بخشی از جزوه و تمرینهای درس

تئوری احتمالات

Probability Theory

استاد: دکتر میرزازاده

تمرین های درس مبانی احتمالات

۱- ثابت کنید پیشامد B ناممکن است اگر و تنها اگر برای هر پیشامد A داشته باشیم:

$$A=(B\cap A^c)\cup(B^c\cap A)$$

۲- تنها با ارقام ۲، ۴، ۶، ۸ و ۹ چند عدد چهار رقمی می‌توان درست کرد؟ چند عدد از این اعداد ارقام تکراری دارند؟

۳- شخصی به ۶ زبان آشناست. برای ترجمه یک کتاب مستقیماً از زبانی به زبان دیگر به چند فرهنگ لغت نیاز دارد؟

۴- در مسابقه‌ای یازده نفر شرکت دارند که از آنها سه نفر آمریکایی، دو نفر مکزیکی، سه نفر روسی، سه نفر ایتالیایی اند. اگر نتیجهٔ مسابقات تنها برحسب ملیت شرکت کنندگان اعلام شود تعداد برآمدهای ممکن چقدر است.

۵- تعداد جایگشتهای متمایز حروف واژهٔ MISSISSIPPI چقدر است؟

۶- برای پیوستن به یک انجمن هر کس باید آماردان یا ریاضی دان و یا هر دو باشد. از ۲۵ نفر اعضای این انجمن، ۱۹ نفر آماردان، ۱۶ نفر ریاضی دان هستند، چند نفر از اعضای این انجمن هم آماردان و هم ریاضی دان هستند؟

۷- با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت که بر چهار قابل قسمت باشد؟ (تکرار ارقام مجاز است)

الف: ۱۲۵ ب: ۲۱۵ ج: ۲۵۱ د: ۵۱۲ /

۱- اگر پنج کتاب ریاضی، شش کتاب زیست شناسی، هشت کتاب تاریخ و سه کتاب ادبیات را به تصادف در قفسه ای قرار دهیم، احتمال آنکه همه کتابهای ریاضی پهلوی هم قرار گیرند چقدر است؟

۲- پنج پسر و پنج دختر به تصادف در یک ردیف می نشینند. احتمال آنکه پسرها پهلوی هم و دخترها پهلوی هم قرار گیرند چقدر است؟

۳- شهری شش پارک دارد. در یک روز تعطیل شش نفر همکلاسی بدون قرار قبلی و بدون اطلاع از تصمیم یکدیگر پارکی را به تصادف انتخاب کرده و در زمان معینی به آنجا می روند. احتمال آنکه حداقل دو نفر از این همکلاسیها به یک پارک بروند چقدر است؟

۴- گیریم فضای متغیر تصادفی X به شرح $A=\{x; 0<x<1\}$ باشد، اگر $A_1=\{x; 0<x<\frac{1}{2}\}$ و $p(A_1)=\frac{1}{4}$ احتمال $p(A_2)$ را محاسبه کنید $A_2=\{x; \frac{1}{2}\leq x<1\}$

۵- گیریم $A_1=\{x; \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\}$ ، $A_2=\{x; \frac{1}{2}\leq x<1\}$ زیرمجموعه های $A=\{x; 0<x<1\}$ یعنی فضای متغیر تصادفی X و $P(A_1)=\frac{1}{8}$ و $p(A_2)=\frac{1}{2}$ باشد مطلوبست محاسبه

الف) $P(A_1\cup A_2)$ ب) $p(A_1'\cup A_2')$

۶- فرض کنیم $A_1=\{(x,y);\ x\leq ۲,\ y\leq ۴\}$ و $A_۲=\{(x,y);\ x\leq ۲,\ y\leq ۱\}$

$A_۳=\{(x,y);\ x\leq ۰,\ y\leq ۴\}$ و $A_۴=\{(x,y);\ x\leq ۰,\ y\leq ۱\}$

زیرمجموعه‌های از یک فضای دوبعدی باشند اگر $P(A_1)=\frac{۷}{۸}$ و $P(A_۲)=۴/۸$

و $P(A_۳)=۳/۸$ و $P(A_۴)=۲/۸$ باشد مطلوبست $P(A_۵)$ وقتی که:

$A_۵=\{(x,y);\ ۰<x\leq ۲,\ ۱<y\leq ۴\}$

۷- فرض کنید $f(x_1,x_2)=۴x_1x_2,\ ۰<x_1<۱,\ ۰<x_2<۱$ ت. چ. ا. x_1 و x_2 باشد مطلوبست محاسبه:

الف) $Pr(۰<x_1<۱/۲,\ ۱/۴<x_2<۱)$

ب) $Pr(x_1\leq x_2)$

ج) $Pr(x_1<x_2)$

د) $Pr(x_1=x_2)$

۸- با توجه به تابع پخش زیر احتمال‌های مورد نظر را محاسبه کنید.

$$F(x)=\begin{cases} ۰ & x<-۱ \\ \frac{x+۲}{۴} & -۱\leq x<۱ \\ ۱ & ۱\leq x \end{cases}$$

الف) $Pr(-۱/۲<x\leq ۱/۲)$ ب) $Pr(x=۰)$

ج) $Pr(x=۱)$ د) $Pr(۲\leq x\leq ۳)$

۹- از بین نخستین ۲۰ عدد درست و مثبت، سه عدد درست متمایز به تصادف انتخاب می‌کنیم مطلوبست احتمال اینکه الف) مجموع آنها زوج باشد؟

ب) حاصل ضرب آنها زوج باشد؟

۱۰- از بین نخستین ۱۰ عدد درست و مثبت ۴ عدد متمایز به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. گیریم متغیر تصادفی X نمایش عددی باشد که از کوچکترین آنها بزرگتر و از بقیه کوچکتر است. ت. ج. ا X را بدست آورید؟

۱۱- اگر X و Y دارای ت. ج. ا زیر باشند.

$$f(x,y)=1/3 \qquad (x,y)=(0,0),(0,1),(1,1)$$

مطلوبست $E\left[(X-1/3)(Y-2/3)\right]$

۱۲- فرض کنید که ت. ج. ا X و Y به شکل زیر است:

$$f(x,y)=2 \qquad 0<x<y \quad \text{و} \quad 0<y<1$$

نشان دهید $E(XY) \neq E(X)\cdot E(Y)$

۱۳- گیریم X دارای ت. ج. ا $f(x)$ است که در نقاط ۰ و ۱ و ۱- مثبت و در سایر جاها صفر باشد. اگر $f(0)=1/2$ باشد مطلوبست $E(X^2)=?$ و همچنین اگر $f(0)=1/2$ و $E(X)=1/6$ مطلوبست محاسبه $f(1)$ و $f(-1)$.

۱۴- ظرفی حاوی ۱۰ کاغذ می‌باشد که روی ۸ تای آنها دو دلاری نوشته شده و روی دو تای آنها ۵ دلاری نوشته شده است. به تصادف و بدون جایگذاری ۳

... شه کاغذ از ظرف بیرون آورده و هر بار به اندازه مجموع مبلغی که روی سه کاغذ نوشته شده پول دریافت می‌کند. امید ریاضی پول را بیابید؟

۱۵- میانگین و واریانس توزیع زیر را تعیین کنید؟

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{8} & 0 \le x < 2 \\ \dfrac{x^2}{16} & 2 \le x < 4 \\ 1 & 4 \le x \end{cases}$$

۱۶- اگر $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \qquad 0 < x_1 < 1$ و $0 < x_2 < 1$

ت.چ.ا توام x_1 و x_2 باشد، میانگین و واریانس شرطی x_2 را به شرط $x_1 = x_1$ ، $0 < x_1 < 1$ محاسبه کنید؟

۱۷- ت.چ.ا توام دو متغیر تصادفی x_1 و x_2 عبارت است از

$$f(x_1, x_2) = 12 x_1 x_2 (1 - x_2) \qquad 0 < x_1 < 1 \text{ و } 0 < x_2 < 1$$

نشان دهید که این دو متغیر تصادفی مستقل از هم می‌باشند؟

۱۸- بفرض آنکه دو متغیر تصادفی x_1 و x_2 مستقل از هم باشند و $P_r(a < x_1 < b) = 2/3$ و $P_r(c < x_2 < d) = \frac{5}{8}$ باشد، احتمال اجتماع دو پیشامد زیر را بیابید؟

$(a < x_1 < b ,\ -\infty < x_2 < \infty)$ و $(-\infty < x_1 < \infty ,\ c < x_2 < d)$

۱۹- فرض کنید $0 < x_1 < x_2$ و $1 > x_2 > 0$ و $0 < x_2 < 1$ و $f(x_1 | x_2) = \frac{c_1 x_1}{x_2^2}$

$f_2(x_2) = c_2 x_2^4$ به ترتیب نمایش ت.چ.ا. مشروط x_1 به شرط $x_2 = x_2$ و ت.چ.ا. کناری x_2 باشند مطلوبست

الف) c_1 و c_2

ب) ت.چ.ا. توام x_1 و x_2

ج) $Pr(1/4 < x_1 < 1/2 \mid x_2 = 5/8)$

د) $Pr(1/4 < x_1 < 1/2)$

۲۵- یک سکه درست را ۵ بار بطور مستقل پرتاب می‌کنیم مطلوبست تعیین احتمال داشتن ۵ شیر در صورتیکه می‌دانیم دست کم سه شیر آمده است؟

۲۱- یک پاره خط افقی بطول ۵ را به تصادف به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. اگر طول قطعه سمت چپ را با x نشان دهیم مطلوبست: الف) ت.چ.ا. متغیر x

ب) امید ریاضی طولهای سمت چپ و راست

ج) امید ریاضی حاصلضرب طولهای چپ و راست.

