دانلود جزوات دانشگاهی رشته کامپیوتر

با مدیریت سمیه عرب باقری

فصل سوم:

روش تقسیم وغلبه

فصل سوم

روش تقسیم و غلبه (Divide and Conquer)

مفهوم تکنیک تقسیم و غلبه

نام‌گذاری این روش از یک تکنیک جنگی که ناپلئون به کار برد گرفته شده است. در سال ۱۸۰۵ ارتشی از سربازان روسی و اتریشی با بیش از ۱۵ هزار نفر به جنگ ناپلئون آمدند. در این حال ناپلئون به قلب سپاه آنها حمله کرده و با تقسیم نیروهای دشمن به دو بخش بر آنها پیروز شد. در واقع ناپلئون با تقسیم (Divide) سپاهی بزرگ به دو سپاه کوچکتر و پیروز شدن بر تک‌تک آنها موفق شد بر آن سپاه بزرگ غلبه یافته و آن را فتح کند (conquer).

در تکنیک تقسیم و غلبه (تقسیم و حل) یک نمونه از مسأله به دو یا چند نمونه کوچکتر تقسیم می‌شود. سپس این نمونه‌های کوچک‌تر حل شده و با ترکیب حل این نمونه‌های کوچکتر، حل مسأله اصلی حاصل می‌شود. اگر این نمونه‌های کوچکتر قابل حل نبودند آن‌قدر آنها را به نمونه‌های کوچکتر دیگر تقسیم می‌کنیم تا بالاخره حل شوند. روش تقسیم و غلبه در واقع یک روش حل بالا به پائین (Top-down) می‌باشد. اغلب این تکنیک به صورت بازگشتی پیاده‌سازی می‌شود. ولی ممکن است به صورت یک روال معمولی نیز پیاده‌سازی گردد. در ادامه این فصل با حل چند مسأله استاندارد به صورت تقسیم و غلبه این تکنیک را معرفی می‌کنیم.

مثال اول : جستجوی دودویی

جستجوی دودویی فقط در آرایه‌های مرتب استفاده می‌شود. در این روش عنصر مورد نظر با خانه وسط آرایه مقایسه می‌شود اگر با این خانه برابر بود جستجو تمام می‌شود اگر عنصر مورد جستجو از خانه وسط بزرگتر بود جستجو در بخش بالایی آرایه و در غیر اینصورت جستجو در بخش پائینی آرایه انجام می‌شود (فرض کرده‌ایم آرایه به صورت صعودی مرتب شده است) این رویه تا یافتن عنصر مورد نظر یا بررسی کل خانه‌های آرایه ادامه می‌یابد.

مثال : در لیست زیر می‌خواهیم ببینیم عدد 44 در کدام خانه قرار دارد؟

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	20	25	27	29	30	33	44	45	67	78	80
↑					↑						↑
Low					mid						high

با توجه به قضیه اصلی زیر که قبلاً بیان کردیم :

$$\begin{cases} T(n) = aT(\frac{n}{b}) + cn^k \\ T(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(n) = \theta(n^{\log_b^a}) & \text{اگر } a > b^k \\ T(n) = \theta(n^k \log_2 n) & \text{اگر } a = b^k \\ T(n) = \theta(n^k) & \text{اگر } a < b^k \end{cases}$$

$$a = 1 , b = 2 , c = 1 , k = 0 \Rightarrow a = b^k \Rightarrow 1 = 2^0 \Rightarrow$$
$$W(n) = \theta(n^0 \log_2 n) = \theta(\log n)$$

جواب رابطه بازگشتی $W(n)$ برای جستجوی دودویی به صورت دقیق برابر است با :

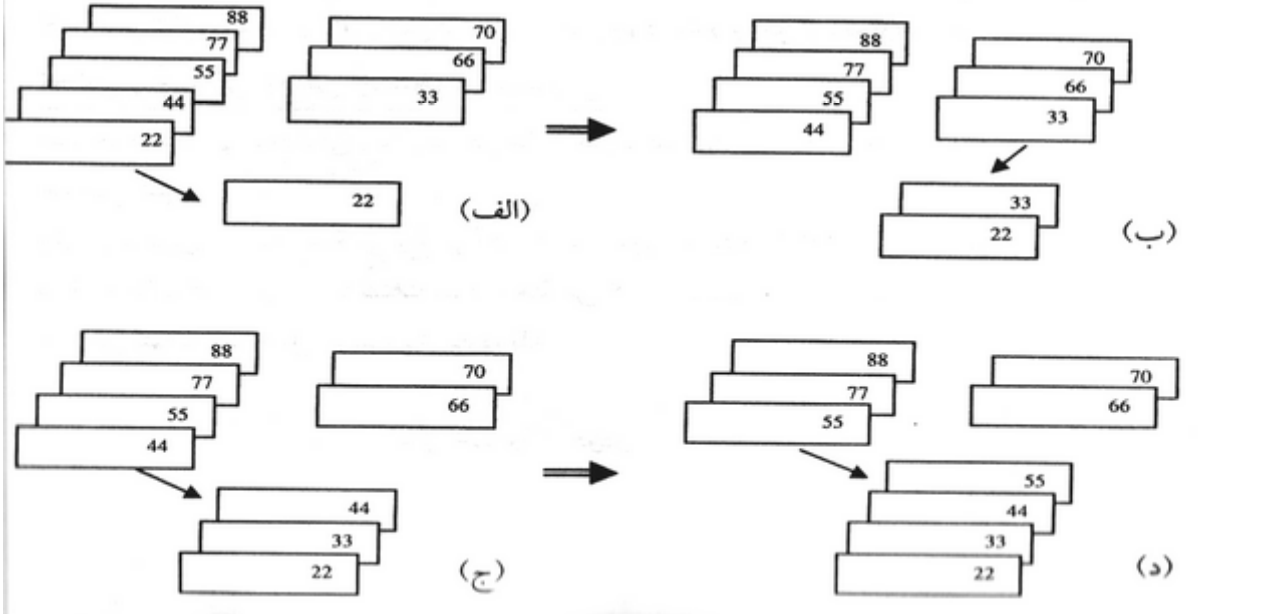
$$W(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1 \Rightarrow W(n) = \theta(\log n)$$

در تست‌ها علت فرمول $\lfloor \log n \rfloor + 1$ را می‌بینید.

مثال دوم : مرتب‌سازی ادغامی

قبل از توضیح مرتب‌سازی ادغام لازم است نحوهٔ ترکیب دو لیست مرتب را در یک لیست مرتب جدید بیان کنیم.

مثال : فرض کنید دو دسته کارت مرتب شده به شکل زیر داریم. در هر مرحله کارت جلوئی هر دسته را با کارت جلوئی دسته دیگر مقایسه می‌کنیم و کارت با شماره کوچکتر را در دسته جدید قرار می‌دهیم. هرگاه یکی از دسته‌ها خالی شد، تمام کارتهای باقی‌مانده در دسته دیگر را در انتهای دسته کارت جدید قرار می‌دهیم :

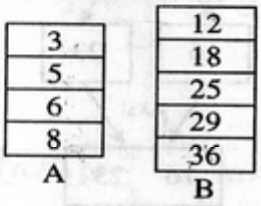


تابع زیر دو آرایه مرتب A با p عنصر و B با m عنصر را گرفته و یک آرایه S با p + m عنصر مرتب شده را برمی‌گرداند. (شروع اندیس آرایه‌ها را 1 فرض کرده‌ایم) :

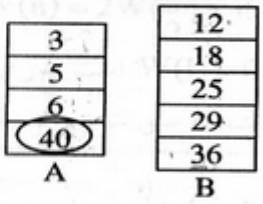
```
void  merge (int p, int m, int A[ ], int B[ ], int S[ ])
{
   int  i,j,k;
   i = j = k = 1;
   while (i <= p  && j <= m) {
      if (A[i] < B[j]) {    S[k] = A[i], i++; }
      else {S[k] = B[j];  j++}
      k ++;
}
if (i > p)
         whiel (j <= m)
        {   S[k] = B[j]; k++; j++;}
else if (j>m)
      while (i <= p)
        {   S[k] = A[i] ; k ++; i++;}
}
```

