, v)$ است در امتداد یک u - منحنی به قدر تقریباً $\|\partial r/\partial u\| \Delta u$ حرکت می‌کند، زیرا $\|\partial r/\partial u\|$ نمایش مقدار سرعت در امتداد u - منحنی است. بهمین نحو، به ازای u ثابت، یک نقطه از یک v - منحنی در زمان Δv به قدر تقریباً $\|\partial r/\partial v\| \Delta v$ حرکت می‌کند. یک مستطیل در T به مساحت $\Delta u \Delta v$ بروی بخشی از $r(T)$ نگاشته می‌شود که آن را با متوازی الاضلاع معین شده به وسیله بردارهای $\Delta u (\partial r/\partial u)$ و $\Delta v (\partial r/\partial v)$ تقریب می‌زنیم. (ر.ک. شکل ۶.۱۲). مساحت متوازی الاضلاع پیموده شده به وسیله $\Delta u (\partial r/\partial u)$ و $\Delta v (\partial r/\partial v)$ اندازه حاصل ضرب خارجی آنهاست:

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial r}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$



شکل ۶.۱۲ تعبیر هندسی بردارهای $\partial r/\partial u$ ، $\partial r/\partial v$ و $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$

پس طول حاصل ضرب برداری اساسی را می‌توان یک سازهٔ بزرگ‌کن موضعی مساحت دانست. در نقاطی که این حاصل ضرب برداری صفر است، متوازی الاضلاع به یک منحنی یا یک نقطه فرو می‌ریزد، و تباهی به‌بار می‌آورد. در هر نقطهٔ منتظم، بردارهای $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ صفحه‌ای معین می‌کنند که بردار $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ یک قائم آن است. در بخش بعد، ثابت می‌کنیم $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ بر هر منحنی هموار روی سطح عمود است؛ به این دلیل، صفحهٔ معین شده به‌وسیلهٔ $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ صفحهٔ مماس سطح نام دارد. پیوستگی $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ پیوستگی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را ایجاد می‌کند؛ این، به نوبهٔ خود، یعنی صفحهٔ مماس بر یک سطح هموار به‌طور پیوسته تغییر می‌نماید. لذا، می‌بینیم پیوستگی $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ از وجود ضلعهای تیز یا گوشه‌ها بر سطح ممانعت می‌کند؛ صفر نشدن $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ از تباهی جلوگیری خواهد کرد.

مثال ۱. سطوح با نمایش صریح $z = f(x, y)$. برای یک سطح با نمایش صریح $z = f(x, y)$ ، می‌توان x و y را پارامتر گرفت، که معادلهٔ برداری

$$r(x, y) = xi + yj + f(x, y)k$$

را به‌ما می‌دهد. این نمایش همواره یک سطح پارامتری ساده به‌دست می‌دهد. ناحیهٔ T تصویر سطح روی صفحهٔ xy نام دارد. (مثالی در شکل ۷.۱۲، ص ۵۷۵، نموده

شده است.) برای محاسبه حاصل ضرب برداری اساسی، توجه می‌کنیم که، اگر f مشتقپذیر باشد،

$$\frac{\partial r}{\partial y} = j + \frac{\partial f}{\partial y} k \quad \text{و} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = i + \frac{\partial f}{\partial x} k$$

این نتیجه می‌دهد که

$$(۵.۱۲) \quad \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} i - \frac{\partial f}{\partial y} j + k.$$

چون مولفه z ، حاصل ضرب برداری اساسی هرگز صفر نیست، لذا، تنها نقاط منفرد این نمایش نقطایی است که در آنها دست کم یکی از مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ یا $\partial f/\partial y$ پیوسته نباشد.

یک حالت مشخص معادله $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ است، که اگر $x^2 + y^2 \leq 1$ ، نمایش یک نیمکره به شعاع 1 و مرکز مبدأ است. معادله برداری

$$r(x, y) = xi + yj + \sqrt{1 - x^2 - y^2}k$$

قرص یکه $T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ را به طوریکه به یک روی نیمکره می‌نگارد. مشتقات جزئی $\partial r/\partial x$ و $\partial r/\partial y$ همه‌جا درون این قرص موجود و پیوسته‌اند، ولی بر روی کرانه وجود ندارند. بنابراین، هر نقطه روی استوا یک نقطه منفرد این نمایش می‌باشد.

مثال ۲. نیمکره مثال ۱ را در نظر می‌گیریم، ولی این بار به عنوان نقش مستطیل $T = [0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ تحت نگاشت

$$r(u, v) = a \cos u \cos v i + a \sin u \cos v j + a \sin v k.$$

بردارهای $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ از فرمولهای زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial r}{\partial u} = -a \sin u \cos v i + a \cos u \cos v j,$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = -a \cos u \sin v i - a \sin u \sin v j + a \cos v k.$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که حاصل ضرب خارجی آنها مساوی است با

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = a \cos v r(u, v).$$

نقش T یک سطح پارامتری ساده نیست، زیرا این نگاشت بر T یک به یک نیست. در واقع، هر نقطه بر پاره خط $v = \frac{1}{2}\pi, 0 \leq u \leq 2\pi$ به نقطه $(0, 0, a)$ (قطب شمال) نگاشته می شود. همچنین، بخاطر تناوب سینوس و کسینوس، r در نقاط $(0, v)$ و $(2\pi, v)$ مقادیر یکسان می گیرد؛ در نتیجه، اضلاع راست و چپ T روی یک منحنی نگاشته می شوند، روی یک قوس مستدیر که قطب شمال را به نقطه $(a, 0, 0)$ روی استوا وصل می کند. (ر. ک. شکل ۳.۱۲). بردارهای $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ همه جا در T پیوسته اند. چون $\|\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v\| = a^2 \cos v$ ، تنها نقاط منفرد این نمایش به ازای $\cos v = 0$ است. قطب شمال تنها نقطه از این نوع خواهد بود.

۳.۱۲ حاصل ضرب برداری اساسی به عنوان قائم به سطح

سطح پارامتری هموار $r(T)$ را در نظر گرفته، فرض می کنیم C^* یک منحنی هموار در T باشد. در این صورت، نقش $C = r(C^*)$ یک منحنی هموار واقع روی سطح است. ثابت می کنیم، همانطور که شکل ۶.۱۲ نشان داده، بردار $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ در هر نقطه از C قائم به C است.

فرض کنیم C^* به وسیله تابع α تعریف شده بر بازه $[a, b]$ توصیف شده باشد؛ مثلاً،

$$\alpha(t) = U(t)i + V(t)j.$$

در این صورت، منحنی نقش C به وسیله تابع مرکب

$$\rho(t) = r[\alpha(t)] = X[\alpha(t)]i + Y[\alpha(t)]j + Z[\alpha(t)]k$$

توصیف می شود. می خواهیم ثابت کنیم مشتق $\rho'(t)$ بر بردار $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ ، وقتی مشتقات جزئی $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ در $(U(t), V(t))$ حساب شوند، عمود است. برای محاسبه $\rho'(t)$ ، از هر مولفه $\rho(t)$ با قاعده زنجیره ای (قضیه ۸.۸) مشتق می گیریم تا به دست آید

$$\rho'(t) = \nabla X \cdot \alpha'(t)i + \nabla Y \cdot \alpha'(t)j + \nabla Z \cdot \alpha'(t)k, \quad (6.12)$$

که در آن بردارهای گرادینان ∇X ، ∇Y ، و ∇Z در $(U(t), V(t))$ حساب می شوند. معادله (۶.۱۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho'(t) = \frac{\partial r}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial r}{\partial v} V'(t),$$

که در آن مشتقات $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ در $(U(t), V(t))$ حساب می‌شوند. چون $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ هریک بر حاصل ضرب خارجی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ عمود است، همین امر برای $\rho'(t)$ درست می‌باشد. این ثابت می‌کند که، طبق حکم، $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ قائم به C است. به این دلیل، حاصل ضرب برداری $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را قائم به سطح $r(T)$ گویند. در هر نقطه منتظم P از $r(T)$ ، بردار $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ ناصفر است؛ صفحه ماربر P با این بردار قائم صفحه مماس بر سطح در P نامیده می‌شود.

۴.۱۲ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۶، با حذف پارامترهای u و v یک معادله دکارتی به دست آورده، بدینوسیله نشان دهید که معادله برداری داده شده بخشی از سطح نامبرده را نمایش می‌دهد. همچنین، حاصل ضرب برداری اساسی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را بر حسب u و v حساب کنید.

۱. صفحه:

$$r(u, v) = (x_0 + a_1u + b_1v)i + (y_0 + a_2u + b_2v)j + (z_0 + a_3u + b_3v)k.$$

۲. سهمی‌گون بیضوی:

$$r(u, v) = au \cos v i + bu \sin v j + u^2 k.$$

۳. بیضی‌گون:

$$r(u, v) = a \sin u \cos v i + b \sin u \sin v j + c \cos u k.$$

۴. سطح دوار:

$$r(u, v) = u \cos v i + u \sin v j + f(u)k.$$

۵. استوانه:

$$r(u, v) = ui + a \sin v j + a \cos v k.$$

۶. چنبره:

$$r(u, v) = (a + b \cos u) \sin v i + (a + b \cos u) \cos v j + b \sin u k,$$

که در آن $0 < b < a$. تعابیر هندسی a و b چیستند؟

در تمرینهای ۷ تا ۱۰، اندازه حاصل ضرب برداری $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را حساب کنید.

$$\cdot r(u, v) = a \sin u \cosh v i + b \cos u \cosh v j + c \sinh v k \quad \cdot ۷$$

$$\cdot r(u, v) = (u + v)i + (u - v)j + 4v^2k \quad \cdot ۸$$

$$\cdot r(u, v) = (u + v)i + (u^2 + v^2)j + (u^3 + v^3)k \quad \cdot ۹$$

$$\cdot r(u, v) = u \cos v i + u \sin v j + \frac{1}{2}u^2 \sin 2v k \quad \cdot ۱۰$$

۵.۱۲ مساحت یک سطح پارامتری

فرض کنیم $S = r(T)$ یک سطح پارامتری باشد که به وسیله تابع برداری r تعریف شده بر ناحیه T در صفحه uv توصیف شده است. در بخش ۲.۱۲ دریافتیم که طول حاصل ضرب برداری اساسی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را می توان به عنوان یک سازه بزرگ کن موضعی مساحت تعبیر کرد. (ر.ک. شکل ۶.۱۲) یک مستطیل در T به مساحت $\Delta u \Delta v$ به وسیله r روی یک متوازی الاضلاع منحنی الخط بر S به مساحتی تقریباً مساوی

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

نگاشته می شود. این ملاحظات تعریف زیر را پیشنهاد می کنند.

تعریف مساحت یک منحنی پارامتری. مساحت S ، که با $a(S)$ نموده می شود، به وسیله انتگرال مضاعف

$$(۷.۱۲) \quad a(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv$$

تعریف می شود.

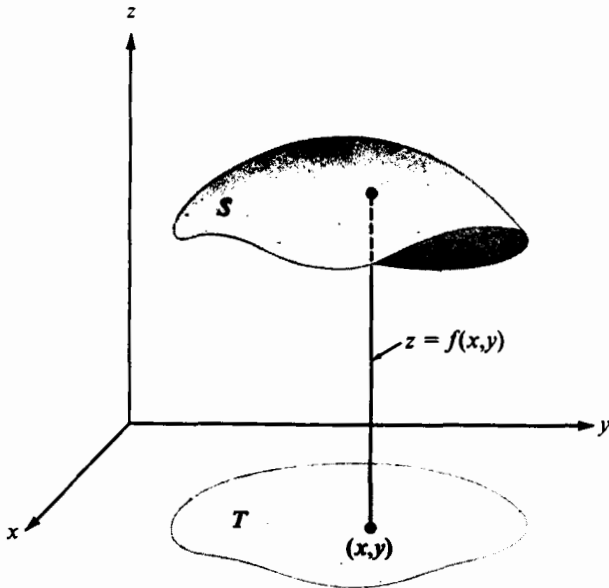
به عبارت دیگر، برای تعیین مساحت S ، ابتدا حاصل ضرب برداری اساسی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را حساب کرده و سپس از طول آن روی ناحیه T انتگرال می گیریم. وقتی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ به وسیله معادله (۴.۱۲) برحسب مولفه هایش بیان شود، خواهیم داشت

$$(۸.۱۲) \quad a(S) = \iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv.$$

به این شکل، انتگرال مساحت سطح شبیه انتگرال طول قوس یک منحنی است.*
 اگر S به طور صریح با معادله‌ای به شکل $z = f(x, y)$ داده شده باشد، می‌توان
 x و y را به عنوان پارامتر به کار برد. حاصل ضرب برداری اساسی با معادله^۵ (۵.۱۲)
 داده می‌شود؛ در نتیجه، داریم

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \left\| -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

در این حالت، انتگرال مساحت سطح خواهد شد :



شکل ۷.۱۲ سطح S با نمایش صریح $z = f(x, y)$. ناحیه^۶ T تصویر S بر صفحه^۷ xy است.

* چون انتگرال (۷.۱۲) مستلزم r است، مساحت یک سطح به تابع توصیف کننده^۸ سطح بستگی دارد. در بحث انتگرالهای سطح، ثابت می‌کنیم (در بخش ۸.۱۲) که، تحت چند شرط کلی، مساحت از نمایش پارامتری مستقل است. نتیجه شبیه قضیه^۹ ۱.۱۵ است، که در آن پایایی انتگرالهای خط تحت تغییر پارامتر بحث شده است.

$$(۹.۱۲) \quad a(S) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

که در آن، همانطور که شکل ۷.۱۲ نشان داده، ناحیه T تصویر S روی صفحه xy است. وقتی S در یک صفحه موازی صفحه xy باشد، تابع f ثابت است؛ در نتیجه، $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ و معادله (۹.۱۲) خواهد شد

$$a(S) = \iint_T dx dy.$$

این با فرمول معمولی مساحت نواحی مسطح یکی است.

معادله (۹.۱۲) را می‌توان بشکلی دیگر که اطلاعات بیشتری از معنی هندسی‌اش

بدهد نوشت. در هر نقطه از S ، فرض کنیم γ زاویه بین بردار قائم $N = \partial r/\partial x \times \partial r/\partial y$ و بردار یکه مختصات k باشد. (ر.ک. شکل ۸.۱۲). چون مولفه z ، N مساوی ۱ است، داریم

$$\cos \gamma = \frac{N \cdot k}{\|N\| \|k\|} = \frac{1}{\|N\|} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\|};$$

و در نتیجه، $\|\partial r/\partial x \times \partial r/\partial y\| = 1/\cos \gamma$. لذا، معادله (۹.۱۲) خواهد شد

$$(۱۰.۱۲) \quad a(S) = \iint_T \frac{1}{\cos \gamma} dx dy.$$

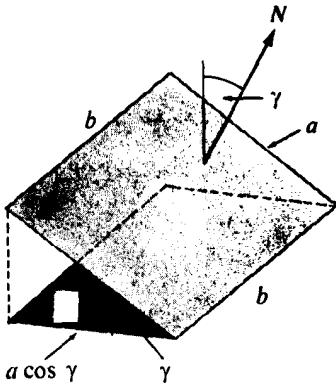
حال فرض کنیم S در صفحه‌ای که بر صفحه xy عمود نیست واقع باشد. در این صورت، γ ثابت است و معادله (۱۰.۱۲) می‌گوید که $\cos \gamma$ (مساحت T) = مساحت S ، یا

$$(۱۱.۱۲) \quad a(T) = a(S) \cos \gamma.$$

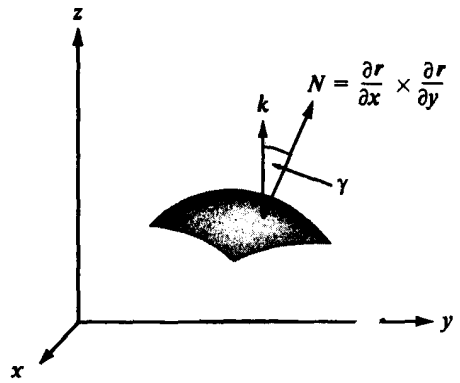
معادله (۱۱.۱۲) را گاهی اصل کسینوسی مساحت می‌نامند. این معادله می‌گوید

که اگر ناحیه S در یک صفحه روی ناحیه T در صفحه دیگر، که با صفحه اول زاویه γ می‌سازد، تصویر شود، مساحت T ، $\cos \gamma$ برابر مساحت S است. این فرمول بوضوح وقتی S مستطیل شکل ۹.۱۲ باشد درست است، زیرا فواصل در یک جهت به وسیله سازه $\cos \gamma$ کوتاه می‌شوند، ولی در یک جهت عمود به وسیله تصویر تغییر نمی‌کنند. معادله

(۱۱.۱۲) این خاصیت را به هر ناحیهٔ مسطح S مساحت دار تعمیم می‌دهد.



شکل ۹.۱۲ اصل کسینوسی مساحت برای یک مستطیل



شکل ۸.۱۲ طول $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ مساوی $1/\cos \gamma$ است.