۲۲- اگر x دارای ت.چ.ا. زیر باشد.

$$f(x) = 1/x^2 \qquad 1 < x < \infty$$

مطلوبست میانگین و واریانس x

۲۳- فرض کنید ت.چ.ا. توام دو متغیر پیوسته x_1 و x_2 بشکل زیر است

$$f(x_1, x_2) = 2 \qquad 0 < x_1 < x_2 < 1$$

مطلوبست: الف) $f_1(x_1)$ ب) $f_2(x_2)$

ج) $f(x_1/x_2)$ د) میانگین و واریانس مشروط x_1 به شرط $x_2 = x_2$

۲۴- فرض کنید ت.ج. ا توأم x_1 و x_2 عبارتست از

$x_2 = 1, 2$ $x_1 = 1, 2, 3$ $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{21}$ باشد مطلوبست:

الف) $Pr(x_1 = 3) = ?$ ب) $Pr(x_2 = 2) = ?$

ج) $f_1(x_1) = ?$ د) $f_2(x_2) = ?$

۲۵- تابع چگالی احتمال X بصورت زیراست:

$f_X(x) = a + bx^2 \qquad 0 \leq x \leq 1$

اگر $E(x) = 3/5$ باشد a و b را بدست آورید؟

۲۶- اگر جامعه ای از اعداد ۱ و ۲ و ۳ تشکیل شده باشد و یک نمونه دوتائی تصادفی و بدون جایگذاری از این جامعه گرفته شود، احتمال آنکه میانگین نمونه بین ۱ و ۲ باشد چقدر است؟

الف - $1/6$ ب - $1/12$ ج - $\frac{1}{2}$ د - $1/3$

۲۷- اگر نمونه های دوتائی در مسئله قبل را با x_1 و x_2 نشان دهیم، $E(x_1 + x_2)$ چقدر است؟

الف - $7/2$ ب - $17/6$ ج - $\frac{17}{12}$ د - $\frac{17}{2}$

۲۸- امید ریاضی $E(x-a)^2$ وقتی حداقل می شود که a برابر باشد با:

الف - $a < 0$ ب - $a = 0$ ج - $a = E(x)$ د - $Pr(x \leq a) = 0.5$

۲۹- اگر $Pr(A)>0$ و $Pr(B)>0$ ، $Pr(A)<Pr(A|B)$ آنگاه

الف - $Pr(B)>Pr(A)$

ب : $Pr(B)<Pr(B|A)$

ج - $Pr(B)\geq Pr(B|A)$

د - $Pr(B)\leq Pr(B|A)$

۳۰- امید ریاضی عبارت $(X-a)^2$ وقتی حداقل می‌شود که ، مقدار a برابر باشد

با : الف : $a<0$ ب - $a=0$ ج - $a=\mu_x$ د - $0<a<1$

۳۱- در ظرفی ۵ مهره با شماره‌های ۱، ۲، ... ۵ وجود دارد ، نمونه‌ای تصادفی به حجم ۳ بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم ، اگر متغیر تصادفی X سومین شماره انتخاب شده باشد $E(X)$ برابر است با :

الف - ۱٫۵ ب - ۲ ج - ۲٫۵ د - ۳٫۵

۳۲- اگر $Pr(F)=Pr(E)=0.6$ و $Pr(E|F)=0.8$ باشد کدامیک از موارد زیر درست است؟

الف - $Pr(E|\bar{F})=0.2$

ب - $Pr(E|F)=0.3$

ج - $Pr(E|\bar{F})=0.5$

د - $Pr(\bar{E}|\bar{F})=0.5$

۳۳- تابع چگالی توام متغیرهای تصادفی X, Y عبارت است از

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & x+y<1 \text{ و } x>0,\ y>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$f(y|x)$ کدام است؟

الف - $1-x$ ب - $1/(1-x)$ ج - $2(1-x)$ د - $2/(1-x)$

۳۴- اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند که هر کدام مقادیر ۱ و ۱- را می‌پذیرند ، و همچنین داشته باشیم که $Pr(X_i=1)=Pr(X_i=-1)=1/2$

برای $i=1,2$ آنگاه

۸

الف : X_1 و $X_1 X_2$ مستقل از هم اند.

ب : X_1 و $X_1 + X_2$ مستقل از هم اند.

ج : X_1 و $X_1 - X_2$ مستقل از هم اند.

د : هیچکدام.

9

۱- از یک دست ورق بازی معمولی، ورق ها را پی در پی، بدون جایگذاری به تصادف استخراج می کنیم، احتمال آنکه تک سوم در دفعه ششم استخراج شود، را محاسبه کنید.

۲- جعبه ای حاوی ۱۶ مهره است که ۶ تا سرخ، ۷ تا سفید و ۳ تا آبی است. اگر به تصادف ۴ مهره بدون جایگذاری برداریم احتمال های زیر را پیدا کنید.

الف- هر چهار مهره سرخ   ب- هیچ مهره سرخ   ج- از هر رنگ حداقل یک مهره

۳- شخصی ۱۰ بلیط از ۱۰۰۰ بلیط لاتاری خریده است برای تعیین برندگان ۵ جایزه موجود، ۵ بلیط بدون جایگذاری به تصادف استخراج می کنیم مطلوبست محاسبه احتمال آنکه شخص دست کم برنده یک جایزه گردد.

۴- در یک مجموعه ۵۰ لامپی، دو لامپ معیوب وجود دارد. از بین آنها ۵ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری برای آزمایش انتخاب می کنیم.

الف) احتمال آنکه دست کم یکی از لامپ های معیوب انتخاب گردد.

ب) چند لامپ باید مورد آزمایش قرار گیرند تا احتمال یافتن دست کم یک لامپ معیوب از ۱/۲ تجاوز نکند؟

۵- جعبه ای حاوی ۸ مهره است سه تا سرخ و ۵ تای دیگر آبی هستند چهار مهره پی در پی بدون جایگذاری به تصادف استخراج می کنیم مطلوبست محاسبه احتمال آنکه:

الف) رنگ مهره ها متناوباً متفاوت باشد؛

ب) اولین مهره آبی در دفعه سوم ظاهر شود.

۶- در کشوئی هشت جفت جوراب وجود دارد اگر شش جوراب را به تصادف و بدون جایگذاری استخراج کنیم، احتمال اینکه دست کم یک جفت جوراب کامل در بین این شش جوراب باشند چقدر است؟

۷- جعبه‌ای حاوی ۱۰ مهره است چهار تا سرخ، ۵ تا سفید و یکی از آنها آبی است اگر سه مهره به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کنیم مطلوبست محاسبه احتمال اینکه از هر رنگ یک مهره داشته باشیم به شرط اینکه بدانیم بین این سه مهره درست یکی سرخ است؟

۸- در جعبه I، سه مهره سرخ و ۷ مهره آبی و در جعبه II، ۶ مهره سرخ و ۴ مهره آبی وجود دارد. یک جعبه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن یک مهره به تصادف در می‌آوریم.

الف) احتمال اینکه این مهره سرخ باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که مهرهٔ استخراج شده سرخ است، احتمال مشروط استخراج این مهره از جعبه II چقدر است؟

۹- جعبه I دارای ۶ مهره سرخ و ۴ مهره آبی است، ۵ تا مهره از این ۱۰ مهره را به تصادف و بدون جایگذاری به جعبه II که خالی است انتقال می‌دهیم، سپس از جعبه II به تصادف یک مهره خارج می‌کنیم، به فرض اینکه مهره آبی باشد، پیدا کنید احتمال مشروط اینکه از جعبه I، ۲ مهره سرخ و سه مهره آبی به جعبه II منتقل کرده باشیم.

۱۰- اگر X ، $b(n,p)$ باشد نشان دهید که :

$$E(\frac{X}{n}) = P \qquad E[(\frac{X}{n}-p)^2] = \frac{P(1-P)}{n}$$

۱۱- گیریم Y شماره پیروزیها در n تکرار مستقل یک آزمایش تصادفی باشد که در آن احتمال پیروزی در هر آزمایش برابر $p = 1/4$ است کوچکترین مقدار n را بیابید که $Pr(1 \le Y) \ge 0.7$ باشد.

۱۲- فرض کنید X و Y به ترتیب $b(2,p)$ و $b(4,p)$ باشند اگر $Pr(X \ge 1) = \frac{5}{9}$ باشد $Pr(Y \ge 1)$ را حساب کنید؟

۱۳- از یک دست ورق بازی معمولی ۵۲ تایی ۵ ورق به تصادف و بدون جایگذاری برداشتیم احتمال اینکه هر ۵ ورق پیک باشند، بفرض اینکه می‌دانیم دست کم چهار تا از این ۵ ورق پیک است، چقدر است؟

۱۴- اگر توزیع A یک توزیع دوجمله‌ای با احتمال موفقیت $1/3$ و توزیع B یک توزیع دوجمله‌ای با احتمال موفقیت $1/2$ باشد و احتمال انتخاب توزیع A نصف احتمال انتخاب توزیع B باشد و یک نمونه ۶ تایی پس از انتخاب تصادفی یکی از دو توزیع از آن بگیریم، $P(\sum_{i=1}^{6} X_i > 5)$ چقدر است.

الف- 3^{-6} ب- $(\frac{1}{3})^7 + \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2})^5$ ج- 2^{-5} د- $(\frac{1}{5})^3$

۱۵- از ۱۰ نماینده حاضر در یک جلسه تعداد ۵ نفر زن بوده‌اند. در نمونه‌ای تصادفی به حجم ۴ از نمایندگان حاضر در این جلسه احتمال اینکه دو زن وجود داشته باشد چقدر است؟ الف- ۲,۱ ب- $(21)^{-1}$ ج- $(21)^{10}$ د- $(24)^{-1}$

۱۶- از چهار کارخانه انتخاب کرده‌ایم سه کارخانه بیسکویت سازی بوده است. اگر ۱٪ کل کارخانه های کشور بیسکویت سازی باشند، احتمال دیدن این مشاهده چقدر است؟

الف: 396×10^{-8} ب: 18×10^{-6}

ج: 43×10^{-5} د: 99×10^{-3}

۱۷- اگر ۴٪ افراد یک جامعه به آقای X رأی مثبت دهند، در یک نمونه تصادفی از این جامعه به طور متوسط چند نفر را باید مورد پرسش قرار دهیم تا به ۲۰ رأی مثبت در مورد آقای X دست یابیم.