در برنامه فوق عمل اصلی را مقایسه A[i] و B[j] در نظر می‌گیریم. بدین‌ترتیب بهترین حالت هنگامی رخ می‌دهد که همه عناصر آرایهٔ با طول کمتر از اولین عنصر آرایهٔ با طول بیشتر، کوچکتر باشد. مثل شکل زیر که تنها به ٤ مقایسه نیاز دارد، بنابراین :

$$B(p, m) = Min(p, m)$$



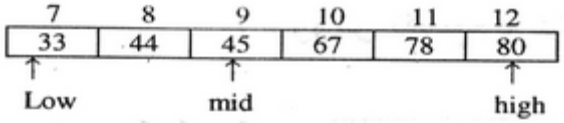
بدترین حالت نیز هنگامی رخ می‌دهد که همه عناصر آرایه اول (به جز آخرین عضو آن) از اولین عنصر آرایه دوم کوچکتر باشند. ولی این آخرین عضو از تمام عناصر آرایه دوم بزرگتر باشد. مثل شکل زیر:



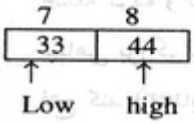
که در این حالت به ۸ مقایسه نیاز داریم. یعنی در بدترین حالت تعداد مقایسه‌ها برابر است با:

$$W(p,m) = p + m - 1$$

ابتدا خانه وسطی (6) را با عدد 44 مقایسه می‌کنیم. چون 30 کمتر از 44 است پس نیمه بالایی آرایه یعنی از خانه 7 تا 12 را فقط نگاه می‌کنیم. برای این منظور Low را برابر mid + 1 قرار می‌دهیم :



حال خانه وسط یعنی خانه 9 را که حاوی عدد 45 است را با 44 مقایسه می‌کنیم. چون 44 کمتر از 45 است پس نیمه پائین این آرایه را فقط نگاه می‌کنیم. برای اینکار high را برابر mid - 1 قرار می‌دهیم.



حال خانه شماره 7 و سپس خانه شماره 8 را با کلید 44 مقایسه می‌کنیم و در می‌یابیم که عدد 44 در خانه شماره 8 قرار دارد. برنامه مربوط به جستجوی باینری به صورت زیر است :

تابع زیر جستجوی باینری را (به صورت غیربازگشتی) انجام می‌دهد و مشخص می‌سازد عدد m در کدام خانه آرایه x وجود دارد. n طول آرایه مرتب شده x است. اگر عدد m در آرایه نباشد تابع مقدار -1 برمی‌گرداند.

```
int  bsearch (int  x [ ] , int  n , int m)
{
   int  low, high , mid;
   low = 0 ;    high  = n - 1 ;
   while  (low < = high ) {
          mid = (low + high) / 2 ;
          if  ( m < x [ mid ] )
               high  = mid - 1 ;
          else  if  (m > x [mid] )
                low = mid + 1 ;
          else   return  mid
     }
    return  - 1 ;
}
```

نکته : مرتبه اجرایی الگوریتم فوق در حالت متوسط و بدترین حالت $O(\log_2 n)$ می‌باشد، چرا که هر بار نصف آرایه مورد بررسی قرار می‌گیرد و بازه عملیات در هر بار اجرای حلقه نصف می‌شود. در بهترین حالت که عدد مورد جستجو دقیقاً در وسط آرایه قرار گرفته باشد، تنها به یک عمل مقایسه نیاز بوده و در نتیجه مرتبه اجرایی الگوریتم فوق در بهترین حالت $O(1)$ است.

حال نسخه بازگشتی الگوریتم جستجوی دودویی را بیان می‌کنیم :

```
int bsearch (int low, int high, int x, int A[ ])
{
  int  mid;
  if (low > high)    return  -1;
  else {
     mid = (low + high) / 2;
     if (x = = A[mid]   return   mid;
     else  if (x < A[mid])
              return bsearch (low, mid -1, x, A);
    else return bsearch (mid+1, high, x, A);
  }
}
```

نکته ۱ : تابع بازگشتی فوق از نوع «بازگشت انتهایی» است یعنی پس از فراخوانی بازگشتی هیچ عملی انجام نمی‌شود. توابعی از این نوع را به سادگی می‌توان به نسخه تکراری (غیر بازگشتی) تبدیل کرد. قبلاً نسخه تکراری تابع فوق را بیان کرده‌ایم. اغلب بهتر است توابع بازگشتی از نوع بازگشت انتهایی را به صورت نسخه تکراری بازنویسی و استفاده کنیم چرا که نسخه تکراری به دلیل عدم نیاز به پشته و نیز فراخوانی‌های مکرر در مصرف حافظه صرفه‌جویی کرده و همچنین سریع‌تر از نسخه بازگشتی است (البته به اندازه یک مضرب ثابت). در بعضی کامپایلرها نظیر برخی از نسخه‌های LISP کدهای بازگشتی انتهایی به صورت خودکار به کد تکراری ترجمه می‌شوند.

نکته ۲ : جستجوی دودویی ساده‌ترین الگوریتم تقسیم و غلبه است چرا که نمونه بزرگ تنها به یک نمونه کوچک‌تر شکسته شده و لذا ترکیبی از خروجی‌ها وجود ندارد و حل نمونه اولیه تنها حل نمونه کوچکتر است.

تحلیل پیچیدگی زمانی جستجوی دودویی

جستجوی دودویی پیچیدگی زمانی در هر حالت ندارد. لذا باید حالت‌های خوب، بد و متوسط آن را جداگانه حساب کنیم.

یکی از بدترین حالت‌ها هنگامی رخ می‌دهد که عدد مورد جستجو (x) آخرین (بزرگترین) عنصر آرایه باشد. در این حالت آرایه باید مرتباً نصف شود تا هنگامی که در نهایت آرایه یک خانه داشته باشد. آرایه‌ای با یک خانه نیز تنها به یک عمل مقایسه نیاز دارد، لذا :

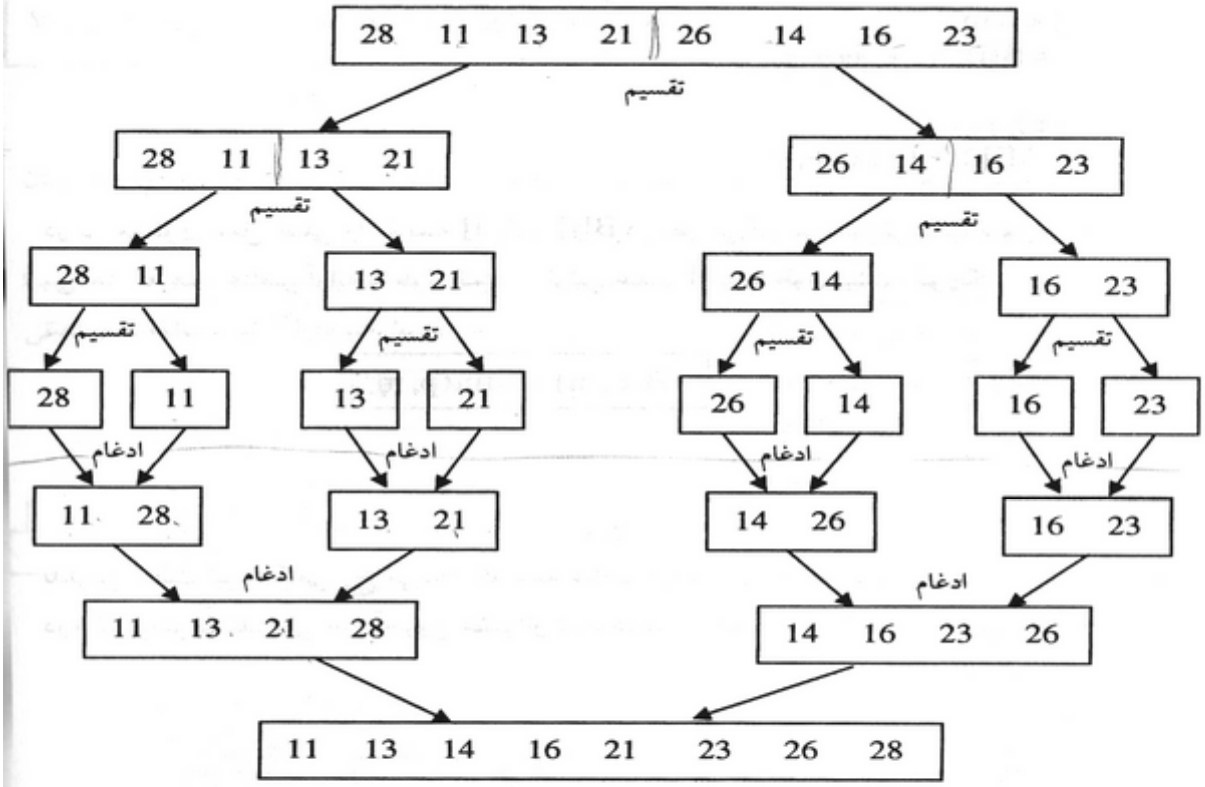
$$W(n) = W(\frac{n}{2}) + 1$$
$$W(1) = 1$$