حال فرض کنیم S دارای نمایش ضمنی $F(x, y, z) = 0$ باشد. اگر S را بتوان به طوری که به یک بر صفحه xy تصویر کرد، معادلهٔ $F(x, y, z) = 0$ را به عنوان تابعی از x و y ، مثلاً " به صورت $z = f(x, y)$ ، تعریف می‌کند، و مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ با مشتقات جزئی F به وسیلهٔ معادلات

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

در نقاطی که $\partial F/\partial z \neq 0$ بهم مربوط می‌شوند. با گذاردن این کسرها در (۹.۱۲)، معلوم می‌شود که

$$(۱۲.۱۲) \quad a(S) = \iint_T \frac{\sqrt{(\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial y)^2 + (\partial F/\partial z)^2}}{|\partial F/\partial z|} dx dy.$$

مثال ۱. مساحت نیمکره. نیمکرهٔ S به شعاع a و مرکز مبداء را در نظر می‌گیریم. نمایش ضمنی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ، $z \geq 0$ ، نمایش صریح $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ، و نمایش پارامتری

$$(۱۳۰۱۲) \quad r(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k}$$

را داریم .

برای محاسبه مساحت S از نمایش ضمنی ، به معادله^{۱۳۰۱۲} و

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$

متوسل می شویم . مشتقات جزئی F عبارتند از $\partial F/\partial x = 2x$, $\partial F/\partial y = 2y$, $\partial F/\partial z = 2z$.
 نیمکره^{۱۳۰۱۲} S به طور یک به یک روی قرص مستدیر $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ در صفحه^{۱۳۰۱۲} xy تصویر می شود . معادله^{۱۳۰۱۲} را مستقیماً نمی توان به کار برد ، زیرا مشتق جزئی $\partial F/\partial z$ بر کرانه^{۱۳۰۱۲} D صفر است . اما ، مشتق $\partial F/\partial z$ همه جا درون D ناصفر است ؛ در نتیجه ، می توان قرص متحدالمرکز کوچکتر $D(R)$ به شعاع R ، که $R < a$ ، را در نظر گرفت . اگر $S(R)$ بخش نظیر نیمکره^{۱۳۰۱۲} بالایی باشد ، معادله^{۱۳۰۱۲} قابل به کار بردن است و معلوم می شود که

$$\begin{aligned} \text{مساحت } S(R) &= \iint_{D(R)} \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{|2z|} dx dy \\ &= \iint_{D(R)} \frac{a}{z} dx dy = a \iint_{D(R)} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy . \end{aligned}$$

انتگرال آخری را می توان به آسانی با استفاده از مختصات قطبی حساب کرد ، که نتیجه

$$\text{مساحت } S(R) = a \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr \right] d\theta = 2\pi a(a - \sqrt{a^2 - R^2}) .$$

می دهد وقتی $a \rightarrow R$ ، این به حد $2\pi a^2$ نزدیک خواهد شد .

در محاسبات فوق می توان ، با استفاده از نمایش پارامتری^{۱۳۰۱۲} ، از حدگیری

اجتناب کرد . محاسبات مثال ۲ در بخش ۲۰۱۲ نشان می دهند که

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| = \| a \cos v \mathbf{r}(u, v) \| = a^2 |\cos v| .$$

لذا ، با فرض مستطیل $[0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ به عنوان ناحیه^{۱۳۰۱۲} T ، می توان معادله^{۱۳۰۱۲} (۷۰۱۲)

را به کار برد ؛ خواهیم داشت

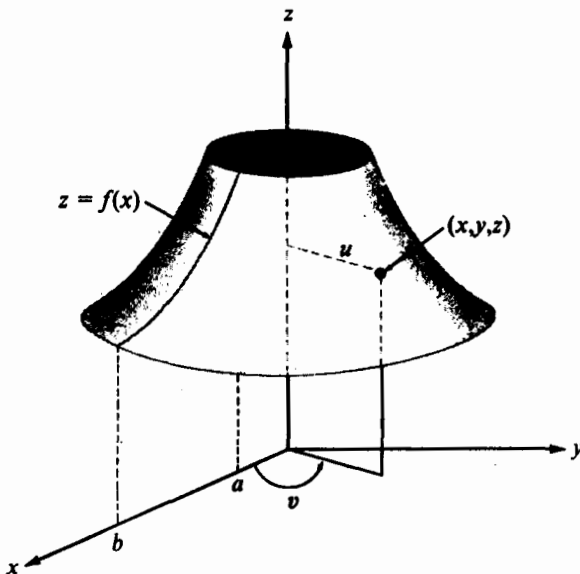
$$a(S) = a^2 \iint_T |\cos v| du dv = a^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos v dv \right] du = 2\pi a^2 .$$

مثال ۲. قضیه دیگری از پاپوس. یکی از قضایای پاپوس می‌گوید که سطح دوار حاصل از دوران یک منحنی مسطح به طول L حول محوری در صفحه منحنی دارای مساحت $2\pi Lh$ است، که در آن h فاصله مرکزگرم منحنی تا محور دوران می‌باشد. با استفاده از معادله (۷.۱۲)، این قضیه را ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم منحنی C ، که ابتدا در صفحه xz است، حول محور z چرخیده باشد. فرض کنیم معادله آن در صفحه xz عبارت باشد از $z = f(x)$ ، که در آن $a \leq x \leq b$ ، $a \geq 0$. سطح دوار حاصل S را می‌توان با معادله برداری

$$r(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + f(u) \mathbf{k}$$

توصیف کرد، که در آن $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$. پارامترهای u و v را می‌توان، مثل شکل ۱۰.۱۲، شعاع و زاویه مختصات قطبی تعبیر کرد. اگر $a \leq u \leq b$ ، همه نقاط



شکل ۱۰.۱۲ مساحت سطح دوار معین شده به وسیله قضیه پاپوس

(x, y, z) با فاصله معلوم u از محور z دارای مختص z یکسانند، یعنی $f(u)$ ؛ در نتیجه، همه بر سطح قرار دارند. حاصل ضرب برداری اساسی این نمایش عبارت است از

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & f'(u) \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -uf'(u) \cos v i - uf'(u) \sin v j + uk;$$

و در نتیجه ،

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| = u\sqrt{1 + [f'(u)]^2}.$$

لذا ، معادله (۷.۱۲) خواهد شد

$$a(S) = \int_0^{2\pi} \left[\int_a^b u\sqrt{1 + [f'(u)]^2} du \right] dv = 2\pi \int_a^b u\sqrt{1 + [f'(u)]^2} du.$$

انتگرال آخری را می توان به صورت $\int_C x ds$ ، یک انتگرال خط نسبت به طول قوس منحنی C ، بیان کرد. این انتگرال ، به این صورت ، مساوی است با $\bar{x}L$ ، که \bar{x} مختص x مرکزگرم C و L طول C است. (ر.ک. بخش ۱۰.۸۰۱۰) ، لذا ، مساحت S مساوی $2\pi L\bar{x}$ می باشد. این قضیه پاپوس را ثابت خواهد کرد.

۶.۱۲ تدرین

۱. فرض کنیم S یک متوازی الاضلاع غیر موازی با صفحات مختصات باشد. همچنین ، S_1 ، S_2 ، و S_3 مساحت تصاویر S روی سه صفحه مختصات باشند. نشان دهید که مساحت S مساوی $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ است.
۲. مساحت ناحیه حاصل از قطع صفحه $x + y + z = a$ به وسیله استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ را حساب کنید.
۳. مساحت آن قسمت از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ که تحت استوانه $x^2 + y^2 = ay$ ، که در آن $a > 0$ ، قرار دارد را حساب کنید.
۴. مساحت آن قسمت از سطح $z^2 = 2xy$ که بالای ربع اول صفحه xy قرار داشته و به وسیله صفحات $x = 2$ و $y = 1$ جدا می شود را حساب کنید.
۵. سطح پارامتری S با معادله برداری

$$r(u, v) = u \cos v i + u \sin v j + u^2 k$$

توصیف شده است ، که در آن $0 \leq u \leq 4$ و $0 \leq v \leq 2\pi$.

(۲) نشان دهید که S بخشی از یک سطح دوار است. شکل بکشید و تعبیر هندسی

پارامترهای u و v سطح را توضیح دهید.

(ب) حاصل ضرب برداری اساسی $\partial r / \partial u \times \partial r / \partial v$ را برحسب u و v حساب کنید.

(پ) مساحت S مساوی $\pi(65\sqrt{65} - 1)/n$ است، که در آن n عددی صحیح است.

مقدار n را حساب کنید.

۶. مساحت آن قسمت از سطح مخروطی $x^2 + y^2 = z^2$ که بالای صفحه xy قرار داشته و

به وسیله کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ جدا می شود را حساب کنید.

۷. مساحت آن قسمت از سطح مخروطی $x^2 + y^2 = z^2$ که بین دو صفحه $z = 0$ و $x + 2z = 3$

قرار دارند را حساب کنید.

۸. مساحت آن قسمت از سهمی گون $x^2 + z^2 = 2ay$ که به وسیله صفحه $y = a$ جدا

می شود را حساب کنید.

۹. مساحت چنبره توصیف شده با معادله برداری

$$r(u, v) = (a + b \cos u) \sin v i + (a + b \cos u) \cos v j + b \sin u k,$$

که در آن $0 < b < a$ و $0 \leq v \leq 2\pi$ ، $0 \leq u \leq 2\pi$ ، را حساب کنید. [راهنمایی.

از قضیه پاپوس استفاده کنید.]

۱۰. یک کره در یک استوانه مستدیر قائم محاط شده است. این کره با دو صفحه موازی

عمود بر محور استوانه بریده می شود. نشان دهید که بخشهایی از کره و استوانه که

بین این دو صفحه اند مساحت مساوی دارند.

۱۱. فرض کنید T قرص بیک در صفحه uv باشد: $T = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$ ، و نیز

$$r(u, v) = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} i + \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} j + \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} k.$$

(آ) نقش هریک از مجموعه های زیر را تحت r معین کنید: دایره $u^2 + v^2 = 1$ ؛

بازه $-1 \leq u \leq 1$ ؛ آن بخش از خط $u = v$ که در T قرار دارد.

(ب) سطح $S = r(T)$ یک سطح آشناست. نام آن را گفته و آن را رسم کنید.

(پ) نقش صفحه uv تحت r را معین کنید. با رسم در فضای xyz ، پارامترهای

u و v را تعبیر هندسی کنید.

۷.۱۲ انتگرالهای سطح

انتگرالهای سطح از بسیاری جهات شبیه انتگرالهای خط اند؛ انتگرالگیری به جای منحنی

در امتداد سطح صورت می‌گیرد. ما انتگرالهای خط را برحسب نمایش پارامتری منحنی تعریف کردیم. به همین نحو، انتگرالهای سطح را برحسب نمایش پارامتری سطح تعریف می‌کنیم. بعد ثابت می‌کنیم که، تحت شرایطی کلی، مقدار انتگرال از نمایش مستقل است.

تعریف انتگرال سطح. فرض کنیم $S = r(T)$ یک سطح پارامتری باشد که به وسیله تابع مشتق‌پذیر r تعریف شده بر ناحیه T در صفحه uv توصیف شده است، و f یک میدان اسکالر باشد که بر S تعریف شده و کراندار است. انتگرال سطح f روی S با علامت $\iint_S f(x, y, z) dS$ [یا با $\iint_{r(T)} f dS$] نموده شده و با معادله

$$(۱۴.۱۲) \quad \iint_{r(T)} f dS = \iint_T f[r(u, v)] \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv,$$

وقتی انتگرال مضاعف سمت راست وجود دارد، تعریف می‌شود. مثالهای زیر چند کاربرد انتگرالهای سطح را توضیح می‌دهند.

مثال ۱. مساحت سطح. وقتی $f = 1$ ، معادله (۱۴.۱۲) می‌شود

$$\iint_{r(T)} dS = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv.$$

انتگرال مضاعف سمت راست قبلاً در بخش ۵.۱۲ برای تعریف مساحت سطح به کار رفت. لذا، مساحت S مساوی انتگرال سطح $\iint_{r(T)} dS$ است. به این دلیل، گاهی علامت dS را "عنصر مساحت سطح" می‌نامند، و می‌گویند که انتگرال سطح $\iint_{r(T)} f dS$ انتگرال f نسبت به عنصر مساحت سطح است که روی سطح $r(T)$ گرفته شده است.

مثال ۲. مرکز جرم. گشتاور مانند. اگر میدان اسکالر f را چگالی (جرم در واحد مساحت) یک جسم نازک به شکل سطح S بگیریم، جرم کل m سطح با معادله

$$m = \iint_S f(x, y, z) dS$$

تعریف می‌شود. مرکز جرم آن نقطه $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ است که با معادلات

$$\bar{x}m = \iint_S xf(x, y, z) dS, \quad \bar{y}m = \iint_S yf(x, y, z) dS, \quad \bar{z}m = \iint_S zf(x, y, z) dS$$

تعیین می‌شود. گشتاور ماند I_L ، S حول محور L با معادله

$$I_L = \iint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) dS$$

تعریف می‌شود، که در آن $\delta(x, y, z)$ فاصله عمودی نقطه دلخواه (x, y, z) از S تا خط L می‌باشد.

برای توضیح، مرکز جرم یک سطح نیمکره^۶ یکنواخت به شعاع a را معین می‌کنیم. از نمایش پارامتری

$$r(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k},$$

که در آن $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ ، استفاده می‌کنیم. این نمایش خاص قبلاً^۷ در مثال ۲ از بخش ۲۰.۱۲ مطرح شد، و در آنجا دیدیم که اندازه^۸ حاصل ضرب برداری اساسی مساوی $a^2 |\cos v|$ است. در این مثال، چگالی f ثابت است، مثلاً $f = c$ ، و جرم m مساوی $2\pi a^2 c$ ، یعنی مساحت S ضربدر c ، می‌باشد. بخاطر تقارن، مختصات \bar{x} و \bar{y} مرکز جرم 0 است. مختص \bar{z} عبارت است از

$$\begin{aligned} \bar{z}m &= c \iint_S z dS = c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a \sin v \cdot a^2 |\cos v| du dv \\ &= 2\pi a^3 c \int_0^{\pi/2} \sin v \cos v dv = \pi a^3 c = \frac{a}{2} m; \end{aligned}$$

در نتیجه، $\bar{z} = a/2$.

مثال ۳. جریان مایع گذرنده از یک سطح. یک مایع را به‌عنوان گردآیه‌ای از نقاط به نام ذرات در نظر می‌گیریم. به هر ذره^۹ (x, y, z) بردار $V(x, y, z)$ را مربوط می‌کنیم که نمایش سرعت آن ذره^{۱۰} خاص است. این میدان سرعت جریان است. میدان سرعت ممکن است با زمان تغییر کند یا نکند. ما فقط جریانهای حالت - پایدار را در نظر می‌گیریم؛ یعنی، جریانهایی که در آنها سرعت $V(x, y, z)$ فقط به موضع ذره، نه به زمان، بستگی دارد.

چگالی (جرم در واحد حجم) مایع در نقطه^{۱۱} (x, y, z) را با $\rho(x, y, z)$ نشان می‌دهیم. اگر مایع غیر قابل تراکم باشد، چگالی ρ در طول مایع ثابت است. برای یک

مایع قابل تراکم، نظیر گاز، چگالی ممکن است از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر کند. در هر حالت، چگالی یک میدان اسکالر مربوط به جریان است. حاصل ضرب چگالی و سرعت را با F نشان می‌دهیم؛ یعنی،

$$F(x, y, z) = \rho(x, y, z)V(x, y, z).$$

این یک میدان برداری است به نام چگالی شار جریان. بردار $F(x, y, z)$ همان جهت سرعت را دارد، و طولش دارای ابعاد زیر است:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{واحد زمان}} \cdot \frac{\text{فاصله}}{\text{واحد زمان}} = \frac{\text{جرم}}{\text{واحد مساحت}} \cdot \frac{\text{واحد زمان}}{\text{واحد حجم}}.$$

به عبارت دیگر، بردار چگالی شار $F(x, y, z)$ به ما می‌گوید که چه مقدار جرم مایع در واحد مساحت و در واحد زمان در جهت $V(x, y, z)$ در نقطه (x, y, z) در جریان است. فرض کنیم $S = r(T)$ یک سطح پارامتری ساده باشد. در هر نقطه منتظم S ، n را قائم یکه همجهت با حاصل ضرب برداری اساسی می‌گیریم. یعنی،

$$n = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|}. \quad (15.12)$$

حاصل ضرب نقطه‌ای $F \cdot n$ نمایش مولفه بردار چگالی شار در جهت n است. جرم مایع گذرنده از سطح S در واحد زمان و در جهت n مساوی انتگرال سطح

$$\iint_{r(T)} F \cdot n \, dS = \iint_T F \cdot n \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

می‌باشد.

