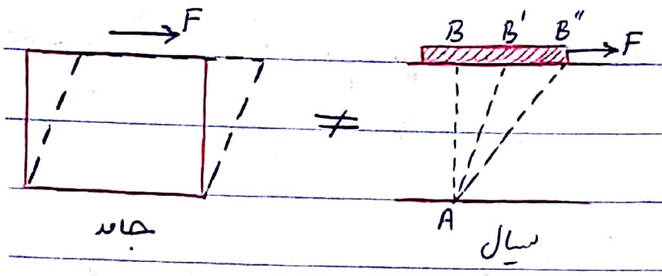
سیال: ماده ای است که در اثر اعمال تنش برشی به طور پیوسته تغییر شکل می دهد.



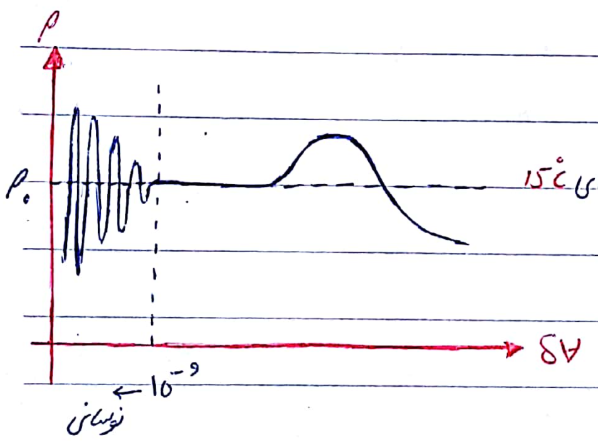
$\tau = \frac{F}{A}$

تنش: نرمال، برشی

برای ایجاد تنش برشی در سیال مثلاً قطعه چوبی را روی آب قرار می دهیم و آن را می کشیم.

پیوستگی: تمام کمیت های مرتبط با سیال مانند: سرعت، چگالی، فشار و ... در فضا به صورت پیوسته تغییر می کنند.

زیرا تعداد مولکول هایی که در حجم بسیار کوچکی از سیال وجود دارد در حالت معمول بسیار زیاد بوده، لذا کمیت های اندازه گیری شده دارای قطعیت می باشند.



مثلاً در هوا در حجم $\delta \forall = 10^{-9}\ mm^3$ در فشار اتمسفر و دمای $15^\circ C$ حدود 3×10^{7} مولکول وجود دارد.

اگر حجم اندازه گیری از $\delta \forall$ کوچکتر باشد، کمیت های اندازه گیری شده دارای عدم قطعیت می باشند.

در مکانیک سیالات همواره پیوستگی برقرار است بجز در گازهای رقیق و نزدیک شوک ها.

سیستم واحدها: SI و BG

کمیت های اصلی: طول L، زمان T، جرم M، دما T

SI: m, s, Kg, K

BG: ft, s, slug, R

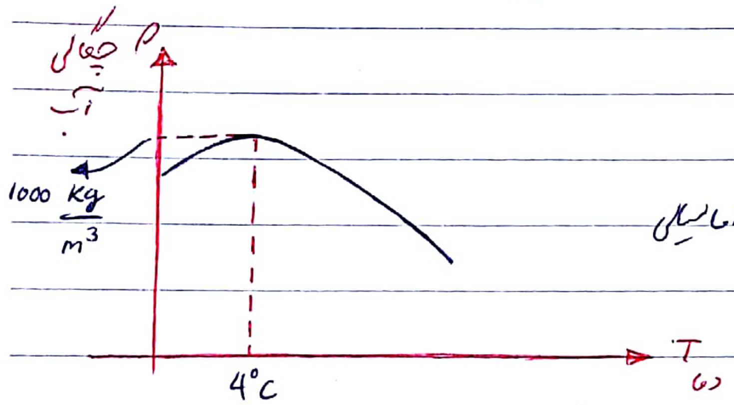
کمیت های مرتبط با سیال :

① چگالی : جرم در واحد حجم : ρ ⟵ $\left[\frac{kg}{m^3}\right] / \left[\frac{slug}{ft^3}\right]$

② وزن مخصوص : وزن در واحد حجم $\gamma = \rho g$ ⟵ $\left[\frac{N}{m^3}\right] / \left[\frac{\overset{\text{پوند}}{Lb}}{ft^3}\right]$

③ گرانش مخصوص (specific gravity) : $SG = \frac{\rho}{\rho_{H_2O\,@\,4^\circ C}}$ $\rho_{H_2O\,@\,4^\circ C} \Rightarrow 1000\ \frac{kg}{m^3}$

④ رابطه ی گاز کامل $P = \rho \overset{\text{ثابت جهانی}}{R} T$



* سیالی که در حال سکون است تنش برشی ندارد اما سیالی که در حال حرکت است تنش برشی دارد.

⑤ فشار : تنش نرمال در سیال می باشد. ناشی از برخورد مداوم مولکول های سیال با سطح می باشد. فشار نیرو در واحد سطح است و سطح می تواند فرضی یا واقعی باشد. $P = \frac{F}{A}$ ⟵ $\overset{SI}{[Pa]} / \overset{BG}{[psi]}$

* فشار به دو صورت بیان می شود :

① مطلق ⟸ فشار نسبت به خلاء ⟸ P_{abs}

② نسبی ⟸ فشار نسبت به اتمسفر محلی ⟸ $P_{gage} = P - P_{atm}$

ویسکوزیته (گرانروی، لزجت، Viscosity): درجه‌ی مقاومت سیال در برابر اعمال تنش برشی (۱/۲)

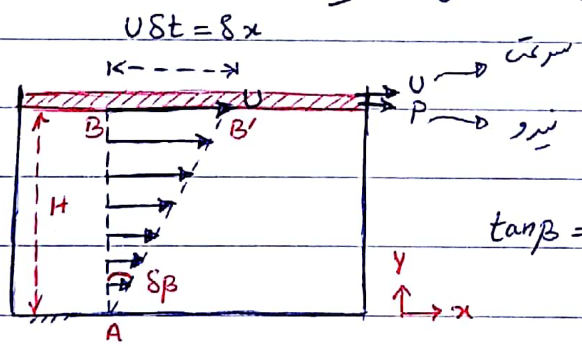
در مایعات با افزایش دما، ویسکوزیته کاهش می‌یابد ← ناشی از نیروی بین مولکولی

در گازها با افزایش دما ویسکوزیته افزایش می‌یابد ← ناشی از انتقال اندازه حرکت در اثر برخورد مولکول‌ها است

⊛ اگر سیالی در محفظه‌ای قرار داشته باشد و آن محفظه با سرعت حرکت (یکنواخت) انجام دهد به آن سیال تنش برشی وارد نمی‌شود مثل لیوان آبی که شخصی داخل هواپیما در دست دارد و یا ظرف آبی که داخل یک آسانسور که در حال حرکت به سمت پایین است، قرار دارد.

⊛ سرعت نسبی سیال نسبت به جداره‌اش صفر است، یعنی سیال به جداره کاملاً می‌چسبد ← شرط عدم لغزش

مثلاً اگر کف اقیانوس جوهر بریزیم جریان آب جوهر را نمی‌برد زیرا سیال به کف اقیانوس چسبیده است و یا اگر دست خود را داخل یک ظرف آب کنیم و بیرون بیاوریم دست ما همچنان خیس باقی می‌ماند.



رابطه‌ی تنش برشی و نرخ کرنش زاویه‌ای:

$$\tan\beta = \frac{\delta x}{H} = \frac{U\delta t}{H} \quad (1)$$

اگر δt کوچک باشد ← $\delta\beta$ کوچک است.

$$\Rightarrow \tan\beta = \delta\beta \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \delta\beta = \frac{U\delta t}{H} \rightarrow \frac{\delta\beta}{\delta t} = \frac{U}{H}$$

$$\delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{U}{H} = \frac{du}{dy} \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{du}{dy} \quad (3)$$

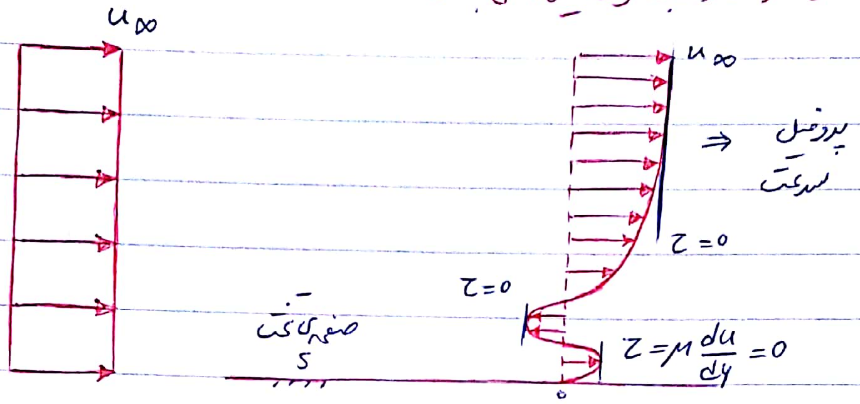
نرخ کرنش زاویه‌ای برابر گرادیان سرعت است

از آزمایش: (4) $\tau \propto \beta$

(3), (4) $\Rightarrow \tau \propto \frac{du}{dy} \Rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy}$ (5)

سیالاتی که در این رابطه صدق می‌کنند را سیال نیوتونی می‌گویند.

مثال: بردارها نشان دهنده‌ی سرعت (جهت حرکت سیال) می‌باشد.



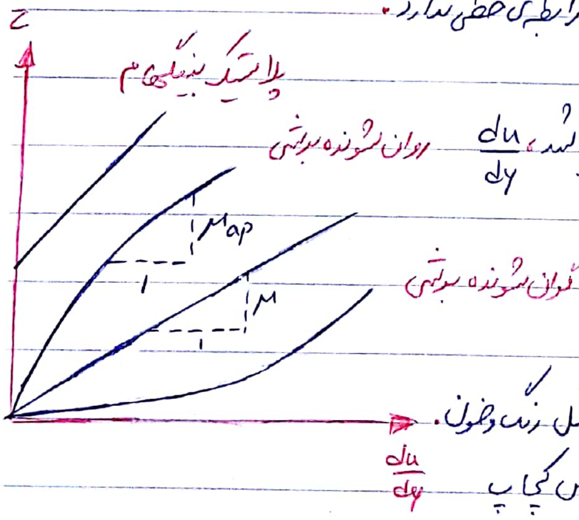
μ ← لزجت (ویسکوزیته) دینامیکی (مطلق): واحد: $pa.s$ / $\frac{Kg}{m.s}$ / $\frac{N.s}{m^2}$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ← ویسکوزیته سینماتیکی (Kinematic): واحد: $\frac{m^2}{s}$

* در سیستم واحد CGS: (C سانتی‌متر، G گرم، S ثانیه)

واحد μ در CGS: پواز (poise) P — واحد ν در CGS: استوک (Stoke) St

* در سیال غیرنیوتونی تنش برشی با نرخ کرنش (گرادیان سرعت) رابطه‌ی خطی ندارد.



سیالات غیرنیوتونی: (1) گران شونده برشی: هرچه τ بیشتر باشد $\frac{du}{dy}$ کمتر است ← مانند: نشاسته ذرت در آب.

(2) روان شونده برشی: هرچه τ بیشتر باشد $\frac{du}{dy}$ بیشتر است. مثل رنگ، خون، سس کچاپ

← مثلاً هرچه فرچه ی رنگ زنی را محکم تر روی دیوار فشار دهیم رنگ بیشتر و با سرعت بیشتر روی دیوار پخش می شود در

با افزایش فشار خون، خون راحت تر در رگ ها حرکت می کند.

③ پلاستیک بینگهام: تا حد معینی تنش برشی را تحمل می کند (بدون تغییر شکل) و بیشتر از آن مانند سیال جاری می شود.

مانند: سس مایونز و خمیر دندان.

- ویسکوزیته ظاهری (apparent): μ_{ap}

نسبت تنش برشی به $\frac{du}{dy}$ (نرخ کرنش) در سیالات غیرنیوتنی، μ_{ap} می گویند.

$$\mu_{ap} = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}}$$

⊛ ویسکوزیته با فشار زیاد تغییر نمی کند (خیلی کم تغییر می کند).

⊛ روابط تجربی تغییرات ویسکوزیته با دما: در گازها: رابطه ی ساترلند:

$$\mu = \frac{CT^{\frac{3}{2}}}{T+S}$$

C و S ضرایب ثابت اند

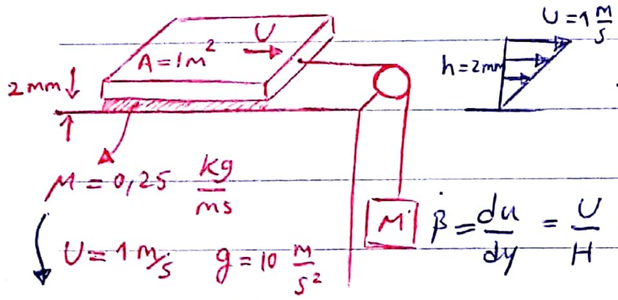
در مایعات: رابطه ی آندراده: D و B ضرایب ثابت اند

$$\mu = De^{B/T}$$

برای هرکدام از روابط بالا با دو آزمایش ضرایب را می توان بدست آورد.

⊛ هنگامیکه یک فضاپیما از جو با سرعت بالا عبور می کند چون ویسکوزیته ی هوا بالا می رود، تنش برشی و اصطکاک وارد به فضاپیما افزایش پیدا می کند.

مثال: در شکل روبه رو M را بیابید. پروفیل سرعت به صورت خطی است.



$U = 1\ m/s \quad g = 10\ m/s^2$

SAE 30 روغن موتور

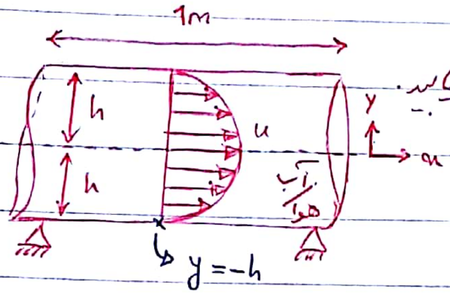
$$\dot{\beta} = \frac{du}{dy} = \frac{U}{H} \rightarrow \dot{\beta} = \frac{1}{2\times10^{-3}} = 500\ \frac{1}{s}$$

$\tau = \mu \dot{\beta} = 0{,}25 \times 500 = 125\ Pa \rightarrow \tau = \frac{F}{A} \rightarrow F = 125\ N$

$\sum F_x = 0 \rightarrow T - 125 = 0 \rightarrow T = 125\ N$

$\sum F_y = 0 \rightarrow T - Mg = 0 \rightarrow Mg = 125\ N \rightarrow M = 12{,}5\ kg$

مثال: نیروی وارده به پایه‌ها و جهت نیرو (ناشی از تنش برشی) را بیابید.



$u = \frac{3v}{2}\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \quad , \quad v = \frac{1}{3}\ \frac{m}{s}$

$\mu_{\text{آب}} = 9\times10^{-4}\ Pa.s \qquad \mu_{\text{هوا}} = 1{,}8\times10^{-5}\ Pa.s \qquad h = 1m$

برای آب: $\frac{du}{dy} = \frac{1}{2}\left(\frac{-2y}{h^2}\right) = \frac{-y}{h^2} \qquad \tau = \mu\frac{du}{dy} = 9\times10^{-4}\times\frac{-y}{h^2}$

در مجاورت پایه‌ها $\rightarrow y=-h \overset{h=1}{\Rightarrow} \tau = 9\times10^{-4}\ Pa$

$F_{\text{آب}} = \tau . A \qquad A =$ سطح استوانه‌ای لوله $= 2\pi h \times 1 \Rightarrow F_{\text{آب}} = 18\pi\times10^{-4}\ N$

$F_{\text{هوا}} = \frac{1}{50}F_{\text{آب}} = \frac{1}{50}\times18\pi\times10^{-4} = 3{,}6\pi\times10^{-5}\ N$

جهت نیروی ناشی از تنش برشی نیز به سمت راست است. ($\longrightarrow$)

تراکم پذیری سیال: ضریب کشسانی حجمی (مدول حجمی): E_v Bulk Modulus

(کاهش)

dp مقدار تغییر فشاری که تغییر حجم $d\forall$ را بوجود می‌آورد می‌باشد. حجم $= \forall$ $\qquad E_v = -\frac{dP}{\frac{d\forall}{\forall}} > 0$

$E_v = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} > 0 \qquad E_{v_{\text{آب}}} = 2{,}2\ GPa \qquad E_{v_{\text{هوا}}} = 0{,}14\ MPa\ /\ 0{,}1\ MPa$

ایزنتروپیک   هم دما

Date No

می‌خواهیم حجم مقدار مشخصی از آب را ۱٪ کاهش دهیم:

$$E_{v_{\text{آب}}} = -\frac{dP}{\frac{d\forall}{\forall}} = 2{,}2\times10^{9}\ Pa \rightarrow \Delta P = 2{,}2\times10^{9}\times0{,}01 = 22\times10^{6}\ Pa = 22000\ KPa$$

$$\frac{d\forall}{\forall} = 0{,}01$$

$\Rightarrow P_{atm} = 101\ KPa \rightarrow$ پس نتیجه می‌شود که آب تراکم ناپذیر نیست

$\Delta P = 0{,}14\times10^{6}\times0{,}01 = 0{,}14\times10^{4}\ Pa = 1{,}4\ KPa \rightarrow$ پس هوا تراکم پذیر است

برای گازهای ایده‌آل: $P = \rho R T$ اگر فرآیند تراکم هم دما باشد: $P = \rho \times C$

$$E_v = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} = \rho C = P \Rightarrow E_v = P$$

اگر فرآیند تراکم آیزنتروپیک باشد: $\frac{P}{\rho^K} = \text{ثابت} \quad K = \frac{C_p}{C_v} \quad K_{air} = 1{,}4$

$$E_v = \frac{dP}{\frac{d\rho}{\rho}} = \rho\frac{dP}{d\rho} = K\rho^{K}\times\frac{P}{\rho^K} = KP \Rightarrow E_v = KP \Rightarrow \frac{E_v \leftarrow \text{ایزنتروپیک}}{E_v \leftarrow \text{هم دما}} = K$$

سرعت صوت در سیالات: در سیالات تراکم ناپذیر سرعت صوت از سیالات تراکم پذیر بیشتر است، یعنی مثلاً در آب بیشتر از در هوا است.

$$C = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \leadsto \text{سرعت صوت}$$

فرآیند انتشار صوت یک فرآیند آیزنتروپیک است.