پیچیدگی زمانی جستجوی دودویی:

ال که تابع merge را شرح دادیم به توضیح مرتب‌سازی ادغام می‌پردازیم. مرتب‌سازی آرایه n خانه‌ای با
ش ادغام شامل مراحل زیر است :

- آرایه را به دو قسمت هر یک با $\frac{n}{2}$ عنصر تقسیم کن.
- با روش ادغام هر زیر آرایه را مرتب کن. اگر آرایه به قدر کافی کوچک نمی‌باشد، به صورت بازگشتی آن را
چکتر و حل کن.
- از طریق الگوریتم ادغام زیر آرایه‌های مرتب شده را در یک آرایه مرتب، ترکیب کن.

کل زیر مراحل این الگوریتم را برای یک آرایه فرضی نشان می‌دهد :



با توجه به توضیحات فوق تابع مرتب‌سازی ادغامی را می‌توان به صورت زیر نوشت. آرایه S ، شامل n عنصر
ست که تابع mergesort عناصر آن را مرتب کرده و مرتب شده آنها را در داخل خود S قرار می‌دهد. فرض
کرده‌ایم اندیس آرایه‌ها از 1 شروع می‌شود.

```
void  mergesort (int n, int S [ ])
{
   int  p=⌊n / 2⌋ ,  m = n - p;
   int A[1 .. p] , B[1 .. m];
   if (n > 1)  {
      Copy S[1]  through S[p]  to A[1]  through A[p];
      Copy S[p+1] through S[n]  to B[1] through B[m];
      mergesort (P,A);
      mergesort (m, B);
      merge (p,m,A,B, S);
   }
}
```

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در الگوریتم فوق تابع mergesort به صورت بازگشتی ۲ بار خودش را صدا می‌زند.

تحلیل پیچیدگی زمانی مرتب‌سازی ادغامی در بدترین حالت

عمل اصلی را مقایسه در تابع ادغام (merge) در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم تعداد این مقایسه را در بدترین حالت بر حسب اندازه ورودی n که تعداد عناصر آرایه S است به دست آوریم. با توجه به توضیحات مربوط به این الگوریتم داریم :

$$W(n) = W(p) + W(m) + (p+m-1)$$

$W(p)$ زمان لازم برای مرتب‌سازی آرایه A و $W(m)$ زمان لازم بر ای مرتب‌سازی B و $(p+m-1)$ زمان لازم برای ادغام A و B در بدترین حالت هستند.

در ابتدا فرض می‌کنیم n توانی از ۲ باشد، در این صورت :

$$P = \lfloor n/2 \rfloor = \frac{n}{2} \quad , \quad m = n - p = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

$$W(n) = W(\frac{n}{2}) + W(\frac{n}{2}) + (\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1)$$

$$\Rightarrow W(n) = 2W(\frac{n}{2}) + n - 1$$

اگر اندازه ورودی 1 باشد (یعنی آرایه یک خانه‌ای باشد) نیازی به ادغام نبوده و $W(1) = 0$ است. پس رابطه پیچیدگی زمانی برای مرتب‌سازی ادغام هنگامی که $n > 1$ بوده و n توانی از ۲ باشد به صورت زیر است:

$$W(n) = 2W(\frac{n}{2}) + n - 1$$
$$W(1) = 0$$

به قضیه اصلی زیر :

$$T(n)=aT(\frac{n}{b})+Cn^k=\begin{cases}T(n)=\theta(n^{\log_b^a}) & \text{اگر } a>b^k\\ T(n)=\theta(n^k\log_2 n) & \text{اگر } a=b^k\\ T(n)=\theta(n^k) & \text{اگر } a<b^k\end{cases}$$

$$a=2,\ b=2,\ k=1 \Rightarrow a=b^k \Rightarrow 2=2^1$$

این حالت داریم :

$$\boxed{W(n)=\theta(n\log n)}$$

ی اثبات کرد حل دقیق رابطه بازگشتی $W(n)=2W(\frac{n}{2})+(n-1)$ که $W(1)=0$ است برابر $\boxed{W(n)=n\log n-(n-1)\in\theta(n\log}$ می‌باشد.

: اگر n توانی از ۲ نباشد، آنگاه می‌توان اثبات کرد که :

$$W(n)=W(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)+W(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil)+(n-1)=\theta(n\log n)$$

ر هر حال مرتب‌سازی ادغام در بدترین حالت از مرتبه $n\log n$ است.

ه به دو مثال قبلی می‌توانید راحت‌تر راهبرد «تقسیم و غلبه» که شامل مراحل زیر است را درک کنید :

سیم مسأله به یک یا چند نمونه کوچکتر

ل نمونه‌های کوچکتر، اگر این نمونه‌ها به قدر کافی کوچک نبودند که حل شوند، از تکنیک بازگشتی کوچکتر کردن آنها استفاده می‌کنیم.

صورت نیاز ترکیب جواب نمونه‌های کوچکتر تا با این ترکیب جواب نمونه اولیه به دست آید. عبارت صورت نیاز» در مرحله سوم به این دلیل است که ممکن است مانند روش جستجوی دودویی عمل ترکیب شته باشیم.

ل پیچیدگی مصرف حافظه در مرتب‌سازی ادغامی

ند که ما اغلب به تحلیل زمانی الگوریتم‌ها می‌پردازیم و نه تحلیل فضایی آنها ولی لازم است این نکته هم راحی الگوریتم‌ها مدنظر قرار گیرد.

گوریتمی که برای مرتب‌سازی ادغامی معرفی کردیم، در هر مرحله نیاز به حافظه کمکی به اندازه n خانه . مثلاً در مرحله اول که آرایه S به دو آرایه A و B تقسیم می‌شود، جمع خانه‌های A و B برابر n است. ین ترتیب هنگامی که آرایه A به دو قسمت و آرایه B نیز به دو قسمت تقسیم می‌شود، جمع این ٤

قسمت برابر n خانه است. تعداد مراحل شکستن آرایه n log بوده و در نتیجه مرتبه فضای مورد استفاده $\theta(n \log n)$ است که نسبتاً زیاد می‌باشد.

الگوریتم‌های مرتب‌سازی را می‌توان به دو دسته درجا (inplace) و برون از جا (outplace) تقسیم‌بندی کرد. در روش‌های درجا فضای مورد استفاده وابسته به اندازه آرایه ورودی نبوده و از مرتبه O(1) است ولی در الگوریتم‌های برون از جا فضای مورد استفاده (مانند مرتب‌سازی ادغامی) تابعی از اندازه ورودی است و هر چقدر تعداد عناصر آرایه (n) بیشتر شود، فضای کمکی مورد نیاز نیز افزایش می‌یابد.