۸.۱۲ تغییر نمایش پارامتری

حال در استقلال انتگرالهای سطح تحت تغییر نمایش پارامتری بحث می‌کنیم. فرض کنیم تابع r ناحیه A در صفحه uv را روی سطح پارامتری $r(A)$ بنگارد. همچنین، A نقش ناحیه B در صفحه st تحت نگاشت یک به یک به طور پیوسته مشتق‌پذیر G باشد که به صورت زیر داده شده است:

$$G(s, t) = U(s, t)i + V(s, t)j \quad , \quad (s, t) \in B$$

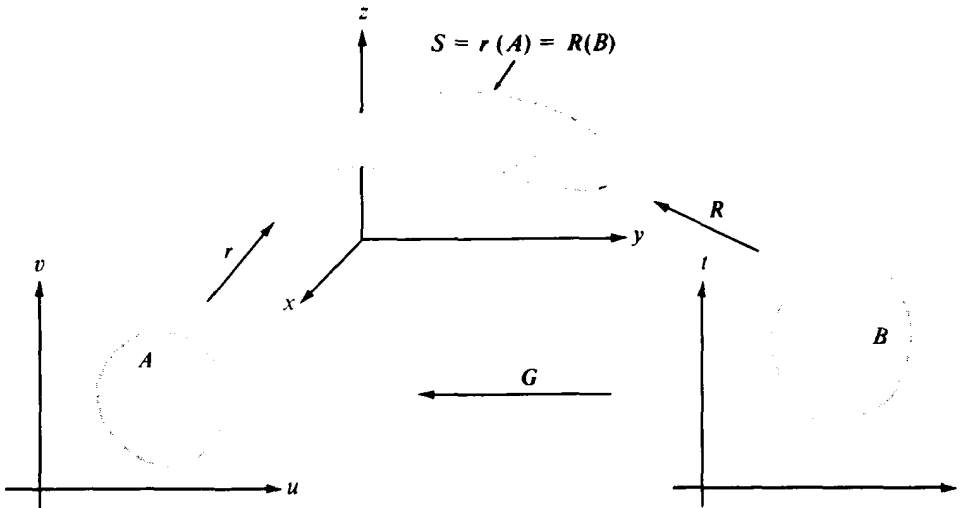
(۱۶.۱۲)

تابع R که بر B با معادله

(۱۷.۱۲)

$$R(s, t) = r[G(s, t)]$$

تعریف شده است را در نظر می‌گیریم. (ر.ک. شکل ۱۱.۱۲)



شکل ۱۱.۱۲ دو نمایش پارامتری از یک سطح

دو تابع r و R که به این ترتیب با هم مربوطند به‌طور هموار معادل نامیده می‌شوند. توابع به‌طور هموار معادل یک سطح را توصیف می‌کنند. یعنی، $r(A)$ و $R(B)$ به‌عنوان مجموعه‌هایی از نقاط یکی‌اند. (این فوراً "از طبیعت یک به یک G نتیجه می‌شود.) قضیه زیر رابطه بین حاصل ضربهای برداری اساسی آنها را توصیف می‌کند.

قضیه ۱۰.۱۲. فرض کنیم r و R توابعی به‌طور هموار معادل باشند که با معادله (۱۷.۱۲) بهم مربوط شده‌اند، که در آن $G = U\mathbf{i} + V\mathbf{j}$ یک نگاشت یک به یک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر از ناحیه B در صفحه st روی ناحیه A در صفحه uv است که با معادله (۱۶.۱۲) داده می‌شود. در این صورت، داریم

$$(۱۸.۱۲) \quad \frac{\partial R}{\partial s} \times \frac{\partial R}{\partial t} = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \frac{\partial(U, V)}{\partial(s, t)},$$

که در آن مشتقات جزئی $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ در نقطه $(U(s, t), V(s, t))$ حساب می‌شوند. به عبارت دیگر، حاصل ضرب برداری اساسی R مساوی حاصل ضرب برداری اساسی r ضربدر دترمینان ژاکوبی نگاشت G است.

برهان. مشتقات $\partial R/\partial s$ و $\partial R/\partial t$ را می‌توان با مشتقگیری از معادله (۱۷.۱۲) حساب کرد. اگر قاعده زنجیره‌ای (قضیه ۸.۸) را بر هر مولفه R اعمال کرده و جملات را تجدید آرایش دهیم، درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{و} \quad \frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial s}$$

که در آنها مشتقات $\partial r/\partial v$ و $\partial r/\partial u$ در $(U(s, t), V(s, t))$ حساب می‌شوند. حال این دو معادله را ضرب خارجی کرده و، با توجه به ترتیب سازه‌ها، به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial R}{\partial s} \times \frac{\partial R}{\partial t} = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial s} \right) = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \frac{\partial(U, V)}{\partial(s, t)}.$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

حال پایایی انتگرالهای سطح تحت نمایشهای پارامتری به‌طور هموار معادل نتیجه آسان قضیه ۱۰.۱۲ است.

قضیه ۲۰.۱۲. فرض کنیم r و R توابعی به‌طور هموار معادل، به‌صورت توصیف شده در

قضیه ۱۰.۱۲، باشند. اگر انتگرال سطح $\iint_{r(A)} f dS$ وجود داشته باشد، انتگرال سطح $\iint_{R(B)} f dS$

نیز وجود دارد و داریم

$$\iint_{r(A)} f dS = \iint_{R(B)} f dS.$$

برهان. طبق تعریف انتگرال سطح، داریم

$$\iint_{r(A)} f dS = \iint_A f[r(u, v)] \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv.$$

حال، با استفاده از نگاشت G قضیه ۱۰.۱۲، این را به یک انتگرال مضاعف روی ناحیه B در صفحه st تبدیل می‌کنیم. فرمول تبدیل انتگرالهای مضاعف می‌گوید که

$$\iint_A f[r(u, v)] \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv = \iint_B f\{r[G(s, t)]\} \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \left| \frac{\partial(U, V)}{\partial(s, t)} \right| ds dt,$$

که در آن مشتقات $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ سمت راست در $(U(s, t), V(s, t))$ حساب می‌شوند.

بخاطر معادله (۱۸.۱۲)، انتگرال روی B مساوی است با

$$\iint_B f[\mathbf{R}(s, t)] \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

این، به نوبه خود، تعریف انتگرال سطح $\iint_{R(B)} f dS$ است. در اینجا برهان تمام خواهد بود.

۹.۱۲ نمادهای دیگر برای انتگرالهای سطح

هرگاه $S = r(T)$ یک سطح پارامتری باشد، حاصل ضرب برداری اساسی $N = \partial r / \partial u \times \partial r / \partial v$ در هر نقطه منتظم S قائم به سطح است. در هرچنین نقطه دو قائم یکدیگر وجود دارند، قائم یکبه n_1 که همجهت N است، و قائم یکبه n_2 که جهت مخالف دارد. لذا،

$$n_2 = -n_1 \quad \text{و} \quad n_1 = \frac{N}{\|N\|}$$

فرض کنیم n یکی از دو قائم n_1 یا n_2 باشد. همچنین، F یک میدان برداری تعریف شده بر S بوده، و انتگرال سطح $\iint_S F \cdot n dS$ موجود باشد. در این صورت، می توان نوشت

$$\begin{aligned} (19.12) \quad \iint_S F \cdot n dS &= \iint_T F[r(u, v)] \cdot n(u, v) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \pm \iint_T F[r(u, v)] \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} du dv, \end{aligned}$$

که در آن علامت + در صورت $n = n_1$ ، و علامت - در صورت $n = n_2$ به کار می رود. حال F و r را بر حسب مولفه های آنها بیان می کنیم؛ مثلاً،

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

و

$$r(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}.$$

در این صورت، حاصل ضرب برداری اساسی r عبارت است از

$$N = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} + \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k}.$$

اگر $n = n_1$ ، معادله (۱۹.۱۲) خواهد شد

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_T P[\mathbf{r}(u, v)] \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \, du \, dv + \iint_T Q[\mathbf{r}(u, v)] \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \, du \, dv + \iint_T R[\mathbf{r}(u, v)] \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \, du \, dv;$$

(۲۰.۱۲)

اگر $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ ، هر انتگرال مضاعف سمت راست را باید با قرینش عوض کرد. اغلب مجموع انتگرالهای مضاعف سمت راست را به طور مختصرتر زیر می نویسد:

$$\iint_S P(x, y, z) \, dy \wedge dz + \iint_S Q(x, y, z) \, dz \wedge dx + \iint_S R(x, y, z) \, dx \wedge dy,$$

(۲۱.۱۲) یا، به طور مختصرتر زیر:

$$\iint_S P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy.$$

(۲۲.۱۲)

انتگرالهایی که در (۲۱.۱۲) و (۲۲.۱۲) آمده اند را نیز انتگرالهای سطح می نامند. لذا، مثلاً، انتگرال سطح $\iint_S P \, dy \wedge dz$ با معادله^۶ زیر تعریف می شود:

$$\iint_S P \, dy \wedge dz = \iint_T P[\mathbf{r}(u, v)] \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \, du \, dv.$$

(۲۳.۱۲)

این نماد را فرمول تغییر متغیر در یک انتگرال مضاعف پیشنهاد می کند.

با وجود تشابه نمادها، انتگرال سمت چپ (۲۳.۱۲) یک انتگرال مضاعف نیست. قبل از همه، P یک تابع سه متغیره است. همچنین، باید ترتیب آمدن علامت dz و dy در انتگرال سطح را در نظر گرفت، زیرا

$$\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} = - \frac{\partial(Z, Y)}{\partial(u, v)};$$

و در نتیجه،

$$\iint_S P \, dy \wedge dz = - \iint_S P \, dz \wedge dy.$$

با این نماد، فرمول (۲۰.۱۲) در صورت $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ خواهد شد

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy.$$

(۲۴.۱۲)

اگر $n = n_2$ ، انتگرال سمت راست باید با قرینه‌اش عوض شود. این فرمول با فرمول زیر برای انتگرالهای خط شباهت دارد:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_C P dx + Q dy + R dz.$$

هرگاه قائم یکه n بر حسب کسینوسهای هادی خود بیان شده باشد، مثلاً

$$n = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k,$$

آنگاه $F \cdot n = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ ، و می‌توان نوشت

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

این معادله وقتی n مساوی n_1 یا n_2 باشد برقرار است. کسینوسهای هادی به انتخاب قائم بستگی دارند. اگر $n = n_1$ ، می‌توان با استفاده از (۲۴.۱۲) نوشت

(۲۵.۱۲)

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

اگر $n = n_2$ ، در عوض داریم

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = - \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

(۲۶.۱۲)

۱۵.۱۲ تمرین

۱. فرض کنید S نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، $z \geq 0$ بوده، و $F(x, y, z) = xi + yj$ ، همچنین، n قائم یکه رویه خارج S باشد. مقدار انتگرال سطح $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ را با استفاده از

$$(A) \text{ نمایش برداری } r(u, v) = \sin u \cos v i + \sin u \sin v j + \cos u k$$

$$(B) \text{ نمایش صریح } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

حساب کنید.

۲. نشان دهید که گشتاور ماند یک گلوله m کروی همگن حول یک قطر مساوی $\frac{2}{3}ma^2$ است،

که در آن m جرم گلوله و a شعاع آن است.

۳. مرکز جرم آن بخش از سطح نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ که بالای ربع اول در

صفحه xy است را بیابید.

۴. فرض کنید S سطح مسطحی باشد که کرانه‌اش مثلثی است به رئوس $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، و $(0, 0, 1)$ ، و نیز $F(x, y, z) = xi + yj + zk$. همچنین ، n قائم یکه به S با مولفه z نامنفی باشد . انتگرال سطح $\iint_S F \cdot n \, dS$ را با استفاده از (آ) نمایش برداری $r(u, v) = (u + v)i + (u - v)j + (1 - 2u)k$ ؛
 (ب) یک نمایش صریح به شکل $z = f(x, y)$ حساب کنید .

۵. فرض کنید S یک سطح پارامتری باشد که با فرمول صریح $z = f(x, y)$ توصیف شده است ، که در آن (x, y) روی ناحیه T مسطح است ، که تصویر S در صفحه xy است ، تغییر می‌کند . فرض کنید $F = Pi + Qj + Rk$ ، و n قائم یکه به S با مولفه z نامنفی باشد . با استفاده از نمایش پارامتری $r(x, y) = xi + yj + f(x, y)k$ ، نشان دهید

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_T \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx \, dy ,$$

که در آن هر یک از P ، Q ، و R در $(x, y, f(x, y))$ حساب می‌شوند .

۶. فرض کنید S همان سطح تمرین ۵ بوده ، و φ یک میدان اسکالر باشد . نشان دهید که

$$(\text{آ}) \quad \iint_S \varphi(x, y, z) \, dS = \iint_T \varphi[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

$$(\text{ب}) \quad \iint_S \varphi(x, y, z) \, dy \wedge dz = - \iint_T \varphi[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial x} \, dx \, dy$$

$$(\text{پ}) \quad \iint_S \varphi(x, y, z) \, dz \wedge dx = - \iint_T \varphi[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial y} \, dx \, dy$$

۷. هرگاه S سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ باشد ، مقدار انتگرال سطح

$$\iint_S xz \, dy \wedge dz + yz \, dz \wedge dx + x^2 \, dx \wedge dy$$

را حساب کنید . نمایشی اختیار کنید که ، به‌ازای آن ، حاصل ضرب برداری اساسی در جهت قائم رو به خارج باشد .

۸. استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ از پارچه بالایی مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ بخشی از یک سطح

مانند S را جدا می‌کند.
مقدار انتگرال سطح

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS$$

را حساب کنید.

۹. یک گلوله^۱ کروی همگن به شعاع a به وسیله^۲ یک پارچه از یک مخروط مستدیر قائم که رأسش در مرکز کسره است قطع می‌شود. اگر زاویه^۳ رأس مخروط α باشد، که $0 < \alpha < \pi$ ، مرکز جرم آن بخش از گلوله^۴ کروی که داخل مخروط است را (برحسب α و a) معین کنید.

۱۰. یک کاغذ همگن مستطیلی شکل به قاعده^۱ $2\pi a$ و ارتفاع h را لوله کرده و سطح استوانه‌ای مستدیر S به شعاع a را ساخته‌ایم. گشتاور ماند S را حول محوری ماربر یک قطر قاعده^۲ مستدیر حساب کنید.

۱۱. به تمرین ۱۰ باز می‌گردیم. گشتاور ماند S حول محوری در صفحه^۳ قاعده و مماس بر لبه^۴ مستدیر قاعده را حساب کنید.

۱۲. یک جریان مایع دارای بردار چگالی شار $F(x, y, z) = xi - (2x + y)j + zk$ است. فرض کنید S نیمکره^۱ $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ بوده، و n قائم بیکه‌ای باشد که اشاره به خارج کره دارد. جرم مایع گذرنده از S در واحد زمان و در جهت n را حساب کنید.

۱۳. تمرین ۱۲ را در صورتی حل کنید که S شامل قاعده^۲ مسطح نیمکره نیز باشد. بر قاعده^۳ پایینی، قائم بیکه عبارت است از $-k$.

۱۴. فرض کنید S بخشی از صفحه^۱ $x + y + z = t$ باشد که به وسیله^۲ کره^۳ بیکه^۴ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ جدا شده است. همچنین، اگر (x, y, z) داخل این کره باشد، $\varphi(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$ ، و در غیر این صورت، $\varphi(x, y, z)$ مساوی ۰ باشد. نشان دهید که

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dS = \begin{cases} \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2 & \text{اگر } |t| \leq \sqrt{3} \\ 0 & \text{اگر } |t| > \sqrt{3} \end{cases}$$

[راهنمایی. مختصات جدید (x_1, y_1, z_1) را وارد کنید که محور z_1 قائم به صفحه^۱

$x + y + z = 1$ باشد. از مختصات قطبی در صفحه x_1y_1 به عنوان پارامتر برای S استفاده کنید.]

۱۱.۱۲ قضیه استوکس

بقیه این فصل عمدتاً "به دو تعمیم از دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مستلزم انتگرالهای سطح اختصاص دارد. اینها بترتیب به قضیه استوکس^۱ و قضیه دیورژانس شهرت دارند. در این بخش قضیه استوکس مطرح می شود. قضیه دیورژانس در بخش ۱۹.۱۲ بحث خواهد شد.

قضیه استوکس تعمیم مستقیم قضیه گرین است، که می گوید

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy,$$

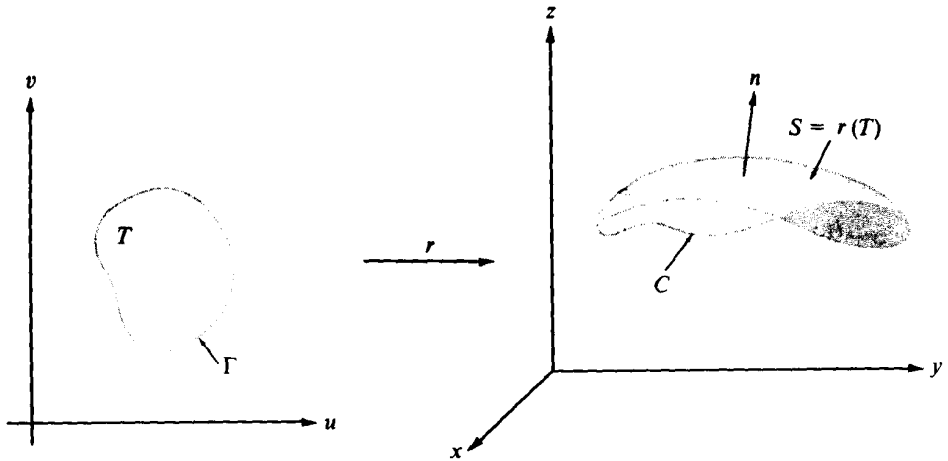
که در آن S یک ناحیه مسطح محدود به منحنی بسته ساده ای مانند C است که در جهت مثبت (خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت) پیموده می شود. قضیه استوکس یک انتگرال سطح را به یک انتگرال خط ربط می دهد، و می توان آن را به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۳.۱۲. قضیه استوکس. فرض کنیم S یک سطح پارامتری ساده هموار، مثلاً " $S = r(T)$ ، باشد، که در آن T یک ناحیه در صفحه uv است که به منحنی ژردان قطعه قطعه همواری چون Γ محدود شده است. (ر.ک. شکل ۰۱۲.۰۱۲) همچنین، r یک نگاشت یک به یک باشد که مولفه هایش بر مجموعه بازی شامل $T \cup \Gamma$ مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته دارند. فرض کنیم C نقش Γ تحت r بوده، و P ، Q ، و R میدانهای اسکالر به طور پیوسته مشتق پذیری بر S باشند. در این صورت، خواهیم داشت

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$(27.12) \qquad = \int_C P dx + Q dy + R dz.$$

* به افتخار جسی. جی. استوکس (1819 - 1903) G.G. Stokes، ریاضیدان ایرلندی، که در دینامیک مایعات و نورکارهای اساسی بسیار کرده است.