گازهای ایده‌آل $\leadsto C = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} = \sqrt{\frac{KP}{\rho}} = \sqrt{KRT}$

سرعت صوت در گازها به دما بستگی دارد.

$$C_{\text{هوا}/20^\circ C} \simeq 343\ \frac{m}{s} \qquad C_{\text{آب}/20^\circ C} \simeq 1481\ \frac{m}{s}$$

ماخ

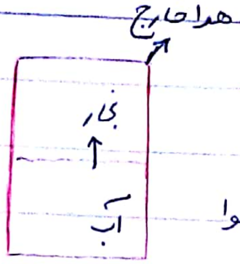
$M = \dfrac{\text{سرعت سیال}}{\text{سرعت صوت در همان سیال}}$

$>1 \rightarrow$ hyPerSonic

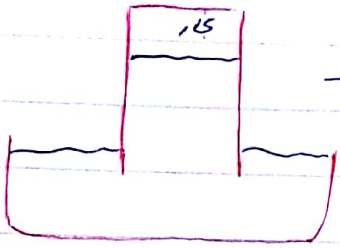
$=1 \rightarrow$ صوت (کامل‌تر در سیالات 2)

$<1 \rightarrow$ زیر صوت

فشار بخار ← هر سیالی که فشار بخارش بیشتر باشد، تبخیر سطحی اش بیشتر خواهد بود.



(P_v): اگر هوا در ظرف نشت داده شده را تخلیه کنیم، مایع بخار شده و بخار، جای هوا را می گیرد. در حالت تعادل (اشباع) فشار بخار برابر فشار بخار بالای مایعات می باشد.



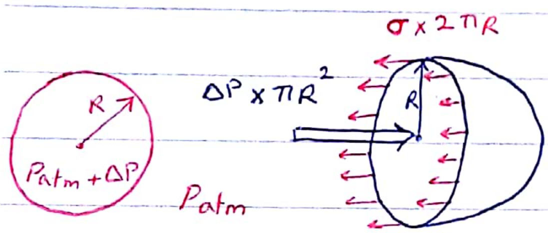
← ظرف آب را در ظرف دیگری از آب برعکس گردانیم سپس در بالای لوله تخلیه هوا صورت می گیرد.

دمای جوش: دمایی است که فشار بخار با فشار محیط یکی شود.

* فشار بخار با افزایش دما افزایش می یابد.

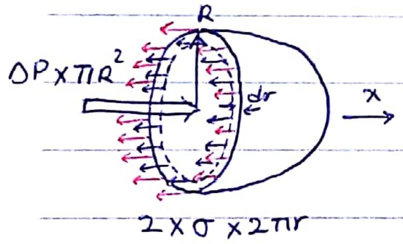
کشش سطحی (Surface tension): کشش سطحی را با σ نمایش می دهیم که عبارت است از نیرو در واحد طول.

ناشی از نیروی بین ملکولی در مرز سیال با گاز (یا مایع) دیگر.



مثال: اختلاف فشار داخل و خارج قطره:

$$\sum F_x=0 \longrightarrow \sigma\times 2\pi R=\Delta P\times \pi R^2 \Rightarrow \Delta P=\frac{2\sigma}{R}$$



برای حباب به صورت روبه رو است: پوسته ی حباب را به دو section تقسیم می کنیم سپس روی هر کدام نیرو است و چون ضخامت آن (dr) بسیار کم است تقریباً شعاع دو section برابر است پس دو نیروی $\sigma\times 2\pi r$ خواهیم داشت:

$$\sum F_x=0 \Rightarrow 2\sigma\times 2\pi R=\Delta P\times \pi R^2 \longrightarrow \Delta P=\frac{4\sigma}{R}$$

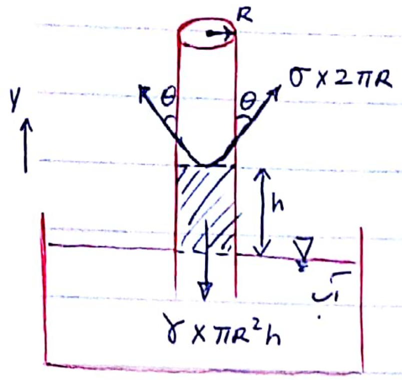
* قطره آب به شعاع 1mm ←

$$\Delta P=\frac{2\times 72{,}86\times 10^{-3}\ \frac{N}{m}}{10^{-3}}=145{,}72\ \frac{N}{m^2}\ \text{Pa}$$

Date No

~~(101 KPa)~~

← واضح است که فشار داخل آن بسیار کمتر از فشار اتمسفر است.



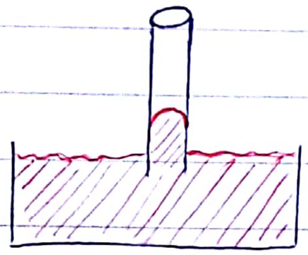
موئینگی: contact angle ← زاویه‌ی تماس بین مایع و سطح جامد = θ

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \sigma \times 2\pi R\cos\theta = \gamma \times \pi R^2 h \qquad \gamma = \rho g$$

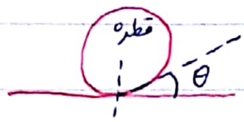
$$\Rightarrow \uparrow h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\gamma R \downarrow}$$

مثلاً: آب و شیشه

$$g=10,\ R=1cm,\ \sigma = 73\times10^{-3}\frac{N}{m},\ \theta=10^\circ \Rightarrow h=\frac{2\times73\times10^{-3}\times\cos10}{10^4\times10^{-2}} = 1{,}4\ mm$$



⊛ هرچه سطح آب کوچکتر باشد، قطره کروی‌تر است. برای جیوه:

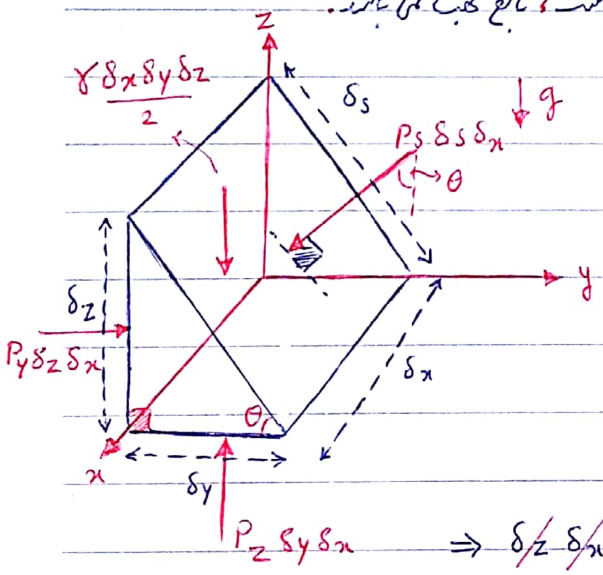


استاتیک سیالات

فصل دوم

ایزوتروپیک است

قانون پاسکال: فشار در یک نقطه از سیالی که تنش برشی در آن صفر است، تابع جهت نمی‌باشد.



اثبات: حجم المان $= \frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2}$

δ دلتای کوچک

Δ دلتای بزرگ

$$\Sigma F_y = m a_y \qquad \delta_s \sin\theta = \delta_z$$

$$\Rightarrow P_y\delta_z\delta_x - P_s\delta_s\delta_x\sin\theta = \rho\frac{\delta_x\delta_y\delta_z}{2}a_y$$

$$\Rightarrow \cancel{\delta_z}\,\cancel{\delta_x}(P_y - P_s) = \rho\frac{\cancel{\delta_x}\,\delta_y\,\cancel{\delta_z}}{2}a_y$$

$$\Rightarrow \boxed{P_y - P_s = \frac{\delta_y}{2}\rho\, a_y} \quad (I)$$

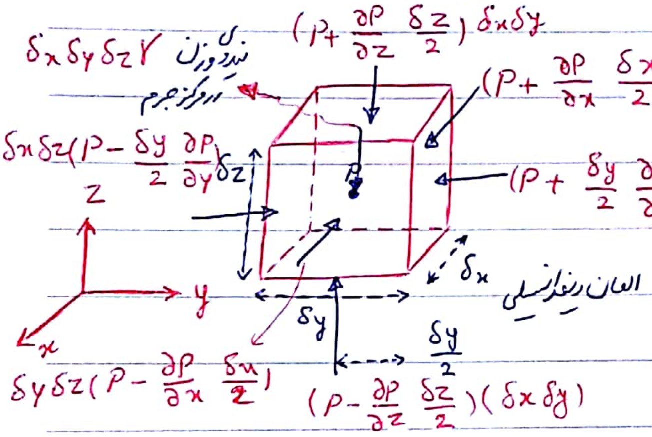
$$\sum F_z = m a_z \Rightarrow P_z\,\delta z\,\delta x - P_s\,\delta s\,\delta x\cos\theta - \frac{\gamma\,\delta x\,\delta y\,\delta z}{2} = \rho\,\frac{\delta x\,\delta y\,\delta z}{2}\,a_z$$

$$,\quad \delta s\cos\theta = \delta y \Rightarrow \cancel{\delta y}\,\cancel{\delta x}\,(P_z - P_s) = \frac{\rho}{2}\,\cancel{\delta x}\,\cancel{\delta y}\,\delta z\,(a_z + g)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_z - P_s = \frac{\rho}{2}(a_z + g)\,\delta z} \quad \text{II}$$

$$\delta x, \delta y, \delta z \to 0 \qquad \text{I} \rightarrow P_y = P_s \qquad \text{II} \rightarrow P_z = P_s \Rightarrow \boxed{P_y = P_z = P_s}$$

چون زاویه‌ی θ مطابق شکل یک زاویه‌ی دلخواه بود در اینجا هم اثبات کردیم که فشار نه تابع جهت است و نه زاویه.



تغییرات فشار در سیال: (تنش برشی = صفر)

(شتاب ثابت $\vec{a}$)

فشار در مرکز مکعب

مرکز جرم و مرکز حجم در اینجا هر دو در نقطه‌ی P است.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F} = \sum F_x\,\hat{i} + \sum F_y\,\hat{j} + \sum F_z\,\hat{k} \qquad \sum F_x = \frac{-\partial P}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z \quad (1)$$

$$\sum F_y = \left(P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\,\delta z - \left(P + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x\,\delta z = -\frac{\partial P}{\partial y}\,\delta x\,\delta y\,\delta z \quad (2)$$

$$\sum F_z = \left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x\,\delta y - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x\,\delta y - \gamma\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

$$\Rightarrow = -\left(\frac{\partial P}{\partial z} + \gamma\right)\delta x\,\delta y\,\delta z \quad (3)$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F} = -\left[\overbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}\right)}^{\vec{\nabla} P} + \gamma\hat{k}\right]\delta x\,\delta y\,\delta z = -\left[\vec{\nabla} P + \gamma\hat{k}\right]\delta x\,\delta y\,\delta z$$

$$\Rightarrow -\left[\vec{\nabla} P + \gamma\hat{k}\right]\delta x\,\delta y\,\delta z = \rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\,\vec{a} \Rightarrow \underbrace{-\vec{\nabla} P - \gamma\hat{k}}_{\left[\frac{N}{m^3}\right]} = \rho\vec{a} \quad (4)$$

Date No

(*) علامت منفی برای رابطه ۴ ناشی از آن است که گرادیان فشار منفی است یعنی از جایی که فشار بیشتر است به جایی می‌رود که فشار در آنجا کمتر است.

اگر $a=0$ باشد:

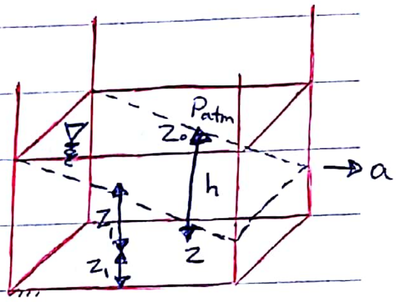
$$④ \to \vec{\nabla} P = -\gamma \hat{k} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 , \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 & ⑤ \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma & ⑥ \end{cases}$$

$$⑤ \Rightarrow P = P(z) \to \frac{dP}{dz}$$

سیال تراکم ناپذیر

اگر γ ثابت باشد:

$$⑥ \to \int_{z_1}^{z_2} \frac{dP}{dz} dz = -\int_{z_1}^{z_2} \gamma dz$$



$$\Rightarrow P_2 - P_1 = -\gamma (z_2 - z_1) \to P_2 = P_1 - \gamma (z_2 - z_1)$$

وقتی سیال شتاب a داشته باشد شیب ایجاد می‌شود

$$\int_{P}^{P_{atm}} dp = -\int_{z}^{z_0} \gamma dz \to P_{atm} - P = -\gamma (z_0 - z) \to \boxed{P = P_{atm} + \overset{\rho g}{\gamma} h} \quad ⑦$$

$$⑦ \to \frac{P - P_{atm}}{\gamma} = h \to \text{هد فشار} \Rightarrow \frac{\Delta P}{\gamma} = h \xrightarrow{\text{شتک}} \frac{101 \times 10^3}{10^4} \simeq 10\ m$$ هد فشار برای آب

$$\xrightarrow{\text{شتال}} \frac{101 \times 10^3}{10} \simeq 10\ Km$$ ρ هوا را تقریباً برابر ۱ گرفتیم ← هد فشار برای هوا

برای سیال تراکم پذیر (گاز ایده‌آل):

$$8 \to dp = -\overset{\rho g}{\gamma} dz = -g \frac{P}{RT} dz \to \boxed{\int_1^2 \frac{dp}{P} = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{g}{R} \frac{dz}{T}} \quad ⑧$$

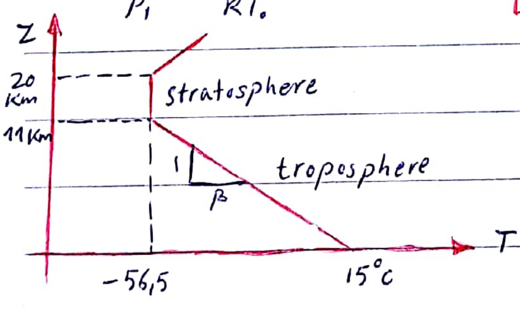
($P = \rho RT$)

اگر دما ثابت باشد $(T = T_0)$:

$$\Rightarrow \ln \frac{P_2}{P_1} = \frac{-g}{RT_0}(z_2 - z_1) \Rightarrow \boxed{P_2 = P_1 e^{\frac{-g}{RT_0}(z_2 - z_1)}} \quad ⑨$$

اتمسفر استاندارد:

افت دما در تروپوسفر در هر کیلومتر $\simeq 6,5°c$



$$\text{troposphere} \to \boxed{T = T_0 - \beta z} \quad ⑩$$

← اگر در تروپوسفر باشیم:

⑥, ⑧ $\rightsquigarrow \displaystyle\int_{P_{atm}}^{P} \frac{dP}{P} = \frac{-g}{R}\int_{0}^{z} \frac{dz}{T_0-\beta z}$

$$\Rightarrow \ln\frac{P}{P_{atm}} = \frac{g}{\beta R}\ln\left(\frac{T_0-\beta z}{T_0}\right) \Rightarrow P = P_{atm}\left(\frac{T_0-\beta z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\beta R}}$$

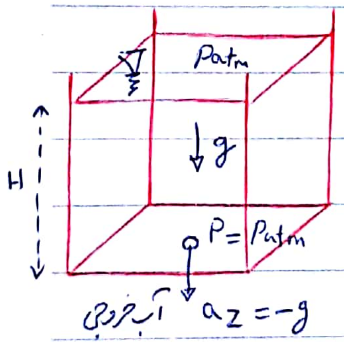
مثال: $h_{Milad.Tower} = 435\,m$, $\underset{\text{هوا}}{R} = 287 \frac{J}{Kg.K}$ $\quad \beta = \frac{56.5+15}{11000} = 6.5\times10^{-3}$

$T_0 = 15^\circ C$, $P_{atm} = 101\ kPa$ @ Sea level $\quad$ ارتفاع تهران $= 1200\,m$ (بالای سطح دریا)

$$\rightsquigarrow P = 101\times10^{3}\,pa\left[1-\frac{6.5\times10^{-3}\times(435+1200)}{288}\right]^{\frac{10}{6.5\times10^{-3}\times287}} = 100999.998\ Pa$$

← فشار هوا به مقدار بسیار کمی کاهش یافته است.

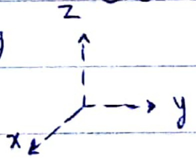
مثال: ظرف آبی که در کف آن یک سوراخ وجود دارد و آب از آن جریان دارد، زمانی که در حال سقوط آزاد داخل یک آسانسور باشد، جریان آب از سوراخ چگونه خواهد بود؟



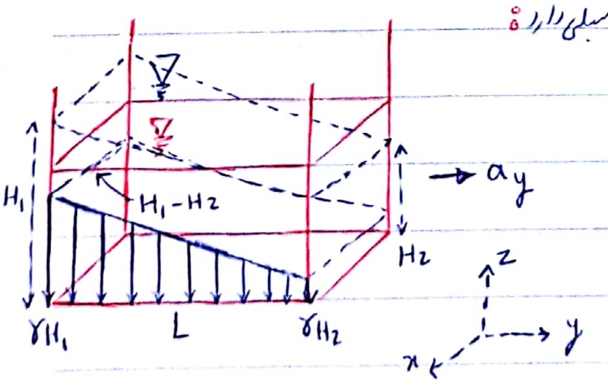
$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g+a_z)$$

$$a_z=-g \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z}=0 \Rightarrow P=P_{atm}$$

زمانی آب از ظرف خارج می‌شود که اختلاف فشار وجود داشته باشد حال که اختلاف فشار نداریم، آب از سوراخ خارج نمی‌شود.