می‌توان با بهینه‌سازی توابع merg و mergesort به صورت زیر مرتبه فضای مورد استفاده را از حالت $\theta(n \log n)$ به $\theta(n)$ تقلیل داد. در این نسخه از پیاده‌سازی به جای آنکه آرایه ورودی S را در دو آرایه A و B کپی کنیم، به کمک اشاره‌گرهای low و high و mid آن را به صورت صعودی دو قسمت می‌کنیم:

```
void mergesort2 (int  low, int high, int S[ ])
{
  int  mid;
  if (low < high) {
       mid = ⌊ (low + high) / 2 ⌋;
       mergesort2 (low, mid, S);
       mergesort2(mid +1, high, S);
       merge2 (low, mid, high, S);
  }
}
/* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * */
void merge2 (int low, int mid, int high, int S[ ])
{
 int i,j,k;
 int T[low .. high] ;    //A local arrray needed for the merging
 i = low;  j = mid +1;  k = low;
 while (i <= mid   && j <= high)  {
       if (S[i] < S[j]) {  T[k] = S[i];  i++;  }
       else  {   T[k] = S[j];  j++ }
       k ++;
 }
 if (i > mid) move  S[j] through S[high]  to T[k] through T[high];
 else move S[i] through S[mid] to T[k] through  T[high];
 move T[low] through T[high] to S[low] through S[high];
}
```

در برنامه فوق برای ادغام آرایه S با n خانه به یک آرایه کمکی T با n خانه نیاز داریم لذا مرتبه فضای مورد نیاز در مرتب‌سازی ادغام $\theta(n)$ می‌باشد و این الگوریتم غیردرجا است.

... سوم : مرتب‌سازی سریع

...ین روش در هر گذر یک عنصر محوری یا لولا (pivot) انتخاب شده و سایر عناصر بردار به گونه‌ای ...جا می‌شوند که کلیه عناصر بزرگتر از آن در یک طرف و کلیه عناصر کوچکتر از آن در طرف دیگر عنصر ...قرار گیرند. بدین‌ترتیب عنصر لولا در مکان درست خود قرار گرفته است. سپس دو بردار دو طرف این ...ر به صورت بازگشتی به همین روش مرتب می‌شوند.

...جه به توضیحات فوق این الگوریتم از نوع الگوریتم‌های تقسیم و غلبه است که با کوچک کردن بازه عمل ...ند بازه و سپس ترکیب جوابهای آنها، مسأله را حل می‌کند. این الگوریتم بر اساس جابه‌جا کردن زیاد ...ر عمل می‌کند.

...یتم زیر آرایه x[1..x] را به صورت صعودی مرتب می‌کند. رویه به صورت Quicksort(x,1,n) صدا ...می‌شود.

```
procedure Partition (Var x: Arraylist; left, right : integer; Var pivotpoint : integer
Var i,j,pivot : integer;
begin
        i := left ;    j := right+1;    pivot := x[left];
        repeat
                repeat
                        i := i + 1;
                until   x[i] >= pivot;
                repeat
                        j := j - 1;
                until  x[j] <= pivot;
                if i<j   then   swap (x[i], x[j]);
        until   i>= j;
        swap (x[left], x[j]);
        pivotpoint := j;
end;
{ * * * * * * * * * * * * * * * * * * * }
procedure Quicksort (Var  x: Arraylist; left, right : integer) ;
var    pivotpoint : integer;
begin
        if (left  < right)    then   begin
                partition (x , left, right, pivotpoint); {...ر لولا در محل واقعی خود قرار می‌گیرد
                QuickSort(x, left, pivotpoint - 1); {مرتب‌سازی زیر لیست چپ}
                QuickSort (x, pivotpoint+1, right); { مرتب‌سازی زیر لیست راست }
        end;    {if}
end;
```

پردازه Partition آرایه را به گونه‌ای افراز می‌کند که عنصر محوری (اولین عنصر سمت چپ آرایه) در مکان درست خود قرار گیرد و همچنین مکان قرارگیری آن در آرایه توسط متغیر خروجی pivotpoint برگردانده می‌شود.

مثال ۳ : فرض کنید آرایه اولیه به صورت زیر باشد انجام یک مرحله از الگوریتم فوق به صورت زیر است:

x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]	x[6]	x[7]	x[8]	x[9]	x[10]
26	5	37	1	61	11	59	15	48	19

در ابتدا left =1 و right =10 و i =1 و j =11 و pivot = 26 می‌شود. سپس از سمت چپ مرتباً i زیاد شده تا هنگامی که به اولین عنصر بزرگتر از 26 (یعنی 37) برسیم. به همین ترتیب از سمت راست مرتباً j کم می‌شود تا به اولین عنصر کوچکتر از 26 (یعنی 19) برسیم. در اینحال جای این دو خانه یعنی 37 و 19 عوض می‌شود. پس آرایه به صورت زیر درمی‌آید :

		↓i							↓j
26	5	19	1	(61)	11	59	(15)	48	37

حال دوباره حلقه فوق را تکرار می‌کنیم اینبار عدد 15 با عدد 61 جابه‌جا می‌شود.

				↓i			↓j		
26	5	19	1	15	11	59	61	48	37

در مرحله بعد حلقه، j به عدد 11 و i به عدد 59 اشاره می‌کند و شرط جلوی until i>=j درست بوده و حلقه‌های repeat تمام می‌شوند.

					↓j	↓i			
(26)	5	19	1	15	(11)	59	61	48	37

در اینحال x[left] که هان 26 است با x[j] یعنی عدد 11 جابه‌جا می‌شود و داریم :

11	5	19	1	15	(26)	59	61	48	37

همانطور که مشاهده می‌کنید پس از یکبار صدا زدن QuickSort تمام اعداد سمت راست عدد 26 از آن بزرگتر و تمام اعداد سمت چپ عدد 26 از آن کوچکتر هستند، یعنی عدد 26 در جای درست خود قرار گرفته است. حال هر یک از دو آرایه سمت راست و چپ 26 را به صورت مجزا با همان روش فوق مرتب می‌کنیم. بدین ترتیب به صورت بازگشتی کل آرایه را می‌توان مرتب کرد.

دول زیر مراحل کامل و خلاصه این الگوریتم برای آرایه مذکور پس از هر بار فراخوانی Quick Sort داده شده است. علامت براکت بخشی از زیر لیست‌ها را که هنوز مرتب نشده‌اند نشان می‌دهد.

[26	5	37	1	61	11	59	15	48	19
[11	5	19	1	15]	(26)	[59	61	48	37
[1	5]	(11)	[19	15]	26	[59	61	48	37]
(1)	(5)	11	[19	15]	26	[59	61	48	37]
1	5	11	(15)	(19)	26	[59	61	48	37]
1	5	11	15	19	26	[48	37]	(59)	[61
1	5	11	15	19	26	37	48	59	[61]
1	5	11	15	19	26	37	48	59	61

نطور که مشاهده می‌شود QuickSort هفت بار صدا زده می‌شود.

ثر ۱ : در این الگوریتم انتخاب عنصر لولا تأثیر مهمی در سرعت اجراء آن دارد. اگر این عنصر، عنصر میانه باشد، آرایه را به دو زیر آرایه تقریباً مساوی افراز خواهد نمود و می‌توان ثابت نمود در این شرایط بهترین ت روی داده است. اما اگر عنصر لولا کوچکترین یا بزرگترین عنصر آرایه باشد در این شرایط یکی از زیر به‌ها تهی خواهد شد و در این شرایط بدترین حالت روی داده است. از آنجا که الگوریتم یافتن میانه برای بار افراز باعث افزایش کلی مرتبه الگوریتم خواهد شد، امکان استفاده از آن وجود ندارد. درعمل عنصر لولا صورت تصادفی انتخاب می‌شود. در اکثر کتابها برای سادگی عنصر اول آرایه را به عنوان عنصر لولا در نظر گیرند ولی هر عنصر دیگر تصادفی نیز می‌تواند انتخاب شود. یک روش مناسب دیگر برای انتخاب لولا ش میانه ۳ (Median of three) است که در آن میانه مقادیر کلیدهای اول، وسط و آخر، عنصر لولا می‌شود. لاً برای کلیدهای 26، 61، 19 داریم :

عنصر لولا = Midian (26, 61, 19) = 26

ک پیاده‌سازی دیگر از تابع partition به صورت زیر است :

```
procedure partition (Var  x: Arraylist; left, right : integer; Var pivotpoint : integer)
Var  i,j, pivot : integer;
begin
   j := left;       pivot := x[left];
   for  i := left +1    to   right   do
      if  x[i] < pivot  then  begin
             j := j + 1 ;
             swap (s[i], s[j]);
        end;
   swap (x[left], x[j]);
   pivotpoint := j;
end;
```

نمونه زیر مراحل کار افراز را مطابق الگوریتم فوق نشان می‌دهد. عنصر لولا عدد 26 است.