الف: ۵۰۰ نفر ب: ۸۰۰ نفر ج: ۱۰۰۰ نفر د: ۱۶۰۰ نفر

۱۸- اگر X تعداد تصادفات رانندگی در یک هفته دارای توزیع پواسن با میانگین ۴ باشد، آنگاه $E(X^2)$ برابر کدام است؟

الف: ۰ ب: ۴ ج: ۱۶ د: ۲۰

۱۹- اگر X دارای توزیع برنولی با احتمال موفقیت $\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه امید ریاضی $E[(X-2)(X^2+4-2X)]$ برابر کدام است.

الف: -8.5 ب: -7.5 ج: -4.5 د: -4

۲۰- از آنجا که سرطان خون بیماری نادری است برای مطالعه شیوع آن بدین طریق عمل کرده‌ایم که آنقدر نمونه گرفته‌ایم تا در نمونه ما ۱۶ بیمار قرار گرفته است و سپس نمونه‌گیری را متوقف کرده‌ایم. اگر شانس ابتلا به این بیماری را برای تمام افراد جامعه یکسان در نظر گرفته و ابتلای افراد نمونه مستقل از یکدیگر باشد، آنگاه احتمال اینکه لازم باشد ۳۰ بیمار را آزمایش کنیم از توزیع زیر محاسبه می‌شود.

الف- دو جمله‌ای منفی   ب- دو جمله‌ای   ج- پواسن   د- فوق هندسی

۲۱- اگر X و Y مستقل و هر یک دارای توزیع برنولی با پارامتر p باشند $Pr(X \neq Y)$ کدام است.

الف: pq ، ب- $2pq$ ، ج- p^2 ، د- q^2

۲۲- X_1 دارای توزیع پواسن با میانگین α و X_2 دارای توزیع پواسن با میانگین β است. اگر X_1 و X_2 مستقل باشند واریانس $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} X_2 - \frac{1}{\sqrt{\beta}} X_1$ کدام است؟

الف: $\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}$ ، ب- $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta}$ ، ج: $\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta}$ ، د: ۲

۲۳- عدد صحیح و نامنفی N بنابر توزیع پواسن با پارامتر θ انتخاب می‌شود، اگر $N = n$ آنگاه یک آزمایش برنولی با احتمال پیروزی p را n بار بطور مستقل تکرار می‌کنیم، امید ریاضی مقدار پیروزیها کدام است؟

الف: θp ، ب: Np ، ج: np ، د: $n\theta p$

۲۴- X_1 دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $(n, \frac{1}{n})$ و X_2 دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $(2n, \frac{1}{2n})$ است. اگر X_1 و X_2 مستقل باشند، آنگاه میانگین $X_1 + X_2$ برابر است با:

الف- ۱   ب- ۲   ج- ۳   د- ۴

۲۵- اگر انهدام یک هدف، بسوی آن شلیک شود و فرض کنیم که احتمال اصابت هر راکت به هدف ۰.۳ است، و برای انهدام کامل هدف اصابت دو راکت لازم باشد احتمال اینکه با شلیک پنجمین راکت هدف کاملا نابود شود عبارتست از:

الف- ۰.۲۲۵ ، ب- ۰.۱۲۳۵ ، ج- ۰.۲۴۲۵ ، د: ۰.۴۲۴۵

۲۶- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد $f(x) = pq^{x-1}$ و $x=$ ...۳، ۲، ۱ مقدار $Pr(X \geq 3 | X \leq 6)$ کدام است؟

الف: $\frac{q^2-q^6}{1-q^6}$ ب: $\frac{q^3-q^6}{1-q^6}$

ج- $\frac{q^3-q^6}{1-q^5}$ د- $\frac{q^2-q^5}{1-q^5}$

۲۷- تابع چگالی توام دو متغیر تصادفی X و Y در زیر داده شده است. امید ریاضی X کدام است.

$$f(x,y) = \begin{cases} \binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{x}{15}\right) & x=1,2,3,4,5 \quad y=0,1,2,\ldots,x \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف- $\frac{3}{11}$ ب- ۳ ج- $\frac{11}{3}$ د- ۱۱

۱- متغیر تصادفی x دارای میانگین μ و انحراف معیار σ است مطلوبست محاسبه ۳۷

$$E\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=?\qquad E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=?$$

۲- اگر x یک متغیر $N(75,100)$ باشد. $Pr(x<60)$ و ۳۷ B

$Pr(70<x<100)$ را بیابید؟

۳- اگر x، $N(\mu,\sigma^2)$ باشد b را طوری تعیین کنید که ۳۸

$Pr\left(-b<\frac{x-\mu}{\sigma}<b\right)=0/9$ شود

۴- فرض کنید که x، $N(\mu,\sigma^2)$ باشد به قسمی که $Pr(x<89)=0/9$ ۳۹

و $Pr(x<94)=0/95$ باشد مطلوبست μ و σ^2

۵- فرض کنید x، $N(5,10)$ است مطلوبست: ۴۰

$Pr(0/04<(x-5)^2<38/4)=?$

۶- اگر x دارای توزیع $N(1,4)$ باشد مطلوبست محاسبه: $Pr(1<x^2<9)=?$ ۴۱

۷- گیریم که تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x بشرح ذیل باشد: ۴۲

$f(x)=1/2 \qquad -1<x<1$

مطلوبست تابع چگالی احتمال $y=x^2$.

۸- فرض کنید که احتمال داشتن درست یک لکه در یک ترسیم $\frac{1}{100}$ و احتمال داشتن بیش از یک لکه در همان طول عملاً صفر باشد. فرض کنید که متغیر

۱۶

تصادفی X برابر شماره تکه‌های موجود در سیمی به طول ۳۰۰۰ متر باشد. احتمال داشتن درست ۵ تکه در سیمی به طول ۳۰۰۰ متر را محاسبه کنید.

۹- به طور متوسط در هر طاقهٔ پارچه که در یک کارخانه بافته و بسته بندی می‌شود، ۲ زدگی یا گره وجود دارد که باعث نامرغوب شدن پارچه می‌گردد. اگر یک مشتری ۵۰ طاقه پارچه از این کارخانه خریداری کند چند درصد می‌تواند امیدوار باشد که تعداد کل زدگی‌ها کمتر از ۱۵۰ باشد؟

۱۰- اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال و با میانگین μ_x و واریانس σ_x^2 باشد آنگاه توزیع متغیر تصادفی $Y = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x^2}$ عبارت است از

الف- نرمال   ب- نرمال و استاندارد   ج- پیوسته   د- نامعلوم

۱۱- اگر $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی $B(0/1)$ باشد آنگاه کدام یک از توزیع‌های زیر را بعنوان توزیع تقریبی $Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$ مناسب می‌دانید؟

الف: توزیع پواسن با $\lambda = 10$ ب: توزیع نرمال $N(1, 0/99)$

ج- توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ د- توزیع پواسن با $\lambda = 1$

۱۲- اگر $X_1, X_2, \dots, X_4$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ باشد، آنگاه توزیع تقریبی $Y = \sum_{i=1}^{4} X_i^2$ عبارت است از:

الف: χ^2_4 ب- گاما   ج: نرمال   د: χ^2_3

۱۴- اگر T_1 دارای توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس σ^2 (معلوم) و T_2 مستقل
۵۷
از T_1 و دارای توزیع نرمال با میانگین θ^2 و واریانس $2\sigma^2$ باشد، واریانس $\frac{1}{\sigma}(T_2-T_1)$

برابر است با: الف: ۱ ب: ۳ ج: σ^2 د: $3\sigma^2$

۱۴- فرض می‌کنیم $X_1, X_2, \dots X_n$ از توزیع گاما با پارامترهای α, β باشد، در
۵۸
این صورت توزیع حدی $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$ وقتی که n به بینهایت میل می‌کند کدام

است؟ الف: پواسن با $\lambda=0$ ب: دوجمله‌ای با واریانس یک

ج: گاما با میانگین صفر و واریانس یک د: $N(0,1)$

۱۵- اگر X دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ باشد، $Pr(X>2 \mid X\leq 8)$
۶۰
کدام است.

الف: $\frac{e-1}{e^3-1}$ ب: $\frac{e-1}{e^2-1}$ ج: $\frac{e^2-1}{e^3-1}$ د: $\frac{e^3-1}{e^4-1}$

۱۶- اگر متغیری دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، چگالی قدر مطلق آن کدام است؟
۶۴
الف: $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-t/2}$ ب: $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-t/2}$

ج: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ د: $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$

۱۷- متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ است. اگر
۶۸
$Y=a+(b-a)X$ باشد که a و b ثابت‌های دلخواه‌اند. کدام عبارت صحیح است.

الف: $E(Y)=E(X)$ ب: Y دارای توزیع یکنواخت در فاصله (a,b) است

ج: X و Y توزیعهای یکسان دارند. د: X و Y مستقل‌اند.

۱۸- اگر متغیر تصادفی Y دارای توزیع خی دو با ۴ درجه آزادی و Z دارای توزیع نرمال استاندارد و این دو متغیر مستقل باشند، آنگاه متغیر $\frac{2Z}{\sqrt{Y}}$ دارای توزیع ... است.

الف: نرمال استاندارد با واریانس ۲

ب: t با درجه آزادی ۳

ج: t با درجه آزادی ۴

د: خی دو با درجه آزادی

۱- میانگین و واریانس متغیری که دارای تابع مولد زیر است را بیابید؟ ۱۹

$$M(t) = (1-t)^{-3} \qquad t<1$$

۲- اگر تابع مولد گشتاورهای یک متغیر تصادفی X برابر $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{t})^{5}$ باشد ۳۹

احتمال $Pr(X=2 \text{ یا } 3)$ را پیدا کنید.