شکل ۱۲.۱۲ یک سطح که قضیه استوکس بر آن قابل اعمال است.

منحنی Γ در جهت مثبت (خلا ف جهت حرکت عقربه‌های ساعت)، و منحنی C در جهت القا شده از Γ به وسیله نگاشت r پیموده می‌شود.

برهان. برای اثبات قضیه کافی است سه فرمول زیر را ثابت کنیم:

$$(28.12) \quad \int_C P dx = \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right),$$

$$\int_C Q dy = \iint_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right),$$

$$\int_C R dz = \iint_S \left(-\frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \right).$$

جمع این سه معادله فرمول (۲۷.۱۲) در قضیه استوکس را به دست می‌دهد. چون سه معادله مشابهند، فقط معادله (۲۸.۱۲) را ثابت می‌کنیم.

برهان به این شکل است که انتگرال سطح را به صورت یک انتگرال مضاعف روی T بیان می‌کنیم. بعد، با استفاده از قضیه گرین، انتگرال مضاعف روی T را به صورت یک انتگرال خط روی Γ بیان می‌داریم. بالاخره، نشان می‌دهیم که این انتگرال خط مساوی

است با $\int_C P dx$ می نویسیم.

$$r(u, v) = X(u, v)i + Y(u, v)j + Z(u, v)k$$

و انتگرال سطح روی S را به شکل زیر بیان می کنیم:

$$\iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) = \iint_T \left\{ -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right\} du dv.$$

حال فرض کنیم P تابع مرکب زیر باشد:

$$p(u, v) = P[X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)].$$

انتگرالده آخری را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(29.12) \quad -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right).$$

اثبات (29.12) در تمرین 13 از بخش 12.13 به اختصار صورت گرفته است. با اعمال قضیه گرین بر انتگرال مضاعف روی T ، به دست می آید

$$\iint_T \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) \right\} du dv = \int_{\Gamma} p \frac{\partial X}{\partial u} du + p \frac{\partial X}{\partial v} dv,$$

که در آن Γ در جهت مثبت پیچیده می شود. Γ را به وسیله تابع γ که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است پارامتریزه کرده، و فرض می کنیم

$$(30.12) \quad \alpha(t) = r[\gamma(t)]$$

پارامتری سازی نظیر C باشد. با بیان هر انتگرال خط برحسب نمایش پارامتری اش، درمی یابیم که

$$\int_{\Gamma} p \frac{\partial X}{\partial u} du + p \frac{\partial X}{\partial v} dv = \int_C P dx,$$

که برهان (28.12) را تمام خواهد کرد.

۱۲.۱۲ کرل و دیورژانس یک میدان برداری

انتگرال سطح در قضیه استوکس را می توان ساده تر و برحسب کرل یک میدان برداری بیان کرد. فرض کنیم F یک میدان برداری مشتق پذیر به صورت زیر باشد:

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k.$$

کرل F میدان برداری دیگری است که با معادله

$$(۳۱.۱۲) \quad \text{curl } F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

تعریف می‌شود. مولفه‌های $\text{curl } F$ توابعی هستند که در انتگرال سطح فرمول استوکس (۲۷.۱۲) ظاهر شده‌اند. لذا، این انتگرال سطح را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\iint_S (\text{curl } F) \cdot n \, dS,$$

که در آن n بردار یکه قائم‌همجهت با حاصل ضرب برداری اساسی سطح است؛ یعنی،

$$n = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|}.$$

انتگرال خط در فرمول استوکس (۲۷.۱۲) را می‌توان به صورت $\int_C F \cdot d\alpha$ نوشت،

که در آن α نمایش C است که با (۳۰.۱۲) داده می‌شود. لذا، قضیه استوکس شکل ساده‌تر

$$\iint_S (\text{curl } F) \cdot n \, dS = \int_C F \cdot d\alpha$$

را خواهد گرفت.

برای حالت خاصی که در آن S ناحیه‌ای در صفحه xy بوده و $n = k$ ، این فرمول

به قضیه گرین تحویل می‌شود:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_C P \, dx + Q \, dy.$$

معادله (۳۱.۱۲) معرف کرل را می‌توان، با نوشتنش به صورت بسط یک دترمینان

3×3 ، به آسانی به یاد آورد:

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k.$$

این دترمینان را باید نسبت به مینورهای سطر اول بسط داد، ولی هر "حاصل ضرب"، نظیر $\partial/\partial y$ ضربدر R ، باید به عنوان یک مشتق جزئی، یعنی $\partial R/\partial y$ ، تعبیر شود. همچنین، این فرمول را می‌توان به صورت یک حاصل ضرب خارجی نوشت:

$$\text{curl } F = \nabla \times F,$$

که در آن با علامت ∇ به عنوان بردار رفتار می‌شود:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

اگر "حاصل ضرب نقطه‌ای" $\nabla \cdot F$ را به‌طور صرفاً "صوری تشکیل دهیم"، و باز حاصل ضربهایی نظیر $\partial/\partial x$ ضربدر P را $\partial P/\partial x$ تعبیر کنیم، درمی‌یابیم که

$$(۳۲.۱۲) \quad \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

معادله (۳۲.۱۲) یک میدان اسکالر به نام دیورژانس F تعریف می‌کند، که به صورت $\text{div } F$ نیز نوشته می‌شود. ما قبلاً "از علامت" $\nabla \varphi$ برای نمایش گرادیان میدان اسکالر φ استفاده کرده‌ایم، که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}.$$

این فرمول را می‌توان به صورت ضرب صوری بردار علامتی ∇ در میدان اسکالر φ تعبیر کرد. لذا، گرادیان، دیورژانس، و کرل را می‌توان با سه حاصل ضرب $\nabla \varphi$ ، $\nabla \cdot F$ ، و $\nabla \times F$ به‌طور علامتی نمایش داد.

برخی از قضایایی که پیشتر ثابت شدند را می‌توان برحسب کرل بیان کرد. مثلاً، در قضیه ۹.۱۰ ثابت شد که میدان برداری $f = (f_1, \dots, f_n)$ ، که بر مجموعه‌ی محدب S در فضای n به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است، یک گرادیان بر S است اگر و فقط اگر مشتقات جزئی مولفه‌های f در روابط

$$(۳۳.۱۲) \quad D_k f_j(x) = D_j f_k(x) \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

صدق کنند. در حالت 3 بعدی، قضیه ۹.۱۰ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۴.۱۲. فرض کنیم $F = Pi + Qj + Rk$ یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بر مجموعه‌ی محدب باز S در فضای 3 باشد. در این صورت، F یک گرادیان

بر S است اگر و فقط اگر

$$\text{curl } F = O, \quad S \text{ بر } (۳۴.۱۲)$$

برهان. در حالت ۳ بعدی، روابط (۳۳.۱۲) معادل آنند که $\text{curl } F = O$.

۱۳.۱۲ تمرین

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۴، با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال سطح $\iint_S (\text{curl } F) \cdot n \, dS$ را به یک انتگرال خط تبدیل کرده، سپس انتگرال خط را حساب کنید.

۱. $F(x, y, z) = y^2 i + xyz j + xzk k$ ، که در آن S نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ ، و n قائم یکه با مولفه z نامنفی است.

۲. $F(x, y, z) = yi + zj + xk$ ، که در آن S بخشی از سهمی گون $z = 1 - x^2 - y^2$ ، و n قائم یکه با مولفه z نامنفی است.

۳. $F(x, y, z) = (y - z)i + yzj - xzk k$ ، که در آن S از پنج وجه مکعب $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ که در صفحه xy نیستند تشکیل شده است. قائم یکه n قائم روبه خارج است.

۴. $F(x, y, z) = xzi - yi + x^2 yk k$ ، که در آن S از سه وجه چهار وجهی محدود به سه صفحه مختصات و صفحه $3x + y + 3z = 6$ که در صفحه xz نیستند تشکیل شده است. قائم n قائم یکه است که اشاره به خارج چهار وجهی دارد.

در تمرینهای ۵ تا ۱۰، با استفاده از قضیه استوکس، نشان دهید که انتگرالهای خط مقادیر داده شده را دارند. در هر حالت، طرز پیمودن C برای رسیدن به جواب داده شده را توضیح دهید.

۵. $\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz = \pi a^2 \sqrt{3}$ ، که در آن C منحنی فصل مشترک کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و صفحه $x + y + z = 0$ است.

۶. $\int_C (y + z) \, dx + (z + x) \, dy + (x + y) \, dz = 0$ ، که در آن C منحنی فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 2y$ و صفحه $z = y$ است.

۷. $\int_C y^2 \, dx + xy \, dy + xz \, dz = 0$ ، که در آن C منحنی تمرین ۶ است.

۸. $\int_C (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - y) \, dz = 2\pi a(a + b)$ ، که در آن C فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحه $x/a + z/b = 1, a > 0, b > 0$ است.

۹. $\int_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 2\pi ab^2$ ، که در آن C فصل مشترک نیمکره $z > 0$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ ، و استوانه $x^2 + y^2 = 2bx$ است، که $0 < b < a$.
۱۰. $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = 9a^2/2$ ، که در آن C منحنی جدا شده از کرانه مکعب $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ به وسیله صفحه $x + y + z = 3a/2$ است .

۱۱. هرگاه $r = xi + yj + zk$ و $Pi + Qj + Rk = a \times r$ ، که در آن a بردار ثابتی است ، نشان دهید $\int_C P dx + Q dy + R dz = 2 \iint_S a \cdot n dS$ ، که در آن منحنی C کرانه سطح پارامتری S بوده و n یک قائم مناسب به S است .

۱۲. فرض کنید $F = Pi + Oj + Rk$ ، که در آن $P = -y/(x^2 + y^2)$ ، $Q = x/(x^2 + y^2)$ ، $R = z$ ، D چنبره حاصل از دوران دایره $x^2 + z^2 = 1, y = 0$ حول محور z باشد . نشان دهید که در D ، $\text{curl } F = O$ ، ولی اگر C دایره $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ باشد ، $\int_C P dx + Q dy + R dz$ صفر نیست .

۱۳. در این تمرین ، برهان معادله (۲۹.۱۲) ، که در برهان قضیه استوکس به کار رفت ، را به اختصار شرح می دهیم .

(T) با استفاده از فرمول مشتقگیری از حاصل ضرب ، نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) = \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} .$$

(ب) حال فرض کنید $p(u, v) = P[X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)]$ و $\partial p / \partial v$ را با قاعده زنجیره ای حساب کرده و ، با استفاده از قسمت (T) ، معادله (۲۹.۱۲) را نتیجه بگیرید :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial (Z, X)}{\partial (u, v)} .$$

۱۴.۱۲ خواص دیگر کرل و دیورژانس

کرل و دیورژانس یک میدان برداری به ماتریس ژاکوبی مربوطند . اگر $F = Pi + Qj + Rk$ ، عبارت F از

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}$$

اثر این ماتریس (مجموع عناصر قطری آن) دیورژانس F است. هر ماتریس حقیقی A را می‌توان به صورت یک ماتریس متقارن، یعنی $\frac{1}{2}(A + A')$ ، و یک ماتریس متقارن آریب، یعنی $\frac{1}{2}(A - A')$ ، نوشت. وقتی A ماتریس ژاکوبی DF باشد، قسمت متقارن آریب خواهد شد

$$(۳۵.۱۲) \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} & 0 & \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}$$

عناصر ناصفر این ماتریس مولفه‌های $\text{curl } F$ و گزینه‌های آنند. اگر ماتریس ژاکوبی DF متقارن باشد، هر درایه در (۳۵.۱۲) صفر است و $\text{curl } F = \mathbf{0}$.

مثال ۱. فرض کنیم $F(x, y, z) = xi + yj + zk$. در این صورت، داریم

$$P(x, y, z) = x, \quad Q(x, y, z) = y, \quad R(x, y, z) = z,$$

و ماتریس ژاکوبی نظیر ماتریس همایی 3×3 است. بنابراین،

$$\text{curl } F = \mathbf{0} \quad \text{و} \quad \text{div } F = 3$$

بطور کلی، اگر $F(x, y, z) = f(x)i + g(y)j + h(z)k$ ، ماتریس ژاکوبی دارای عناصر $f'(x), g'(y), h'(z)$ بر قطر اصلی است و همه‌جای دیگر صفر است؛ در نتیجه،

$$\text{curl } F = \mathbf{0} \quad \text{و} \quad \text{div } F = f'(x) + g'(y) + h'(z)$$

مثال ۲. فرض کنیم $F(x, y, z) = xy^2z^2i + z^2 \sin yz + x^2e^{yz}k$. ماتریس ژاکوبی عبارت

است از

$$\begin{bmatrix} y^2 z^2 & 2xyz^2 & 2xy^2 z \\ 0 & z^2 \cos y & 2z \sin y \\ 2xe^y & x^2 e^y & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین ،

$$\operatorname{div} F = y^2 z^2 + z^2 \cos y$$

و

$$\operatorname{curl} F = (x^2 e^y - 2z \sin y)i + (2xy^2 z - 2xe^y)j - 2xyz^2 k.$$

مثال ۳. دیورژانس و کرل گرادیان . فرض کنیم F یک گرادیان باشد؛ مثلاً،
 $F = \operatorname{grad} \varphi = \partial\varphi/\partial x i + \partial\varphi/\partial y j + \partial\varphi/\partial z k$. ماتریس ژاکوبی عبارت است از

$$(۳۶.۱۲) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{bmatrix}.$$

بنابراین ،

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

عبارت سمت راست لاپلاسیان φ نام دارد ، و اغلب به شکل مختصرتر $\nabla^2 \varphi$ نوشته می شود .
 مثلاً ، دیورژانس گرادیان $\nabla \varphi$ لاپلاسیان φ است . با علامات ، این را به صورت زیر می نویسند :

$$(۳۷.۱۲) \quad \operatorname{div} (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi.$$

وقتی $\nabla^2 \varphi = 0$ ، تابع φ توافقی نام دارد . معادله (۳۷.۱۲) نشان می دهد که گرادیان
 یک تابع توافقی دارای دیورژانس صفر است . وقتی مشتقات جزئی مخلوط در ماتریس
 (۳۶.۱۲) پیوسته باشند ، ماتریس متقارن است و $\operatorname{curl} F$ صفر می باشد . به عبارت دیگر ،
 به ازای هر میدان اسکالر φ با مشتقات جزئی مرتبه دوم مخلوط پیوسته ،

$$\operatorname{curl} (\operatorname{grad} \varphi) = \mathbf{0} .$$

این مثال نشان می‌دهد که شرط $\text{curl } F = 0$ برای گرادیان بودن میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر F لازم است. به عبارت دیگر، اگر بر مجموعه S ، $\text{curl } F \neq 0$ ، F یک گرادیان بر S نیست. همچنین، از قضیه ۴.۱۲ می‌دانیم که اگر بر مجموعه محدب S ، $\text{curl } F = 0$ ، F یک گرادیان بر S است. یک میدان یا کرل صفر غیر دورانی نامیده می‌شود.

مثال ۴. میدان برداری با دیورژانس و کرل صفر. فرض کنیم S مجموعه تمام $(x, y) \neq (0, 0)$ ها بوده و، اگر $(x, y) \in S$

$$F(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} i + \frac{x}{x^2 + y^2} j .$$

از مثال ۲ در بخش ۱۶.۱۰ می‌دانیم که F یک گرادیان بر S نیست (اگر چه F بر هر مستطیل غیر شامل مبدأ گرادیان است). ماتریس ژاکوبی عبارت است از

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & 0 \\ \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

و فوراً " می‌بینیم که بر S ، $\text{curl } F = 0$ و $\text{div } F = 0$.

مثال ۵. دیورژانس و کرل یک کرل. هرگاه $F = Pi + Qj + Rk$ ، کرل F یک میدان برداری جدید است، و می‌توان دیورژانس و کرل آن را حساب کرد. ماتریس ژاکوبی $\text{curl } F$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \end{bmatrix} .$$

اگر همه مشتقات جزئی مخلوط را پیوسته بگیریم، درمی یابیم که

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$$

و

$$(۳۸.۱۲) \quad \operatorname{curl}(\operatorname{curl} F) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} F) - \nabla^2 F,$$

که در آن $\nabla^2 F$ با معادله

$$\nabla^2 F = (\nabla^2 P)i + (\nabla^2 Q)j + (\nabla^2 R)k$$

تعریف می شود. اتحاد (۳۸.۱۲) هر چهار عملگر، گرادیان، کرل، دیورژانس، و لاپلاسین را بهم مربوط می کند. اثبات (۳۸.۱۲) در تمرین ۷ از بخش ۱۵.۱۲ خواسته شده است.