26	(5)	37	1	61	11	59	15	48	19
	j i								
26	5	(37)	(1)	61	11	59	15	48	19
		j	i						
26	5	1	(37)	61	(11)	59	15	48	19
			j						
26	5	1	11	(61)	37	59	(15)	48	19
				j			i		
26	5	1	11	15	(37)	59	61	48	(19)
					j				i
(26)	5	1	11	15	(19)	59	61	48	37
					j				
19	5	1	11	15	[26]	59	61	48	37

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نتیجه زیر آرایه سمت چپ در این روش افراز با روش قبلی متفاوت است ولی در هر دو روش تمام اعداد سمت راست 26 از آن بزرگتر و تمام اعداد سمت چپ آن کوچکتر هستند.

روش دیگر جهت افراز آن است که از سمت راست به چپ حرکت کرده اولین عدد کوچکتر از لولا را که یافتیم با آن جابه‌جا می‌کنیم. سپس از چپ به راست حرکت کرده اولین عدد بزرگتر از لولا را یافته و با آن جابه‌جا می‌کنیم و این عملیات را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا عنصر لولا در مکان درست خود قرار گیرد :

[26]	5	37	1	61	11	59	15	48	(19)
19	5	(37)	1	61	11	59	15	48	26
19	5	26	1	61	11	59	(15)	48	37
19	5	15	1	(61)	11	59	26	48	37
19	5	15	1	26	(11)	59	61	48	37
19	5	15	1	11	[26]	59	61	48	37

تحلیل پیچیدگی زمانی مرتب‌سازی سریع

عمل اصلی در زیربرنامه افراز (Partition) را مقایسه x[i] با pivot در نظر بگیریم، در تمام روش‌های ته شده این تعداد برابر n - 1 است که n تعداد عناصر آرایه x می‌باشد. چرا که تمام عناصر به جز خود ور با pivot مقایسه می شوند. لذا :

جیدگی زمانی الگوریتم افراز در تمامی حالات : $T(n) = n - 1$

ی خود مرتب‌سازی سریع (QuickSort) فاقد پیچیدگی زمانی در هر حالت است لذا در بدترین حالت و الت متوسط آن را تحلیل می‌کنیم.

ی‌توان اثبات کرد بدترین حالت در مرتب‌سازی سریع هنگامی است که آرایه از قبل مرتب باشد چرا که یربرنامه Partition در هر بار مقدار left را به عنوان pivotpoint برمی‌گرداند و لذا آرایه به طور مکرر به صورت یک زیر آرایه خالی در سمت چپ و یک زیر آرایه با n - 1 عنصر در سمت راست افراز می‌شود. پس اریم:

$$W(n) = W(0) + W(n-1) + (n-1)$$

n - 1 زمان لازم برای افراز و W(0) زمان لازم برای مرتب‌سازی زیر آرایه سمت چپ (به طول صفر) است دیهی است که W(0) = 0 بوده و لذا پیچیدگی زمانی مرتب‌سازی سریع در بدترین حالت برابر است با :

$$W(n) = W(n-1) + (n-1) \quad : \text{برای } n > 0$$
$$W(0) = 0$$

ه کمک روش جایگذاری به سادگی اثبات می‌شود که برای مورد فوق :

$$W(n) = \frac{n(n-1)}{2} = \theta(n^2)$$

پس مرتب‌سازی سریع در بدترین حالت از مرتبه $\theta(n^2)$ است.

تذکر : می‌توان کاری کرد که بدترین حالت هنگامی که آرایه مرتب باشد، رخ ندهد، ولی پیچیدگی زمانی در بدترین حالت همچنان $\frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود.

برای تحلیل پیچیدگی زمانی در حالت میانگین فرض می‌کنیم احتمال آنکه PivotPoint برگردانده شده توسط روال Partition ، هر یک از اعداد 1 تا n باشد، یکسان است و بدیهی است که این احتمال برابر $\frac{1}{n}$ است.

پس داریم :

$$A(n) = (n-1) + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n}[A(p-1) + A(n-p)]$$

n - 1 زمان لازم برای افراز است. $\frac{1}{n}$ احتمال آنکه Pivotpoint برابر p باشد. A(p-1)+A(n-p) زمان میانگین برای مرتب‌سازی آرایه است، هنگامی که Pivotpoint برابر با p باشد.

می‌توان اثبات کرد حل معادله فوق برابر عبارت زیر می‌شود :

$$A(n) \approx 2(n+1)Ln\, n \in \theta(n \log n) \Rightarrow A(n) = \theta(n \log n)$$

پس پیچیدگی زمانی در حالت میانگین برای مرتب‌سازی‌های سریع و ادغام مساوی بوده و هر دو برابر $\theta(n \log n)$ هستند.

البته به بیانی ساده‌تر (ولی نه دقیق) می‌توان گفت که در حالت متوسط آرایه تقریباً نصب شده و Quick Sort دو باره خودش را با نصف آرایه صدا می‌زند یعنی رابطه زیر را داریم که $\theta(n)$ زمان افراز است :

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \theta(n) \Rightarrow T(n) = \theta(n \log n)$$

توجه کنید که به کمک قضیه اصلی $T(n) = \theta(n \log n)$ به دست آمده است.

نکته : پیچیدگی روش‌های ادغام و سریع به صورت زیر است :

	بهترین حالت	حالت متوسط	بدترین حالت
مرتب‌سازی سریع	O (n logn)	O (n logn)	$O(n^2)$
مرتب‌سازی ادغام	O (n logn)	O (n logn)	O (n logn)

ل چهارم : ضرب ماتریس‌های استراسن (Strassen)

ان‌طور که می‌دانید الگوریتم ساده ضرب ماتریس‌ها به صورت زیر است :

```
for (i=1;  i<= n; i++)
   for (j=1;   j <= n; j++) {
        C[i][j] = 0;
        for (k=1; k <=n;  k++)
            C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j];
   }
```

ه برنامه فوق دو ماتریس مربعی A و B را ضرب کرده و حاصل را در ماتریس C می‌ریزد. هر سه ماتریس $n\times$ هستند.

الگوریتم ساده فوق تعداد ضرب‌ها همواره برابر $T(n)=n^3$ است. تعداد جمع‌ها نیز در برنامه ساده فوق $T(n)=n$ می‌باشد. با تغییر ساده زیر می‌توان تعداد جمع‌ها را کاهش داد و به $T(n)=n^3-n^2$ رساند:

```
for (i=1;  i<= n; i++)
   for (j=1;   j <= n; j++) {
        C[i ,j] = A[i][1] * B[1][j]
        for (k=2; k <=n;  k++)
            C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j];
   }
```

س خلاصه در الگوریتم استاندارد ضرب ماتریس‌ها داریم :

تعداد ضرب‌ها	$=n^3=\theta(n^3)$
تعداد جمع‌ها	$=n^3-n^2=\theta(n^3)$

حال روش ضرب ماتریس‌ها را به صورت تقسیم و غلبه بیان می‌کنیم. اگر n توانی از 2 باشد می‌توان ماتریس‌های A و B را به چهار ماتریس کوچکتر که هر یک $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$ هستند تقسیم نمود:

$$\begin{matrix}\frac{n}{2}\\ \updownarrow\end{matrix}\overset{\frac{n}{2}\ \longleftrightarrow}{\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]}\times\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right]$$

C_{ij} های بالا را می‌توان با همان روش الگوریتم استاندارد ضرب ماتریس‌ها به دست آورد. یعنی :

$$C_{11}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}\ ,\ C_{12}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}$$
$$C_{21}=A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}\ ,\ C_{22}=A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}$$

گر در الگوریتم بالا عمل اصلی را تعداد ضرب‌ها درنظر بگیریم، آنگاه تعداد ضرب‌ها بـرای ماتریس‌هـای $n\times n$ به ۸ عملِ ضرب ماتریس‌های $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$ نیاز خواهند داشت. از طرف دیگر بدیهی است که ضـرب دو مـاتریس 1×1 فقط به یک عمل ضرب اسکالر نیاز دارد، لذا برای الگوریتم ساده تقسیم و غلبه ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\left.\begin{aligned}T(n)&=8T(\frac{n}{2})\\T(1)&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta(n^3)$$

یادآوری : نتیجه فوق از قضیه زیر به دست آمد که در فصل قبلی بیان کرده بودیم:

$$\begin{cases}T(n)=aT(\frac{n}{b})\\T(1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta(n^{\log_b^a}) & (a\neq1)\\\theta(\log_b^n) & (a=1)\end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود روش تقسیم و غلبه نیز مانند روش مستقیم از مرتبه $\theta(n^3)$ بوده و مزیتی ندارد. ولی در سال ۱۹۶۹ استراسن (Strassen) الگوریتمی را معرفی کرد که تعداد ضرب‌های آن از n^3 کمتر بوده و تقریباً $n^{2.81}$ بود که آن را در ادامه شرح می‌دهیم.