* فشار در انتهای ظرفی که در حال حرکت است همیشه به ارتفاع سیال بستگی دارد:

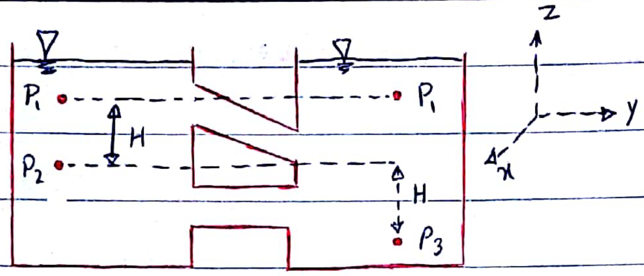


توزیع فشار در کف ظرفی که با شتاب a_y حرکت می‌کند

$P=\gamma h$ ← ارتفاع از سطح سیال
نسبی

Date No

دو ظرف مطابق شکل به یکدیگر وصل شده اند:



$$P_2 - P_1 = \gamma H \qquad P_2 - P_3 = -\gamma H$$

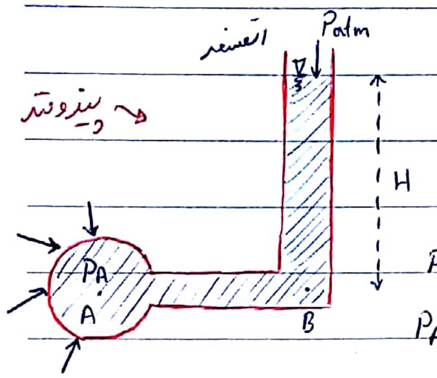
$$P_1 - P_3 = -2\gamma H$$

(سیال یکی است)

اندازه گیری فشار به وسیله ی مانومتر:

$$H = \frac{P}{\gamma} = \text{هد فشار}$$

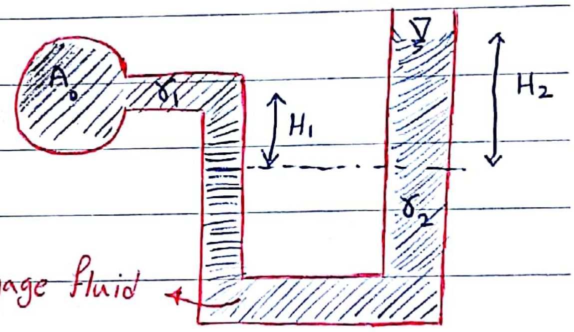
① پیزومتر ② مانومتر نعلی ③ مانومتر مایل



$$P_A = P_B$$

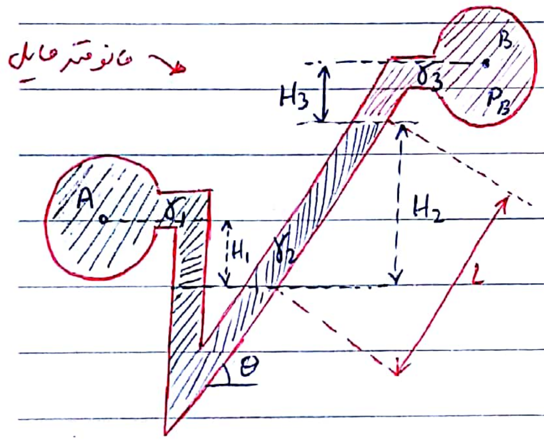
$$P_A = P_B = \gamma H$$

مانومتر نعلی:



$$P_A + \gamma_1 H_1 - \gamma_2 H_2 = 0 \Rightarrow P_A = \gamma_2 H_2 - \gamma_1 H_1$$

$P_{atm\ \text{نسبی}} = 0$



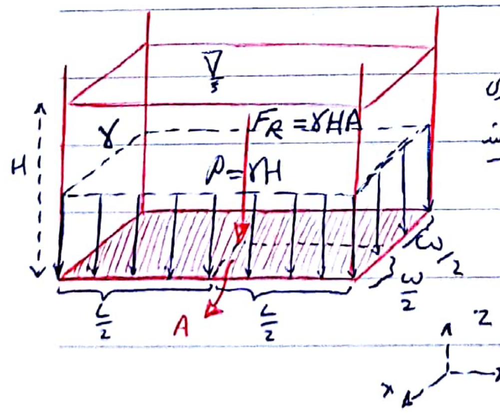
$$P_A + \gamma_1 H_1 - \gamma_2 H_2 - \gamma_3 H_3 = P_B \Rightarrow P_A - P_B = \gamma_2 H_2 + \gamma_3 H_3 - \gamma_1 H_1$$

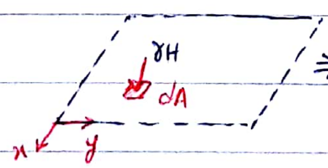
$$\Rightarrow H_2 = \frac{P_A - P_B - \gamma_3 H_3 + \gamma_1 H_1}{\gamma_2} \qquad H_2 = L\sin\theta \Rightarrow L = \frac{P_A - P_B - \gamma_3 H_3 + \gamma_1 H_1}{\gamma_2 \sin\theta}$$

در نتیجه اگر بخواهیم L بیشتر شود که بتوانیم درجه بندی بیشتری انجام دهیم باید θ را کاهش دهیم.

نیروی برآیند ← $F_R = \gamma H A$

فشار بر روی سطوح صاف در سیال:

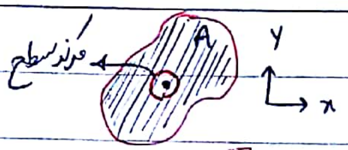




$$\Rightarrow \gamma H A y_c = \int_A y \gamma H dA$$

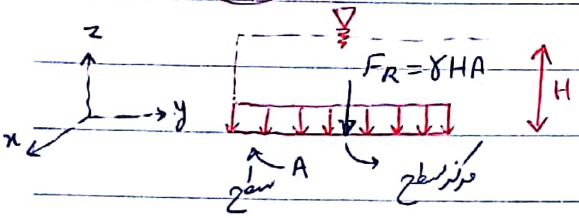
$$\Rightarrow y_c = \frac{\int y dA}{A}$$

$$x_c = \frac{\int x dA}{A}$$

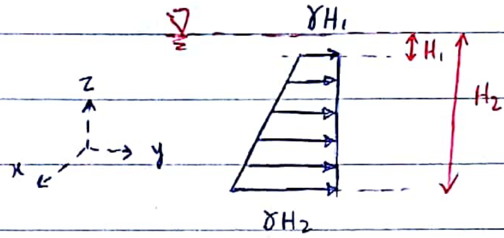


پس ⇐ مرکز هندسی سطح ≡ محل اعمال نیروی برآیند F_R

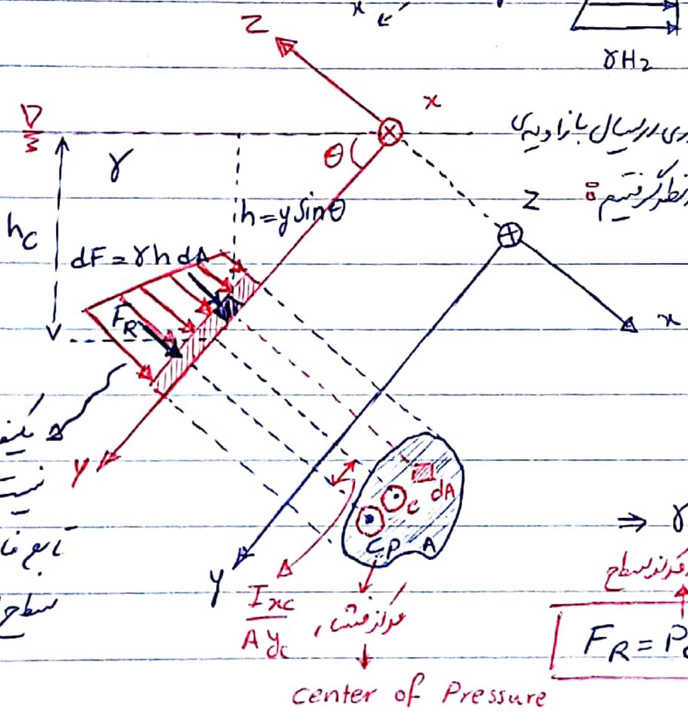
فشار روی سطوح افقی:



فشار روی سطوح عمودی:



فشار روی سطوح مایل در سیال: سطح غوطه‌وری در سیال با زاویه دلخواه θ را در نظر گرفتیم:



یکنواخت نیست چون تابع فاصله از سطح است

$$F_R = \int_A dF = \int \gamma h\, dA$$

$$= \int \gamma y \sin\theta\, dA = \gamma \sin\theta \int y\, dA$$

$$\Rightarrow \gamma \sin\theta\, A \underbrace{\frac{\int y\, dA}{A}}_{y_c} = \gamma A h_c = P_c A$$

فشار در مرکز سطح

$$\boxed{F_R = P_c A} \rightarrow \text{مقدار نیروی برآیند}$$

$$F_R y_{cp} = \int_A y\, dF = \int_A y \gamma h\, dA = \int_A \sin\theta\, \gamma y^2 dA = \sin\theta\, \gamma \int_A y^2 dA$$

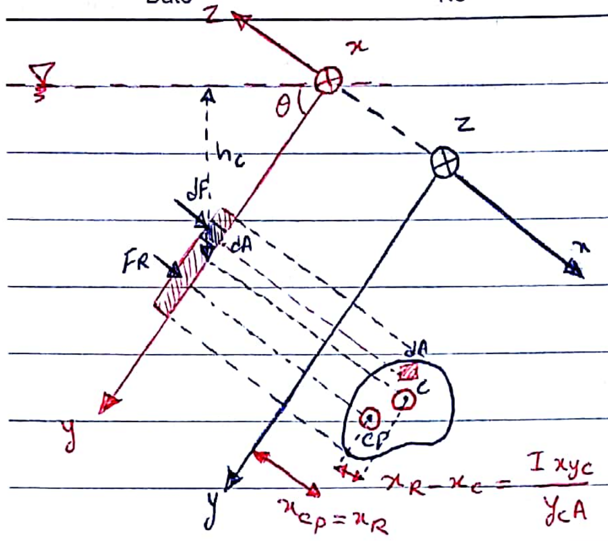
$$\Rightarrow y_{cp} = \frac{\sin\theta\, \gamma \int_A y^2 dA}{A \gamma \sin\theta\, y_c} = \frac{\int_A y^2 dA}{A y_c} = \frac{I_x}{A y_c} \Rightarrow y_{cp} = \frac{I_x}{A y_c}$$

نقطه اثر: $\boxed{I_x = I_{xc} + A y_c^2} \rightarrow y_{cp} = \frac{I_{xc} + A y_c^2}{A y_c} = y_c + \frac{I_{xc}}{A y_c}$

تئوری محورهای موازی

پس بدین نیروی برآیند روی نقطه‌ای قرار دارد که با مرکز سطح به مقدار $\frac{I_{xc}}{Ay_c}$ تفاوت دارد.

Date No



مقدار نیروی معادل ① $F_R = \gamma h_c A$

$$y_R = y_{cp} = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c A}$$

$$F_R x_R = \int_A x\,\overset{PdA}{dF} = \int_A x\gamma y \sin\theta\, dA$$

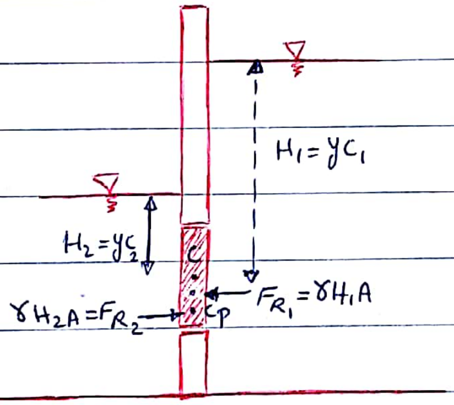
$$= \gamma \sin\theta \underbrace{\int_A xy\, dA}_{I_{xy}}$$

① → $\gamma h_c A x_R = \gamma y_c \sin\theta A x_R = \gamma \sin\theta\, I_{xy}$

$$\Rightarrow x_R = \frac{I_{xy}}{y_c A} = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c \rightarrow x_R - x_c = \frac{I_{xyc}}{y_c A}$$

$I_{xy} = I_{xyc} + A x_c y_c$ → تئوری محورهای موازی

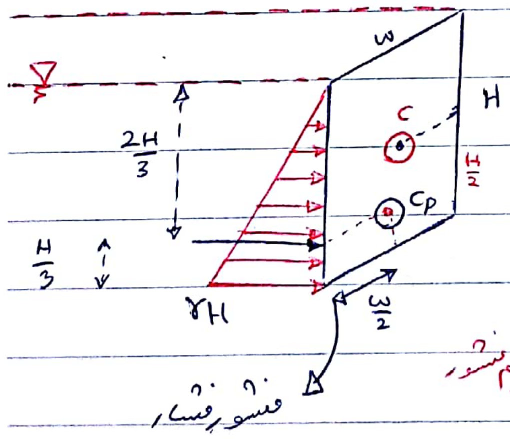
مثال:



مطابق شکل هرچه ارتفاع از سطح سیال بیشتر باشد، محل اعمال

نیروی برآیند یعنی cp به نقطه‌ی c نزدیک‌تر خواهد بود.

منشور فشار (Pressure Prism)

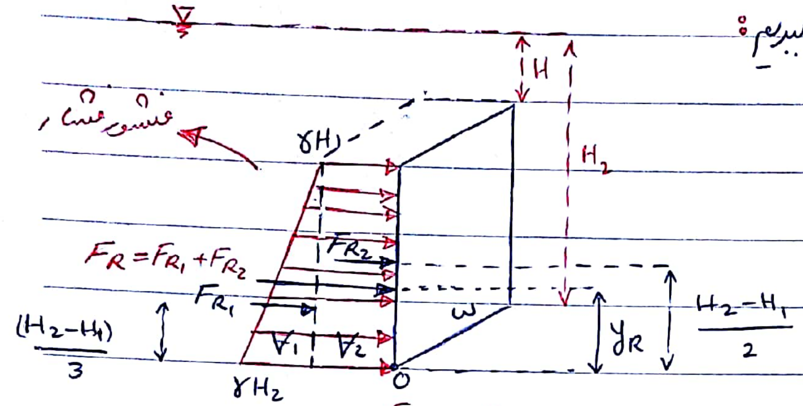


$$F_R = \gamma \overbrace{\frac{H}{2}}^{P_c} \overbrace{(wH)}^{A} = \frac{\gamma}{2} wH^2 = \forall$$ حجم منشور فشار

$$\underbrace{F_R = \forall}_{\text{مقدار نیروی برآیند برابر حجم منشور فشار است}} = \frac{1}{2}(wH)\gamma H$$

← محل اعمال F_R مرکز حجم منشور فشار است.

حال اگر نمودار فشار را پایین تراز سطح سیال ببریم:

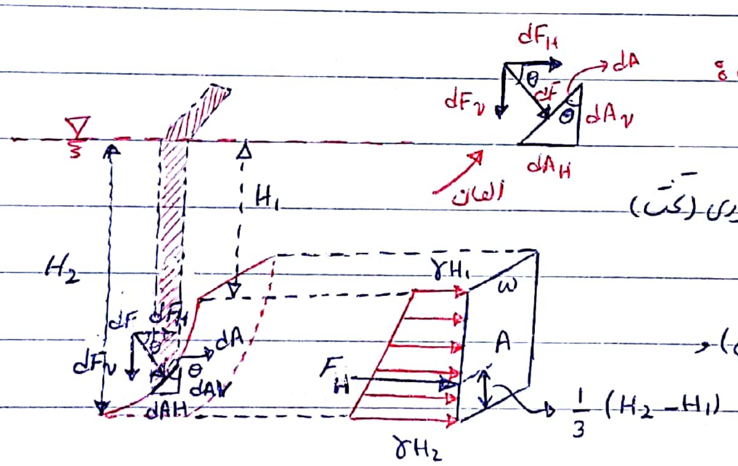


مقدار نیروی برآیند $\to F_R = \overset{F_{R_1}}{\forall_1} + \overset{F_{R_2}}{\forall_2} = \frac{\gamma (H_2-H_1)^2}{2}\omega + \gamma H_1 (H_2-H_1)\omega$

F_R محل اعمال نیروی برآیند (cp) $\to \sum M_O = 0 \quad F_R\, y_R = F_{R_1} \times \left(\frac{H_2-H_1}{3}\right) + F_{R_2}\left(\frac{H_2-H_1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{y_R = \frac{\left(\frac{F_{R_1}}{3} + \frac{F_{R_2}}{2}\right)(H_2-H_1)}{F_{R_1}+F_{R_2}}}$$

نیروی هیدرواستاتیکی روی سطح خمیده:



ابتدا سطح خمیده را روی یک سطح عمودی (کف)

تصویر می‌کنیم. dF را به dF_H (افقی) و

dF_V (قائم) تجزیه می‌کنیم:

$dF_H = dF\cos\theta \quad , \quad dF_V = dF\sin\theta$

محل اعمالش مرکز حجم منشور است.

$dF = PdA \to dF_H = pdA\cos\theta \to F_H = \int dF_H = \int p\underbrace{dA\cos\theta}_{dA_V} = \int p\,dA_V$

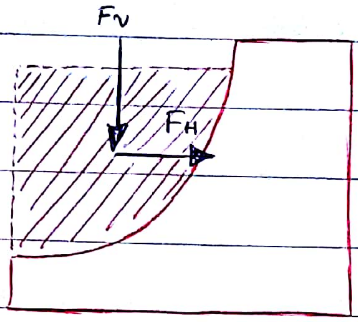
$F_V = \int dF_V = \int \underset{\gamma h}{p}\, \underbrace{dA\sin\theta}_{dA_H} = \int \gamma \underbrace{h\, dA_H}_{d\forall} = \gamma \int d\forall =$ وزن سیال بالای سطح

مرکز اثر F_V مرکز حجم حجم بالای سطح است.

مرکز ثقل

Date No

* مقدار نیروی معادل برابر است با $F_R = \sqrt{F_H^2+F_V^2}$



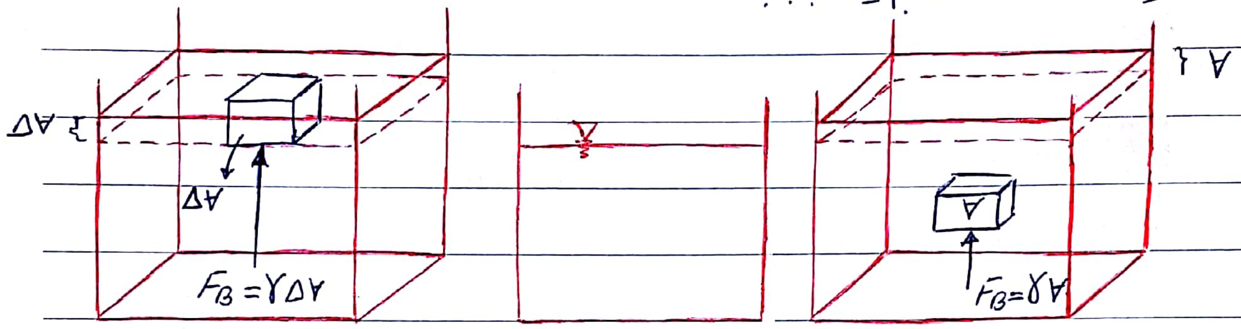
مرکز اثر نیروی معادل از محاسبه‌ی گشتاورهای F_H و F_V حول یک نقطه‌ی مناسب بدست می‌آید.