۳- گشتاور n- ام حول مبدأ یک متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی ۲

$f(x)$ عبارت است از:

الف - $\sum_x x^n f(x)$

ب - $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^n f(x)dx$

ج - $\sum_x (x-\mu_x)^n f(x)$

د - $\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx$

۴- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی

$$f_X(x) = \begin{cases} 100e^{-100x} & , x>0 \\ 0 & x\leq 0 \end{cases}$$ ۸۴۵

باشد، آنگاه تابع مولد گشتاور آن برابر است با:

الف: $\frac{100}{t-100}, t<100$ ب: $\frac{100}{100-t}, t>100$

ج: $\frac{100}{100-t}, t<100$ د: برای هر عدد حقیقی t ، $\frac{100}{100-t}$

۱. X متغیری تصادفی است به طوری که $E(X)=2$ و $E(X^2)=13$

با استفاده از نامساوی چبیشف یک کران پائین برای احتمال زیر بیابید.

$$Pr(-2<X<8)=?$$

۲. ت.چ.ا توام X و Y بشرح ذیل است. ضریب همبستگی X و Y را بیابید.

۲۷ F

(x,y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$f(x,y)$	$2/15$	$4/15$	$3/15$	$1/15$	$1/15$	$4/15$

۳. به فرض اینکه X دارای یک پخش پواسن با $\mu=100$ است. با استفاده از نامساوی چبیشف یک کران پائین برای احتمال $Pr(75<X<125)$ را بیابید.

۴. کدامیک از ارائه‌های زیر در مورد قضیه حد مرکزی درست تر است.

الف - قضیه حد مرکزی درمورد توزیع نرمال بحث می‌کند.

ب - قضیه حد مرکزی در مورد توزیع نرمال استاندارد بحث می‌کند.

ج - قضیه حد مرکزی درمورد توزیع میانگین جامعه بحث می‌کند

د - قضیه حد مرکزی درمورد توزیع میانگین نمونه بحث می‌کند.

۵- اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند و μ_x و μ_y به ترتیب میانگین‌های آنها باشند، آنگاه $E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$ برابر است با: ۱۹

الف - کواریانس X و Y ب - واریانس X و Y

ج - میانگین فاصله‌ها   د - ضریب همبستگی

۶- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال $N(0,1)$ و متغیر تصادفی Y دارای توزیع نمایی $f_Y(y)=e^{-y}, y>0$ و متغیر تصادفی Z دارای توزیع گاما به صورت $f_Z(z)=ze^{-z}, z>0$ باشد. اگر ضریب همبستگی بین X و Z برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و ضریب همبستگی بین Y و Z را برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد کواریانس بین $U=X+Y$ و $V=X-Y-Z$ برابر است با:

الف- $\sqrt{2}$ ب- $-\sqrt{2}$ ج- $-\frac{3}{2}$ د- $\frac{3}{2}$

۷- اگر $X \sim N(1,1)$ و $Y \sim N(1,2)$ و ضریب همبستگی بین X و Y برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد و ( ) ϕ تابع توزیع نرمال استاندارد باشد. $P(X-Y<2)$ برابر است با:

الف- $\phi(2)$ ب- $\phi(-2)$ ج- $\phi(2\sqrt{2})$ د- $1-\phi(\sqrt{2})$

۸- اگر متغیر تصادفی X در بازه (1و1-) به طور یکنواخت توزیع شده باشد و فرض کنیم $Y=X^2$ در این صورت کدام یک از گزینه های زیر درست است:

الف- ضریب همبستگی X و Y صفر است ب- ضریب همبستگی X و Y مثبت است

ج- کوواریانس X و Y برابر 1 است د- کوواریانس X و Y برابر $\frac{1}{2}$ است.

۹- متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال استاندارد است ضریب همبستگی X و $Y=X^2$ کدام است.

الف- ۱- ب- ۰ ج- ۰/۵ د- ۱

۱۰- سکه منصفی سه بار پرتاب می‌شود X را تعداد شیرها و Y را تعداد خط‌ها در نظر می‌گیریم تابع احتمال توام (X,Y) را بیابید و ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.

پاسخ تمرینهای درس تئوری احتمالات

<u>تست اول</u>

۱) باید ثابت کنیم:

$1/ \quad B = \emptyset \iff A = (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A)$

(اثبات لازم) $B = \emptyset \Rightarrow$ طرف دوم $= (\emptyset \cap A^c) \cup (S \cap A)$

$= \emptyset \cup (S \cap A) = A$

(اثبات کافی) $A = (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} B \cap A^c \subseteq A \Rightarrow B = \emptyset & \text{در زیر با برهان خلف ثابت می‌شود} \\ B^c \cap A \subseteq A \Rightarrow & \text{به ازای هر } B^c \text{ برقرار است} \end{cases}$

برهان خلف: $B \neq \emptyset : x \in B \cap A^c \Rightarrow x \in B \wedge x \in A^c \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin A \Rightarrow B \cap A^c \nsubseteq A \Rightarrow$ خلاف فرض است

۲) تعداد ارقام چهار رقمی $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

تعدادی که ارقام تکراری دارند $= 625 - 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 625 - 120 = 505$

۳) $(6)_2 = \dfrac{6!}{4!} = 30$

۴) $\dfrac{11!}{3!\,2!\,3!\,3!} = 92,400$

۵) $\dfrac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34,650$

۶) A: آمار دان B: ریاضی دان

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 19 + 16 - 25 = 10$

۷) برای آنکه عددی بر چهار بخش‌پذیر باشد باید دو رقم سمت راست آن یکی از اعداد: ۴۴، ۱۲، ۳۲، ۵۲، ۲۴

باشد دو رقم دیگر [illegible]

تست دوم

۱)
$$\frac{5! \times 18!}{22!} = 0/00068$$

۲)
$$\frac{4! \times 5! \times 2}{10!} = 0/0029$$

۳)
$$1 - \frac{6!}{6^6} = 1 - 0/0154 = 0/9846$$

۴)
$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A \Rightarrow P(A_1) + P(A_2) = P(A)$$
$$\frac{1}{4} + P(A_2) = 1 \Rightarrow P(A_2) = \frac{3}{4}$$

۵) الف)
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{4}{8}$$

ب)
$$P(A_1' \cup A_2') = P(A_1 \cap A_2)' = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 1$$

۶)
$$P(A_5) = P(A_1) - P(A_3) - P(A_2) + P(A_4)$$
$$= \frac{7}{8} - \frac{3}{8} - \frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۷)

الف)
$$P = \int_{1/4}^{1/2} \int_0^{1/2} 4x_1 x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \frac{15}{64}$$

ب)
$$P(X_1 \leq X_2) = \int_0^1 \int_0^{x_2} 4x_1 x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \frac{1}{2}$$

ج) $P(X_1 < X_2) = P(X_1 \leq X_2) = \frac{1}{2}$ در توزیع پیوسته

د) $P(X_1 = X_2) = 0$

۸) الف)
$$P\left(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) - P\left(X \leq -\frac{1}{2}\right)$$
$$= F\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2 + 2}{4} - \frac{-1/2 + 2}{4} = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

ب) $P(X = 0) = 0$ احتمال نقطه در توزیع پیوسته برابر صفر است.

۸) ج - تابع در نقطه $x=1$ پیوسته نیست. بنابراین

$$P(X=1) = P(X\leqslant 1) - P(X<1)$$
$$= 1 - \frac{1+2}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(2 \leqslant X \leqslant 3) = P(X\leqslant 3) - P(X\leqslant 2) = 1-1 = 0$$

د -

۹) الف- برای آنکه مجموع زوج باشد باید یک عدد و یا هر سه عدد زوج باشد.
$\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$

$$\frac{\binom{10}{1}\binom{10}{2}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{10}{3}\binom{10}{0}}{\binom{20}{3}} = 0.3947 + 0.1053 = 0.5$$

ب- تنها کافی است یکی از اعداد زوج باشد.

$$1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.8947$$

۱۰) عدد مرحله بین ۲ تا ۸ خواهد بود:

1	x	9	10

تابع چگالی احتمال

$$P(X=x) = \frac{\binom{x-1}{1}\binom{10-x}{2}}{\binom{10}{3}} \qquad x = 2, 3, \ldots, 8$$

۱۱)
$$E\left[(X-\tfrac{1}{3})(Y-\tfrac{2}{3})\right] = \sum_x \sum_y (x-\tfrac{1}{3})(y-\tfrac{2}{3}) \cdot \underbrace{\tfrac{1}{3}}_{f(x,y)}$$
$$= (0-\tfrac{1}{3})(0-\tfrac{2}{3})\tfrac{1}{3} + (0-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{2}{3})\tfrac{1}{3} + (1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{2}{3})\tfrac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

۱۲)
$$E(x) = \int_0^1 \int_0^y x f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 [x^2]_0^y\,dy = \int_0^1 y^2\,dy = \tfrac{1}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$
$$E(y) = \int_0^1 \int_0^y y f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 [2xy]_0^y\,dy = \int_0^1 2y^2\,dy = \frac{2}{3}$$
$$E(xy) = \int_0^1 \int_0^y xy f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 [yx^2]_0^y\,dy = \int_0^1 y^3\,dy = \tfrac{1}{4}y^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$E(xy) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow E(xy) \neq E(x)E(y)$$

۳

۳/۰

(13

$$E(x^2) = (-1)^2 f(-1) + (0)^2 f(0) + (1)^2 f(1)$$
$$= f(-1) + f(1)$$
$$f(-1) + f(0) + f(1) = 1 \Rightarrow f(-1) + f(1) = 1 - f(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(x^2) = \frac{1}{2}$$

$$E(x) = (-1) f(-1) + (0) f(0) + (1) f(1) = -f(-1) + f(1) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} f(-1) + f(1) = \frac{1}{2} \\ -f(-1) + f(1) = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = \frac{1}{6} \\ f(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(14

X: جمع دریافتی

$$x = 6, 9, 12$$

$$E(x) = \sum x P(X = x) = 6 \times \frac{\binom{8}{3}\binom{2}{0}}{\binom{10}{3}} + 9 \times \frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} + 12 \times \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}}$$

$$= 7.8$$

(15

نخست باید تابع چگالی احتمال x تعیین گردد

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$f(x) = 0 \qquad x < 0$$
$$f(x) = \frac{1}{8} \qquad 0 \leqslant x < 2$$
$$f(x) = \frac{x}{8} \qquad 2 \leqslant x < 4$$
$$f(x) = 0 \qquad x \geqslant 4$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x (0)\, dx + \int_{0}^{2} x \left(\frac{1}{8}\right) dx + \int_{2}^{4} x \left(\frac{x}{8}\right) dx$$
$$+ \int_{4}^{+\infty} x (0)\, dx = 0 + \frac{x^2}{16}\Big|_0^2 + \frac{x^3}{24}\Big|_2^4 + 0 = \frac{1}{4} + \frac{64}{24} - \frac{8}{24} = \frac{31}{12}$$