استراسن اثبات کرد که حاصل ضرب دو ماتریس $A\times B$ یعنی ماتریس C را می‌توان از روابط زیـر بـه دسـت آورد (برای حالت $n=2$ به سادگی می‌توانید آن را اثبات کنید) :

$$C=\begin{bmatrix}M_1+M_4-M_5+M_7 & M_3+M_5\\M_2+M_4 & M_1+M_3-M_2+M_6\end{bmatrix}$$

که M_i ها از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند :

$$M_1=(A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$$
$$M_2=(A_{21}+A_{22})B_{11}$$
$$M_3=A_{11}(B_{12}-B_{22})$$
$$M_4=A_{22}(B_{21}-B_{11})$$
$$M_5=(A_{11}+A_{12})B_{22}$$
$$M_6=(A_{21}-A_{11})(B_{11}+B_{12})$$
$$M_7=(A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$$

: برای ماتریس‌های زیر :

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&1&2&3\\4&5&6&7\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8&9&1&2\\3&4&5&6\\7&8&9&1\\2&3&4&5\end{bmatrix}$$

دار M_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$M_1=(A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})=$$
$$\left(\begin{bmatrix}1&2\\5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&3\\6&7\end{bmatrix}\right)\times\left(\begin{bmatrix}8&9\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&1\\4&5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3&5\\11&13\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}17&10\\7&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}86&75\\278&227\end{bmatrix}$$

فظ کردن فرمول‌های فوق لازم نیست ولی از فرمول‌های فوق نتیجه می‌شود که این تکنیک به ۷ عمل ضرب و ۱ عمل جمع و تفریق نیاز دارد در حالی که روش معمولی به ۸ عمل ضرب و ٤ عمل جمع نیاز داشت. پس با ن تکنیک یک عمل ضرب کم شده ولی در عوض ١٤ عمل جمع و تفریق اضافه شده است. مشاهده خواهید رد که برای مقادیر بزرگتر n ، در کل زمان مصرفی کاهش می‌یابد.

دیهی است که برای حالت $n=1$ یعنی ضرب ماتریس‌های 1×1 تنها به یک عمل ضرب و صفر عمل جمع تفریق نیاز داریم.

ا توجه به توضیحات فوق :

$$\text{تعداد ضرب‌ها در استراسن}=\begin{cases}T(n)=7T(\frac{n}{2})\Rightarrow T(n)=n^{\log_2^7}=n^{2.81}\\T(1)=1\end{cases}$$

و به همین ترتیب تعداد جمع‌ها برابر است با :

$$\text{تعداد جمع‌ها در استراسن}=\begin{cases}T(n)=7T(\frac{n}{2})+18(\frac{n}{2})^2\\T(1)=0\end{cases}$$

توجه کنید هنگامی که دو ماتریس $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$ با هم جمع یا تفریق می‌شوند، تمام خانه‌های متناظر آنها باید با هم جمع و یا تفریق شوند لذا ماتریس حاصل $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$ به تعداد $(\frac{n}{2})^2$ خانه دارد که به این میزان عمل جمع و یا تفریق اسکالر نیاز است.

می‌توان اثبات کرد (از اثبات صرف‌نظر می‌کنیم) که حل رابطه فوق به صورت زیر می‌شود:

$$\text{تعداد جمع‌ها در استراسن}=T(n)=6^{\log_2^7}-6n^2=6n^{2.81}-6n^2\in\theta(n^{2.81})$$

جدول زیر روش استراسن را با روش استاندارد مقایسه می‌کند :

عمل	روش استاندارد	روش استراسن
ضرب	n^3	$n^{2.81}$
جمع / تفریق	$n^3 - n^2$	$6n^{2.81} - 6n^2$

بنابراین روش استراسن کارآمدتر از روش استاندارد است.

نکته : می‌توان اثبات کرد ضرب ماتریس‌ها حداقل به زمان $\theta(n^2)$ نیاز دارد. ولی هنوز کسی نتوانسته است الگوریتمی از مرتبه ۲ برای ضرب ماتریس‌ها ابتدا کند و از طرف دیگر تا کنون نیز کسی نتوانسته اثبات کند نوشتن چنین الگوریتمی غیرممکن است.

مثال پنجم : ضرب اعداد صحیح بزرگ

همان‌طور که می‌دانید اعداد صحیح بزرگ را می‌توان توسط آرایه ذخیره کرد. مثلاً عدد بزرگ 8,173,963,563 را به صورت زیر ذخیره می‌کنیم :

a[10]	a[9]	a[8]	a[7]	a[6]	a[5]	a[4]	a[3]	a[2]	a[1]
8	1	7	3	9	6	3	5	6	3

برای تعیین مثبت یا منفی بودن عدد هم کافی است آخرین خانه سمت چپ را به عنوان علامت درنظر بگیریم که اگر مثلاً صفر باشد یعنی مثبت و اگر 1 باشد یعنی منفی.

الگوریتم‌های جمع و تفریق اعداد صحیح بزرگ بسیار ساده بوده و از مرتبه $O(n)$ می‌باشد که به عنوان تمرین بهتر است آنها را بنویسید. بحث ما در اینجا بر سر ضرب اعداد صحیح بزرگ است که در حالت مستقیم معمولی از مرتبه $O(n^2)$ می‌باشد، چرا که هر یک از ارقام عدد دوم در تمامی ارقام عدد اول ضرب می‌شود.

در ادامه یک روش تقسیم و غلبه برای ضرب اعداد صحیح بزرگ ارائه می‌کنیم.

در حالت کلی عدد صحیح u با n رقم را می‌توان به صورت زیر نشان داد :

$$u = x \times 10^m + y$$

که x حاوی $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ رقم، y حاوی $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ رقم و $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ است. مثلاً :

$$967345 = 967 \times 10^3 + 345$$
$$8967345 = 8967 \times 10^3 + 345$$

حال دو عدد صحیح n رقمی u و vرا به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$u = x \times 10^m + y \quad , \quad v = w \times 10^m + z$$

ضرب این دو عدد به صورت زیر خواهد بود:

$uv = (x \times 10^m + y)(w \times 10^m + z) = xw \times 10^{2m} + (xz + wy) \times 10^m + yz$

پس ضرب u در v به چهار عمل ضرب روی اعداد صحیح با نیمی از ارقام نیاز دارد. توجه کنید که ضرب یک عدد در 10^m یا 10^{2m} به سادگی در زمان O(n) صورت می‌پذیرد. مثلاً :

$567,832 \times 9\,,\, 423,723 = (567 \times 10^3 + 832)(9423 \times 10^3 + 723)$

$= 567 \times 9423 \times 10^6 + (567 \times 723 + 9423 \times 832) \times 10^3 + 832 \times 723$

پس ما مرتب اعداد را تقریباً نصف می‌کنیم و آنها را در هم ضرب می‌کنیم. این عملیات تقسیم کردن را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا هنگامی که به یک مقدار آستانه (threshold) برسیم که در آن عمل ضرب به طریق استاندارد انجام پذیرد، مثلاً ممکن است در یک کامپیوتر عمل ضرب اعداد چهار رقمی به شیوه معمول سریع‌تر از روش تقسیم و غلبه فوق باشد.