$F_V = W$

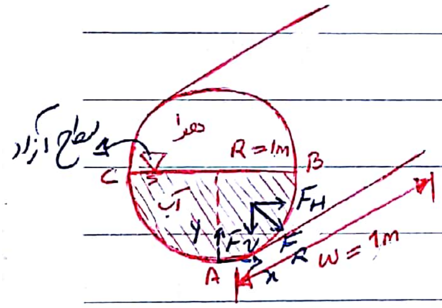
هاشور خورده ← سیال بالای سطح

نیروی شناوری: نیروی شناوری $= F_B = \gamma \forall =$ حجم سیال جابجا شده (هنگامی که جسم را داخل سیال انداخته‌ایم)

مرکز اثر نیروی شناوری = مرکز حجم سیال جابجا شده

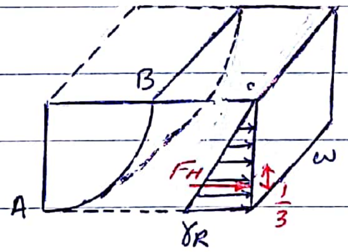


مثال: مطابق شکل لوله‌ای داریم که از آب پر شده است. نیروی ناشی از سیال وارد بر سطح AB چقدر است؟



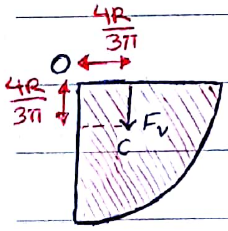
$\rho_{آب} = 1000 \frac{kg}{m^3}$, $g = 10 \frac{m}{s^2}$

$\Rightarrow \gamma = 10^4 \frac{N}{m^3}$



$F_H =$ حجم منشور $= \frac{1}{2}\gamma R^2 w$

$\Rightarrow = \frac{1}{2} \times 10^4 \times 1^3 = 5000\ N$

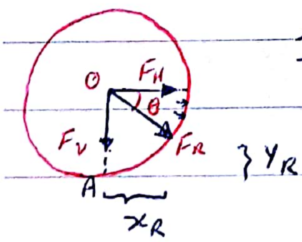


$F_R = \sqrt{F_H^2+F_V^2} = \frac{10^4}{2}\sqrt{(\frac{\pi}{2})^2+1} = 9307\ N$

حجم سیال بالای سطح

$F_V = \gamma \forall = \gamma \frac{\pi R^2}{4} = \frac{10^4}{4} \times \pi = 7850\ N$

نقطه اثر F_R بدست می‌آید

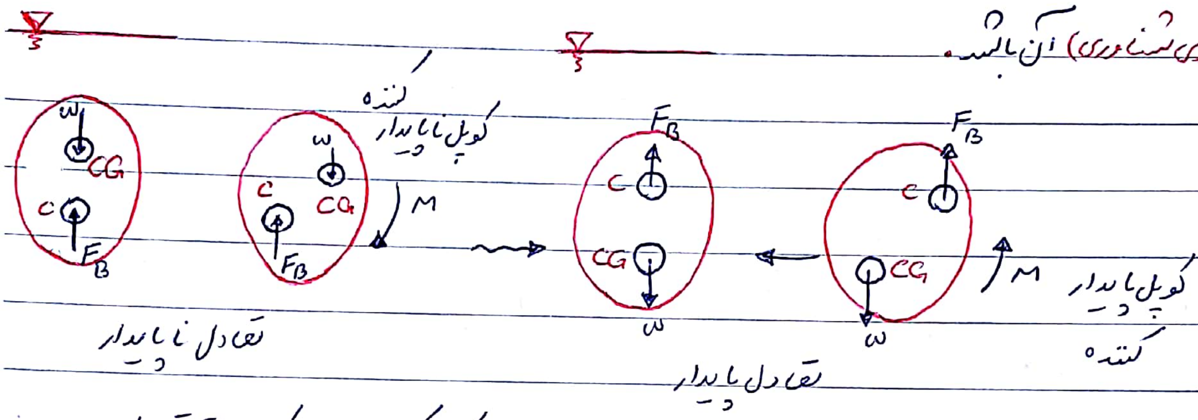


نیروی برآیند F_R از نقطه‌ی O عبور می‌کند (چون فشار بر سطح عمود است)

$$\Rightarrow x_R = R\cos\theta \overset{R=1}{=} \cos\theta \quad , \quad y_R = R - R\sin\theta = 1-\sin\theta \qquad \tan\theta = \frac{F_V}{F_H} \Rightarrow \theta = 57.5^\circ$$

نیروی شناوری: وزن سیال جابجا شده و به مرکز حجم سیال جابجا شده وارد می‌شود. (F_B)

پایداری اجسام غوطه‌ور: یک جسم غوطه‌ور تنها زمانی تعادل پایدار دارد که مرکز ثقل آن پایین‌تر از مرکز حجم (مرکز اثر نیروی شناوری) آن باشد.

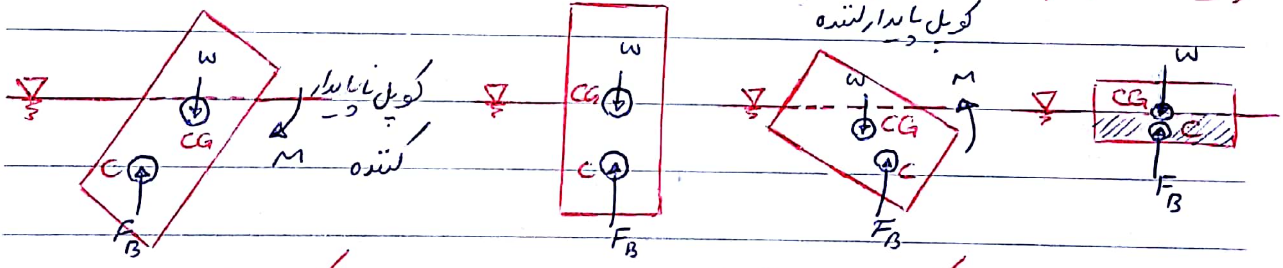


کوپلی که جسم را به یک حالت تعادل جدید ببرد

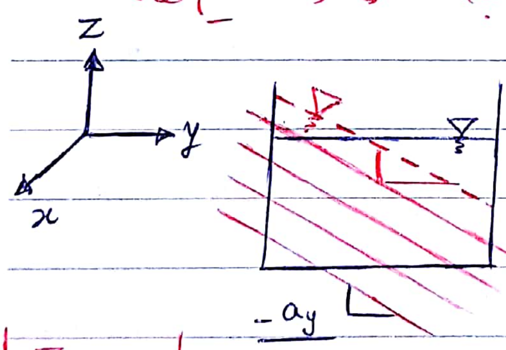
کوپل زمانی که ایجاد می‌شود جسم را به حالت تعادل پایدار می‌برد.

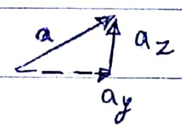
کوپل ناپایدار کننده است.

پایداری اجسام شناور:



توزیع فشار در سیال دارای حرکت و بدون تنش برشی (مانند جسم صلب): ① حرکت مستقیم الخط:





$$-\vec{\nabla} p - \gamma \hat{k} = \rho \vec{a} \quad (1)$$

$$x: \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \leftarrow a_x = 0$$

$$\frac{-a_y}{g+a_z}$$

خطوط هم‌فشار

$$y: \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y$$

خطوط هم‌فشار

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g+a_z) \leftarrow Z: \; -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma = \rho a_z$$

Date No

دیفرانسیل کامل $dp = \cancel{\frac{\partial P}{\partial x}}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \Rightarrow dp = -\rho a_y dy - \rho(g+a_z)dz$ (2)

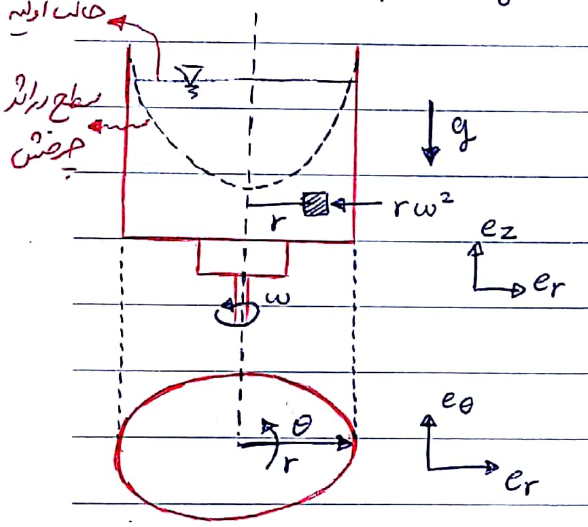
در سطح سیال ← $dp=0$ و $(P=P_{atm})$ ⊛ برای پیدا کردن خطوط فشار ثابت $dp=0$ قرار می‌دهیم.

(2) $\longrightarrow -\rho a_y dy - \rho(g+a_z)dz = 0 \longrightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{-a_y}{g+a_z}$ (3)

(3) انتگرال $\longrightarrow P = -\rho a_y y - \rho(g+a_z)z + C$ ← با استفاده از فشار در نقطه‌ای مشخص بدست می‌آید

c برای هر خط فشار ثابت متفاوت است و هرچه بیشتر باشد نشان‌دهنده به عمق می‌رویم.

در اینجا فرض کردیم a_y و a_z ثابت باشند



(2) حرکت دورانی با سرعت زاویه‌ای ثابت:

(1) $-\vec{\nabla} p - \gamma\hat{k} = \rho\vec{a}$, $\vec{a} = -r\omega^2\hat{e}_r$

(2) $\vec{\nabla} p = \frac{\partial}{\partial r}p\,\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}p\,\hat{e}_z$

(2) و (1) $\rightarrow$ $r:\ \frac{\partial P}{\partial r} = \rho r\omega^2$

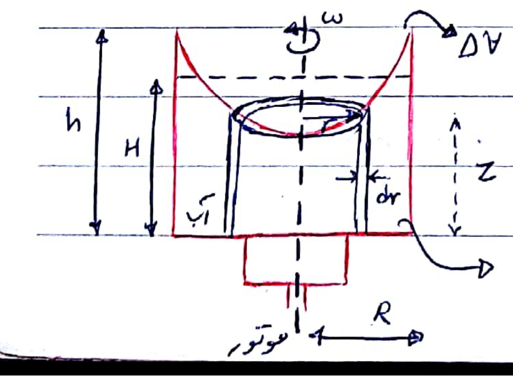
$\theta:\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$, $z:\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma$

⊛

$dp = \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial z}dz \rightarrow dp = \rho r\omega^2 dr - \gamma dz \xrightarrow[\text{فشار ثابت}]{dp=0} \rho r\omega^2 dr = \gamma dz$

انتگرال‌گیری $\rightarrow$ $\boxed{z = \frac{r^2\omega^2}{2g} + C}$ ← معادله‌ی خطوط فشار ثابت ← سطح سهموی است

⊛ انتگرال‌گیری از $dp = \rho r\omega^2 dr - \gamma dz \rightarrow \boxed{P = \rho\frac{r^2\omega^2}{2} - \gamma z + C}$



مثال: در شکل روبه‌رو سرعت موتور را بیابید. با چرخش ظرف آبی به حجم $\Delta\forall$ از ظرف سرریز نشده است.

المان استوانه‌ای می‌گیریم

حجم اولیه آب $= \forall_0$

حجم اولیه آب — حجم آب بیرون ریخته

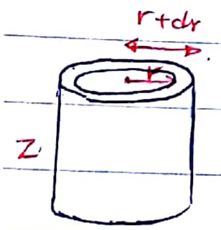
$\forall = \forall_0 - \Delta\forall = 2\int_0^R z\pi r\,dr$ (*) ← در حالت ثانویه — $\forall_0 = \pi R^2 H$ ← حجم اولیه ی آب

$\Rightarrow = 2\pi\int_0^R \left[\frac{r^2\omega^2}{2g}+c\right] r\,dr$ — $c = h - \frac{R^2\omega^2}{2g}$ ← در نقطه ی بالای ظرف $r=R$, $Z=h$

$$\Rightarrow = 2\pi\left[\frac{r^4\omega^2}{8g}+\frac{r^2}{2}\left(h-\frac{R^2\omega^2}{2g}\right)\right]_0^R = 2\pi\left[\frac{R^4\omega^2}{8g}+\frac{R^2}{2}\left(h-\frac{R^2\omega^2}{2g}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{(\forall_0-\Delta\forall)-\pi R^2 h}{2\pi\left[\frac{R^4}{8g}-\frac{R^4}{4g}\right]}} = \sqrt{\frac{\pi R^2 h-\forall_0+\Delta\forall}{\frac{R^2\pi}{4g}}}$$

برای بدست آوردن (*) دو راه داریم:



① : $d\forall = 2\pi r Z\,dr \xleftarrow{\text{مشتق}} \forall = Z\pi r^2$

② : $d\forall = \left(\pi(r+dr)^2-\pi r^2\right)Z = \left(\pi r^2+\cancel{\pi dr^2}+2\pi r\,dr\right)Z - \pi r^2 Z$

$dr \to 0 \Rightarrow \pi dr^2$ صرف نظر از $\Rightarrow d\forall = 2\pi r Z\,dr$

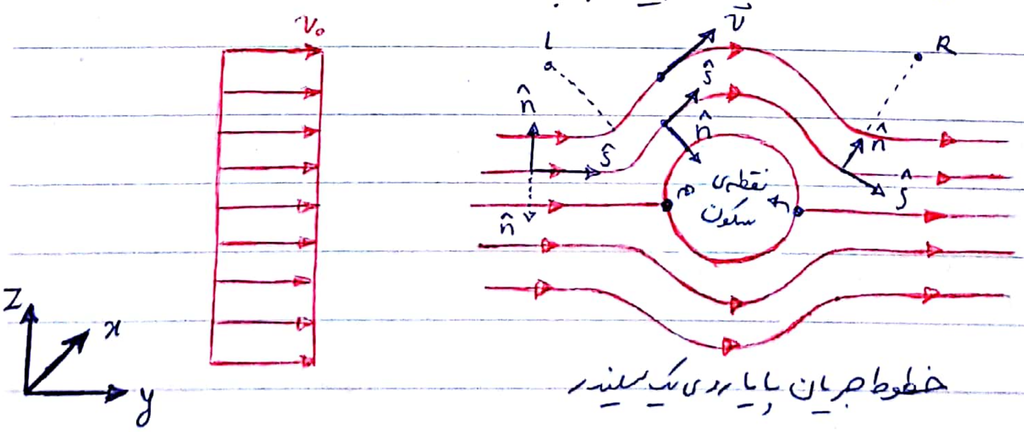
فصل سوم

مقدمه ای بر دینامیک سیالات

حالت خاص: اثر ویسکوزیته قابل صرف نظر کردن است ($\mu = 0$)

مفاهیم: ① جریان پایا: کمیت ها با زمان تغییر نمی کنند: سرعت، فشار، و دما

② خط جریان: خطوطی هستند که در هر نقطه از جریان بر بردار سرعت مماس هستند.



خطوط جریان پایا روی یک سیلندر

Date No

مختصات خط جریانی (s-n): دارای دو مولفه ی s و n است. بردارهای یکه ی آن ($\hat{s}$ و $\hat{n}$)

- بردار $\hat{s}$ مماس بر خط جریان در جهت حرکت سیال است.

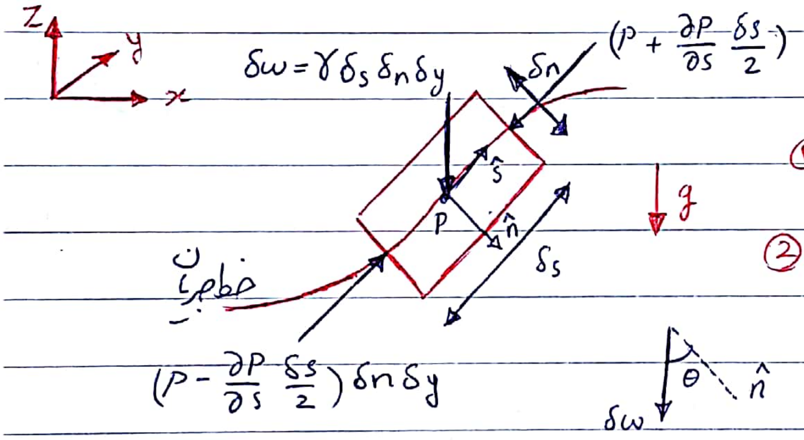
- بردار $\hat{n}$ عمود بر خط جریان در جهت تقعر خط جریان است.

سرعت و شتاب در مختصات s و n:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{s} \,,\quad \vec{a} = a_s\hat{s} + a_n\hat{n} \,,\quad a_n = \frac{v^2}{R} \,,\quad a_s = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s} v$$

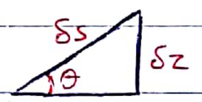
$$\Rightarrow a_s = \frac{\partial v}{\partial s} v \Rightarrow \vec{a} = \frac{\partial v}{\partial s} v\hat{s} + \frac{v^2}{R}\hat{n}$$

* قانون دوم نیوتن برای جریان پایا (1)، تراکم ناپذیر (2) و غیر ویسکوز (3) روی خط جریان (4)



① $\rightarrow \sum F_s = \rho\, \delta\forall\, a_s$

② $\rightarrow \sum F_n = \rho\, \delta\forall\, a_n$



$\sin\theta = \frac{\delta z}{\delta s}$

① $\rightarrow \; -\frac{\partial p}{\partial s}\cancel{\delta s \delta n \delta y} - \gamma \sin\theta\, \cancel{\delta s \delta n \delta y} = \rho v \frac{\partial v}{\partial s} \times \cancel{\delta s \delta n \delta y}$ $\qquad dp = \frac{\partial p}{\partial s}\delta s + \cancel{\frac{\partial p}{\partial n}}^{0}\delta n$

روی خط جریان

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial s} + \gamma\frac{dz}{ds} + \frac{\rho}{2}\frac{\partial v^2}{\partial s} = 0 \xrightarrow[\text{جریان حرکت می کنیم}]{\partial \to d \text{ چون روی خط}} \frac{dp}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds} + \frac{\rho}{2}\frac{dv^2}{ds} = 0$$

$P(s,n)$

$\xrightarrow{\times ds}$ $dp + \gamma dz + \frac{\rho}{2} dv^2$ ③

انتگرال گیری از ③ با فرض

تراکم ناپذیری: $\rho =$ ثابت

معادله ی برنولی:

$$\boxed{p + \gamma z + \frac{\rho}{2} v^2 = c}$$ ④

⊛ اگر شرط پایا بودن جریان برقرار نبود خطوط جریان تغییر می‌کردند و در نتیجه نمی‌توانستیم از s و n استفاده کنیم.

⊛ اگر سیال تراکم ناپذیر نبود آنگاه هنگام انتگرال‌گیری از γdz باید رابطه‌ی ρ با z را می‌داشتیم $(= g\int \rho dz)$.

⊛ اگر سیال ویسکوز بود آنگاه یک تنش برشی τ به آن وارد می‌شود با وارد شدن آن به معادلات دیگر رابطه‌ی ساده‌ای نمی‌توانستیم بدست آوریم. (غیر ویسکوز: اثر ویسکوزیته قابل صرف‌نظر کردن است)

$(4) \div \gamma$

شکل دیگر معادله‌ی برنولی: $\boxed{\dfrac{P}{\gamma} + z + \dfrac{v^2}{2g} = c}$ تمام جملات از جنس طول اند

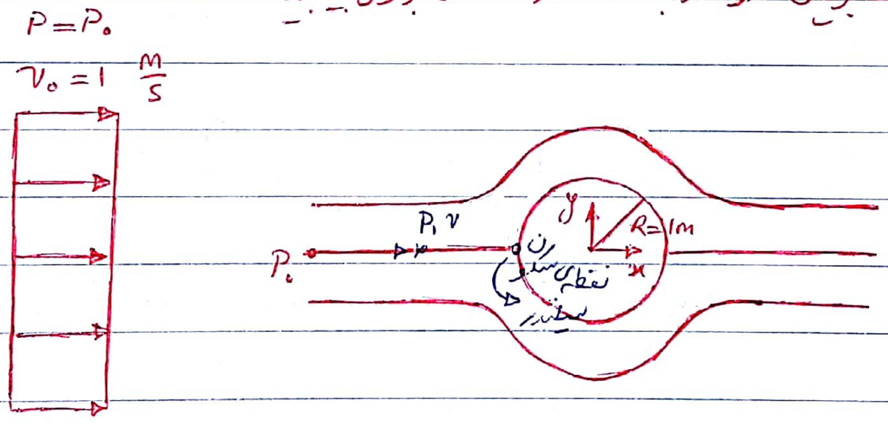
هد فشار — هد ارتفاع — هد سرعت

z: بالا و پایین رفتن سیال نسبت به یک سطح معادل

$\dfrac{v^2}{2g}$: ارتفاعی که در آن سیال که در خلاء قرار دارد و نیرویی به آن وارد نمی‌شود در آن سرعت v را دارد.