به طور مشابه

$$E(x^2) = \int_0^2 x^2 \left(\frac{1}{8}\right) dx + \int_2^4 x^2 \left(\frac{x}{8}\right) dx = 7.83$$

(۱۶

$$E(X_2|X_1=x_1) = \int_0^1 x_2 f(x_2|x_1)\,dx_2$$

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1,x_2)}{f(x_1)} = \frac{x_1+x_2}{\int_0^1 (x_1+x_2)\,dx_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2+\frac{1}{2}x_2^2\Big|_0^1}$$

$$= \frac{x_1+x_2}{x_2+\frac{1}{2}} = \frac{2(x_1+x_2)}{2x_2+1}$$

$$E(X_2|X_1=x_1) = \int_0^1 \frac{2x_2(x_1+x_2)}{2x_2+1}\,dx_2$$

$$= \frac{۳x_1+۲}{۶x_1+۳}$$

$$E(x_2^2|x_1) = \frac{۸x_1+۳}{۲۴x_1+۱۲}$$

$$\sigma^2 = \frac{۸x_1+۳}{۲۴x_1+۱۲} - \left(\frac{۳x_1+۲}{۶x_1+۳}\right)^۲ = \frac{۶x_1^۲+۶x_1+۱}{۲(۶x_1+۳)^۲}$$

(۱۷

$$f(x_1) = \int_0^1 ۱۲x_1x_2^2(1-x_2)\,dx_2 = ۲x_1$$

$$f(x_2) = \int_0^1 ۱۲x_1x_2(1-x_2)\,dx_1 = 6x_2(1-x_2)$$

$f(x_1)f(x_2) = ۱۲x_1x_2(1-x_2) = f(x_1,x_2) \Rightarrow$ x_1, x_2 مستقلند

(۱۸

$$A = (-\infty < x_1 < \infty\ ,\ c < x_2 < d)$$
$$B = (a < x_1 < b\ ,\ -\infty < x_2 < \infty)$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

چون x_1, x_2 مستقل هستند

$$\begin{cases} P(A) = P(-\infty < x_1 < \infty) \times P(c < x_2 < d) = \frac{۵}{۸} \\ P(B) = P(a < x_1 < b) \times P(-\infty < x_2 < \infty) = \frac{۲}{۳} \\ P(A\cap B) = P(A)P(B) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۱۲} \end{cases}$$

$$P(A\cup B) = \frac{۵}{۸} + \frac{۲}{۳} - \frac{۵}{۱۲} = \frac{۷}{۸}$$

۱۹) الف-

$$\int_0^1 f_2(x_2)\,dx_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 5$$

$$\int_0^1 \int_0^{x_1} \frac{c_1 x_1}{x_2^2}\,dx_1\,dx_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 2$$

ب-

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 \mid x_2)\, f(x_2) = 10\, x_1 x_2$$

ج-

$$P\left(\tfrac{1}{4} < x_1 < \tfrac{1}{2} \mid x_2 = \tfrac{5}{8}\right) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{2x_1}{(\frac{5}{8})^2}\,dx_1 = \frac{24}{50}$$

د-

$$P\left(\tfrac{1}{4} < x_1 < \tfrac{1}{2}\right) = \int_{1/4}^{1/2}\int_0^{1} 10\, x_1 x_2\, dx_2\, dx_1 = \frac{5}{16}$$

۲۰) E: ۵ شیر F: دست کم سه شیر

$$P(E \mid F) = \frac{P(F \mid E)\,P(E)}{P(F)}$$

$$= \frac{1 \times (\frac{1}{2})^5}{\binom{5}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2 + \binom{5}{4}(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2}) + \binom{5}{5}(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})^0}$$

$$= \frac{\frac{1}{32}}{\frac{16}{32}} = \frac{1}{16}$$

۲۱) الف-

$$f(x) = \frac{1}{5-0} = \frac{1}{5} \qquad 0 < x < 5$$

ب-

$$E(x) = \int_0^5 x\, f(x)\,dx = \int_0^5 \frac{x}{5}\,dx = 2.5$$

امید ریاضی طول چوب

$$E(5-x) = \int_0^5 \frac{5-x}{5}\,dx = 2.5$$

امید ریاضی طول ... است

ج-

$$E[x(5-x)] = E(5x - x^2) = \int_0^5 (5x - x^2)\,dx = \frac{25}{6}$$

۲۲)

$$E(X) = \int_1^{\infty} x\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty - \ln 1 = \infty$$

$$E(X^2) = \int_1^{\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^{\infty} dx = \infty$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - E(x)^2 = \infty - \infty$$ مبهم (وجود ندارد)

۲۳) الف -

$$f_1(x_1) = \int_{x_1}^{1} 2\, dx_2 = 2x_2 \Big|_{x_1}^{1} = 2 - 2x_1$$

ب -

$$f_2(x_2) = \int_0^{x_2} 2\, dx_1 = 2x_2$$

ج -

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)} = \frac{1}{x_2}$$

د -

$$E(x_1 \mid x_2) = \int_0^{x_2} x_1 \cdot \frac{1}{x_2}\, dx_1 = \frac{x_1^2}{2x_2} \Big|_0^{x_2} = \frac{x_2^2}{2x_2} - 0 = \frac{x_2}{2}$$

$$\sigma = E\left[\left(x_1 - E(x_1 \mid x_2)\right)^2\right] = \int_0^{x_2} \left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)\left(\frac{1}{x_2}\right) dx_1 = \frac{x_2^2}{12}$$

۲۴) الف -

$$P(x_1 = 3) = \sum_{x_2=1}^{2} \frac{3 + x_2}{21} = \frac{9}{21}$$

ب -

$$P(x_2 = 2) = \frac{12}{21}$$

ج -

$$f(x_1) = \sum_{x_2=1}^{2} f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + 3}{21}$$

د -

$$f(x_2) = \sum_{x_1=1}^{3} f(x_1, x_2) = \frac{6 + 3x_2}{21}$$

۲۵) $E(x) = \int_0^1 x(a+bx^2)\,dx = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4 \Big|_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} = \frac{3}{5}$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = ax + \frac{1}{3}bx^3 \Big|_0^1 = a + \frac{1}{3}b = 1$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{4} = \frac{3}{5} \\ a + \frac{b}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{5}, \quad b = \frac{6}{5}$$

۲۶)

نمونه	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۲,۳)
میانگین	۱	۱,۵	۲	۲,۵
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

از عدد یک دو جایگاه ... بوده داشته و بنابراین احتمال ترکیبات (۱,۲) و (۱,۳) دو برابر ترکیبات (۱,۱) و (۳,۱) می باشد.

$$P(1 < \text{میانگین} < 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۲۷) $E(X_1 + X_2) = (1+1)\frac{1}{6} + (1+2)\frac{2}{6} + (1+3)\frac{2}{6} + (2+3)\frac{1}{6}$

$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

۲۸)

$$E(X-a)^2 = E(X-\mu+\mu-a)^2$$

$$= E(X-\mu)^2 + E(\mu-a)^2 + 2(\mu-a)E(X-\mu)$$

$$= E(X-\mu)^2 + E(\mu-a)^2 + 2(\mu-a)(E(X)-\mu)$$

$$= E(X-\mu)^2 + E(\mu-a)^2$$

رابطه فوق به ازاء $a = \mu = E(X)$ حداقل می گردد.

۲۹) $P(A) < P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) < \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$\Rightarrow P(B) < P(B|A)$$

۳۰) مشابه تمرین ۲۸

$$\alpha = \mu_x$$

۳۱) از بین ۵ مهره، ۳ مهره بدون جایگذاری انتخاب می‌شود. بنابراین تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{5}{3} = 10$$

تعداد حالاتی که کوچکترین شماره یک می‌شود: $\binom{4}{2} = 6$

« « « « دو « $\binom{3}{2} = 3$

« « « « سه « $\binom{2}{2} = 1$

کوچکترین شماره هیچگاه ۴ یا ۵ نخواهد بود. بنابراین

$$E(X) = 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{10} = 1.5$$

۳۲)

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(E \cap \bar{F}) = P(E) - P(E \cap F) = P(E) - P(E|F)P(F)$$

$$= 0.6 - 0.8(0.6) = 0.12$$

$$P(E|\bar{F}) = \frac{P(E \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{0.12}{0.4} = 0.3$$

۳۳)

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{2}{\int_0^{1-x} 2\,dx} = \frac{2}{2(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

۳۴) X_1 و X_2 صرفاً مقادیر ۱ و ۱- را می‌پذیرند. بنابراین X_1X_2 نیز صرفاً برابر با ۱ یا ۱- خواهد بود.

بنابراین تابع چگالی احتمال X_1X_2 به صورت زیر به دست می‌آید.

$$P(X_1X_2 = 1) = P[(X_1 = 1, X_2 = 1), (X_1 = -1, X_2 = -1)]$$

$$= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = -1)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

به طور مشابه

$$P(X_1X_2 = -1) = \frac{1}{2}$$

تابع چگالی احتمال $X_1 X_2$:

$X_1 X_2$	1	-1
$P(X_1 X_2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X_1 X_2 = 1 \ , \ X_1 = 1) = P(X_1 = 1 \ , \ X_2 = 1)$$

$$= P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

از طرف دیگر
$$P(X_1 X_2 = 1)\, P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

به همین ترتیب در حالت $X_1 X_2 = -1$ نیز می‌توان به نتیجه مشابهی رسید. بنابراین

$$P(X_1 X_2 \ , \ X_1) = P(X_1 X_2)\, P(X_1)$$

در نتیجه X_1 و $X_1 X_2$ مستقل از یکدیگرند.