کرل و دیورژانس در چند خاصیت کلی با مشتقات معمولی سهیم اند. اولاً، اینها عملگرهایی خطی اند. یعنی، اگر a و b ثابت باشند، داریم

$$(۳۹.۱۲) \quad \operatorname{div}(aF + bG) = a \operatorname{div} F + b \operatorname{div} G,$$

و

$$(۴۰.۱۲) \quad \operatorname{curl}(aF + bG) = a \operatorname{curl} F + b \operatorname{curl} G.$$

همچنین، خاصیتی شبیه فرمول مشتگیری از حاصل ضرب را دارند:

$$(۴۱.۱۲) \quad \operatorname{div}(\varphi F) = \varphi \operatorname{div} F + \nabla \varphi \cdot F,$$

و

$$(۴۲.۱۲) \quad \operatorname{curl}(\varphi F) = \varphi \operatorname{curl} F + \nabla \varphi \times F,$$

که در آن φ یک میدان اسکالر مشتقپذیر است. این خواص نتایج فوری تعریفهای کرل و دیورژانس اند؛ اثبات آنها در تمرین ۶ از بخش ۱۵.۱۲ خواسته شده است.

اگر از بردار علامتی

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

یکبار دیگر استفاده کنیم، هریک از فرمولهای (۴۱.۱۲) و (۴۲.۱۲) شکلی می گیرند که با قاعده معمولی مشتگیری از حاصل ضرب شباهت بیشتری دارند:

$$\nabla \cdot (\varphi F) = \varphi \nabla \cdot F + \nabla \varphi \cdot F,$$

و

$$\nabla \times (\varphi F) = \varphi \nabla \times F + \nabla \varphi \times F.$$

در مثال ۳، لاپلاسین یک میدان اسکالر، یعنی $\nabla^2 \varphi$ ، مساوی

را با مولفه‌ها تعریف کردیم. اگر ∇^2 را عملگر علامتی $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2$ تعریف شد. در مثال ۵، لاپلاسین $\nabla^2 F$ یک میدان برداری

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

تعبیر کنیم، فرمولهای صحیحی برای هردوی $\nabla^2 q$ و $\nabla^2 F$ به دست می‌آوریم. فرمول فوق برای ∇^2 از ضرب نقطه‌ای بردار علامتی ∇ در خودش نیز ناشی می‌شود. لذا، داریم $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ ، و می‌توانیم بنویسیم

$$\nabla^2 F = (\nabla \cdot \nabla)F \quad \text{و} \quad \nabla^2 q = (\nabla \cdot \nabla)q$$

حال فرمول $\nabla \cdot \nabla \varphi$ را در نظر می‌گیریم. این را می‌توان خواند $(\nabla \cdot \nabla)\varphi$ ، که مساوی $\nabla^2 \varphi$ است؛ یا خواند $\nabla \cdot (\nabla \varphi)$ ، که مساوی $\text{div}(\nabla \varphi)$ است. در مثال ۳ نشان دادیم که $\text{div}(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi$ ؛ در نتیجه، داریم

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi);$$

لذا، بدون خطر ابهام، برای هر یک از این عبارات می‌توان نوشت $\nabla \cdot \nabla \varphi$. اما این وقتی φ با میدان برداری F عوض می‌شود درست نیست. عبارت $(\nabla \cdot \nabla)F$ مساوی $\nabla^2 F$ است، که تعریف شده است. اما $\nabla \cdot (\nabla F)$ بی معنی است، زیرا ∇F تعریف نشده است. لذا، عبارت $\nabla \cdot \nabla F$ فقط وقتی معنی دارد که به عنوان $(\nabla \cdot \nabla)F$ گرفته شود. این نکات توضیح می‌دهند که، اگرچه فرمولهای علامتی گاهی نمادگذاری ساده‌ای بوده و در بخاطر سپردن کمک‌اند، در اعمال با آنها بایستی احتیاط کرد.

۱۵-۱۲ تمرین

۱. برای هر یک از میدانهای برداری زیر، ماتریس ژاکوبی را معین کرده و کرل و دیورژانس را حساب کنید.

$$\cdot F(x, y, z) = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k} \quad (\text{ا})$$

$$\cdot F(x, y, z) = (2z - 3y)\mathbf{i} + (3x - z)\mathbf{j} + (y - 2x)\mathbf{k} \quad (\text{ب})$$

$$\cdot F(x, y, z) = (z + \sin y)\mathbf{i} - (z - x \cos y)\mathbf{j} \quad (\text{پ})$$

$$\cdot F(x, y, z) = e^{xyz}\mathbf{i} + \cos xy\mathbf{j} + \cos xz^2\mathbf{k} \quad (\text{ت})$$

$$\cdot F(x, y, z) = x^2 \sin y \mathbf{i} + y^2 \sin xz \mathbf{j} + xy \sin(\cos z)\mathbf{k} \quad (\text{ث})$$

۲. اگر $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $r = \|\mathbf{r}\|$ ، $\text{curl}[f(r)\mathbf{r}]$ ، که در آن f یک تابع مشتقپذیر

است، را حساب کنید.

۳. اگر $r = xi + yj + zk$ و A یک بردار ثابت باشد، نشان دهید که $\text{curl}(A \times r) = 2A$.

۴. اگر $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$ ، جمع اعداد صحیح n را بیابید که به ازای آنها $\text{div}(r^n r) = 0$.

۵. یک میدان برداری بیابید که کرل آن $xi + yj + zk$ باشد، یا ثابت کنید این میدان برداری وجود ندارد.

۶. خواص مقدماتی کرل و دیورژانس مذکور در معادلات (۳۹.۱۲) تا (۴۲.۱۲) را ثابت کنید.

۷. ثابت کنید هرگاه مولفه‌های F مشتقات جزئی مرتبه دوم مخلوط پیوسته داشته باشند،

$$\text{curl}(\text{curl} F) = \text{grad}(\text{div} F) - \nabla^2 F.$$

۸. اتحاد

$$\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G),$$

که در آن F و G میدانهای برداری مشتقپذیری‌اند، را ثابت کنید.

۹. میدان برداری F گرادیان یک پتانسیل نیست مگر آنکه $\text{curl} F = 0$. با اینحال،

ممکن است میدان اسکالر ناصفر μ را طوری یافت که μF یک گرادیان باشد. ثابت

کنید اگر چنین μ ای وجود داشته باشد، F همیشه بر کرل خود عمود است. وقتی

میدان دو بعدی باشد، مثلاً $F = Pi + Qj$ ، این تمرین شرط لازم برای آنکه معادله

دیفرانسیل $0 = P dx + Q dy$ سازه انتگرالگیری داشته باشد را به ما می‌دهد. (عکس

این نیز درست است. یعنی، اگر در یک ناحیه مناسب $F \cdot \text{curl} F = 0$ ، یک μ ی

ناصفر هست بطوری که μF گرادیان است. اثبات عکس لازم نیست.)

۱۰. فرض کنید $F(x, y, z) = y^2 z^2 i + z^2 x^2 j + x^2 y^2 k$. نشان دهید که $\text{curl} F$ همیشه صفر

نیست، ولی $F \cdot \text{curl} F = 0$. میدان اسکالر μ را طوری بیابید که μF گرادیان باشد.

۱۱. فرض کنید $V(x, y) = y^e i + x^z j$ ، که در آن c یک ثابت مثبت است، و نیز

$r(x, y) = xi + yj$. همچنین، R یک ناحیه مسطح محدود به منحنی زردان قطعه قطعه

هموار C باشد. $\text{div}(V \times r)$ و $\text{curl}(V \times r)$ را حساب کرده و، با استفاده از قضیه

گرین، نشان دهید

$$\oint_C V \times r \cdot d\alpha = 0,$$

که در آن α ، C را توصیف می‌کند.

۱۲. نشان دهید که قضیه گرین را می‌توان به صورت زیر بیان کرد :

$$\iint_R (\text{curl } V) \cdot k \, dx \, dy = \oint_C V \cdot T \, ds,$$

که در آن T مماس یکه بر C و s طول قوس است.

۱۳. ناحیه مسطح R به منحنی زردان قطعه قطعه هموار C محدود است. گشتاورهای ماند

R حول محورهای x و y بترتیب عبارتند از a و b . انتگرال خط

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot n \, ds$$

را برحسب a و b حساب کنید. در اینجا $r = \|xi + yj\|$ ، n قائم یکه روبه خارج C ، و s طول قوس است. منحنی در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

۱۴. فرض کنید F یک میدان برداری دوبعدی باشد. برای انتگرال خط برداری $\int_C F \times d\alpha$ تعریفی بیان کنید. تعریف باید طوری باشد که فرمول زیر نتیجه‌ای از قضیه گرین باشد:

$$\int_C F \times d\alpha = k \iint_R (\text{div } F) \, dx \, dy,$$

که در آن R یک ناحیه مسطح محدود به منحنی بسته ساده‌ای مانند C است.

* ۱۶.۱۲ بازسازی یک میدان برداری از کرل خود

در بررسی گرادیان دیدیم که چطور گرادیان بودن یا نبودن یک میدان برداری را معین کنیم. حال سوال مشابه را در مورد کرل می‌کنیم. به ازای میدان برداری F ، آیا G ای هست که $\text{curl } G = F$ ؟ می‌نویسیم $F = Pi + Qj + Rk$ و $G = Li + Mj + Nk$. برای حل معادله $\text{curl } G = F$ ، باید دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی

$$(۴۳.۱۲) \quad \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = R$$

را نسبت به سه تابع مجهول L ، M ، و N ، وقتی P ، Q ، و R معلومند، حل کنیم. امکان حل این دستگاه همیشه وجود ندارد. مثلاً، در بخش ۱۴.۱۲ ثابت شد که دیورژانس یک کرل همواره صفر است. لذا، برای جواب داشتن دستگاه (۴۳.۱۲) در مجموعه S ، باید همه‌جا در S داشته باشیم

$$(۴۴.۱۲) \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

همانطور که خواهیم دید، اگر مجموعه S را که در آن (۴۴.۱۲) برقرار است محدود کنیم، شرط فوق شرطی کافی برای جواب داشتن دستگاه (۴۳.۱۲) نیز هست. حال ثابت می‌کنیم شرط (۴۴.۱۲)، وقتی S یک بازه سه بعدی است، کافی است.

قضیه ۵.۱۲. فرض کنیم F بر بازه S در فضای 3 به طور پیوسته مشتقپذیر باشد. در این صورت، یک میدان برداری مانند G هست که $\text{curl } G = F$ اگر و فقط اگر، همه جا در S ، $\text{div } F = 0$.

برهان. لزوم شرط $\text{div } F = 0$ قبلاً اثبات شده است، زیرا دیورژانس کرل همواره صفر است. برای اثبات کفایت، باید سه تابع M ، L ، و N نشان داد که در سه معادله (۴۳.۱۲) صدق کنند. با اختیار $L = 0$ به این کار می‌پردازیم. در این صورت، معادلات دوم و سوم (۴۳.۱۲) خواهند شد

$$\frac{\partial M}{\partial x} = R \quad \text{و} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -Q$$

این یعنی باید داشته باشیم

$$N(x, y, z) = -\int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt + f(y, z)$$

و

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt + g(y, z),$$

که در آنها انتگرالگیری در امتداد یک پاره خط در S صورت گرفته، و "ثابتهای انتگرالگیری" $f(y, z)$ و $g(y, z)$ مستقل از x اند. به یافتن جوابی با $f(y, z) = 0$ می‌پردازیم. معادله اول در (۴۳.۱۲) عبارت است از

$$(۴۵.۱۲) \quad \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P.$$

به ازای M و N ی که اینک توصیف شد، داریم

$$(۴۶.۱۲) \quad \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt - \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

در این مرحله، با استفاده از قضیه ۸.۱۰، دو عمل مشتقگیری جزئی و انتگرالگیری را با هم عوض می‌کنیم. یعنی، می‌نویسیم

$$(۴۷.۱۲) \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt = \int_{x_0}^x D_2 Q(t, y, z) dt$$

و

$$(۴۸.۱۲) \quad \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt = \int_{x_0}^x D_3 R(t, y, z) dt.$$

در این صورت، معادله (۴۶.۱۲) خواهد شد

$$(۴۹.۱۲) \quad \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^x [-D_2 Q(t, y, z) - D_3 R(t, y, z)] dt - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

با استفاده از شرط (۴۴.۱۲)، می‌توان انتگرالده در (۴۹.۱۲) را با $D_1 P(t, y, z)$ عوض کرد؛ معادله (۴۹.۱۲) خواهد شد

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^x D_1 P(t, y, z) dt - \frac{\partial g}{\partial z} = P(x, y, z) - P(x_0, y, z) - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

از اینرو، اگر g را طوری بگیریم که $\partial g / \partial z = -P(x_0, y, z)$ (۴۵.۱۲) برقرار خواهد بود. لذا، مثلاً، می‌توان

$$g(y, z) = -\int_{x_0}^z P(x_0, y, u) du$$

را اختیار کرد. این بحث ما را به میدان برداری $G = Li + Mj + Nk$ می‌رساند، که در آن $L(x, y, z) = 0$ و

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt - \int_{x_0}^z P(x_0, y, u) du, \quad N(x, y, z) = -\int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt.$$

بمازای این L ، M ، و N ، به آسانی، به کمک (۴۷.۱۲) و (۴۸.۱۲)، ثابت می‌شود که سه معادله (۴۳.۱۲) برقرارند، و به ما، همانطور که می‌خواستیم، $\text{curl } G = F$ را خواهد داد.

باید توجه داشت که برهان فوق نه فقط وجود میدان برداری G که کرل آن F است

را ثابت می‌کند، بلکه روش سرراستی برای تعیین G به وسیله انتگرالگیری مستلزم مولفه‌های F نیز به دست می‌دهد.

به‌ازای F معلوم، میدان برداری G ساخته شده تنها جواب معادله $\text{curl } G = F$ نیست. اگر به‌این G گرادیان به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر $\nabla\varphi$ را بیفزاییم، جواب دیگری خواهیم داشت، زیرا، بدلیل $\text{curl } (\nabla\varphi) = 0$ ،

$$\text{curl } (G + \nabla\varphi) = \text{curl } G + \text{curl } (\nabla\varphi) = \text{curl } G = F.$$

بعلاوه، به‌آسانی می‌توان نشان داد که همه جوابهای به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باید به‌شکل $G + \nabla\varphi$ باشند. در واقع، اگر H جوابی دیگر باشد، $\text{curl } H = \text{curl } G$ ؛ در نتیجه، $\text{curl } (H - G) = 0$. طبق قضیه ۹.۱۰، نتیجه می‌شود که به‌ازای یک گرادیان به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر مانند $\nabla\varphi$ ، $H - G = \nabla\varphi$. لذا، همان‌طور که حکم شده، $H = G + \nabla\varphi$.

گاهی میدان برداری F که به‌ازای آن $\text{div } F = 0$ سولنوئیدی نامیده می‌شود. قضیه ۵.۱۲ می‌گوید که یک میدان برداری بر بازه S باز در فضای 3 سولنوئیدی است اگر و فقط اگر کرل میدان برداری دیگری بر S باشد. مثال زیر نشان می‌دهد که این حکم برای مجموعه‌های باز دلخواه درست نیست.

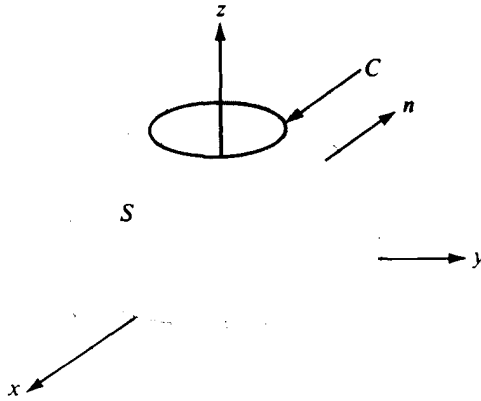
مثال. میدان برداری سولنوئیدی که کرل نیست. فرض کنیم D بخشی از فضای 3 باشد که بین دو کره متحدالمرکز به مرکز مبدأ و شعاعهای a و b ، که $0 < a < b$ ، قرار دارد. همچنین، $V = r/r^3$ ، که در آن $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$ به‌آسانی ثابت می‌شود که همه‌جا در D ، $\text{div } V = 0$. در واقع، فرمول کلی

$$\text{div } (r^n r) = (n + 3)r^n$$

را داریم، و در این مثال $n = -3$. با استفاده از قضیه استوکس، ثابت می‌کنیم این V یک کرل در D نیست (اگرچه هر بازه سه بعدی غیر شامل مبدأ کرل هست). برای این کار، فرض کنیم میدانی برداری مانند U باشد بطوری که در D ، $V = \text{curl } U$ ، و تناقض به دست می‌آوریم. طبق قضیه استوکس، می‌توانیم بنویسیم

$$(5.12) \quad \iint_S (\text{curl } U) \cdot n \, dS = \oint_C U \cdot d\alpha,$$

که در آن S و C سطح و منحنی شکل ۱۳.۱۲ اند. برای ساختن S ، یک سطح کروی متحدالمرکز به شعاع R با کرانه D ، که $a < R < b$ ، در نظر گرفته، و از آن یک



شکل ۱۳-۱۲ سطح S و منحنی C در معادله (۵۰-۱۲)

"عرقچین" کوچک مطابق شکل برمی داریم. قسمت باقیمانده سطح S است. منحنی C لبهء مستدیر نموده شده است. فرض کنیم n قائم یکهء رو به خارج S باشد؛ در نتیجه، $n = r/r$ چون $\text{curl } U = V = r/r^3$ داریم،

$$(\text{curl } U) \cdot n = \frac{r}{r^3} \cdot \frac{r}{r} = \frac{1}{r^2}.$$

بر سطح S ، این حاصل ضرب نقطه‌ای مقدار ثابت $1/R^2$ را دارد. لذا، داریم

$$\iint_S (\text{curl } U) \cdot n \, dS = \frac{1}{R^2} \iint_S dS = \frac{\text{مساحت}}{R^2}.$$

وقتی عرقچین به یک نقطه جمع شود، مساحت S به $4\pi R^2$ (مساحت کل کره) نزدیک می‌شود و، لذا، مقدار انتگرال سطح در (۵۰-۱۲) به 4π نزدیک خواهد شد. حال انتگرال خط در (۵۰-۱۲) را معاینه می‌کنیم. به آسانی ثابت می‌شود که، به‌ازای هر انتگرال خط $\int_C U \cdot d\alpha$ ، نامساوی زیر را داریم:

$$\left| \int_C U \cdot d\alpha \right| \leq M \cdot (\text{طول } C),$$

که در آن M یک ثابت وابسته به U است. (در واقع، M را می‌توان مقدار ماکزیمم $\|U\|$ بر C گرفت.) از اینرو، اگر عرقچین به یک نقطه جمع شود، طول C و مقدار انتگرال خط

هر دو به صفر نزدیک می‌شوند. لذا، تناقض خواهیم داشت؛ انتگرال سطح (۵۰.۱۲) را می‌توان بدلتخواه به 4π نزدیک کرد، و انتگرال خط‌نظیر مساوی با آن را می‌توان بدلتخواه به 0 نزدیک ساخت. بنابراین، تابع U که کرل آن V باشد در ناحیه D وجود ندارد. مشکل اینجا از نهاد هندسی ناحیه D ناشی شده است. با آنکه این ناحیه همبند ساده است (یعنی، هر منحنی بسته ساده در D لبه یک سطح پارامتری است که کاملاً در D قرار دارد)، سطوح بسته‌ای در D هستند که کرانه‌های کامل اجسامی که کاملاً در D باشند نیستند. مثلاً، هیچ کره‌ای حول مبداء کرانه کامل یک جسم که کاملاً در D باشد نیست. اگر ناحیه D دارای این خاصیت باشد که هر سطح بسته در D کرانه یک جسم کاملاً در D باشد، می‌توان نشان داد که میدانی برداری مانند U وجود دارد که، در D ، $V = \text{curl } U$ ، اگر فقط اگر، همه‌جا در D ، $\text{div } V = 0$. اثبات این حکم مشکل است و در اینجا داده نخواهد شد.