$\dfrac{P}{\gamma}$: ارتفاع از سیال که در آن فشار آن P باشد.

مثال: توزیع فشار روی خط جریان سکون را با استفاده از معادله‌ی برنولی بیابید.



روی خطوط جریان سکون:

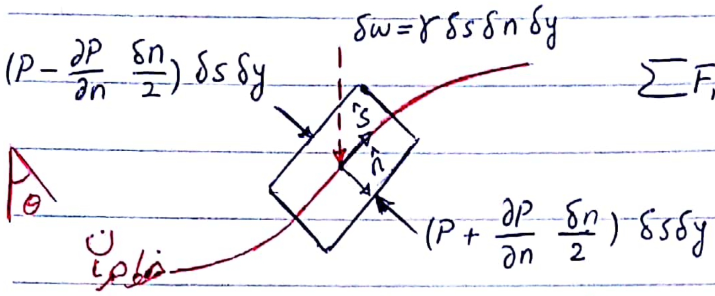
$$v = v_0 \left(1 + \frac{R^3}{x^3}\right)$$

$$\begin{cases} P_0 + \gamma z + \rho \dfrac{v_0^2}{2} = c & \text{معادله‌ی برنولی برای نقطه‌ی A} \\ P + \gamma z + \rho \dfrac{v^2}{2} = c & \text{معادله‌ی برنولی برای نقطه‌ی دلخواه} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_0 + \cancel{\gamma z} + \rho \frac{v_0^2}{2} = P + \cancel{\gamma z} + \rho \frac{v^2}{2} \longrightarrow P = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} - \rho \frac{v^2}{2}$$

$\Rightarrow P = \frac{\rho}{2} v_0^2 \left(1 - \left(1+\frac{R^3}{x^3}\right)^2\right) + P_0$

در نقطه‌ی سکون : $x=-R \rightsquigarrow P = \frac{\rho v_0^2}{2} + P_0$



$\sum F_n = \rho\, \delta\forall\, a_n$, $a_n = \frac{v^2}{R}$ (*)

$a_s = v\frac{\partial v}{\partial s}$ $\qquad \cos\theta = -\frac{dz}{dn}$

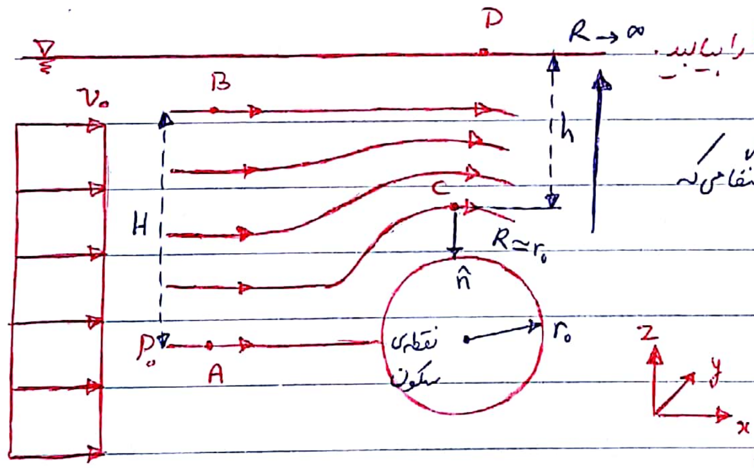
$\Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial n}\delta s\,\delta n\,\delta y + \gamma\,\delta s\,\delta n\,\delta y\cos\theta = \rho\frac{v^2}{R}\delta s\,\delta n\,\delta y$

$\rightsquigarrow \frac{dP}{dn} + \gamma\frac{dz}{dn} + \rho\frac{v^2}{R} = 0 \xrightarrow{\times dn} dp + \gamma dz + \rho\frac{v^2}{R}dn = 0$ انتگرال ← $\rho =$ ثابت (تراکم ناپذیر)

$\boxed{P + \gamma z + \rho\int\frac{v^2}{R}dn = C}$ (6) ← قانون دوم نیوتن در جهت $\hat{n}$

(7) $\boxed{\int\frac{dP}{\rho} + gz + \int\frac{v^2}{R}dn = C}$ ← اگر چگالی ثابت نباشد

مثال : در شکل مقابل P_A ، P_B ، P_C و P_D را بیابید.



هرچه به سمت بالا می‌رویم R بیشتر می‌شود و هنگامی که
خط جریان افقی باشد $R\to\infty$ میل می‌کند.

طبق قبل داریم : (2) $\rightsquigarrow dp + \rho\frac{v^2}{R}dn + \gamma dz = 0 \xrightarrow{\int_C^D (2)\, dz} P_D - P_C + \rho\int_C^D\frac{v^2}{R}(-dz) + \gamma(\underbrace{z_D - z_C}_{h}) = 0$

$\rightarrow \underbrace{P_D}_{\text{نسبی}} = 0 \Rightarrow \underbrace{P_C}_{\text{نسبی}} = \gamma h - \rho\underbrace{\int_C^D\frac{v^2}{R}dz}_{>0}$ $< \gamma h$ ← کمتر از فشار هیدرواستاتیک

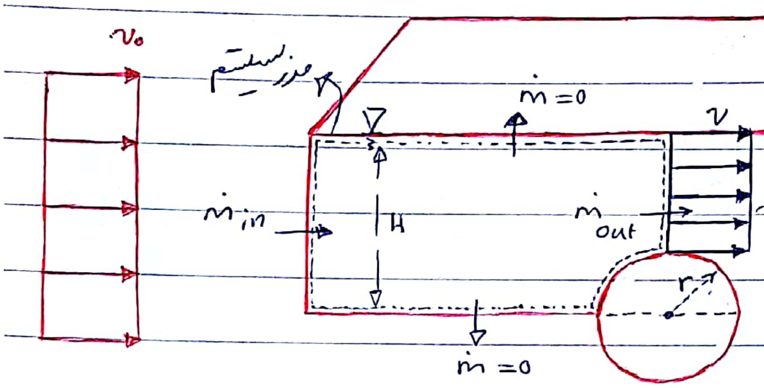
مطلق $=$ atm

$\int_A^B ② \, dz$ ، ρ ثابت

$$P_B - P_A + \rho \int \frac{v^2}{R} \overset{dn}{dz} + \gamma (z_B - z_A) = 0 \xrightarrow{R \to \infty} \boxed{P_A = P_B + \gamma (\overbrace{z_A - z_B}^{H})}$$

* سیال نمی‌تواند از خطوط جریان خارج شود. (خطوط جریان یکدیگر را قطع نمی‌کنند)

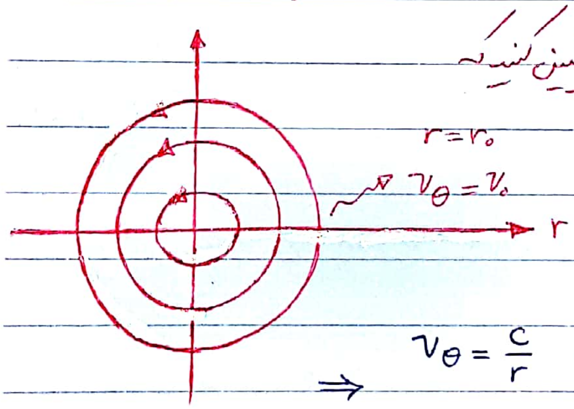
اصل پیوستگی:



فرض می‌کنیم در اینجا توزیع سرعت به این شکل باشد

$$\left.\begin{array}{l} \dot m_{in} = \dot m_{out} \\ A_{in} > A_{out} \end{array}\right\} \rightarrow \rho \underbrace{v_0 H w}_{A_{in}} = \rho v \underbrace{(H-r) w}_{A_{out}} \rightarrow v_{in} < v_{out}$$

مثال: اگر توزیع فشار در گردباد مطابق شکل روبه‌رو باشد، تعیین کنید که فشار در مرکز بیشتر است یا کمتر؟



$r = r_0$ ، $v_\theta = v_0$

$$v_r = 0$$

$$v_\theta \propto \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v_\theta = \frac{c}{r} \xrightarrow[v_\theta = v_0]{r = r_0} v_\theta = \frac{v_0 r_0}{r}$$

فشار در جهت تقعر خط جریان در حال کاهش است پس فشار در مرکز گردباد کمتر از فشار در شعاع‌های بیشتر است

در واقع به همین دلیل است که گردباد اجسام را به داخل خود می‌کشد.

معادله‌ی برنولی: P: فشار استاتیکی (ترمودینامیکی) ← با پیزومتر اندازه‌گیری می‌شود

$$P + \gamma z + \frac{1}{2} \rho v^2 = C$$

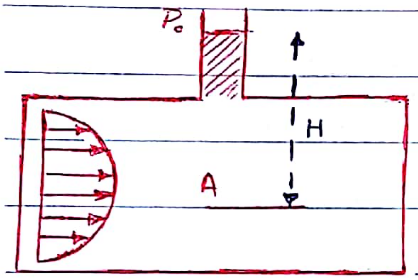
$\frac{1}{2}\rho v^2$: فشار دینامیکی (فشار در حال حرکت)

Date　　　　　　No

γZ : فشار هیدرواستاتیکی (فشاری که در اثر بالا و پایین شدن در سیال احساس می‌شود)

⟸ به مجموع این فشارها، فشار کل می‌گویند که روی خط جریان ثابت است.

فشار سکون = فشار استاتیکی + فشار دینامیکی



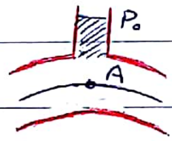
چون $R \to \infty$

فشار نسبی

قانون دوم نیوتن در راستای عمود بر خطوط جریان : $\cancel{P_0} - P_A + \cancel{\int_A^0 \frac{v^2}{R} dz} + \gamma H = 0$

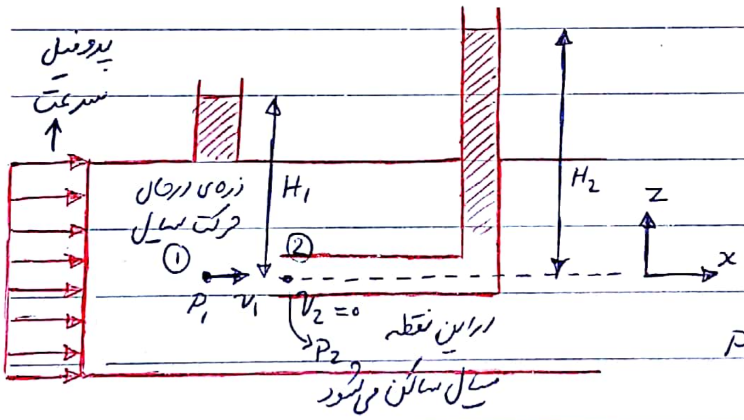
$\Rightarrow \boxed{P_A = \gamma H}$ فشار استاتیکی

چون خطوط به صورت افقی هستند $R \to \infty$ می‌شد و در نتیجه فشار استاتیکی و فشار هیدرواستاتیکی با هم برابر می‌شوند اما اگر لوله انحنا داشت



R به ∞ میل نمی‌کرد و در نتیجه این دو فشار برابر نمی‌شدند.

اندازه‌گیری فشار دینامیکی :

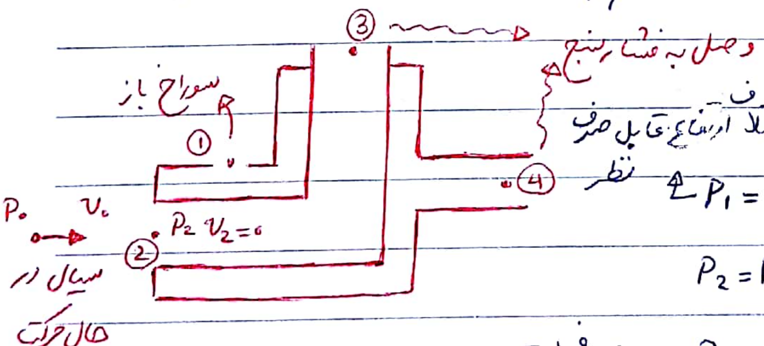


معادله‌ی برنولی از نقطه‌ی 1 تا 2 :

$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + 0$ و $P_1 = \gamma H_1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 - \gamma H_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_2 - \gamma H_1)}$, $P_2 = \gamma H_2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H_2 - H_1)}$

لوله‌ی استاتیکی پیتو (Pitot tube) :



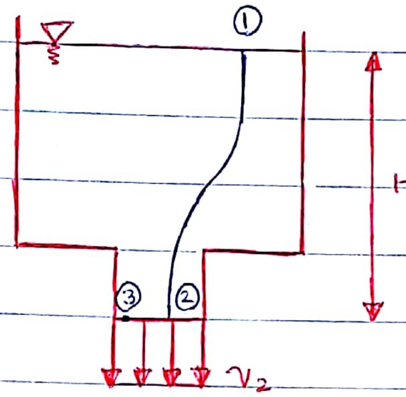
⟸ $P_1 = P_4$

$P_2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2$

$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_3 - P_4)}$

$P_2 \simeq P_3$ ⟵ اختلاف ارتفاع قابل صرف نظر است چون این لوله بسیار کوچک است

برای بدست آوردن فشار دینامیکی به وسیله‌ی لوله‌ی پیتو کافی است فشار خوانده شده از نقطه‌ی ۴ را از فشار خوانده شده برای نقطه‌ی 3 کم کنیم. فشار نقطه‌ی ۴ فشار استاتیکی است.



مثال از معادله‌ی برنولی: شکل مربوط به یک جت آزاد Free jet
در مسیر راه جریان تفاوتی وجود ندارد
را نمایش می‌دهد، v_2 را بیابید. خط جریان رسم شده فرضی است

شرایط برقراری برنولی:
① سیال غیر ویسکوز
② جریان پایا
③ سیال تراکم‌ناپذیر

سه برقرار باشند → مجموع انرژی‌های سیال = ثابت

روی خط جریان برنولی → $P+\frac{1}{2}\rho V^2+\gamma z=C$ ①

روی سطح سیال چون تمام پارامترهای رابطه‌ی برنولی یکی است انرژی همه‌ی نقاط روی سطح سیال برابر است.

معادله‌ی برنولی را عمود بر خطوط جریان می‌نویسیم

$$dp+\rho\frac{v^2}{R}dn+\gamma dz=0$$

$R\to\infty$

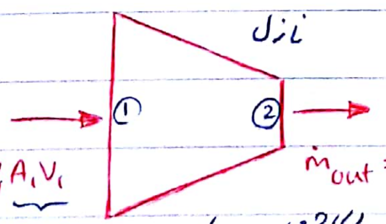
$$\Rightarrow P_3-P_2+\rho\int_2^3\cancel{\frac{v^2}{R}}dn+\gamma(\cancel{z_3-z_2})\Rightarrow P_3=P_2 \quad ②$$

معادله‌ی برنولی را بین نقاط ① و ② روی خط جریان فرضی می‌نویسیم:

③

$$\cancel{P_1}+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\gamma z_1=\cancel{P_2}+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\gamma z_2\Rightarrow\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v_2^2)=\gamma(\underbrace{z_2-z_1}_{-H})=-\gamma H$$

چون سیال در نقطه‌ی ① و ② با اتمسفر در تماس است فشار آن دو نقطه برابر فشار اتمسفر بوده و در نتیجه فشار گیجی آنجا صفر است.



$\dot m_{in}=\rho_1\underbrace{A_1V_1}_{\text{دبی حجمی}}$ دبی جرمی

$\dot m_{out}=\rho_2\underbrace{v_2A_2}_{\text{دبی حجمی}}$ دبی جرمی

پیوستگی

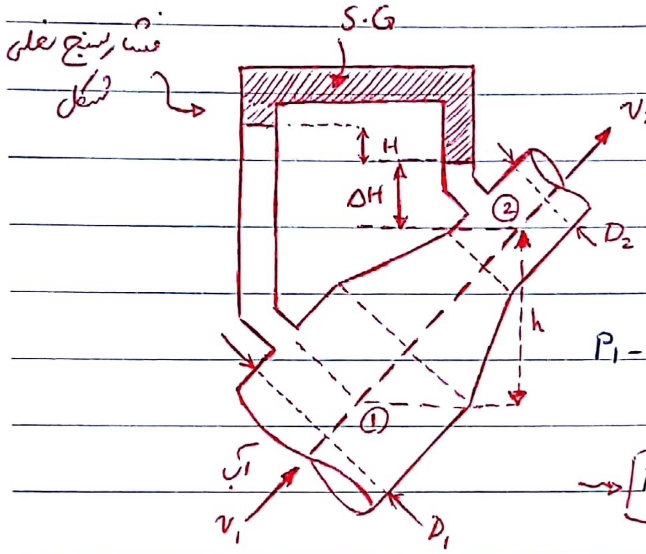
$$\xrightarrow[\text{برای نقطه‌ی ① و ②}]{\text{معادله‌ی پیوستگی}}\cancel{\rho_1}A_1V_1=\cancel{\rho_2}A_2V_2$$

$$\Rightarrow v_1=\frac{A_2}{A_1}v_2 \quad ④$$

④, ③ $\longrightarrow v_2^2\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]=2gH \longrightarrow v_2=\sqrt{\frac{2gH}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$ ⑤

$A_1 \gg A_2 \downarrow \quad v_2=\sqrt{2gH}$

یعنی سیال با سرعت سقوط آزاد از جسم خارج می‌شود زیرا سیال غیر ویسکوز بوده و اصطکاک ندارد.



مثال ۵: ارتفاع H معلوم است. Q (دبی حجمی) را بیابید. از طریق فشارسنج نعلی شکل P_1-P_2 را بیابید.