مبحث سوم

۱) c_1 : دو پیک در پنج کارت

c_2 : یک پیک در کارت ششم

$$P(A) = P(c_1) \times P(c_2)$$

$$= \frac{\binom{13}{2}\binom{39}{3}}{\binom{52}{5}} \times \frac{11}{47} = 0/1004$$

فرض داشته‌ایم که آزمایش بدون جایگذاری بوده و بنابراین توزیع فوق هندسی است.

۲)

الف -

$$\frac{\binom{6}{4}\binom{10}{0}}{\binom{16}{4}} = 0/0082$$

ب -

$$\frac{\binom{6}{0}\binom{10}{4}}{\binom{16}{4}} = 0/1154$$

ج -

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{7}{1}\binom{3}{1}}{\binom{16}{4}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{16}{4}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{\binom{16}{4}} = 0/45$$

۳)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{990}{5}}{\binom{1000}{5}} = 1 - 0/9508 = 0/0492$$

۴)

الف -

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{\binom{2}{1}\binom{48}{4}}{\binom{50}{5}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{48}{3}}{\binom{50}{5}} = 0/1918$$

ب -

$$P(X \geq 1) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\binom{2}{1}\binom{48}{n-1}}{\binom{50}{n}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{48}{n-2}}{\binom{50}{n}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{50n - n^2}{1225} + \frac{n^2 - n}{2450} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 99n - n^2 \leq 1225 \Rightarrow \begin{cases} n \geq 85 \\ n \leq 14 \end{cases}$$ غیر قابل قبول

۵) الف-

$$\frac{۳}{۸} \times \frac{۵}{۷} \times \frac{۲}{۶} \times \frac{۴}{۵} + \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} \times \frac{۴}{۶} \times \frac{۲}{۵} = ۰/۱۴۲۹$$

$$\frac{۳}{۸} \times \frac{۲}{۷} \times \frac{۵}{۶} = ۰/۱۷۸۶$$

ب-

۶)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۸}{۶}}{\binom{۱۶}{۶}}$$

$$= ۰/۷۷۶۲$$

۷) $P(A)$: احتمال آنکه از هر رنگ یک مهره انتخاب شود

$P(B)$: احتمال آنکه یک مهره سرخ باشد

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \frac{1 \times \dfrac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۱}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}}{\dfrac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}}} = ۰/۳۳۳۳$$

۸) الف-

$$P(E) = P(E|F)\,P(F) + P(E|F^c)\,P(F^c)$$

$$= \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۱}{۲} = ۰/۴۵$$

ب-

$$P(F^c|E) = \frac{P(E|F^c)\,P(F^c)}{P(E)} = \frac{۰/۶ \times ۰/۵}{۰/۴۵} = ۰/۶۶۶۶$$

۹) می‌دانیم که یک مهره آبی است. بنابراین باید احتمال آن را محاسبه کنیم که ۲ مهره سرخ و دو مهره آبی استخراج شده باشد.

$$\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{۵}{۱۴}$$

۱۰)

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{1}{n}(np) = p$$

$$E\left[\left(\frac{X}{n} - p\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} E[(X - np)]^2 = \frac{1}{n^2} E\left[(X - E(X))^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \operatorname{Var}(X) = \frac{1}{n^2} \cdot np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

۱۱)

$Y \sim b(n, \frac{1}{4})$

$P(1 \leq Y) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{n}{0}(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^n$

$= 1 - (\frac{3}{4})^n \geq 0.7 \Rightarrow (\frac{3}{4})^n \leq 0.3$

با سعی و خطا $\underline{n = 5}$ بدست می‌آید.

۱۲)

$X \sim b(2, p) \quad Y \sim b(4, p)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{2}{0}(p)^0(1-p)^2 = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow \begin{cases} p = \frac{15}{9} & \text{غیرقابل قبول} \\ \underline{p = \frac{1}{3}} \end{cases}$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{4}{0}(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^4 = \frac{65}{81}$

۱۳) E : هر پنج ورق پیک   F : دست‌کم چهار پیک از پنج ورق

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)} = \frac{1 \times \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} \times \frac{10}{49} \times \frac{9}{48}}{\underbrace{\frac{13\times12\times11\times10}{52\times51\times50\times49}}_{\text{چهار پیک}} + \underbrace{\frac{13\times12\times11\times10\times9}{52\times51\times50\times49\times48}}_{\text{پنج پیک}}}$$

$= 0/01875$

۱۴) $x_i = 0$ یا 1 خواهد بود. بنابراین

$P(\sum_{i=1}^{6} x_i > 5) = P(\sum_{i=1}^{6} x_i = 6) =$ احتمال آنکه هر ۶ تا موفقیت باشند.

اگر توزیع A انتخاب شود،

$P(\sum_{i=1}^{6} x_i = 6) = \binom{6}{6}(\frac{1}{3})^6(\frac{2}{3})^0 = (\frac{1}{3})^6$

اگر توزیع B انتخاب شود،

$P(\sum_{i=1}^{6} x_i = 6) = \binom{6}{6}(\frac{1}{2})^6(\frac{1}{2})^0 = (\frac{1}{2})^6$

احتمال انتخاب توزیع A برابر با $\frac{1}{3}$ و احتمال انتخاب توزیع B برابر با $\frac{2}{3}$ است. بنابراین

$P(\sum_{i=1}^{6} x_i = 6) = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{3})^6 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^6 = (\frac{1}{3})^7 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^5$

گزینه ب ...

۱۵)

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = (2.1)^{-1}$$

۱۶)

$$X \sim b(4,\ 0.01)$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3}(0.01)^3(0.99)^1 = 396\times 10^{-8}$$

۱۷) توزیع بینوم منفی است.

$$E(X) = \frac{n}{p} = \frac{20}{0.4} = 50$$

۱۸) در توزیع پواسان:

$$\sigma^2 = E(X) = \lambda = 4$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow E(X^2) = \sigma^2 + E(X)^2 = 4 + 4^2 = 20$$

۱۹)

$$E\left[(X-2)(X^2+4-2X)\right] = E(X^3-8) = E(X^3) - 8$$

در توزیع برنولی

$$E(X) = E(X^2) = E(X^3) = \dots$$

بنابراین

$$E(X^3) - 8 = \frac{1}{2} - 8 = -7.5$$

۲۰) توزیع دو جمله‌ای منفی بوده و بنابراین گزینه الف صحیح است

۲۱)

$$P(X \neq Y) = P[X=0, Y=1] + P[X=1, Y=0]$$

$$= P(X=0)P(Y=1) + P(X=1) + P(Y=0)$$

$$= qp + pq = 2pq$$

۲۲) از آنجایی که X_1 و X_2 مستقل هستند:

$$Var\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}X_2 - \frac{1}{\sqrt{\beta}}X_1\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 Var(X_2) + \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2 Var(X_1)$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$$

۲۳)

$$Y \sim b(N, p) \qquad N \sim P(\theta)$$

N در توزیع بینوم، خود تصادفی بوده و توزیع پواسان دارد.

$$\dots = p\,E(N) = p\theta$$

۲۴) $X_1 \sim b(n, P=\frac{1}{n}) \Rightarrow E(X_1) = nP = n\cdot\frac{1}{n} = 1$

$X_2 \sim b(2n, P=\frac{1}{2n}) \Rightarrow E(X_2) = 2n\cdot\frac{1}{2n} = 1$

$E(X_1+X_2) = E(X_1)+E(X_2) = 1+1 = 2$

۲۵) توزیع دوجمله‌ای منفی است

$\binom{4}{1} p^2 q^3 = \binom{4}{1}(0.24)^2(0.7)^3 = 0.11245$

۲۶)

$$P(X \geq 3 \mid X \leq 6) = \frac{P(X\geq 3, X\leq 6)}{P(X\leq 6)}$$

$$= \frac{P(X\leq 6) - P(X<3)}{P(X\leq 6)} = \frac{q^2 - q^6}{1-q^6}$$

۲۷) نخست تابع چگالی حاشیه‌ای بر حسب x محاسبه می‌شود

$$f(x) = \sum_{y=0}^{x} f(x,y) = \sum_{y=0}^{x}\binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{x}{15}\right) =$$

$$= \frac{x}{15}\underbrace{\sum_{y=0}^{x}\binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^x}_{\text{توزیع دوجمله‌ای بوده و برابر با یک است.}} = \frac{x}{15}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{5}\frac{x^2}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

<u>تست چهارم</u>

(۱

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\left[E(X) - E(\mu)\right] = \frac{1}{\sigma}\left[\mu - \mu\right] = ۰$$

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left[E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2)\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left[E(X^2) - \mu^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}\left\{E(X^2) - E(X)^2\right\} = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2 = 1$$

$\mu = ۷۵ \quad \sigma = ۱۰$

(۲

$$P(X < ۶۰) = P\left(Z < \frac{۶۰ - ۷۵}{۱۰}\right) = P(Z < -۱٫۵) = ۰/۰۶۶۷$$

$$P(۷۰ < X < ۱۰۰) = P(X < ۱۰۰) - P(X < ۷۰)$$

$$= P\left(Z < \frac{۱۰۰ - ۷۵}{۱۰}\right) - P\left(Z < \frac{۷۰ - ۷۵}{۱۰}\right)$$

$$= P(Z < ۲٫۵) - P(Z < -۰٫۵)$$

$$= ۰/۹۹۳۸ - ۰/۳۰۸۵ = ۰/۶۸۵۳$$

مقادیر احتمال از جدول توزیع نرمال استاندارد استخراج می‌شود.