* ۱۷.۱۲ تمرین

۱. میدان برداری $G(x, y, z)$ را طوری بیابید که کرل آن همه‌جا در فضای 3، $2i + j + 3k$ باشد. کلیترین میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر با این خاصیت چیست؟
۲. نشان دهید که میدان برداری $F(x, y, z) = (y - z)i + (z - x)j + (x - y)k$ سولنوئیدی است، و میدان برداری G را طوری بیابید که همه‌جا در فضای 3، $F = \text{curl } G$.
۳. فرض کنید $F(x, y, z) = -zi + xyk$. میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر G به شکل $G(x, y, z) = L(x, y, z)i + M(x, y, z)j$ را طوری بیابید که، همه‌جا در فضای 3، $F = \text{curl } G$. کلیترین G به این شکل چیست؟
۴. اگر دو میدان برداری U و V غیر دورانی باشند، نشان دهید که میدان برداری $U \times V$ سولنوئیدی است.
۵. فرض کنید $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$. نشان دهید $-3 = n$ تنها مقدار n است که r^n ، به‌ازای $r \neq 0$ ، سولنوئیدی است. به‌ازای این n ، یک بازه 3 بعدی S غیرشامل مبداء اختیار و r^{-3} را به‌صورت کرل در S بیان نمایید. تذکر. با آنکه r^{-3} در هرچنین S یک کرل است، بر مجموعه تمام نقاط غیر از $(0, 0, 0)$ کرل نیست.

- ۶ . کلیترین تابع به طور پیوسته مشتقپذیر $f(r)$ از یک متغیر حقیقی را بیابید که میدان برداری $r = xi + yj + zk$ در آن $r = \|r\|$ و $r = xi + yj + zk$ باشد ، که در آن $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$.
- ۷ . فرض کنید V یک میدان برداری باشد که بر بازه S در فضای 3 به طور پیوسته مشتقپذیر است . دو حکم زیر را در باب V در نظر بگیرید :
- (یک) $\text{curl } V = 0$ و ، به ازای یک میدان برداری به طور پیوسته مشتقپذیر مانند U ، $V = \text{curl } U$ (همه جا بر S) :
- (دو) یک میدان اسکالر مانند φ هست بطوری که $\nabla \varphi$ به طور پیوسته مشتقپذیر است
- و ،

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ و } V = \text{grad } \varphi \text{ ، همه جا بر } S$$

(آ) ثابت کنید حکم (یک) حکم (دو) را ایجاب می کند . به عبارت دیگر ، یک میدان برداری که هم غیر دورانی و هم سولنوئیدی در S باشد گرادیان یک تابع توافقی است .

- (ب) ثابت کنید حکم (دو) حکم (یک) را ایجاب می کند ، یا مثال نقض بزنید .
- ۸ . همه میدانهای برداری مورد نظر را بر بازه S به طور پیوسته مشتقپذیر بگیرید . همچنین ، فرض کنید $H = F + G$ ، که در آن F سولنوئیدی و G غیر دورانی است . در این صورت ، میدانی برداری مانند U هست بطوری که $F = \text{curl } U$ ، و میدانی اسکالر مانند φ هست بطوری که در S ، $G = \nabla \varphi$. نشان دهید که U و φ در معادلات دیفرانسیل جزئی زیر در S صدق می کنند :

$$\nabla^2 \varphi = \text{div } H, \quad \text{grad}(\text{div } U) - \nabla^2 U = \text{curl } H$$

تذکر . این تمرین کاربردهای متنوعی دارد ، زیرا می توان نشان داد که هر میدان برداری به طور پیوسته مشتقپذیر H بر S را می توان به شکل $H = F + G$ نوشت ، که در آن F سولنوئیدی و G غیر دورانی باشد .

- ۹ . فرض کنید $H(x, y, z) = x^2yi + y^2zj + z^2xk$. میدانهای برداری F و G ، که $F = \text{curl } H$ و $G = \text{grad } H$ ، را طوری بیابید که $H = F + G$.
- ۱۰ . فرض کنید میدانهای اسکالر u و v بر بازه R در فضای 3 به طور پیوسته مشتقپذیر باشند .

(آ) نشان دهید یک میدان برداری مانند F هست بطوری که ، همه جا در R ،

$$\nabla u \times \nabla v = \text{curl } F$$

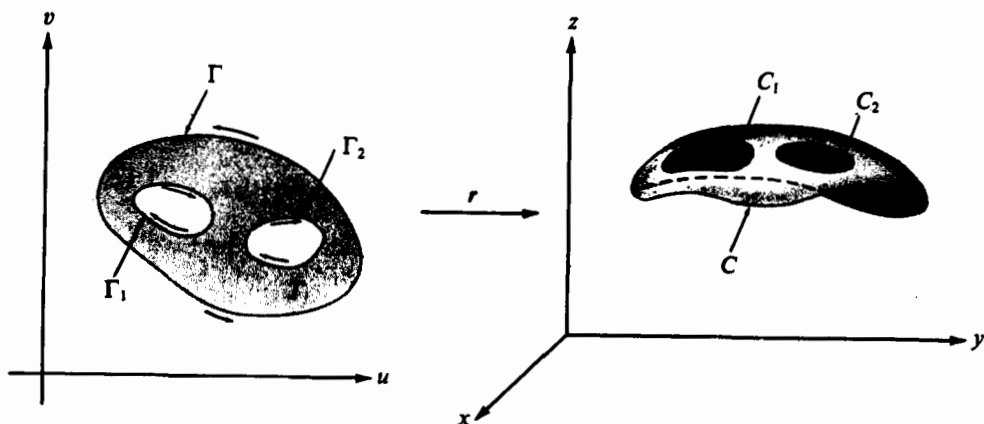
(ب) از سه میدان برداری زیر کدامها را می‌توان به عنوان F در قسمت (ت) به کار برد: (یک) $\nabla(uv)$ ؛ (دو) $u \nabla v$ ؛ (سه) $v \nabla u$.
 (پ) هرگاه $u(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^2$ و $v(x, y, z) = x + y + z$ ، انتگرال سطح

$$\iint_S \nabla u \times \nabla v \cdot n \, dS,$$

که در آن S نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ قائم یکه‌بامولفه z نامنفی است، را حساب کنید.

۱۸.۱۲ تعمیمهای قضیه استوکس

قضیه استوکس را می‌توان به سطوح هموار ساده کلیتر تعمیم داد. اگر T یک ناحیه همبند چندگانه مانند شکل ۱۴.۱۲ (با تعدادی متناهی حفره) باشد، نقش یک به یک $S = r(T)$



شکل ۱۴.۱۲ تعمیم قضیه استوکس برای سطوحی که نقشهای یک به یک نواحی همبند چندگانه‌اند

شامل همان تعداد حفره T است. برای تعمیم قضیه استوکس به این سطوح، دقیقاً از همان برهان قضیه استوکس استفاده می‌کنیم، جز اینکه قضیه گرین را برای نواحی همبند چندگانه (قضیه ۱۲.۱۱) به کار می‌بریم. به جای انتگرال خط در معادله (۲۷.۱۲) به مجموعی از انتگرالهای خط، با علامات مناسب، نیاز داریم، که روی نقشهای منحنیهایی که کرانه T را می‌سازند گرفته شده‌اند. مثلاً، اگر T ، مثل شکل ۱۴.۱۲، دو حفره

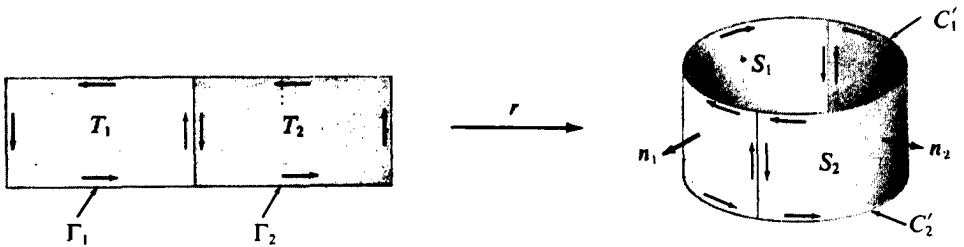
داشته باشد، و کرانه^۱ منحنیهای Γ ، Γ_1 ، و Γ_2 در جهت‌های نموده شده پیچیده شوند، اتحاد قضیه^۱ استوکس شکل زیر را می‌گیرد:

$$\iint_S (\text{curl } F) \cdot n \, dS = \oint_C F \cdot d\rho + \oint_{C_1} F \cdot d\rho_1 + \oint_{C_2} F \cdot d\rho_2,$$

که در آن C ، C_1 ، و C_2 به ترتیب نقشهای Γ ، Γ_1 ، و Γ_2 بوده، و ρ ، ρ_1 ، و ρ_2 توابع مرکب $\rho(t) = r[\gamma(t)]$ ، $\rho_1(t) = r[\gamma_1(t)]$ ، $\rho_2(t) = r[\gamma_2(t)]$ می‌باشند. در اینجا γ ، γ_1 ، و γ_2 توابعی هستند که Γ ، Γ_1 ، و Γ_2 را در جهت‌های نموده شده توصیف می‌کنند. منحنیهای C ، C_1 ، و C_2 در جهت‌های القا شده از Γ ، Γ_1 ، و Γ_2 به وسیله^۱ نگاشت r پیچیده خواهند شد.

قضیه^۱ استوکس رانیز می‌توان به بعضی (نه همه^۱) سطوح هموار که ساده نیستند تعمیم داد. چند مورد را با مثال توضیح می‌دهیم.

ابتدا استوانه^۱ شکل ۱۵.۱۲ را در نظر می‌گیریم. این استوانه اجتماع دو سطح پارامتری هموار و ساده^۱ S_1 و S_2 ، یعنی نقشهای دو مستطیل مجاور T_1 و T_2 تحت



شکل ۱۵.۱۲ تعمیم قضیه^۱ استوکس به استوانه

نگاشت‌های r_1 و r_2 است. اگر کرانه^۱ جهتدار با جهت مثبت Γ_1 از T_1 ، و γ_2 کرانه^۱ جهتدار با جهت مثبت Γ_2 از T_2 را توصیف کند، توابع ρ_1 و ρ_2 تعریف شده با

$$\rho_1(t) = r_1[\gamma_1(t)], \quad \rho_2(t) = r_2[\gamma_2(t)]$$

به ترتیب نقشهای C_1 و C_2 از Γ_1 و Γ_2 را توصیف می‌کنند. در این مثال، نمایشهای r_1 و r_2 را می‌توان طوری گرفت که بر فصل مشترک $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ یکی باشند. اگر قضیه^۱ استوکس را بر هر قطعه^۱ S_1 و S_2 اعمال کرده و دو اتحاد را بهم بیفزاییم، خواهیم داشت

$$(51.12) \quad \iint_{S_1} (\text{curl } F) \cdot n_1 dS + \iint_{S_2} (\text{curl } F) \cdot n_2 dS = \int_{C_1} F \cdot d\rho_1 + \int_{C_2} F \cdot d\rho_2,$$
 و در آن n_1 و n_2 بترتیب قائمهای معین شده به وسیله حاصل ضربهای برداری اساسی r_1 و r_2 اند.

حال فرض کنیم r نگاشت $T_1 \cup T_2$ باشد که با r_1 بر T_1 و با r_2 بر T_2 یکی بوده،
 و n قائم یکه نظیر معین شده به وسیله حاصل ضرب برداری اساسی r باشد. چون قائمهای
 n_1 و n_2 بر $S_1 \cap S_2$ همجهت اند، قائم یکه n بر S_1 مساوی n_1 ، و بر S_2 مساوی n_2
 می باشد. لذا، مجموع انتگرالهای سطح در طرف چپ (51.12) مساوی است با

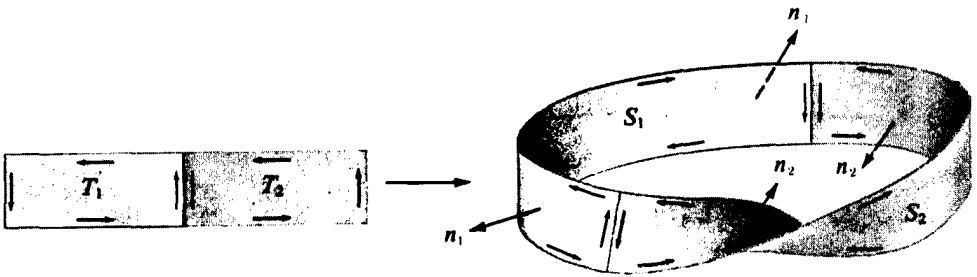
$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\text{curl } F) \cdot n dS.$$

در این مثال، نمایشهای r_1 و r_2 را می توان طوری گرفت که ρ_1 و ρ_2 ، همانطور که سهمها
 در شکل 15.12 نشان می دهند، بر هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ جهت های مخالف معین
 کنند. دو انتگرال خط سمت راست (51.12) را می توان با مجموعی از انتگرالهای خط در
 امتداد دودایره C_1' و C_2' که لبه های بالایی و پایینی $S_1 \cup S_2$ را می سازند عوض کرد،
 زیرا انتگرالهای خط در امتداد هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ حذف می شوند. بنابراین،
 معادله (51.12) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(52.12) \quad \iint_{S_1 \cup S_2} (\text{curl } F) \cdot n dS = \int_{C_1'} F \cdot d\rho_1 + \int_{C_2'} F \cdot d\rho_2,$$

که در آن انتگرالهای خط در جهت های القا شده از Γ_1 و Γ_2 پیچیده می شوند. گوئیم دو
 دایره C_1' و C_2' کرانه کامل $S_1 \cup S_2$ را می سازند. معادله (52.12) انتگرال سطح
 $(\text{curl } F) \cdot n$ را روی $S_1 \cup S_2$ به صورت یک انتگرال خط روی کرانه کامل $S_1 \cup S_2$ بیان
 می کند. این معادله تعمیم قضیه استوکس برای یک استوانه است.

حال همین مفاهیم را در مورد سطح شکل 16.12 اعمال می کنیم. این سطح مجدداً
 اجتماع دو سطح پارامتری ساده و هموار S_1 و S_2 ، یعنی نقشهای دو مستطیل مجاور T_1



شکل ۱۶.۱۲ نوار موبیوس به صورت اجتماعی ازدو سطح پارامتری ساده. قضیه استوکس به نوار موبیوس قابل تعمیم نیست.

و T_2 ، است. این سطح خاص نوار موبیوس نام دارد؛* مدلی که به آسانی می توان آن را از یک نوار مستطیلی شکل طویل کاغذی بادادن نیم چرخش به یک انتهایش و سپس چسباندن دو انتها بهم ساخت. p_1 ، p_2 ، C_1 ، و C_2 را برای نوار موبیوس مثل استوانه تعریف می کنیم. لبه $S_1 \cup S_2$ در این حالت، به جای دو منحنی، یک منحنی بسته ساده C است. این منحنی کرانه کامل نوار موبیوس نامیده می شود.