بیابید: $P_1-\gamma h-\gamma(\Delta H+H)+H\,SG\,\gamma+\Delta H\gamma=P_2$

$SG<1$

$\rightsquigarrow \boxed{P_1-P_2=\gamma H(1-SG)+\gamma h}$ ①

تعیین P_1-P_2 از معادله‌ی برنولی:

معادله‌ی برنولی بین ②, ① $\Rightarrow P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\gamma z_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\gamma z_2$

شرایط: ① جریان غیر ویسکوز ② سیال تراکم‌ناپذیر ③ روی خط جریان ④ جریان پایا

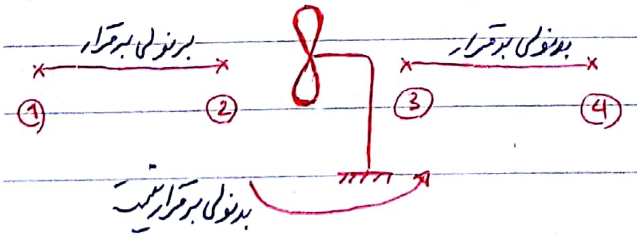
$\Rightarrow P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho(v_2^2-v_1^2)+\gamma(\overbrace{z_2-z_1}^{h})$ ②

معادله‌ی پیوستگی $\Rightarrow \rho_1A_1v_1=\rho_2A_2v_2 \longrightarrow v_2=\left(\frac{A_1}{A_2}\right)v_1$ ③

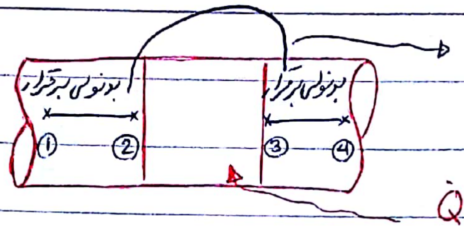
①, ②, ③ $\longrightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1\right]=-\gamma h+\gamma h+\gamma H(1-SG)$

$\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2gH(1-SG)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1}} \rightsquigarrow Q=V_1A_1=A_1\sqrt{\frac{2gH(1-SG)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-1}}$

⊛ معادله‌ی برنولی وقتی تبادل کار و حرارت داشته باشیم برقرار نمی‌باشد. قبل و بعد از محل تبادل کار یا حرارت معادله‌ی برنولی



با شرایط ذکر شده در قبل برقرار است.

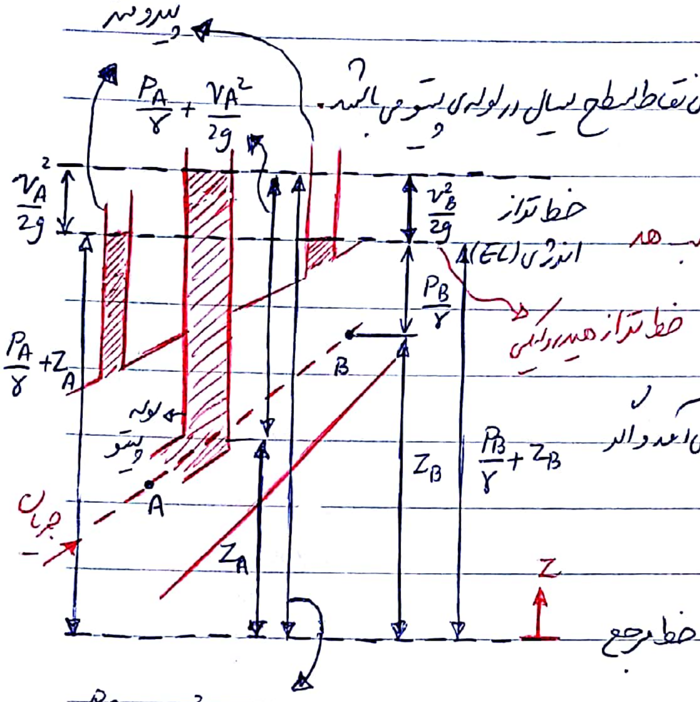


برنولی برقرار نیست

Q_{in} حرارت

(Energy Line), EL

خطوط تراز انرژی و هیدرولیکی: خط تراز، مکان هندسی نقاط سطح سیال در لوله‌ی پیتو می‌باشد.



$$\frac{P_A}{\gamma}+\frac{v_A^2}{2g}+Z_A=C$$ هد کل

سه برنولی برحسب هد: $\underbrace{\frac{P}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}+Z}_{\text{هد کل}}=$ ثابت

اگر توربین سر راه سیال بود انرژی آن از خط تراز بالا انرژی افت دارد

پمپ در سر راه آن بود انرژی آن پایین‌تر می‌آید.

(Hydraulic grad Line) (HGL)

خط تراز هیدرولیکی: مکان هندسی نقاط سطح سیال در لوله‌ی پیزومتر

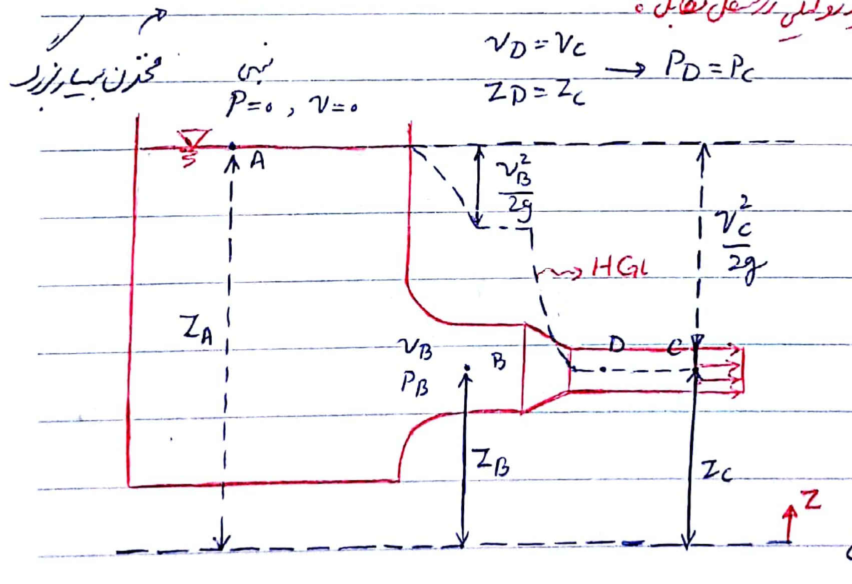
برای یافتن خط راست کافی در نقاط A و B در بالای آنها سوراخ ایجاد کرده و پیزومتر قرار می‌دهیم.

در سطح فقط هد ارتفاع داریم و انرژی پتانسیل

مثال: رسم خطوط تراز انرژی و هیدرولیکی در شکل مقابل:

$v_D=v_C$, $Z_D=Z_C \rightarrow P_D=P_C$

$v_C>v_B$



مطابق شکل وقتی قطر لوله تغییر می‌کند به دلیل تغییر سرعت، تراز هیدرولیکی تغییر می‌کند.

برنولی بین A و B:

$$Z_A=\frac{P_B}{\gamma}+\frac{v_B^2}{2g}+Z_B$$

$$\frac{P_B}{\gamma}+Z_B=Z_A-\frac{v_B^2}{2g}$$

Date No

کاویتاسیون: تشکیل حباب های بخار در سیال به خاطر افزایش سرعت و کاهش فشار، زمانی که فشار به فشار بخار سیال در دمای سیال برسد و ترکیدن این حباب ها در جریان به خاطر کاهش سرعت و افزایش مجدد فشار، در نزدیکی سطح، این پدیده می تواند موجب ایجاد خوردگی در سطح شود.

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\gamma z=c$$

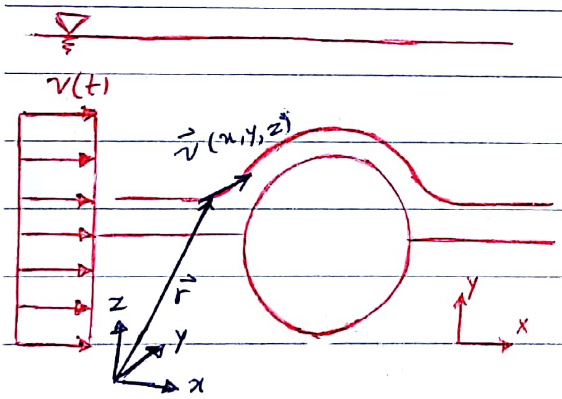
سینماتیک سیالات «فصل چهارم» (Fluid Kinematic)

مفاهیم اولیه: میدان جریان: قسمتی که سیال در آن جریان دارد

میدان سرعت: مشخص کردن $\vec{V}(x,y,z,t)$ در میدان جریان در تمام نقاط — velocity field

میدان شتاب: مشخص کردن $\vec{a}(x,y,z,t)$ در میدان جریان در تمام نقاط — acceleration field

میدان فشار: مشخص کردن $p(x,y,z,t)$ در میدان جریان در تمام نقاط



مفاهیم اویلری و لاگرانژی:

دیدگاه اویلری (دیدگاه میدانی): کمیت های سیال نظیر سرعت، فشار، دما و ... را در میدان جریان بدون در نظر گرفتن حرکت ذرات سیال مشخص می کند.

دیدگاه لاگرانژی: با دنبال کردن ذرات سیال به بررسی کمیت های مختلف مانند: سرعت، فشار و ... برای این ذرات می پردازد

⊛ در واقعیت ما از دیدگاه اویلری نگاه می کنیم اما برای بدست آوردن معادلات از دیدگاه لاگرانژی استفاده می کنیم.

رابطه‌ی دیدگاه‌های اویلری و لاگرانژی: بردار سرعت در میدان جریان

محاسبه‌ی شتاب در دیدگاه لاگرانژی: $\vec{V}(x,y,z,t)=u(x,y,z,t)\hat{i}+v(x,y,z,t)\hat{j}+w(x,y,z,t)\hat{k}$

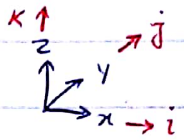
$$\vec{a}(x,y,z,t)=\frac{d}{dt}\vec{V}(x,y,z,t)=\overbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}^{\text{شتاب از دیدگاه اویلری}}+\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{u}+\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dt}}^{v}+\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\overbrace{\frac{dz}{dt}}^{w}$$

$$\vec{a}(x,y,z,t)=\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}=\frac{D}{Dt}\vec{V}$$

عملگر مشتق مادی ← D

Material derivative

یادآوری: $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}(\ )\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\ )\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\ )\hat{k}$



$$\frac{D}{Dt}(\ )=\frac{\partial}{\partial t}(\ )+u\frac{\partial}{\partial x}(\ )+v\frac{\partial}{\partial y}(\ )+w\frac{\partial}{\partial z}(\ )\qquad \vec{V}=u\hat{i}+v\hat{j}+w\hat{k}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}(\ )=\frac{\partial}{\partial t}(\ )+\vec{V}\cdot\vec{\nabla}(\ )$$

ضرب داخلی

$\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$ ← بدست آوردن مؤلفه‌های $\vec{a}$

مؤلفه‌ی x: $a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}u+v\frac{\partial}{\partial y}u+w\frac{\partial}{\partial z}u$

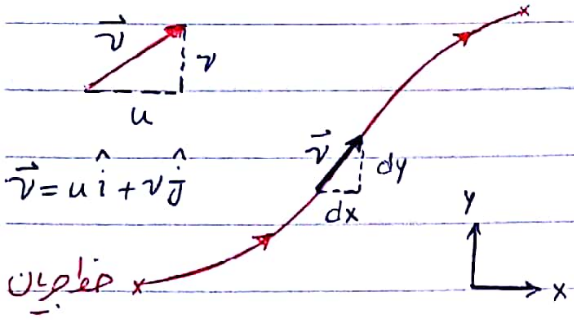
مؤلفه‌ی y: $a_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}v+v\frac{\partial}{\partial y}v+w\frac{\partial}{\partial z}v$

مؤلفه‌ی z: $a_z=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}w+v\frac{\partial}{\partial y}w+w\frac{\partial}{\partial z}w$

$\circledast$ $\frac{D}{Dt}\vec{V}$ ← سمت چپ معادله‌ی ناویر-استوکس

خطوط جریان، مسیر و رگه:

خط جریان (Stream Line)



$\vec{v}=u\hat{i}+v\hat{j}$

دو بعدی : $\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}$

سه بعدی : $\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}\ ,\ \frac{dz}{dx}=\frac{w}{u}\ ,\ \frac{dz}{dy}=\frac{w}{v}$

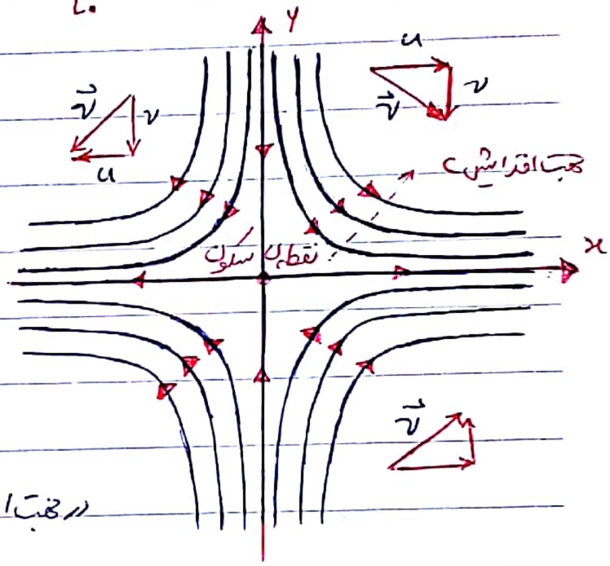
$\vec{v}=u\hat{i}+v\hat{j}+w\hat{k}$

مثال: برای میدان سرعت $\vec{v}=\frac{v_0}{L_0}(x\hat{i}-y\hat{j})$ خطوط جریان را بدست آورید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}=\frac{-\frac{v_0}{L_0}y}{\frac{v_0}{L_0}x}=\frac{-y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \longrightarrow \ln y=\ln\frac{1}{x}+\ln c=\ln\frac{c}{x}$$

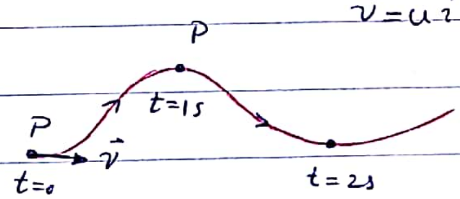
$$\Rightarrow y=\frac{c}{x} \longrightarrow xy=c$$ معادله‌ی خطوط جریان



در جهت افزایش c ، فشار کاهش می‌یابد (در جهت تقعر)

خط مسیر (Path Line) ← مفهوم لاگرانژی

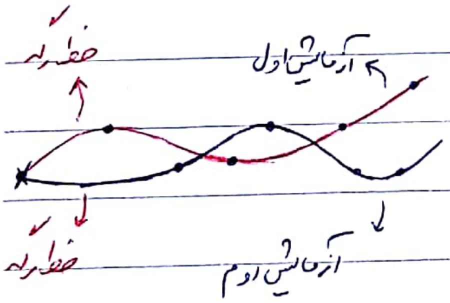
$\vec{v}=u\hat{i}+v\hat{j}+w\hat{k}$



$\frac{dx_p}{dt}=u\ ,\ \frac{dy_p}{dt}=v\ ,\ \frac{dz_p}{dt}=w$ → (2)

← انتگرال‌گیری از معادلات 2 ، (x_p , y_p , z_p) را برحسب زمان به ما می‌دهند.

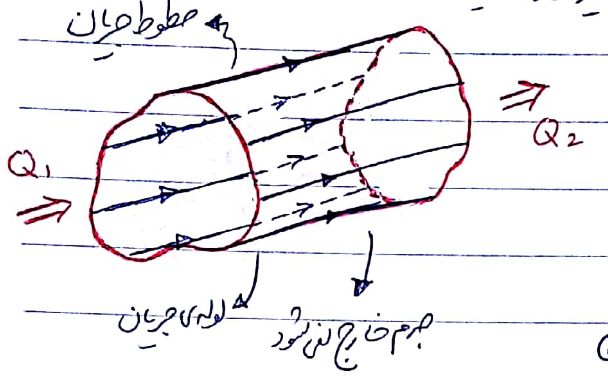
خط رگه (Streak Line)



خط رگه (Streak Line) : اگر ذره‌ای سیال را در یک جریان ناپایا رها کنیم و پس از لحظه‌ای ذره‌ای دیگر و همین طور تکرار کنیم و سپس مکان ذرات را

به هم متصل کنیم خطی که بدست می آید که اگر بار دیگر این آزمایش را در جریان ناپایا انجام دهیم خط رگه متفاوت خواهد

بود اما در جریان های پایا (Steady) خطوط جریان، مسیر و رگه یکی هستند.

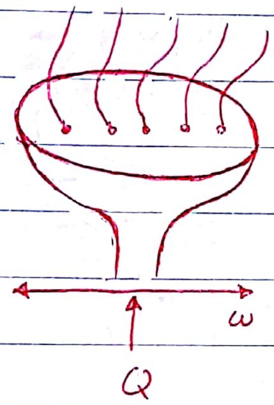


لوله ی جریان (Stream tube):

ذرات سیال نمی توانند از خطوط جریان خارج شوند:

$$Q_1 = Q_2$$

مثال: میدان جریان زیر داده شده است.



$$\vec{V} = u_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]\hat{i} + v_0\hat{j}$$

ثابت = u_0 , v_0 , ω

بسامد (فرکانس)

میدان جریان ۲ بعدی و ناپایا

خطوط جریان و مسیر را مشخص کنید.

خطوط جریان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{v_0}{u_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right]} \rightarrow v_0\, dx = u_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] dy$$

$$\Rightarrow x \frac{v_0}{u_0} = \frac{v_0}{\omega} \cos\left[\omega t - \frac{\omega y}{v_0}\right] + c_1 \rightarrow \boxed{x = \frac{u_0}{\omega} \cos\left[\omega t - \frac{\omega y}{v_0}\right] + c_2}$$

خطوط مسیر:

$$\frac{dy}{dt} = v = v_0 \rightarrow y = \int v_0\, dt \rightarrow \boxed{y = v_0 t + c_3}$$

$$\frac{dx}{dt} = u = u_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v_0}\right)\right] \rightarrow x = \int u_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{v_0 t + c_3}{v_0}\right)\right] dt$$

$$\boxed{x = u_0 \sin\left(\frac{\omega c_3}{v_0}\right) t + c_5}$$

Scanned by CamScanner

Date　　No　　سطح حجم کنترل

مفاهیم حجم کنترل، سطح کنترل و سیستم: جرم مشخص

حجم مشخصی از فضا که جرم به آن داخل و از آن خارج می‌شود.

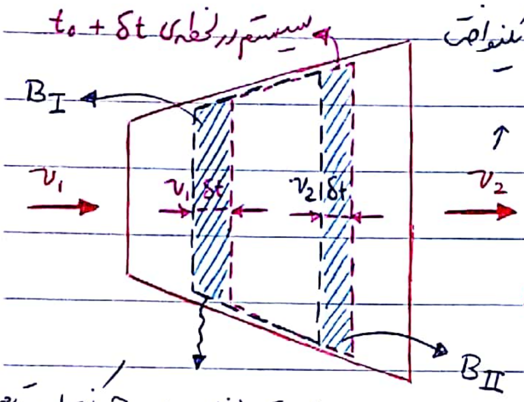
- خواص گسترشی (B) و متمرکز: خواص گسترشی به جرم وابسته اند اما خواص متمرکز به جرم وابسته نیستند.