(۳

$$P\left(-b < \frac{X-\mu}{\sigma} < b\right) = P(-b < Z < b) = ۰/۹$$

$$\Rightarrow P(Z < b) = ۰/۹۵ \Rightarrow b = ۱٫۶۴۵$$

از روی جدول

(۴

$$P(X < ۸۹) = P\left(Z < \frac{۸۹-\mu}{\sigma}\right) = ۰/۹ \Rightarrow \frac{۸۹-\mu}{\sigma} = ۱٫۲۲$$

$$P(X < ۹۴) = P\left(Z < \frac{۹۴-\mu}{\sigma}\right) = ۰/۹۵ \Rightarrow \frac{۹۴-\mu}{\sigma} = ۱٫۶۴۵ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu + ۱٫۲۲\sigma = ۸۹ \\ \mu + ۱٫۶۴۵\sigma = ۹۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = ۷۴٫۶۵ \\ \sigma = ۱۱٫۷۶ \end{cases}$$

(۵

$$P(۰/۰۴ < (X-۵)^2 < ۳۸,۴) = P(۰/۲ < |X-۵| < ۶,۲)$$

$$= P(۰/۲ < X-۵ < ۶,۲) + P(-۶,۲ < X-۵ < -۰/۲)$$

$$= P(۰/۰۶۳ < Z < ۱,۹۶) + P(-۱,۹۶ < Z < -۰/۰۶۳)$$

$$= 2P(۰/۰۶۳ < Z < ۱,۹۶)$$

$$= 2[۰/۹۷۵ - ۰/۵۲۳۹] = ۰/۹۰۲۲$$

(۶

$$P(۱ < X^2 < ۹) = P(۱ < X < ۳) + P(-۳ < X < -۱)$$

$$= ۲P(۱ < X < ۳) = ۲P(۰ < Z < ۱) = ۲[۰/۸۴۱۳ - ۰/۵] = ۰/۶۸۲۶$$

(۷

$$Y = X^2 \Rightarrow \begin{cases} X = -\sqrt{Y} & -۱ < x \leq ۰ \\ X = \sqrt{Y} & ۰ \leq x < ۱ \end{cases}$$

$$P(a < Y < b) = P(-\sqrt{b} < X < -\sqrt{a}) + P(\sqrt{a} < X < \sqrt{b})$$

$$= \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(x)\,dx = -\int_a^b f(-\sqrt{y})J_1\,dy + \int_a^b f(\sqrt{y})J_2\,dy$$

$$J_1 = \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{2\sqrt{y}} \qquad J_2 = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$P(a < Y < b) = -\int_a^b \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{y}}\,dy + \int_a^b \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy \Rightarrow g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad , \quad ۰ \leq y < ۱$$

(۸

$$X \sim b(۳۰۰۰, ۰/۰۰۱)$$

$$np = ۳ = \lambda \Rightarrow X \sim P(\lambda = ۳)$$

$$P(X = ۵) = \frac{e^{-۳}\cdot ۳^{۵}}{۵!} = ۰/۱۰۱$$

۱۷

۱۷/

۹) در هر طاقه ۳ زدگی وجود دارد. بنابراین در ۵۰ طاقه: $3 \times 50 = 150$ زدگی وجود داشته و:

$$\lambda = 150 \quad , \quad X \sim P(\lambda)$$

$$P(X < 150) = P(X < \lambda) \approx 0.5$$

در بین گزینه‌ها بهترین گزینه ب می‌باشد.

۱۰)
$$Y = \frac{1}{\sigma^2} X - \mu_x = aX - b$$

Y توزیع نرمال دارد. چون هر ترکیب خطی از متغیر نرمال خود توزیع نرمال خواهد داشت.

۱۱) مجموع متغیر تصادفی برنولی توزیع بینم دارد. بنابراین Y توزیع بینوم خواهد داشت.

$$Y \sim b(100, 0.01)$$

با توجه به مقادیر $n = 100$ و $p = 0.01$ می‌توان بینوم را با پواسان تقریب زد.

$$\lambda = np = 100(0.01) = 1$$

گزینه د صحیح است.

۱۲) قضیه - اگر X توزیع نرمال استاندارد داشته باشد، X^2 توزیع کای دو با یک درجه آزادی خواهد داشت:

$$X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_1$$

قضیه - مجموع متغیرهای تصادفی مستقل χ^2 توزیع χ^2 خواهد داشت و درجه آزادی آن برابر با مجموع درجات آزادی است.

$$Y = \sum_{i=1}^{4} X_i^2 = \sum_{i=1}^{4} (\chi^2_1)_i = \chi^2_4$$

گزینه الف صحیح است.

۱۳)
$$Var\left[\frac{1}{\sigma}(T_2 - T_1)\right] = \frac{1}{\sigma^2} Var(T_2 - T_1)$$

از آنجائی که T_1 و T_2 مستقل هستند:

$$\frac{1}{\sigma^2} Var(T_2 - T_1) = \frac{1}{\sigma^2}\left[Var(T_2) + Var(T_1)\right] = \frac{1}{\sigma^2}\left[2\sigma^2 + \sigma^2\right] = 3$$

۱۴) با توجه به قضیه حد مرکزی

$$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

۱۵) در توزیع نمائی

$$F_X(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$P(X>2 \mid X \le 8) = \frac{P(X>2, X\le 8)}{P(X \le 8)}$$

$$= \frac{P(X \le 8) - P(X \le 2)}{P(X \le 8)}$$

$$= \frac{(1-e^{-4}) - (1-e^{-1})}{(1-e^{-4})} = \frac{-e^{-4}+e^{-1}}{1-e^{-4}} = \frac{e^{3}-1}{e^{4}-1}$$

۱۶)

$$X \sim N(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$$

$$T = |X| \Rightarrow F_T(t) = P(T \le t) = P(|X| \le t) =$$

$$= P(-t \le X \le t) = F_X(t) - F_X(-t)$$

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \frac{dF_X(t)}{dt} - \frac{dF_X(-t)}{dt}$$

$$= f_X(t) + f_X(-t) = 2f_X(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}$$

۱۷)

$$X \sim U(0,1) \Rightarrow f_X(x) = 1 \quad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{b-a} \quad , a \le y \le b \Rightarrow Y \sim U(a,b)$$

گزینه ب صحیح است.

۱۸) قضیه ـ اگر Z نرمال استاندارد و Y توزیع χ^2 با n درجه آزادی داشته باشد آنگاه $\frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$ توزیع t ...

$Z \sim N(0,1)$ ... $\frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$ ... $t(n)$

در نتیجه گزینه ج صحیح است.

تست پنجم

۱- $E(x) = \dfrac{d(1-t)^{-3}}{dt} = 3(1-t)^{-4}\Big|_{t=0} = 3$

$E(x^2) = \dfrac{d\,3(1-t)^{-4}}{dt} = 12(1-t)^{-5}\Big|_{t=0} = 12$

$\sigma^2 = 12 - 3^2 = 3$

۲) از شکل تابع مولد گشتاور پیداست که توزیع X بینوم است.

$M_X(t) = (q + p e^t)^5 \Rightarrow p = \frac{2}{3}\ , \ n = 5$

$P(X = 2 \text{ یا } 3) = P(X=2) + P(X=3)$

$= \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{120}{243}$

۳) گزینه د صحیح است.

$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx$

۴) توزیع X نمائی با پارامتر $\lambda = 100$ است. بنابراین

$M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}\ ,\ t < \lambda \Rightarrow M_X(t) = \dfrac{100}{100 - t}\ ,\ t < 100$

تست ششم

۱)
$$P(-2<X<8) = P(-5<X-3<5)$$
$$= P(|X-3|<5) \geq 1-\frac{\sigma^2}{5^2} = 1-\frac{10-3^2}{25} = \frac{24}{25}$$

۲) ضریب همبستگی X و Y می‌بایست محاسبه شود.

$$E(XY) = 1\times1\times\frac{2}{15}+1\times2\times\frac{4}{15}+1\times3\times\frac{3}{15}+2\times1\times\frac{1}{15}+2\times2\times\frac{1}{15}+2\times3\times\frac{4}{15} = \frac{49}{15}$$

به همین ترتیب
$$E(X) = \frac{7}{5} \qquad E(Y) = \frac{34}{15}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y) = \frac{7}{75}$$

$$\sigma_x^2 = 0/24 \qquad \sigma_y^2 = 0/5955$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma_x^2\cdot\sigma_y^2}} = 0/2469$$

۳) در توزیع پواسان:
$$\mu = \sigma^2 = 100$$

$$P(75<X<125) = P(-25<X-100<25)$$
$$= P(|X-100|<25) \geq 1-\frac{100}{25^2} = 0/84$$

۴) گزینه د صحیح است.

۵) گزینه الف صحیح است.

۶) با توجه به اطلاعات مسأله:
$$Var(X)=1 \qquad Var(Y)=1 \qquad Var(Z)=2$$

$$\rho_{XZ} = \frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{Var(X)Var(Z)}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{1\times2}} \Rightarrow Cov(X,Z)=1$$

$$\rho_{ZY} = \frac{Cov(Z,Y)}{\sqrt{Var(Z)Var(Y)}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{Cov(Z,Y)}{\sqrt{2\times1}} \Rightarrow Cov(Z,Y)=\frac{1}{2}$$

ادامه ۶) خاصیت خطی کوواریانس: $\mathrm{Cov}(aX+bY, cX) = ac\,\mathrm{Var}(X) + bc\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

با استفاده از خاصیت فوق خواهیم داشت:

$$\mathrm{Cov}(U,V) = \mathrm{Cov}(X+Y, X-Y-Z)$$
$$= \mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) - \mathrm{Cov}(X+Y, Z)$$
$$= \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) - \mathrm{Cov}(X,Z) - \mathrm{Cov}(Y,Z)$$
$$= 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$$

۷)

$$X \sim N(1,1) \quad , \quad Y \sim N(1,2) \Rightarrow X-Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$\mu = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0$$
$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X-Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = 1+2-2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1}\sqrt{2} = 1$$
$$\sigma^2 = 1$$

بنابراین

$$X-Y \sim N(0,1) \Rightarrow P(X-Y<2) = \Phi(2)$$

۸)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$$

توزیع یکنواخت است.

$$E(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$
$$E(x^3) = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} x^4 \Big|_{-1}^{1} = 0$$

در نتیجه $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ و بنابراین $\rho_{XY} = 0$

۹)

$$\mathrm{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X)\cdot E(X^2)$$

در توزیع نرمال استاندارد $E(X) = E(X^3) = 0$ بنابراین $\mathrm{Cov}(X,X^2) = 0$ و بنابراین $\rho = 0$

۱۰)