پیاده‌سازی الگوریتم ضرب فوق به صورت زیر است :

```
Large_int  prod (Large_int  u, Large_int  v)
  {
  Large_int  x,y,w,z;
   int  n,m ;
   n = Maximum (number of digits in u, number of digits in v)
   if (u == 0 || v == 0)   return  0;
   else  if(n <= threshold)
        return   u × v;
    else  {
         m = ⌊n / 2⌋ ;
         x = u  divide  10^m ;    y = u  rem  10^m ;
        w = v  divide  10^m ; z = v  rem  10^m;
        return  prod (x,w) × 10^2m + (prod(x,z) + prod(w,y)) × 10^m + prod (y,z);
    }
}
```

توجه کنید عملیات 10^m rem یعنی باقی‌مانده تقسیم بر 10^m و عملیات 10^m divide یعنی تقسیم صحیح بر 10^m که به راحتی در زمان O(n) قابل پیاده‌سازی هستند. از آنجا که در الگوریتم فوق تابع prod چهار بار خودش را با اندازه $\frac{n}{2}$ صدا می‌زند و عملیات جانبی مثل جمع و تفریق و rem و divide همگی از مرتبه O(n) هستند پس برای الگوریتم فوق، پیچیدگی زمانی از رابطه زیر به دست می‌آید (C یک ضریب ثابت است):

$$\left.\begin{array}{l} W(n) = 4W(\frac{n}{2}) + Cn \\ W(s) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow W(n) = \theta(n^{\log_2^4}) = \theta(n^2)$$

جواب فوق از قضیه اصلی در فصل قبلی به دست آمده است. مقدار s همان مقدار آستانه است که به ازای آن دیگر نمونه تقسیم نمی‌شود.

الگوریتم فوق از درجه n^2 بوده و در نتیجه کند است. با یک تغییر می‌توان مرتبه اجرای الگوریتم را پائین‌تر آورد. همان‌طور که در بالا مشاهده کردید تابع prod بایدموارد زیر را محاسبه کند :

xw , xz + yw , yz

یعنی تابع prod بایستی چهار بار برای محاسبه xw ، xz ، yw و yz صدا زده شود. حال روابط مذکور را قدری دستکاری می‌کنیم :

xz + yw = (x+y) (w+z) -xw -yz

یعنی ابتدا xw و yz را به دست آورده و سپس به کمک عبارت سمت راست رابطه فوق مقدار xz+yw را با یک عمل ضرب به دست می‌آوریم. سپس در کل به جای ٤ ضرب به ۳ ضرب نیاز خواهیم داشت. لذا:

$$\left.\begin{array}{l} W = 3W(\frac{n}{2}) + Cn \\ W(s) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow W(n) = \theta(n^{\log_2^3})$$

مثال ششم : یافتن بزرگترین و کوچکترین کلیدها

همان‌طور که می‌دانید الگوریتم استاندارد یافتن بزرگترین عنصر (و شبیه آن کوچکترین عنصر) در یک آرایه S با n عنصر به صورت زیر است :

```
max  = S[1];
for (i=2  ;  i <= n;  i++)
    if (S[i] > max)
        max = S[i];
```

اندیس‌های آرایه S را از 1 تا n در نظر گرفته‌ایم. بدیهی است که اگر عمل اصلی را تعداد مقایسه کلیدها در نظر بگیریم آنگاه این تعداد برابر است با : $T(n) = n - 1$

می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد :

هر الگوریتمی که بتواند بزرگترین کلید را بین n کلید (برای هر ورودی دلخواه) فقط با مقایسه کلیدها بیابد، باید در هر حالت حداقل n - 1 مقایسه را انجام دهد.

توجه کنید که اگر مثلاً آرایه مرتب شده باشد، بزرگترین کلید بدون هیچ مقایسه‌ای به دست می‌آید، لذا در قضیه فوق روی عبارت «هر ورودی دلخواه» تأکید شده است.

حال اگر بخواهیم به شیوه مستقیم، بزرگترین و کوچکترین عنصر یک آرایه را پیدا کنیم، یک الگوریتم ساده به صورت زیر است :

مقایسه نیز در ابتدای کار و بیرون حلقه انجام می‌پذیرد لذا مرتبه اجرایی برنامه فوق در تمامی حالات برابر است با:

$$T(n)=1+(\frac{n}{2}-1)\times 3 \Rightarrow T(n)=\frac{3n}{2}-2$$

به عنوان تمرین برنامه فوق را برای n های فرد بازنویسی کرده و نشان دهید که برای n های فرد پیچیدگی زمانی برابر است با :

$$T(n)=\frac{3n}{2}-\frac{3}{2}$$

لذا در کل داریم :

$$T(n)=\begin{cases}\frac{3n}{2}-2 & \text{اگر n زوج باشد}\\ \frac{3n}{2}-\frac{3}{2} & \text{اگر n فرد باشد}\end{cases}$$

قضیه : هر الگوریتمی که بتواند کوچکترین و بزرگترین کلیدها را در بین n عنصر از هر ورودی ممکن، تنها با مقایسه کلیدها پیدا کند در بدترین حالت، حداقل به تعداد مقایسه‌های فوق نیاز خواهد داشت.

حال با روش تقسیم و غلبه مسأله بالا را حل می‌کنیم. یعنی آرایه اولیه را به دو آرایه هر کدام با $\frac{n}{2}$ عنصر تقسیم می‌کنیم. آنگاه بزرگترین و کوچکترین عنصر هر دو آرایه را می‌یابیم. بعد از آن بین دو عدد بزرگترین، بزرگتر را و بین دو عدد کوچکترین، کوچکتر را به عنوان جواب برمی‌گردانیم.

در برنامه زیر آرایه S حاوی اندیس‌های low .. high بوده و خروجی تابع توسط پارامترهای min و max برگردانده می‌شود :

```
find  (low, high, S, max, min)
{
    if (low == high)   {  max=min=S[low];    return;}
        if (low == high - 1)
        {
            if (S[low] < S[high])
                  { max = S[high];    min = S[low];  }
            else  { max = S[low];    min = S[high];  }
          return ;
        }
mid = (low + high) / 2 ;
find (low, mid, S, max1, min1);
find (mid+1, high, S, max2, min2);
max = Maximum (max1, max2);
min = Minimum (min1, min2);
}
```

پیچیدگی زمانی الگوریتم فوق از رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید :

$$T(n)=\begin{cases}0 & \text{اگر } n=1\\ 1 & \text{اگر } n=2\\ T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)+T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+2\end{cases}$$

با حل رابطه فوق به نتیجه زیر می‌رسیم :

$$T(n)=\begin{cases}\frac{3n}{2}-2 & n=2k\\ \frac{3n}{2}-\frac{3}{2} & n=2k+1\end{cases}$$

مثال هفتم : مسأله انتخاب

مسأله انتخاب (Selection) پیدا کردن k امین بزرگترین کلید یا k امین کوچکترین کلید در لیستی از n کلید می‌باشد. البته در این مسأله فرض می‌کنیم آرایه نامرتب است چرا که اگر آرایه مرتب باشد به سادگی جواب به دست می‌آید.

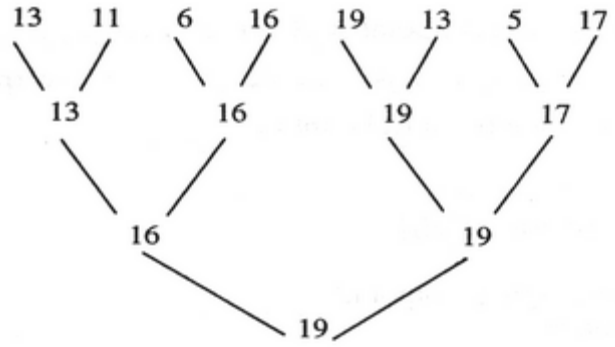
یک راه ساده برای حل مسأله فوق آن است که ابتدا لیست را مرتب کرده و سپس k امین عنصر را استخراج کنیم که در این حالت مرتبه الگوریتم $\theta(n \log n)$ خواهد بود. ولی در ادامه روش‌هایی سریع‌تر که از مرتبه $\theta(n)$ هستند را معرفی می‌کنیم. درحالت کلی این مسأله را می‌توان در زمان $\theta(n)$ حل کرد.