اگر قضیه استوکس را بر هر قطعه S_1 و S_2 ، همانند استوانه، اعمال کنیم، معادله (۵۱.۱۲) به دست می آید. اما، اگر بخواهیم دو انتگرال سطح و دو انتگرال خط را مثل بالا یکی کنیم، با دو مشکل مواجه می شویم. اولاً، دو قائم n_1 و n_2 همه جا بر فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ همجهت نیستند. (ر.ک. شکل ۱۶.۱۲). لذا، نمی توان قائم n را با فرض $n = n_1$ بر S_1 و $n = n_2$ بر S_2 ، مثل استوانه، بر تمام سطح تعریف کرد. اما این یک مشکل جدی نیست، زیرا می توان n را بر S_1 و $C_1 \cap C_2$ مساوی n_1 تعریف کرد، و جاهای دیگر مساوی n_2 گرفت. با این کار یک قائم ناپیوسته به دست می آید، ولی ناپیوستگیهای حاصل مجموعه ای با محتوای صفر در صفحه uv تشکیل می دهند و بر وجود یا مقدار انتگرال سطح

* بخاطر ا.ف. موبیوس (A. F. Möbius (1790-1868، یکی از شاگردان گاوس. در سن ۲۶ سالگی استاد نجوم در لایپزیک شد، و این مقام را تا زمان مرگش حفظ کرد. وی کارهای زیادی در مکانیک سماوی کرد، ولی مهمترین تحقیقاتش در هندسه و در نظریه اعداد بوده است.

$$(51.12) \iint_{S_1} (\text{curl } F) \cdot n_1 dS + \iint_{S_2} (\text{curl } F) \cdot n_2 dS = \int_{C_1} F \cdot d\rho_1 + \int_{C_2} F \cdot d\rho_2,$$
 که در آن n_1 و n_2 بترتیب قائمهای معین شده به وسیله حاصل ضربهای برداری اساسی r_1 و r_2 اند.

حال فرض کنیم r نگاشت $T_1 \cup T_2$ باشد که با r_1 بر T_1 و با r_2 بر T_2 یکی بوده، و n قائم یکه نظیر معین شده به وسیله حاصل ضرب برداری اساسی r باشد. چون قائمهای n_1 و n_2 بر $S_1 \cap S_2$ همجهت اند، قائم یکه n بر S_1 مساوی n_1 ، و بر S_2 مساوی n_2 می باشد. لذا، مجموع انتگرالهای سطح در طرف چپ (51.12) مساوی است با

$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\text{curl } F) \cdot n dS.$$

در این مثال، نمایشهای r_1 و r_2 را می توان طوری گرفت که ρ_1 و ρ_2 ، همانطور که سهمها در شکل 15.12 نشان می دهند، بر هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ جهت های مخالف تعیین کنند. دو انتگرال خط سمت راست (51.12) را می توان با مجموعی از انتگرالهای خط در امتداد دودایره C'_1 و C'_2 که لبه های بالایی و پایینی $S_1 \cup S_2$ را می سازند عوض کرد، زیرا انتگرالهای خط در امتداد هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ حذف می شوند. بنابراین، معادله (51.12) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(52.12) \iint_{S_1 \cup S_2} (\text{curl } F) \cdot n dS = \int_{C'_1} F \cdot d\rho_1 + \int_{C'_2} F \cdot d\rho_2,$$

که در آن انتگرالهای خط در جهت های القا شده از Γ_1 و Γ_2 پیچیده می شوند. گوییم دو دایره C'_1 و C'_2 کرانه کامل $S_1 \cup S_2$ را می سازند. معادله (52.12) انتگرال سطح $(\text{curl } F) \cdot n$ را روی $S_1 \cup S_2$ به صورت یک انتگرال خط روی کرانه کامل $S_1 \cup S_2$ بیان می کند. این معادله تعمیم قضیه استوکس برای یک استوانه است.

حال همین مفاهیم را در مورد سطح شکل 16.12 اعمال می کنیم. این سطح مجدداً

اجتماع دو سطح پارامتری ساده و هموار S_1 و S_2 ، یعنی نقشهای دو مستطیل مجاور T_1

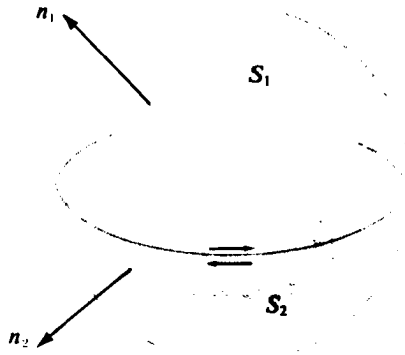
$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\text{curl } F) \cdot n \, dS$$

اثری ندارند .

مشکل جدید تروقتی پیش می آید که بخواهیم انتگرالهای خط را یک کاسه کنیم . در این مثال ، نمی توان نگاشتهای r_1 و r_2 را طوری گرفت که ρ_1 و ρ_2 بر هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ جهت های مخالف معین کنند . این امر در شکل ۱۶.۱۲ با سهم نموده شده است ؛ یکی از این قوسها در یک جهت دوبار پیچیده شده است . برای قوس ، انتگرالهای خط نظیر لزوماً " ، مثل استوانه ، حذف نمی شوند . لذا ، مجموع انتگرالهای خط در (۵۱.۱۲) لزوماً " مساوی انتگرال خط روی کرانهء کامل $S_1 \cup S_2$ نیست ، و قضیهء استوکس را نمی توان به نوار موبیوس تعمیم داد .

تذکر . استوانه و نوار موبیوس بترتیب مثالهایی از سطوح جهت پذیر و جهت ناپذیراند . ما به تعریف دقیق این اصطلاحات نمی پردازیم ، اما به چند تفاوت آنها اشاره می کنیم . برای سطح جهت پذیر $S_1 \cup S_2$ حاصل از دو سطح پارامتری ساده و هموار به صورت توصیف شده در بالا ، نگاشتهای r_1 و r_2 را همیشه می توان طوری گرفت که ρ_1 و ρ_2 بر هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ جهت های مخالف معین کنند . برای یک سطح جهت ناپذیر این کار ممکن نیست . در یک سطح جهت پذیر هموار ، می توان قائم بیکهء پیوسته ای روی تمام سطح تعریف کرد . برای یک سطح جهت ناپذیر ، تعریف چنین قائم عملی نیست . مدل کاغذی یک سطح جهت پذیر همیشه دو طرف دارد که می توان آنها را به وسیلهء رنگ زدن با دورنگ مختلف از هم تمیز داد . سطوح جهت ناپذیر فقط یک طرف دارند . برای بحث دقیقی از اینها و خواص دیگر سطوح جهت پذیر و جهت ناپذیر ، ر.ک. کتابی در باب توپولوژی ترکیباتی . قضیهء استوکس را می توان ، با روندی شبیه آنکه برای استوانه در بالا به اختصار گفته شد ، برای سطوح جهت پذیر تعمیم داد .

سطح جهت پذیر دیگر کرهء شکل ۱۷.۱۲ است . این سطح اجتماع دو سطح پارامتری ساده (نیمکره) S_1 و S_2 است ، که می توان آنها را بترتیب نقشهای یک قرص مستدیر در صفحه xy تحت نگاشتهای r_1 و r_2 گرفت . ما به C_1 ، C_2 ، ρ_1 ، ρ_2 همان معانی داشته در مثالهای فوق را می دهیم . در این حالت ، منحنیهای C_1 و C_2 به وسیلهء نگاشت r کاملاً " همساز می شوند (اینها در امتداد استوا هم را قطع می کنند) ، و سطح $S_1 \cup S_2$ را



شکل ۱۷.۱۲ تعمیم قضیه استوکس به کره

بسته می‌گوییم. بعلاوه، r_1 و r_2 را می‌توان طوری گرفت که، همانطور که سهمها در شکل ۱۷.۱۲ نشان می‌دهند، جهت‌های معین شده به وسیله p_1 و p_2 بر C_1 و C_2 مخالف هم باشند. (این بخاطر جهت پذیر بودن $S_1 \cup S_2$ است.) اگر قضیه استوکس را بر هر نیمکره اعمال کرده و نتایج را بهم بیفزاییم، مثل قبل، معادله (۵۱.۱۲) به دست می‌آید. قائمهای n_1 و n_2 بر فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ یکی هستند، و می‌توان انتگرالهای روی S_1 و S_2 را در یک انتگرال روی تمام کره گنجانند. دو انتگرال خط سمت راست (۵۱.۱۲) کاملاً حذف می‌شوند، و فرمول

$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\text{curl } F) \cdot n \, dS = 0$$

باقی می‌ماند. این نه تنها برای یک کره، بلکه برای هر سطح بسته جهت پذیر، برقرار است.

۱۹.۱۲ قضیه دیورژانس (قضیه گاوس)

قضیه استوکس رابطه بین انتگرال روی یک سطح و انتگرال خط روی یک یا چند منحنی سازنده کرانه این سطح را بیان می‌کند. قضیه دیورژانس رابطه بین انتگرال سه‌گانه روی یک جسم و انتگرال سطح روی کرانه این جسم را بیان خواهد کرد.

قضیه ۶.۱۲. قضیه دیورژانس. فرض کنیم V جسمی در فضای ۳ باشد که به سطح

بسته و جهت پذیر S محدود شده است، و n قائم یگه رو به خارج به S باشد. هرگاه F یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر بر V باشد، خواهیم داشت

$$(۵۳.۱۲) \quad \iiint_V (\operatorname{div} F) dx dy dz = \iint_S F \cdot n dS.$$

تذکر. هرگاه F و n را بر حسب مولفه‌های آنها بیان کنیم: مثلاً،

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

و

$$n = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k,$$

آنگاه معادله (۵۳.۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

(۵۴.۱۲)

برهان. کافی است سه معادله

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P \cos \alpha dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q \cos \beta dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R \cos \gamma dS.$$

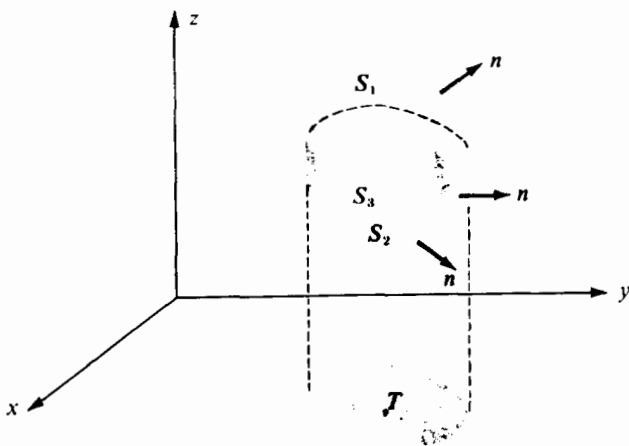
را ثابت کرده، و این نتایج را جمع کنیم تا (۵۴.۱۲) به دست آید. با معادله سوم شروع کرده، آن را برای اجسام از نوع بسیار خاص ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم V مجموعه‌ای از نقاط (x, y, z) صادق در رابطهای به شکل

$$T \text{ در } (x, y) \text{ به ازای } g(x, y) \leq z \leq f(x, y)$$

باشد، که در آن T یک ناحیه همبند در صفحه xy بوده، و f و g توابعی پیوسته بر اند که به ازای هر (x, y) در T ، $g(x, y) \leq f(x, y)$ ، به طور هندسی، این یعنی T تصویر V روی صفحه xy است. هر خط‌مازبر T موازی محور z جسم V را در امتداد پارچه

خطی که سطح $z = g(x, y)$ را به سطح $z = f(x, y)$ وصل می‌کند قطع می‌نماید. سطح کرانه‌ای S از عرقچین فوقانی S_1 ، که با فرمول صریح $z = f(x, y)$ داده می‌شود؛ قسمت تحتانی S_2 ، که با $z = g(x, y)$ داده می‌شود؛ و (احتمالاً) بخش S_3 از استوانه، که با خط متحرکی موازی محور z در امتداد کرانه T تولید می‌شود تشکیل می‌گردد. قائم روبه خارج به S دارای مولفه z نامنفی بر S_1 و مولفه نامثبت بر S_2 است، و بر S_3 با صفحه xy موازی است. اجسام از این نوع "تصویرپذیر" نامیده می‌شوند. (مثالی در شکل ۱۸.۱۲ نموده شده است.) اینها شامل تمام اجسام محدب‌اند (مثلاً)، کره‌های توپر،



شکل ۱۸.۱۲ مثالی از یک جسم که xy - تصویرپذیر است

بیضی‌گونها، مکعبها)، و بسیاری از اجسام که محدب نیستند (مثلاً، چنبره‌های توپر با محورهای موازی محور z).

ایده اثبات کاملاً ساده است. انتگرال سه‌گانه را به صورت یک انتگرال مضاعف روی تصویر T بیان می‌کنیم. بعد نشان می‌دهیم این انتگرال مضاعف همان مقدار انتگرال سطح مورد نظر را دارد. با فرمول

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_T \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy$$

شروع می‌کنیم. انتگرال یک بعدی نسبت به z را می‌توان با دومین قضیه اساسی حساب

دیفرانسیل و انتگرال حساب کرد، و نتیجه گرفت که

$$(۵۵.۱۲) \quad \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_T \{R[x, y, f(x, y)] - R[x, y, g(x, y)]\} dx dy.$$

برای انتگرال سطح می توان نوشت

$$(۵۶.۱۲) \quad \iint_S R \cos \gamma dS = \iint_{S_1} R \cos \gamma dS + \iint_{S_2} R \cos \gamma dS + \iint_{S_3} R \cos \gamma dS.$$

بر S_3 ، قائم n مساوی صفحه xy است؛ در نتیجه، $\cos \gamma = 0$ و انتگرال روی S_3 صفر است. بر سطح S_1 از نمایش

$$r(x, y) = xi + yj + f(x, y)k,$$

و بر S_2 از نمایش

$$r(x, y) = xi + yj + g(x, y)k$$

استفاده می کنیم. بر S_1 ، قائم n همان جهت حاصل ضرب برداری $\partial r/\partial x \times \partial r/\partial y$ را دارد؛ در نتیجه، می توان نوشت [ر.ک. معادله (۲۵.۱۲)، ص ۵۸۸]

$$\iint_{S_1} R \cos \gamma dS = \iint_{S_1} R dx \wedge dy = \iint_T R[x, y, f(x, y)] dx dy.$$

بر S_2 ، قائم n جهت مخالف $\partial r/\partial x \times \partial r/\partial y$ را دارد؛ در نتیجه، طبق معادله (۲۶.۱۲)، داریم

$$\iint_{S_2} R \cos \gamma dS = -\iint_{S_2} R dx \wedge dy = -\iint_T R[x, y, g(x, y)] dx dy.$$

لذا، معادله (۵۶.۱۲) خواهد شد

$$\iint_S R \cos \gamma dS = \iint_T \{R[x, y, f(x, y)] - R[x, y, g(x, y)]\} dx dy.$$

از مقایسه این با معادله (۵۵.۱۲)، معلوم می شود که

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R \cos \gamma dS.$$

در برهان فوق، بخاطر فرض xy - تصویر پذیر بودن V می توان انتگرال سه گانه روی V را به صورت یک انتگرال مضاعف روی تصویرش T در صفحه xy بیان کرد. واضح است که اگر V ، yz - تصویر پذیر باشد، می توان، با همین نوع استدلال، اتحاد

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P \cos \alpha dS$$

را ثابت نمود؛ و اگر V ، xz - تصویر پذیر باشد، به دست آورد که

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q \cos \beta dS.$$

لذا، می بینیم که قضیه دیورژانس برای همه اجسام تصویر پذیر بر هر سه صفحه مختصات معتبر است. بالاخص، برای هر جسم محدب برقرار خواهد بود.

یک چنبره توپریا محور موازی محور z ، xy - تصویر پذیر است ولی xz - تصویر پذیر یا yz - تصویر پذیر نیست. برای تعمیم قضیه دیورژانس به چنین جسمی، چنبره را با صفحات ماربر محور آن و موازی صفحات xz و yz به چهار قسمت تقسیم کرده، و قضیه دیورژانس را بر هر قسمت اعمال می نماییم. انتگرال سه گانه روی تمام چنبره مجموع انتگرالهای سه گانه روی چهار قسمت است. وقتی انتگرالهای سطح روی چهار قسمت را با هم جمع کنیم، درمی یابیم که قسمتهای ناشی از وجوه مشترک بخشهای مجاور هم را حذف می کنند، زیرا قائمهای رو به خارج بر دو وجه این چنینی جهت های مخالف دارند. لذا، مجموع انتگرالهای سطح روی چهار قسمت مساوی انتگرال سطح روی تمام چنبره است. این مثال طرز تعمیم قضیه دیورژانس به بعضی از اجسام نامحدب را توضیح می دهد.

۲۰.۱۲ کاربردهای قضیه دیورژانس

مفاهیم کرل و دیورژانس میدان برداری $F = Pi + Qj + Rk$ در بخش ۱۲.۱۲ با فرمولهای

$$\text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (۵۷.۱۲)$$

و

$$\text{curl } F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k \quad (۵۸.۱۲)$$

معرفی شدند. برای محاسبه $\operatorname{div} F$ و $\operatorname{curl} F$ از این فرمولها، باید از مولفه‌های F اطلاع داشته باشیم. این مولفه‌ها، به نوبه خود، به محورهای مختصات در فضای 3 بستگی دارند. یک تغییر در محورهای مختصات یعنی تغییر در مولفه‌های F و، احتمالاً، تغییر در توابع $\operatorname{div} F$ و $\operatorname{curl} F$. به کمک قضیه استوکس و قضیه دیورژانس می‌توان فرمولهایی برای دیورژانس و کرل به دست آورد که مستلزم مولفه‌های F نباشند. این فرمولها نشان می‌دهند که کرل و دیورژانس خواص ذاتی میدان برداری F را نمایش داده و به محورهای مختصات خاصی بستگی ندارند. ابتدا فرمول دیورژانس را مورد بحث قرار می‌دهیم.