Extensive　　intensive

مقداری　Properties　گسترشی　مثلاً:

$$B = \tfrac{1}{2} m v^2 \longrightarrow b = \frac{B}{m} = \tfrac{1}{2} v^2$$

قوانین حاکم بر سیالات برای سیستم تعریف می‌شوند. سرعت ها یکنواخت



خاصیت B را در نظر می‌گیریم: (حالت کلی جریان غیر پایا)

$$B_{sys}(t+\delta t) = B_{cv}(t \overset{+\delta t}{}) - B_I(t+\delta t) + B_{II}(t+\delta t)$$

نازل واگرا

$$B_{sys}(t_0+\delta t) - B_{sys}(t_0) = \underbrace{\left[B_{cv}(t_0+\delta t) + B_{II}(t_0+\delta t) - B_I(t_0+\delta t)\right]}_{B_{sys}(t_0+\delta t)} \underbrace{- B_{cv}(t_0)}_{= B_{sys}(t_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{B_{sys}(t_0+\delta t) - B_{sys}(t_0)}{\delta t} = \frac{B_{cv}(t_0+\delta t) - B_{cv}(t_0)}{\delta t} + \frac{B_{II}(t_0+\delta t)}{\delta t} - \frac{B_I(t_0+\delta t)}{\delta t}$$

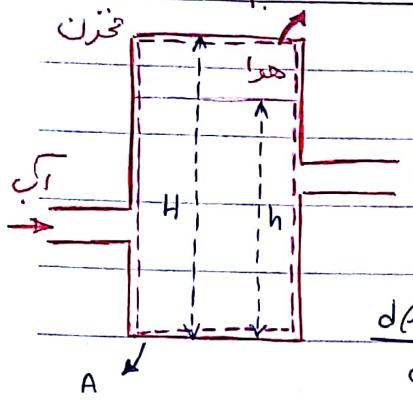
$$\xrightarrow[t_0 \to t]{\delta t \to 0} \frac{D}{Dt} B_{sys} = \frac{\partial}{\partial t} B_{cv} + \dot{B}_{II} - \dot{B}_I \qquad \underbrace{\dot{B}_I}_{\dot{B}_{in}} = \dot{m}_{in} b_1 \ \ (\rho A_1 V_1), \quad \underbrace{\dot{B}_{II}}_{\dot{B}_{out}} = \dot{m}_{out} b_2 \ \ (\rho A_2 V_2)$$

چون کل جرم موجود در سیستم را در نظر می‌گیریم

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt} B_{sys} = \frac{\partial}{\partial t} B_{cv} + \dot{B}_{out} - \dot{B}_{in}} \quad (1) \qquad B_{sys} = \int_{sys} \rho b \, dV , \quad B_{cv} = \int_{cv} \rho b \, dV$$

سیستم در لحظه t_0 = حجم کنترل در تمام لحظه ها

مثال: در شکل روبه‌رو تغییرات چگالی هوا با زمان را بدست آورید. $\left(\frac{d\rho_{air}}{dt}\right)$



$$\forall_{هوا} = A(H-h) \rightarrow \frac{d}{dt}\forall_{هوا} = -A\frac{dh}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{d\rho_a}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\forall_{air}}\right) = \frac{-m}{\forall^2}\frac{d\forall}{dt} = -\frac{\rho_a}{\forall}\frac{d\forall}{dt} = \frac{\rho_a}{H-h}\frac{dh}{dt}$$

حال می‌خواهیم h را بیابیم ← خاصیت گسترشی را جرم در نظر می‌گیریم ← $B=m \rightarrow b=1$

$$(1) \rightarrow \frac{D}{Dt}B_{sys} = \frac{\partial}{\partial t}B_{cv} + 0 - \dot{B}_{in} \rightarrow \frac{D}{Dt}m_{sys} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho b\, d\forall - \dot{m}_{in} b = 0 \xrightarrow{b=1} \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho\, d\forall = \dot{m}_{in} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_a A(H-h) + \rho_w A h\right] = \dot{m}_{in} \rightarrow A\left[\frac{d\rho_a}{dt}(H-h) - \rho_a\frac{d}{dt}h + \rho_w\frac{dh}{dt}\right] = \dot{m}_{in}$$

جایگذاری (2) در (3)

$$\rightarrow A\rho_w\frac{dh}{dt} = \dot{m}_{in} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\dot{m}_{in}}{A\rho_w} \quad (4) \rightarrow \frac{d\rho_a}{dt} = \frac{\rho_a}{H-h}\times\frac{\dot{m}_{in}}{A\rho_w} \quad (5)$$

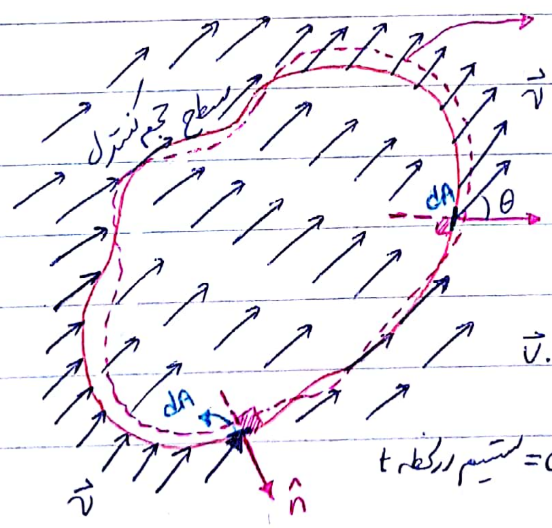
$$\xrightarrow{\int (4)\, dt} h = \frac{\dot{m}_{in}}{A\rho_w}\times t + C \qquad t=0 \rightarrow h=h_0 \Rightarrow h = \frac{\dot{m}_{in}}{A\rho_w}t + h_0 \quad (6)$$

(6) و (5)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\rho_a}{dt} = \frac{\rho_a}{(H-h_0) - \frac{\dot{m}_{in}}{A\rho_w}} \times \frac{\dot{m}_{in}}{A\rho_w}}$$

* رابطه‌ی (1) یک رابطه‌ی کلی است.
که رابطه‌ی بین سیستم و حجم کنترل

قضیه‌ی انتقال رینولدز برای حجم کنترل دلخواه:



$$\dot{B}_{in} = \int_{in} d\dot{B} = -\int_{in}\rho\,\overbrace{\vec{V}\cdot\hat{n}}^{<0}\, b\, dA \quad (7)$$

روی سطح ورودی

$$\vec{V}\cdot\hat{n} = |\vec{V}|\cos\theta \xrightarrow{in} \theta > 90^\circ \rightarrow \cos\theta < 0$$

$$\xrightarrow{out} \theta < 90^\circ \rightarrow \cos\theta > 0$$

Date No

$$\dot{B}_{out} = \int_{out} d\dot{B} = \int_{out} \rho \vec{v}.\hat{n}\, b\, dA \quad (8) \qquad B_{sys} = \int_{sys} \rho b\, d\forall \quad و \quad B_{CV} = \int_{CV} \rho b\, d\forall \quad (9)$$

روی سطح خروجی

* چون مؤلفه‌ای از سرعت که عمود بر سطح است وارد حجم کنترل می‌شود و مؤلفه‌ی مماس برای آن وارد نمی‌شود

در انتگرال‌ها از $\hat{n}.\vec{v}$ استفاده کردیم یعنی از مؤلفه‌ی عمودی $\vec{v}$ استفاده کردیم.

$$(9),(8),(7),(1) \longrightarrow \frac{D}{Dt}\int_{sys} \rho b\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho b\, d\forall + \int_{out} \rho b \vec{v}.\hat{n}\, dA + \int_{in} \rho b \vec{v}.\hat{n}\, dA$$

$$\longrightarrow = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho b\, d\forall + \int_{CS} \rho b \vec{v}.\hat{n}\, dA$$

سطح کنترل

بردار نرمال بر سطح کنترل

$$\longrightarrow \boxed{\frac{D}{Dt} B_{sys} = \frac{D}{Dt}\int_{sys} \rho b\, d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho b\, dA + \int_{CS} \rho b \vec{v}.\hat{n}\, dA} \quad (10)$$

قضیه‌ی انتقال رینولدز برای حالت کلی

تغییرات خاصیت B در سیستم با زمان

قضیه‌ی انتقال رینولدز برای حجم کنترل در حال حرکت با سرعت $\vec{v}_{CV}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} + \vec{v}_{CV} \quad (11) \qquad \vec{\omega} = \text{سرعت نسبی سیال نسبت به حجم کنترل} \qquad \vec{v}_{CV} = \text{سرعت حجم کنترل}$$

$\vec{v} =$ سرعت مطلق سیال

$$(11),(10) \longrightarrow \boxed{\frac{DB_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho b\, d\forall + \int_{CS} \rho b \vec{\omega}.\hat{n}\, dA} \quad (12)$$

خالص نرخ ورود و خروج خاصیت از سطح کنترل

تغییرات خاصیت B با زمان در حجم کنترل

تحلیل حجم کنترل جریان

فصل پنجم

قوانین برای حجم کنترل : ۱) پایستاری جرم (پیوستگی) : تغییرات جرم

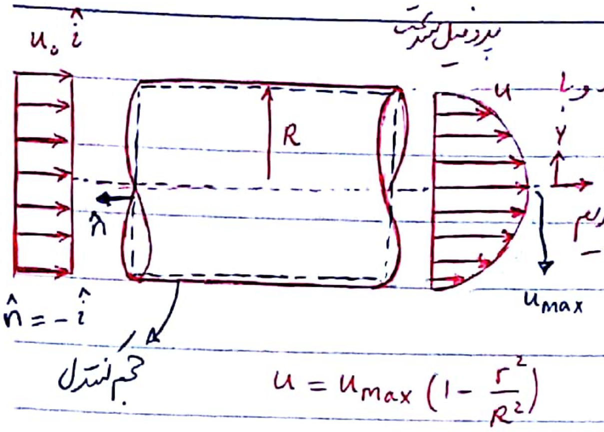
$$B = m \ , \quad b = \frac{B}{m} = 1$$

سیستم صفر است

$$(10) \text{ قبل} \longrightarrow \frac{D}{Dt} B_{sys} = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int \overbrace{\rho\, d\forall}^{dm} + \int_{CS} \rho (\vec{v}.\hat{n})\, dA = 0 \quad (1)$$

$$\text{برای حجم کنترل دارای حرکت} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, d\forall + \int_{CS} \rho (\vec{\omega}.\hat{n})\, dA = 0 \quad (2)$$

مثال: سیال با سرعت یکنواخت مطابق شکل وارد لوله می‌شود و با پروفیل سهمی سرعت از آن خارج می‌شود. در لوله جریان پایا داریم. قانون پایستاری جرم را برای جریان بنویسید.



$$u=u_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

جریان پایا $\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\, dV=0 \xrightarrow{1} \int_{in}\rho(-u_0)dA+\int_{out}\rho u_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)(2\pi r dr)=0$

سیال تراکم ناپذیر $\rho=$ ثابت $\longrightarrow -\rho u_0\pi R^2+\rho u_{max}(2\pi)\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)\Big|_0^R=0 \longrightarrow \boxed{u_{max}=2u_0}$

مقدار متوسط سرعت در خروجی $\bar{u}$:

$$\dot{m}_{out}=\rho\bar{u}A=\int_{out}\rho u_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)(2\pi r dr)$$

$$\longrightarrow \bar{u}=\frac{\int_{out}\rho u_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)(2\pi r dr)}{\rho A}$$

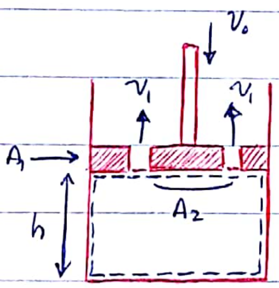
سرعت متوسط $\longrightarrow \bar{u}=\frac{\int \rho u\, dA}{\rho A}$

برای این مسئله $\longrightarrow \bar{u}=\frac{u_{max}\,R^2/2}{R^2}=\frac{u_{max}}{2}=u_0$

حجم کنترل تغییر شکل پذیر:

پایستاری جرم: مطابق رابطه 2، w سرعت نسبی سیال نسبت به سطح کنترل

مثال: در شکل ثابت $=\rho$ است



$$v_1=v_{cs}+w_1$$

$$\to w_1=v_1-v_{cs}=v_1+v_0$$

$$2 \longrightarrow \rho A_1\frac{dh}{dt}+\rho w A_2=0$$

$$\frac{dh}{dt}=-v_0\ ,\quad w=v_1+v_0 \Rightarrow (v_1+v_0)A_2=A_1v_0 \longrightarrow \boxed{v_1=\frac{v_0(A_1-A_2)}{A_2}}$$

$$\frac{D}{Dt}(\overbrace{m\vec{V}}^{B})_{sys} = \sum F_{sys} \quad (3)$$ قانون دوم نیوتن ← بررسی اندازه حرکت خطی

$$B = m\vec{V} \longrightarrow b=\vec{V} \xrightarrow{\text{قبل (10)}} \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \overbrace{\vec{V}}^{b} d\forall + \int_{CS} \rho\overbrace{\vec{V}}^{b}(\vec{V}\cdot\hat{n})dA = \sum F \quad (4)$$

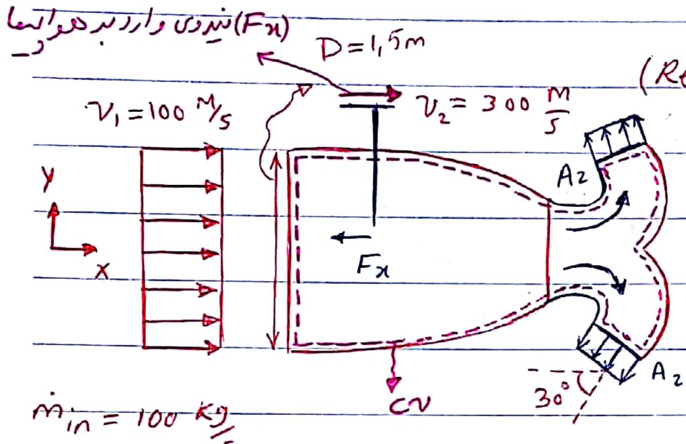
اگر حجم کنترل دارای حرکت باشد:

$$\xrightarrow{\text{قبل (12)}} \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho v\, d\forall + \int_{CS}\rho\vec{v}(\vec{\omega}\cdot\hat{n})dA = \sum F \quad (5)$$

سرعت نسبی سیال نسبت به حجم کنترل $\vec{v} = \vec{v}_{cv} + \vec{\omega}$

مثال ۵: (پیشرانش معکوس، Reverse thrust)

از دبی جرمی سوخت صرف نظر کنید. جریان پایا است.



$\dot{m}_{in} = 100$ kg/s

رابطه ی (4) $\longrightarrow \int_{CS}\rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\hat{n})dA = \sum \vec{F}$

در راستای x $\longrightarrow \int_{CS}\rho u(\vec{v}\cdot\hat{n})dA = -F_x$

مؤلفه ی سرعت در راستای x = u

عمود بر سطح A_2

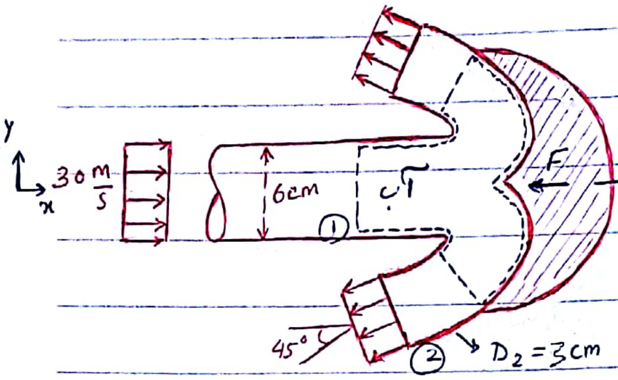
$$\rightarrow \underbrace{\rho\times 100\times(-100)\times\pi\times\frac{1.5^2}{4}}_{\dot{m}_{in}} + (-\rho v_2\cos 30)v_2A_2\times 2 = -F_x$$

$v_2A_2=?$ پیوستگی: $\rho v_1A_1=\rho_2v_2A_2 \rightarrow \rho v_2A_2 = \frac{\rho}{2}v_1A_1 = 50$ kg

$$\Rightarrow F_x = 100\frac{kg}{s}\times 100\frac{m}{s} + 100\times 300\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 35980.762 \text{ N}$$

* وقتی جریان پایا باشد، متغیرهای حجم کنترل با تغییر زمان ثابت می مانند بنابراین قسمت اول رابطه ی 4 حذف می‌شود.