حالت خاص اول که $k = 1$ باشد همان ماکزیمم یا مینیمم‌یابی است که در قسمت قبلی حل کردیم. لذا ابتدا حالت خاص دوم که $k = 2$ است را در نظر می‌گیریم یعنی یافتن بزرگترین کلید دوم.

یافتن بزرگترین کلید دوم

یک روش ساده آن است که با الگوریتم استاندارد یافتن بزرگترین کلید در زمان $T_1(n)=n-1$ عنصر ماکزیمم را یافته آن را کنار بگذاریم، سپس در زمان $T_2(n)=n-2$ بزرگترین عنصر را در $n - 1$ داده باقی مانده به دست آوردیم که در کل $T(n) = 2n-3$ می‌شود. ولی با تکنیک تورنمنت می‌توان این زمان را کاهش داد.

روش تورنمنت همان روشی است که در مسابقات ورزشی حذفی استفاده می‌شود. فرض کنیم ۸ عدد به صورت درخت زیر با یکدیگر مسابقه دهند و هر بار برنده عدد بزرگتر باشد :



برای حالت $n = 8$ به سه دور مسابقه و در کل ۷ مسابقه نیاز است و در حالت کلی $\lceil \log_2 n \rceil$ دور مسابقه و $n-1$ مسابقه نیاز داریم. با توجه به شکل فوق مشخص است که برنده دور آخر، حتماً بزرگترین کلید است ولی بازنده این دور الزاماً بزرگترین کلید دوم نیست. در شکل فوق بازنده دور آخر 16 است در حالی که دومین کلید بزرگتر 17 می‌باشد.

برای یافتن بزرگترین کلید دوم می‌توانیم کلیدهایی را که به بزرگترین کلید باخته‌اند در نظر بگیریم و سپس با الگوریتم ساده، ماکزیمم‌یابی بزرگترین آنها را پیدا کنیم. مثلاً در شکل فوق باید ماکزیمم لیست [13,17,16] را بیابیم که 17 می‌شود. از آنجا که تعداد عناصر لیست $\lceil \log n \rceil$ می‌باشد پس تعداد مقایسه‌های لازم در این لیست $\lceil \log_2 n \rceil - 1$ است. از طرف دیگر برای یافتن بزرگترین عدد (در مثال فوق عدد 19) به $n-1$ مقایسه نیاز داشتیم لذا تعداد کل مقایسه‌های لازم برای یافتن کلید دوم برابر است با :

$$T(n) = (n-1) + \lceil \log_2 n \rceil - 1 = n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$$

قضیه : هر الگوریتمی که بتواند بزرگترین کلید دوم را برای هر ورودی دلخواه تنها با مقایسه کلیدها پیدا کند، باید در بدترین حالت حداقل تعداد مقایسه‌های زیر را انجام دهد :

$$\boxed{n + \lceil \log_2 n \rceil - 2}$$

یافتن کوچکترین کلید k ام

برای حل این مسأله از تابع **partition** که در الگوریتم مرتب‌سازی سریع بیان کردیم، استفاده می‌کنیم. روال partition آرایه ورودی را به گونه‌ای افراز می‌کرد که همه کلیدهای کوچکتر از عنصر محوری، قبل از آن و همه عناصر بزرگتر از محور، بعد از آن قرار می‌گرفتند. مکانی که عنصر محوری در آن قرار می‌گرفت را pivotpoint نامگذاری کرده بودیم. حال با تکنیک تقسیم و غلبه مسأله انتخاب را با افراز کردن تا هنگامی که

عنصر محوری در محل k ام قرار گیرد، حل می‌کنیم. اگر k کوچکتر از pivotpoint باشد، زیر آرایه سمت چپی را به صورت بازگشتی افراز می‌کنیم و اگر k بزرگتر از pivotpoint باشد، زیر آرایه سمت راستی را افراز می‌کنیم. هنگامی که k = pivotpoint شد، کار تمام است. الگوریتم مورد نظر به صورت زیر است:

```
int selection (int  x[ ] ,  int left, int right, int k)
{
   int   pivotpoint;
   if (left == right)     return   x[left];
   else {
        partition (x, low, high, pivotpoint);
        if(k == pivotpoint)
              return    x[pivotpoint];
        else   if(k < pivotpoint)
              return   selection (x, left, pivotpoint-1, k);
       else
             return   selection(x, pivotpoint +1 , right, k);
   }
}
void  partition (int x[ ], int left, int right, int & pivotpoint)
{
   int  i,j,pivot;
   j=left;    pivot = x[left];
   for (i=left+1;   i <= right ;  i++)
          if (x[i] < pivot)  {
                j ++;
                swap (x[i] , x[j]);
          }
   swap (x[left], x[j]);
   pivotpoint = j;
}
```

توجه کنید روال partition دقیقاً همان روال گفته شده در مرتب‌سازی سریع است فقط به زبان C نوشته شده است. در زبان C++ متغیر خروجی با علامت & مشخص می‌شود که معادل Var پاسکال است. پس در خط اول عنوان تابع partition عبارت int & pivotpoint به این معناست که خروجی این تابع توسط متغیر pivotpoint برگردانده می‌شود. در اینجا نیز بدترین حالت وقتی رخ می‌دهد که آرایه به ترتیب صعودی مرتب باشد و k= n را بخواهیم. در این حالت ورودی هر فراخوانی بازگشتی حاوی یک عنصر کمتر است و بنابراین مشابه بدترین حالت مرتب‌سازی سریع $W(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود. بهترین حالت نیز هنگامی رخ می‌دهد ک pivotpoint آرایه را از وسط افراز کند چرا که در این صورت ورودی در هر فراخوانی بازگشتی نصف می‌شود. می‌توان اثبات کرد حالت متوسط الگوریتم فوق $A(n) \approx 3n = \theta(n)$ است.

با آنکه مرتب‌سازی در حالت متوسط از مرتبه $\theta(n \log n)$ بود ولی الگوریتم فوق در حال متوسط از مرتبه $\theta(n)$ می باشد علت آن است که تابع مرتب‌سازی سریع در هر بار دوبار خودش را فراخوانی می‌کند ولی تابع selection تنها یک فراخوانی دارد.

تذکر : با آنکه الگوریتم فوق در بدترین حالت $\theta(n^2)$ بود ولی می‌توان با اصلاح کردن آن کاری کرد که مسأله انتخاب در بدترین حالت از مرتبه $\theta(n)$ یعنی خطی باشد.

هایفیل (۱۹۷۶) اثبات کرد که حد پائین برای یافتن k امین کوچکترین کلید در مجموعه n کلیدی (برای $k>1$) به صورت زیر می‌باشد :

$$n + (k-1)\left\lceil \log_2\left(\frac{n}{k-1}\right)\right\rceil - k \quad \in \theta(n)$$

توجه کنید که برای $k = 2$ قبلاً اثبات کردیم $W(n) = n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$ است که حالت خاصی از فرمول بالا می باشد.

کجا نباید از تقسیم و غلبه استفاده کرد

در صورت امکان در موارد زیر از روش تقسیم و غلبه استفاده نمی‌کنیم چرا که مرتبه الگوریتم نمایی می‌شود:

۱ـ هنگامی که نمونه‌ای با اندازه n به دو یا چند نمونه تقسیم شود که اندازه آنها نیز تقریباً برابر n است، مثلاً :

$$T(n) = 2T(n-1) \Rightarrow T(n) = \theta(2^n)$$

۲ـ هنگامی که نمونه‌ای با اندازه n ، تقریباً به n نمونه با اندازه $\frac{n}{c}$ تقسیم شود که c یک مقدار ثابت است.

توجه کنید که همه مسائل را نمی‌توان به نمونه‌های کوچکتر تقسیم کرد و سپس نتایج حاصله را با هم ترکیب نمود. مثلاً اگر بخواهیم بزرگترین عدد بین ۲۰ عدد را پیدا کنیم می‌توان آن را به دو دسته ۱۰ تایی تقسیم کرد، سپس ماکزیمم هر دسته را یافته و با مقایسه این دو بزرگترین را پیدا کرد. ولی مثلاً در مورد یک دستگاه ۲۰ معادله ۲۰ مجهولی نمی‌توان آن را به دو دستگاه کوچکتر ۱۰ معادله ۱۰ مجهول تقسیم کرد.