قضیه ۷.۱۲. فرض کنیم $V(t)$ گره‌ای توپریه شعاع $t > 0$ و مرکز a در فضای 3 بوده، $S(t)$ کرانه $V(t)$ باشد. همچنین، F یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق‌پذیر بر $V(t)$ باشد. در این صورت، اگر $|V(t)|$ حجم $V(t)$ بوده و n قائم یکه رویه خارج به S باشد، خواهیم داشت

$$\operatorname{div} F(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} F \cdot n \, dS. \quad (59.12)$$

برهان. فرض کنیم $\varphi = \operatorname{div} F$. اگر $\epsilon > 0$ مفروض باشد، باید $\delta > 0$ ای یافت بطوری که

$$\left| \varphi(a) - \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} F \cdot n \, dS \right| < \epsilon, \quad 0 < t < \delta \quad (60.12)$$

چون φ در a پیوسته است، به‌ازای ϵ داده شده، یک $h > 0$ گوی مانند $B(a; h)$ هست بطوری که

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad x \in B(a; h)$$

لذا، اگر بنویسیم $\varphi(a) = \varphi(x) + [\varphi(a) - \varphi(x)]$ و از طرفین این معادله روی کره $V(t)$ به شعاع $t < h$ انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\varphi(a) |V(t)| = \iiint_{V(t)} \varphi(x) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{V(t)} [\varphi(a) - \varphi(x)] \, dx \, dy \, dz.$$

اگر قضیه دیورژانس را بر اولین انتگرال سه‌گانه سمت راست اعمال کرده و بعد این جمله را به سمت چپ ببریم، رابطه زیر را به دست خواهیم آورد:

$$\left| \varphi(\mathbf{a}) |V(t)| - \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \right| \leq \iiint_{V(t)} |\varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{x})| \, dx \, dy \, dz \leq \frac{\epsilon}{2} |V(t)| < \epsilon |V(t)|.$$

وقتی این نامساوی را بر $|V(t)|$ تقسیم کنیم، می‌بینیم که (۶۰.۱۲) به‌ازای $\delta = h$ برقرار است. این قضیه را ثابت خواهد کرد.

در برهان فوق از کره بودن $V(t)$ هیچ استفاده‌ای نشد. اگر به‌حای کرات از اجسام $V(t)$ که قضیه دیورژانس برایشان برقرارند استفاده شود، همین قضیه درست خواهد بود، مشروط بر اینکه این اجسام شامل نقطه \mathbf{a} بوده و، وقتی $t \rightarrow 0$ ، به نقطه \mathbf{a} جمع شوند. مثلاً، هر $V(t)$ را می‌توان مکعبی محاط شده در یک کره به شعاع t حول \mathbf{a} گرفت. در این حالت، دقیقاً همان برهان قابل انجام است.

با استفاده از قضیه ۷۰.۱۲، می‌توان دیورژانس را تعبیر فیزیکی کرد. فرض کنیم \mathbf{F} بردار چگالی شار یک جریان پایدار باشد. در این صورت، انتگرال سطح $\iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ جرم کل مایع گذران از S در واحد زمان و در جهت \mathbf{n} را می‌سنجد. کسر $\iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS / |V(t)|$ نمایش جرم در واحد حجم است که از S در واحد زمان و در جهت

\mathbf{n} می‌گذرد. وقتی $t \rightarrow 0$ ، حد این کسر دیورژانس \mathbf{F} در \mathbf{a} است. لذا، دیورژانس در \mathbf{a} را می‌توان میزان تغییر زمانی جرم در واحد حجم و در واحد زمان در \mathbf{a} تعبیر کرد. در بعضی کتابهای آنالیز برداری، معادله (۵۹.۱۲) به‌عنوان تعریف دیورژانس گرفته می‌شود. با این تعریف می‌توان فوراً "به دیورژانس معنی فیزیکی داد. همچنین، فرمول (۵۹.۱۲) مستلزم مولفه‌های \mathbf{F} نیست. لذا، در هر دستگاه مختصات برقرار است. اگر $V(t)$ را یک مکعب با اضلاع موازی محورهای مختصات xyz و مرکز \mathbf{a} بگیریم، می‌توان، با استفاده از معادله (۵۹.۱۲)، فرمول (۵۷.۱۲) را نتیجه گرفت، که $\operatorname{div} \mathbf{F}$ را بر حسب مولفه‌های \mathbf{F} بیان می‌کند. این روند در تمرین ۱۴ از بخش ۲۱.۱۲ به‌اختصار توضیح داده شده است.

فرمولی شبیه (۵۹.۱۲) وجود دارد که گاهی به‌عنوان تعریف کرل به‌کار می‌رود. این فرمول می‌گوید که

$$(۶۱.۱۲) \quad \text{curl } F(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} n \times F \, dS,$$

که در آن $V(t)$ و $S(t)$ همان معانی داشته در قضیه ۷.۱۲ را دارند. انتگرال سطح سمت راست دارای انتگرالده برداری است. این انتگرالها را می توان برحسب مولفه ها تعریف کرد. برهان (۶۱.۱۲) شبیه برهان قضیه ۷.۱۲ است.

فرمول دیگری در رابطه با کرل وجود دارد که می توان آن را از (۶۱.۱۲) و یا مستقلاً به دست آورد. این فرمول می گوید که

$$(۶۲.۱۲) \quad n \cdot \text{curl } F(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|S(t)|} \oint_{C(t)} F \cdot d\alpha.$$

در این فرمول، $S(t)$ یک قرص مستدیر به شعاع t و مرکز a است، و $|S(t)|$ مساحت آن را نشان می دهد. بردار n یک قائم یکه به $S(t)$ است، و α تابعی است که $C(t)$ را در جهتی که وقتی از نوک n نظاره شود خلاف حرکت عقربه های ساعت است می بینیم. میدان برداری F بر $S(t)$ به طور پیوسته مشتق پذیر فرض می شود. برهانی از (۶۲.۱۲) را می توان با همان روشی که (۵۹.۱۲) اثبات شد ارائه داد. قرار می دهیم $\varphi(x) = n \cdot \text{curl } F(x)$ و مثل قبل استدلال می کنیم، جز آنکه به جای انتگرالهای سه گانه از انتگرالهای سطح، و به جای قضیه دیورژانس از قضیه استوکس استفاده می کنیم.

اگر F یک میدان سرعت باشد، انتگرال خط روی $C(t)$ جریان بسته F در امتداد $C(t)$ نامیده می شود. حد در (۶۲.۱۲) نمایش جریان بسته در واحد مساحت در نقطه a است. لذا، $n \cdot \text{curl } F(a)$ را می توان "چگالی جریان بسته" F در نقطه a نسبت به صفحه ای عمود بر n در a در نظر گرفت.

وقتی n مقادیر متوالی i, j, k را بگیرد، حاصل ضربهای نقطه ای $i \cdot \text{curl } F$ ، $j \cdot \text{curl } F$ ، و $k \cdot \text{curl } F$ در مختصات قائم اند. وقتی معادله (۶۱.۱۲) را نقطه شروع تعریف کرل بگیریم، فرمول (۵۸.۱۲) برای مولفه های قائم $\text{curl } F$ را می توان از (۶۲.۱۲) درست به همین روش نتیجه گرفت.

۲۱.۱۲ تمرین

۱. فرض کنید S سطح مکعب یکه $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ بوده، و n قائم یکه روبه خارج به S باشد. اگر $F(x, y, z) = x^2i + y^2j + z^2k$ ، با استفاده از قضیه

دیورژانس، انتگرال سطح $\iint_S F \cdot n \, dS$ را حساب کنید. نتیجه را با محاسبه مستقیم انتگرال سطح تحقیق کنید.

۲. کره $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ به وسیله صفحه $z = 3$ قطع می شود. بخش کوچکتر جسم V را تشکیل می دهد که به سطح بسته S_0 مرکب از دو قسمت محدود شده است، یک قسمت کروی S_1 و یک قسمت مسطح S_2 . هرگاه قائم یکه رو به خارج V ، $\cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$ باشد، انتگرال سطح

$$\iint_S (xz \cos \alpha + yz \cos \beta + \cos \gamma) \, dS$$

را حساب کنید اگر (T) S عرقچین کروی S_1 باشد؛ (B) S قاعده مسطح S_2 باشد؛ (P) S کرانه کامل S_0 باشد. قسمت (P) را با استفاده از قسمتهای (T) و (B) ، و نیز با استفاده از قضیه دیورژانس، حل کنید.

۳. فرض کنید $n = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$ قائم یکه رو به خارج به سطح بسته S باشد که جسم همگن V از نوع توصیف شده در قضیه دیورژانس را محدود می کند. فرض کنید مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ و حجم $|V|$ جسم V معلوم باشند. انتگرالهای سطح زیر را برحسب $|V|$ ، \bar{x} ، \bar{y} ، \bar{z} حساب کنید:

$$(T) \quad \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, dS$$

$$(B) \quad \iint_S (xz \cos \alpha + 2yz \cos \beta + 3z^2 \cos \gamma) \, dS$$

$$(P) \quad \iint_S (y^2 \cos \alpha + 2xy \cos \beta - xz \cos \gamma) \, dS$$

(ت) $\iint_S (x^2 + y^2)(xi + yj) \cdot n \, dS$ را برحسب حجم $|V|$ و گشتاور ماند جسم بیان کنید.

در تمرینهای ۴ تا ۱۰، $\partial f / \partial n$ و $\partial g / \partial n$ مشتقات جهتی میدانهای اسکالر f و g در جهت قائم یکه رو به خارج n به سطح بسته S که جسم V از نوع توصیف شده در قضیه دیورژانس را محدود می کند را نشان می دهند. یعنی، $\partial f / \partial n = \nabla f \cdot n$ و $\partial g / \partial n = \nabla g \cdot n$. درهریک از این تمرینها، حکم داده شده را ثابت نمایید. همه مشتقات مربوطه رامی توانید پیوسته بگیرید.

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} \, dS = \iiint_V \nabla^2 f \, dx \, dy \, dz \quad ۴$$

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0 \quad \cdot 5$$

هر وقت f در V توافقی باشد .

$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iiint_V f \nabla^2 g \, dx \, dy \, dz + \iint_V \nabla f \cdot \nabla g \, dx \, dy \, dz \quad \cdot 6$$

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dx \, dy \, dz \quad \cdot 7$$

$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS \quad \cdot 8$$

اگر هر دو f و g در V توافقی باشند .

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint_V |\nabla f|^2 \, dx \, dy \, dz \quad \cdot 9$$

اگر f در V توافقی باشد .

$$\nabla^2 f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial n} dS \quad \cdot 10$$

که در آن $V(t)$ یک کره^۳ توپر به شعاع t و مرکز a

است، $S(t)$ سطح $V(t)$ است، و $|V(t)|$ حجم $V(t)$ می باشد .

۱۱ . فرض کنید V یک ناحیه^۳ محدب در فضای ۳ باشد که کرانه اش سطح بسته^۳ S بوده و n قائم یکه^۳ رو به خارج به S است . همچنین F و G میدانهای برداری به طور پیوسته مشتق پذیری باشند بطوری که

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div} G \quad \text{و} \quad \operatorname{curl} F = \operatorname{curl} G \quad \text{،} \quad V \text{ در همه جا}$$

و

$$G \cdot n = F \cdot n \quad \text{،} \quad S \text{ بر همه جا}$$

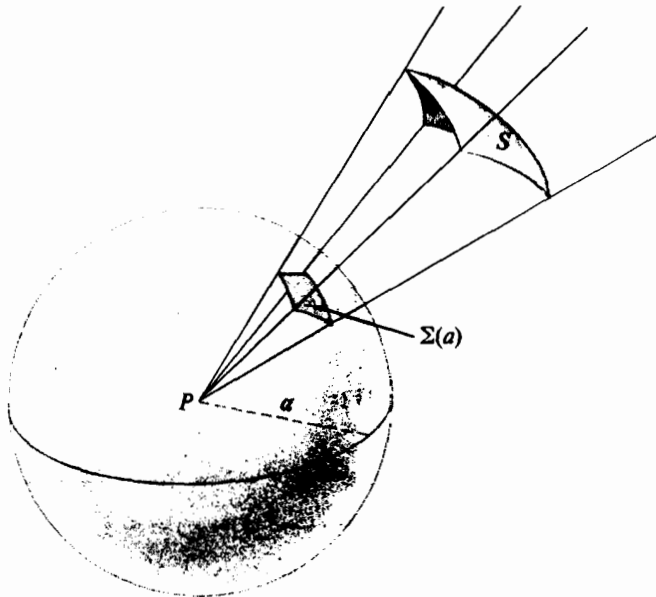
ثابت کنید همه جا در V ، $F = G$. [راهنمایی . فرض کنید $H = F - G$ ، میدان اسکالر f را طوری بیابید که $H = \nabla f$ ، و ، با استفاده از اتحادی مناسب ، ثابت کنید که $\iiint_V \|\nabla f\|^2 \, dx \, dy \, dz = 0$.] از این نتیجه بگیرید که ، در V ، $H = 0$.

۱۲ . میدان برداری G و دو میدان اسکالر f و g ، که بر جسم محدب V محدود به سطح بسته^۳ S به طور پیوسته مشتق پذیراند ، داده شده اند . همچنین ، n قائم یکه^۳

روبه خارج به S می‌باشد. ثابت کنید حداکثر یک میدان برداری مانند F هست که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

$$\text{div } F = g \text{ و } \text{curl } F = G \text{ ، } V \text{ در } S \text{ بر } F \cdot n = f .$$

۱۳. فرض کنید S یک سطح پارامتری هموار با این خاصیت باشد که هر خط صادر شده از نقطه P ، S را حداکثر یکبار قطع کند. همچنین، $\Omega(S)$ مجموعه خطوط صادر شده از P و ماربر S باشد. (ر.ک. شکل ۱۹.۱۲). مجموعه



شکل ۱۹.۱۲ زاویه فضایی $\Omega(S)$ به راس P مقابل سطح S است. این زاویه

$$\text{با کسر } |\Omega(S)| = \frac{\text{مساحت } \Sigma(a)}{a^2} \text{ ستجیده می شود.}$$

$\Omega(S)$ زاویه فضایی به راس P و مقابل S نامیده می‌شود. فرض کنید $\Sigma(a)$ فصل مشترک $\Omega(S)$ با سطح کره به شعاع a و مرکز P باشد. کسر

$$\frac{\text{مساحت } \Sigma(a)}{a^2}$$

با $|\Omega(S)|$ نموده شده، و برای سنجش زاویه فضایی $\Omega(S)$ به کار می‌رود. (T) ثابت کنید این کسر مساوی انتگرال سطح

$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$$

است، که در آن r بردار شعاعی از P تا یک نقطه دلخواه S بوده، و $r = \|\mathbf{r}\|$. بردار \mathbf{n} قائم یک‌به S در جهت خارج از P است. این نشان می‌دهد که کسر مربوط به $|\Omega(S)|$ از شعاع a مستقل است. بنابراین، زاویه فضایی را می‌توان به وسیله مساحت فصل مشترک $\Omega(S)$ و کره یک‌ه حول P سنجید. [راهنمایی. قضیه دیورژانس را بر آن بخش از $\Omega(S)$ که بین S و $\Sigma(a)$ واقع است اعمال کنید.]

(ب) دو صفحه در امتداد قطری از یک کره به مرکز P هم را قطع می‌کنند. زاویه تقاطع θ است، که $0 < \theta < \pi$. فرض کنید S بخش کوچکتر جدا شده از سطح کره به وسیله دو صفحه باشد. نشان دهید که $|\Omega(S)| = 2\theta$.

۱۴. فرض کنید $V(t)$ مکعبی به ضلع $2t$ و مرکز a بوده، و $S(t)$ کرانه مکعب باشد. همچنین، \mathbf{n} قائم یک‌به رو به خارج $S(t)$ بوده، و $|V(t)|$ حجم مکعب باشد. فرض کنید، به ازای میدان برداری F که در a به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS,$$

و این حد را تعریف دیورژانس، یعنی $\operatorname{div} F(a)$ ، بگیرید. محورهای مختصات xyz را موازی اضلاع $V(t)$ گرفته، و P ، Q ، و R را مولفه‌های F نسبت به این دستگاه مختصات بدانید. ثابت کنید که $\operatorname{div} F(a) = D_1 P(a) + D_2 Q(a) + D_3 R(a)$. [راهنمایی. انتگرال سطح را به صورت مجموع شش انتگرال مضاعف روی وجوه مکعب بیان کنید. سپس نشان دهید که $|V(t)|$ ضربدر مجموع دو انتگرال مضاعف روی وجوه عمود بر محور z ، وقتی $t \rightarrow 0$ ، به حد $D_3 R(a)$ نزدیک می‌شود. برای جملات باقیمانده به همین نحو استدلال کنید.]

۱۵. میدان اسکالر φ که هرگز صفر نیست دارای خواص زیر است:

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi) = 10\varphi \quad \text{و} \quad \|\nabla \varphi\|^2 = 4\varphi$$

انتگرال سطح $\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$ را، که در آن S سطح یک کره یک‌به مرکز مبدأ بوده و $\partial \varphi / \partial n$

مشتق جهتی φ در جهت قائم یک‌به رو به خارج به S است، را حساب کنید.