Y \ X	0	1	2	3	f(x)
0	-	-	-	1/8	1/8
1	-	-	3/8	-	3/8
2	-	3/8	-	-	3/8
3	1/8	-	-	-	1/8

$$E(X) = \frac{3}{2} \qquad E(Y) = \frac{3}{2} \qquad E(XY) = \frac{3}{2}$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{-3}{4}$$
$$E(X^2) = 3 \qquad E(Y^2) = 3$$
$$\sigma_X^2 = \frac{3}{4} \qquad \sigma_Y^2 = \frac{3}{4} \qquad \rho = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}} = -1$$

Table 1 DISCRETE DISTRIBUTIONS

Name of parametric family of distributions	Discrete density functions $f(\cdot)$	Parameter space	Mean $\mu = \mathscr{E}[X]$	Variance $\sigma^2 = \mathscr{E}[(X-\mu)^2]$	Moments $\mu_r' = \mathscr{E}[X^r]$ or $\mu_r = \mathscr{E}[(X-\mu)^r]$ and/or cumulants κ_r	Moment generating function $\mathscr{E}[e^{tX}]$
Discrete uniform	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1,\ldots,N\}}(x)$	$N = 1, 2, \ldots$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\mu_3' = \frac{N(N+1)^2}{4}$ $\mu_4' = \frac{(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}$	$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	$0 \le p \le 1$ $(q = 1-p)$	p	pq	$\mu_r' = p$ for all r	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$	$0 \le p \le 1$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ $(q = 1-p)$	np	npq	$\mu_3 = npq(q-p)$ $\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$	$(q+pe^t)^n$
Hypergeometric	$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$	$M = 1, 2, \ldots$ $K = 0, 1, \ldots, M$ $n = 1, 2, \ldots, M$	$n\frac{K}{M}$	$n\frac{K}{M}\frac{M-K}{M}\frac{M-n}{M-1}$	$\mathscr{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = r!\frac{\binom{K}{r}\binom{n}{r}}{\binom{M}{r}}$	not useful
Poisson	$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$\lambda > 0$	λ	λ	$\kappa_r = \lambda$ for $r = 1, 2, \ldots$ $\mu_3 = \lambda$ $\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
Geometric	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$0 < p \le 1$ $(q = 1-p)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\mu_3 = \frac{q+q^2}{p^3}$ $\mu_4 = \frac{q+7q^2+q^3}{p^4}$	$\frac{p}{1-qe^t}$
Negative binomial	$f(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$0 < p \le 1$ $r > 0$ $(q = 1-p)$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\mu_3 = \frac{r(q+q^2)}{p^3}$ $\mu_4 = \frac{r[q+(3r+4)q^2+q^3]}{p^4}$	$\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$

Table 2 CONTINUOUS DISTRIBUTIONS

Name of parametric family of distributions	Cumulative distribution function $F(\cdot)$ or probability density function $f(\cdot)$	Parameter space	Mean $\mu = \mathscr{E}[X]$	Variance $\sigma^2 = \mathscr{E}[(X-\mu)^2]$	Moments $\mu_r' = \mathscr{E}[X^r]$ or $\mu_r = \mathscr{E}[(X-\mu)^r]$ and/or cumulants κ_r	Moment generating function $\mathscr{E}[e^{tX}]$
Uniform or rectangular	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$-\infty < a < b < \infty$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\mu_r = 0$ for r odd; $\mu_r = \frac{(b-a)^r}{2^r(r+1)}$ for r even	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$	$-\infty < \mu < \infty$; $\sigma > 0$	μ	σ^2	$\mu_r = 0$, r odd; $\mu_r = \frac{r!}{(r/2)!}\frac{\sigma^r}{2^{r/2}}$, r even; $\kappa_r = 0$, $r > 2$	$\exp[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2]$
Exponential	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\mu_r' = \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda^r}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$ for $t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\lambda > 0$; $r > 0$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	$\mu_j' = \frac{\Gamma(r+j)}{\lambda^j \Gamma(r)}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$ for $t < \lambda$
Beta	$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$	$a > 0$; $b > 0$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$	$\mu_r' = \frac{B(r+a,b)}{B(a,b)}$	not useful
Cauchy	$f(x) = \frac{1}{\pi\beta\{1 + [(x-\alpha)/\beta]^2\}}$	$-\infty < \alpha < \infty$; $\beta > 0$	Does not exist	Does not exist	Do not exist	Characteristic function is $e^{i\alpha t - \beta \lvert t \rvert}$
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(\log_e x - \mu)^2/2\sigma^2] I_{(0,\infty)}(x)$	$-\infty < \mu < \infty$; $\sigma > 0$	$\exp[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2]$	$\exp[2\mu + 2\sigma^2] - \exp[2\mu + \sigma^2]$	$\mu_r' = \exp[r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2]$	not useful
Double exponential	$f(x) = \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{\lvert x-\alpha \rvert}{\beta}\right)$	$-\infty < \alpha < \infty$; $\beta > 0$	α	$2\beta^2$	$\mu_r = 0$ for r odd; $\mu_r = r!\,\beta^r$ for r even	$\frac{e^{\alpha t}}{1-(\beta t)^2}$

(continued)

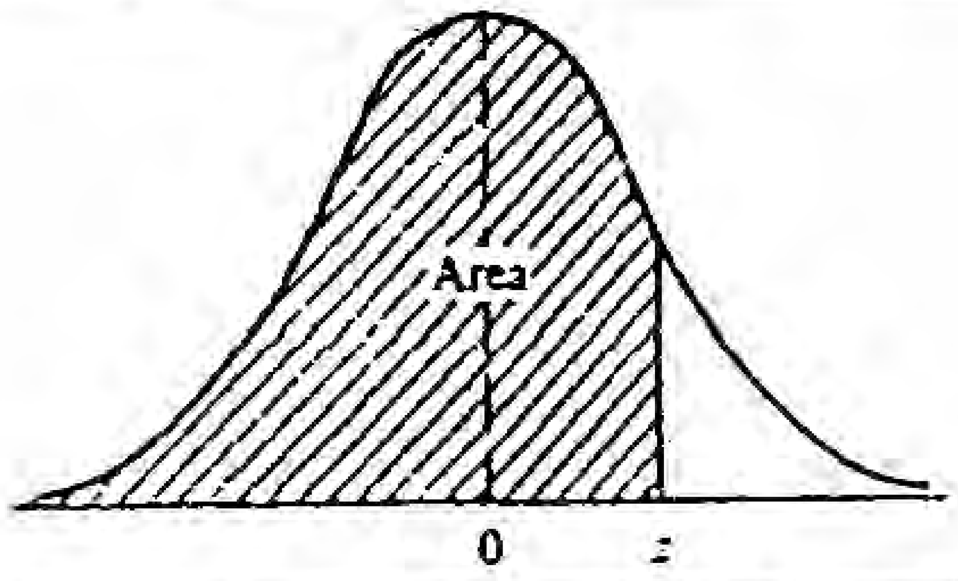
Table 2 CONTINUOUS DISTRIBUTIONS (*continued*)

Name of parametric family of distributions	Cumulative distribution function $F(\cdot)$ or probability density function $f(\cdot)$	Parameter space	Mean $\mu = \mathscr{E}[X]$	Variance $\sigma^2 = \mathscr{E}[(X-\mu)^2]$	Moments $\mu_r' = \mathscr{E}[X^r]$ or $\mu_r = \mathscr{E}[(X-\mu)^r]$ and/or cumulants κ_r	Moment generating function $\mathscr{E}[e^{tX}]$
Weibull	$f(x) = abx^{b-1}\exp[-ax^b]I_{(0,\infty)}(x)$	$a > 0$, $b > 0$	$a^{-1/b}\Gamma(1+b^{-1})$	$a^{-2/b}[\Gamma(1+2b^{-1}) - \Gamma^2(1+b^{-1})]$	$\mu_r' = a^{-r/b}\Gamma\left(1+\frac{r}{b}\right)$	$\mathscr{E}[X^t] = a^{-t/b}\Gamma\left(1+\frac{t}{b}\right)$
Logistic	$F(x) = [1+e^{-(x-\alpha)/\beta}]^{-1}$	$-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$	α	$\frac{\beta^2\pi^2}{3}$		$e^{\alpha t}\pi\beta t\csc(\pi\beta t)$
Pareto	$f(x) = \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}} I_{(x_0,\infty)}(x)$	$x_0 > 0$, $\theta > 0$	$\frac{\theta x_0}{\theta-1}$ for $\theta > 1$	$\frac{\theta x_0^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$ for $\theta > 2$	$\mu_r' = \frac{\theta x_0^r}{\theta - r}$ for $\theta > r$	does not exist
Gumbel or extreme value	$F(x) = \exp(-e^{-(x-\alpha)/\beta})$	$-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$	$\alpha + \beta\gamma$, $\gamma \approx .577216$	$\frac{\pi^2\beta^2}{6}$	$\kappa_r = (-\beta)^r\psi^{(r-1)}(1)$ for $r \geq 2$, where $\psi(\cdot)$ is digamma function	$e^{\alpha t}\Gamma(1-\beta t)$ for $t < 1/\beta$
t distribution	$f(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\frac{1}{(1+x^2/k)^{(k+1)/2}}$	$k > 0$	$\mu = 0$ for $k > 1$	$\frac{k}{k-2}$ for $k > 2$	$\mu_r = 0$ for $k > r$ and r odd; $\mu_r = \frac{k^{r/2}B((r+1)/2, (k-r)/2)}{B(\frac{1}{2}, k/2)}$ for $k > r$ and r even	does not exist
F distribution	$f(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \times \frac{x^{(m-2)/2}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}} I_{(0,\infty)}(x)$	$m, n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n}{n-2}$ for $n > 2$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ for $n > 4$	$\mu_r' = \left(\frac{n}{m}\right)^r\frac{\Gamma(m/2+r)\Gamma(n/2-r)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}$ for $r < \frac{n}{2}$	does not exist
Chi-square distribution	$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{k/2-1}e^{-(1/2)x}I_{(0,\infty)}(x)$	$k = 1, 2, \ldots$	k	$2k$	$\mu_r' = \frac{2^r\Gamma(k/2+r)}{\Gamma(k/2)}$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k/2}$ for $t < 1/2$

118

لطفاً بر روی این برگه چیزی ننویسید.

جدول III : توزیع نرمال



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.3980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

۲۶