مثال ۸: چرخ پلتون (یک پره) جریان پایا می‌باشد



$3\ \frac{m}{s}$ = ثابت

$F = ?$

⊛

⑤ $\longrightarrow \int_{cs} \rho \vec{v}(\vec{\omega}\cdot\hat{n})\,dA = \sum \vec{F} \qquad \vec{v} = \vec{v}_{cv} + \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \int_{cs} \rho(\vec{v}_{cv} + \vec{\omega})(\vec{\omega}\cdot\hat{n})\,dA = \int_{cs} \rho\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\hat{n})\,dA + \int_{cs} \rho \overset{\text{ثابت}}{\vec{v}_{cv}}(\vec{\omega}\cdot\hat{n})\,dA = \sum \vec{F}$$

$\xrightarrow{\text{پیوستگی در حالت}}$ $\vec{v}_{cv}\int_{cs} \rho\vec{\omega}\cdot\hat{n}\,dA = 0 \longrightarrow \int_{cs} \overset{\text{دبی جرمی}}{\rho\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\hat{n})}\,dA = \sum \vec{F}$ ⑥

پایا (طبق 2)

⊛ → پیوستگی برای حجم کنترل در حال حرکت → $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \overset{dm}{\rho\, d\forall}}_{=0} + \int_{cs} \rho\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA = 0$

معادله ⑥ در راستای x : $\int_{cs} \rho\omega_x(\vec{\omega}\cdot\hat{n})\,dA = -F$ → اختیاری است اگر غلط باشد جواب منفی می‌شود

$\rightarrow \rho\omega_1(-\omega_1)A_1 + 2\rho(-\omega_2 \cos 45°)(\omega_2 A_2) = -F$

از پیوستگی $\rightarrow \rho\omega_1 A_1 = \rho\omega_2 A_2 \times 2 \rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 A_1}{2A_2}$

$A_2 = \frac{1}{4}A_1 \rightarrow \omega_2 = 2\omega_1 \rightsquigarrow \rho\omega_1 A_1\left[\omega_1 + \cos 45°\,\omega_2\right] = F$

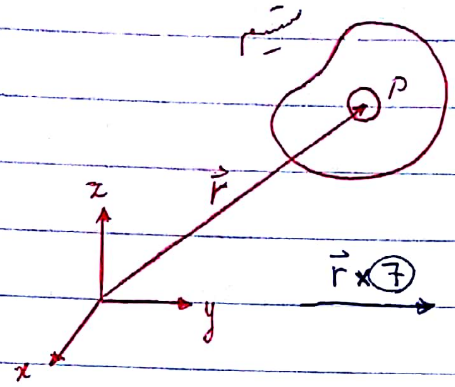
$\omega_1 = 27\ \frac{m}{s} \rightarrow \omega_2 = 2\times 27 = 54\ m/s$

$\Rightarrow F = 1000\ \frac{kg}{m^3} \times 27\ \frac{m}{s} \times \pi\left(\frac{0{,}1^2}{4}\right)m^2\left[27\ \frac{m}{s} + 27\sqrt{2}\ \frac{m}{s}\right] = 13{,}8\ KN$

Scanned by CamScanner

Date No

معادله‌ی اندازه حرکت زاویه‌ای:



$$\frac{D}{Dt}(\delta m\vec{v})=\vec{F}_p \quad , \quad \frac{D}{Dt}(\rho\,\delta\forall\vec{v})=\vec{F}_p \quad (7)$$

$$\xrightarrow{\vec{r}\times(7)} \vec{r}\times\frac{D}{Dt}(\rho\,\delta\forall\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}_p \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}(\rho\,\delta\forall\,\vec{r}\times\vec{v})=\vec{r}\times\frac{D}{Dt}(\rho\,\delta\forall\,\vec{v})+\overbrace{\left(\frac{D}{Dt}\vec{r}\right)}^{\vec{v}}\times(\rho\,\delta\forall\,\vec{v})$$

$$\Rightarrow =\vec{r}\times\frac{D}{Dt}(\rho\,\delta\forall\,\vec{v})+\cancel{\vec{v}\times(\rho\,\delta\forall\,\vec{v})} \rightsquigarrow \rho\,\delta\forall(\vec{v}\times\vec{v})=0$$

$$\Rightarrow r\times\frac{D}{Dt}(\rho\,\delta\forall\,\vec{v})=\frac{D}{Dt}(\rho\,\delta\forall\,\vec{r}\times\vec{v}) \quad (9) \xrightarrow{8,9} \frac{D}{Dt}(\rho\,\delta\forall\,\vec{r}\times\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}_p \quad (10)$$

← با انتگرال گیری از رابطه‌ی 10 برای تمام ذرات داخل سیستم خواهیم داشت:

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys}\rho(\vec{r}\times\vec{v})\,d\forall=\sum(\vec{r}\times\vec{F})_{sys}$$

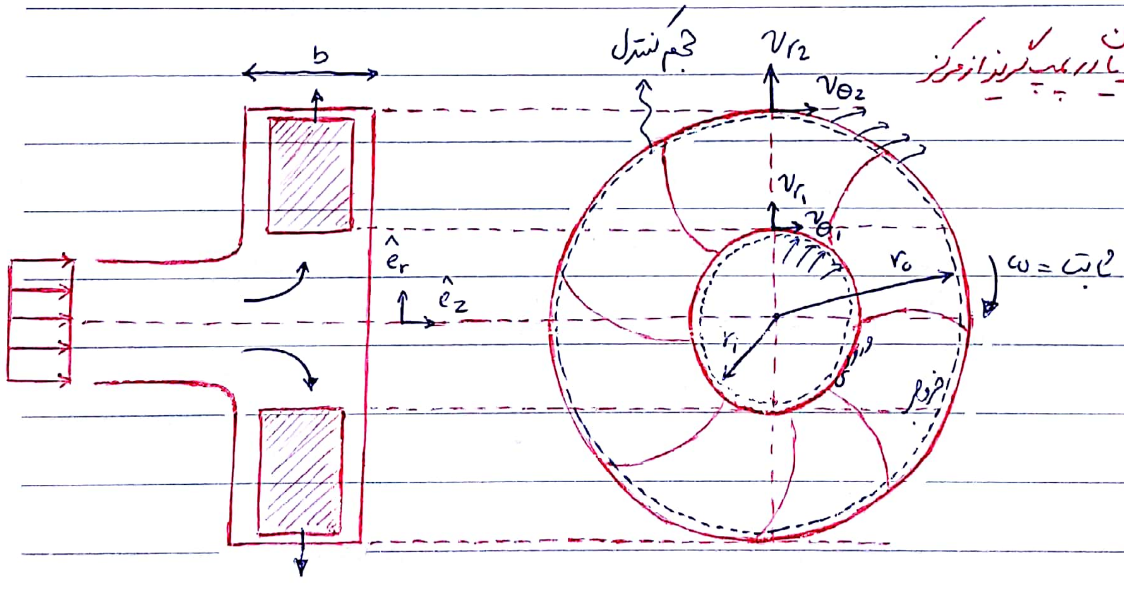
مجموع گشتاورهایی که به sys وارد می‌شوند

$$B=m\vec{r}\times\vec{v} \quad , \quad b=\vec{r}\times\vec{v}$$

(10) و (10) قبل

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int_{sys}\rho(\vec{r}\times\vec{v})\,d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv}\rho(\vec{r}\times\vec{v})\,d\forall+\int_{cs}\rho(\vec{r}\times\vec{v})(\vec{v}\cdot\hat{n})\,dA=\sum\vec{r}\times\vec{F}}$$

مثال: جریان در پمپ گریز از مرکز



معادله‌ی اندازه حرکت زاویه‌ای را برای پمپ گریز از مرکز نشان داده شده بنویسید. (جریان پایا و سیال غیر قابل تراکم است)

جریان ورودی و خروجی یکنواخت است

$$\int_{CS} \rho(\vec{r}\times\vec{v})\,\overbrace{\vec{v}\cdot\hat{n}\,dA}^{\dot m_{in}} = \vec{T}_{shaft}$$

پیوستگی: $\dot m = \dot m_i = \dot m_o$

$$\dot m_o(\vec{r_o}\times\vec{v_2}) - \dot m_i(\vec{r_i}\times\vec{v_1}) = \vec{T}_{shaft}$$

$$\Rightarrow \dot m\left[r_o\hat{e}_r\times(v_{2r}\hat{e}_r+v_{2\theta}\hat{e}_\theta) - r_i\hat{e}_r\times(v_{1r}\hat{e}_r+v_{1\theta}\hat{e}_\theta)\right] = \vec{T}_{shaft}$$

$$\dot m\left[r_o v_{2\theta} - r_i v_{1\theta}\right]\hat{e}_z = T_{shaft}\,\hat{e}_z \longrightarrow \boxed{\dot m(r_o v_{2\theta} - r_i v_{1\theta}) = T_{shaft}}$$

$\dot m = \rho v_{1r}(2\pi r_i)\,b$

Euler's turbine formula

معادله انرژی (قانون اول ترمودینامیک): $E =$ انرژی ، $e = \frac{E}{m} =$ انرژی در واحد جرم

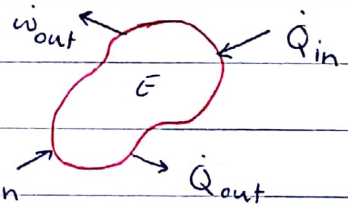
کار و گرمایی را که به سیستم داده شده مثبت و خلاف آن را منفی فرض می‌کنیم.

$$\frac{D}{Dt}(E)_{sys} = \dot Q_{net} + \dot w_{net} \quad (1)$$

$\dot Q_{net} = \sum \dot Q_{in} - \sum \dot Q_{out}$ ، $\dot w_{net} = \sum \dot w_{in} - \sum \dot w_{out}$

$$e = \check{u} + \frac{v^2}{2} + gz \qquad E_{sys} = \int_{sys}\rho e\, d\forall$$

$\check{u}$: انرژی درونی در واحد جرم



با استفاده از قضیه‌ی انتقال رینولدز:

$$\frac{D}{Dt}\int_{sys}\rho e\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho e\,d\forall + \int_{CS}\rho e(\vec{v}\cdot\hat{n})\,dA \quad (2)$$

($\rho e\,d\forall$: b)

$\rightarrow = \dot Q_{net} + \dot w_{net}$

حرارت ورودی مثبت / خروجی منفی

کار ورودی مثبت / خروجی منفی

Date No

انواع کار: ① کار محور (shaft): $\dot{w}_s$

② کار ناشی از تنش نرمال (فشار): $\dot{w} = \int_{cs} \overset{\text{نیرو}}{\sigma dA} (\vec{v}.\hat{n})$

در حالت ورودی (زمانی که سیال به سمت داخل هل داده می‌شود) چون $\vec{v}.\hat{n} < 0$ است یک علامت منفی پشت فرمول قرار می‌دهیم تا کار مثبت بدست آید: $\dot{w} = -\int_{cs} P(\vec{v}.\hat{n}) dA$

③ کار ناشی از تنش برشی عموماً قابل صرف نظر کردن است:

②,③ $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho e d\forall + \int_{cs} \rho e(\vec{v}.\hat{n}) dA + \int_{cs} P(\vec{v}.\hat{n}) dA = \dot{Q}_{net} + \dot{w}_{s,net}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho e d\forall + \int_{cs} \rho \left(e + \frac{P}{\rho}\right) \underbrace{\vec{v}.\hat{n}\, dA}_{\dot{m}} = \dot{Q}_{net} + \dot{w}_{\overset{\text{shaft}}{s},net}} \quad ④$$

$$\rightarrow e = \check{u} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \rightarrow \boxed{\check{h} = \check{u} + \frac{P}{\rho}} \rightarrow \text{Enthalpy آنتالپی}$$

حالت خاص: فرض می‌کنیم جریان پایا، تراکم ناپذیر و در ورودی و خروجی یکنواخت باشد و تنها یک ورودی/خروجی داشته باشیم.

$$\xrightarrow[\text{با این فرض ها}]{④} \dot{m}_{out}\left(\check{u} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho}\right)_{out} - \dot{m}_{in}\left(\check{u} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho}\right)_{in} = \dot{Q}_{net} + \dot{w}_{s,net}$$

پیوستگی $\rightarrow \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m} \qquad w_{s,net} = \frac{\dot{w}_{s,net}}{\dot{m}} \quad , \quad q_{net} = \frac{\dot{Q}_{net}}{\dot{m}}$

$$\Rightarrow \frac{P_{out}}{\rho} + \frac{v_{out}^2}{2} + gz_{out} = \frac{P_{in}}{\rho} + \frac{v_{in}^2}{2} + gz_{in} - \overbrace{(\check{u}_{out} - \check{u}_{in} - q_{net})}^{\text{Loss = افت}} + w_{s,net} \quad ⑤$$

معادله‌ی انرژی با شرط های بالا

از مقایسه‌ی (5) با معادله‌ی برنولی (معادله‌ی انرژی برای حالت ایده‌آل) و با قرار دادن $\omega_s = 0$ ، جمله‌ی

$(\check{u}_{out} - \check{u}_{in} - q_{net})$ برابر اثرات ویسکوزیته می‌باشد و با Loss (افت) نمایش می‌دهیم.

بن برابن →

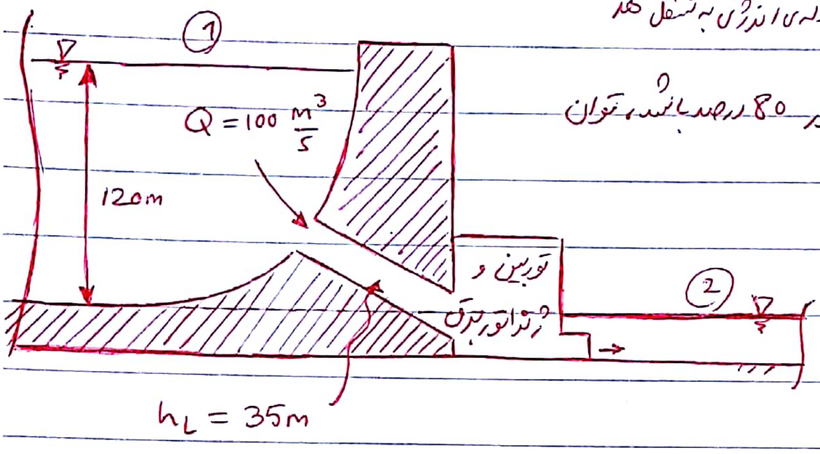
$$\boxed{\overbrace{\frac{P_{out}}{\gamma} + \frac{v_{out}^2}{2g} + Z_{out}}^{H_{out}} = \overbrace{\frac{P_{in}}{\gamma} + \frac{v_{in}^2}{2g} + Z_{in}}^{H_{in}} - h_L + h_s} \quad (6)$$

→ بن هملی واحد متر است

$$h_L = \frac{E_{loss}}{mg} \quad , \quad h_s = \frac{\omega_s}{g}$$

$$\boxed{H_{out} = H_{in} - h_L + h_s} \quad (7)$$

معادله‌ی انرژی به شکل هد



مثال: اگر بازده‌ی توربین + ژنراتور 80 درصد باشد، توان تولیدی را بدست آورید.

معادله‌ی انرژی بین 1 و 2 :

(6) → $V_1 = V_2 = 0$ $\quad$ $\overset{\text{نسبی}}{P_1 = P_2 = 0}$ $\quad$ $h_L = 35m$

h_s برای پمپ‌ها + است

$Z_2 = Z_1 - h_L + h_s$ $\qquad$ $\underset{\uparrow}{h_s}^{\text{توربین}} = (\overbrace{Z_2 - Z_1}^{-120}) + \overset{35}{h_L} = -85m$ $\;$ چون خروجی است

(*)

$$\dot{\omega}_t = mg \times 85 = \underbrace{\gamma Q}_{\text{وزن سیال جابجا شده در واحد زمان}} \times \underbrace{85}_{\text{میزان جابجایی}} = 10^4 \frac{N}{m^3} \times 100 \frac{m^3}{s} \times 85m = 85\ MW$$

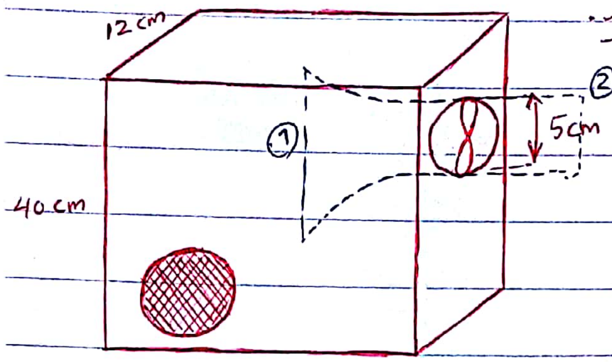
$\dot{\omega}_t$ ↓ توربین

مقدار توان ورودی توربین (تقاوت)

$$\dot{\omega}_{out} = \eta_{t+g} \times \dot{\omega}_t = 0{,}8 \times 85\ MW = 68\ MW$$

مثال: شکل زیر یک کپسول کاسیتر است. فن در هر ثانیه $\frac{1}{2}$ حجم هوای داخل محفظه را تخلیه می‌کند. جریان پایا و غیر

Date No

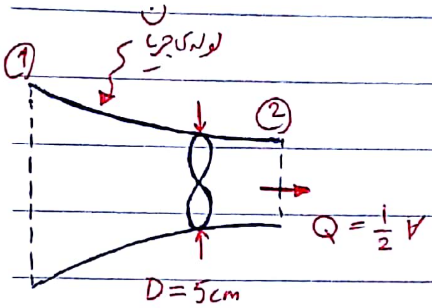


تمایل تراکم و یکنواخت است. توان فن مورد نیاز را پیدا کنید.

بازده فن $\eta = 30\%$ می باشد.

بین دو خط جریان دبی جرمی همواره ثابت است.

هرچه سرعت کمتر شود خطوط جریان بیشتر از هم فاصله می گیرند و مساحت



افزایش می یابد زیرا طبق قانون پیوستگی: $A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q$

$Q = \frac{1}{2} \forall$

فن را به طور جداگانه به صورت حجم کنترل در نظر می گیریم:

$\rightarrow Q = \frac{1}{2} \times (0{,}4^2 \times 0{,}12) = 96 \times 10^{-4} \frac{m^3}{s}$ $\quad v_1 = 0 \,,\; v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{96 \times 10^{-4} \frac{m^3}{s}}{\pi \times (\underbrace{0{,}025}_{R})^2 m^2}$

$\rightarrow v_2 = \frac{96}{\pi \times 25^2} \times 10^2 \simeq 4{,}9 \frac{m}{s}$

معادله ی انرژی $\longrightarrow \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \overbrace{h_f - h_L}^{h_{f,net}}$

چون نقطه ی 2 با اتمسفر مستقیماً ارتباط دارد و نیز نقطه ی 1 بدلیل منافذ کیس با اتمسفر در ارتباط است بنابراین:

$P_2 = P_1 = 0 \,,\; v_1 = 0 \,,\; v_2 = 4{,}9 \frac{m}{s} \,,\; z_1 = z_2 \rightsquigarrow h_{f,net} = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{4{,}9^2}{2 \times 10} = 1{,}2 m$

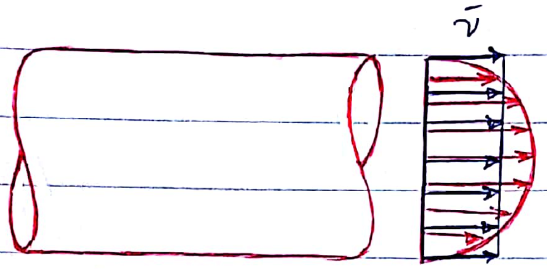
$\dot{w}_{f,net} = \dot{m} g h_{f,net} = \gamma Q h_{f,net} = 10 \frac{N}{m^3} \times 96 \times 10^{-4} \frac{m^3}{s} \times 1{,}2 m = 0{,}1152 \text{ watt}$

$\eta_{motor} = \frac{\dot{w}_f}{\dot{w}_{motor}} \Rightarrow \dot{w}_{motor} = \frac{0{,}1152}{0{,}3} = 0{,}384 \text{ watt}$

معادله‌ی انرژی برای ورودی/خروجی غیر یکنواخت :

① جریان پایا :

$$\int_{CS}\left(\check{u}+\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz\right)\rho(\vec{v}\cdot\hat{n})\,dA = \dot{W}_{s,net}+\dot{Q}_{net}$$



$$\bar{v} = \frac{\int \rho v\, dA}{\rho A}$$

دبی جرمی دیفرانسیلی

$$\underbrace{\int_{CS}\frac{v^2}{2}(\rho\vec{v}\cdot\hat{n})\,dA}_{\text{انرژی جنبشی گذرنده از سطح کنترل در واحد زمان}} = \alpha\dot{m}\frac{\bar{v}^2}{2} \quad (8)$$

α = ضریب انرژی جنبشی >1

$\alpha = 1$ جریان یکنواخت

ضریب انرژی جنبشی

⑥ و ⑧ $\rightarrow$

$$\frac{P_{out}}{\gamma}+\alpha_{out}\frac{\bar{v}_{out}^2}{2g}+z_{out} = \frac{P_{in}}{\gamma}+\alpha_{in}\frac{\bar{v}_{in}^2}{2g}+z_{in}+h_{s,net}-h_L$$

فصل ششم (هفتم کتاب) «آنالیز ابعادی، تشابه و مدل سازی» Dimensional analysis

برای انجام آنالیز ابعادی برای یک مسئله (مثلاً می‌خواهیم افت فشار در واحد طول لوله ΔP_L) :

① پارامترهای مؤثر در ΔP_L را تعیین می‌کنیم (لوله‌ی بدون زبری - افقی)

افت فشار در واحد طول

$$\Delta P_L = f(D, v, \mu, \rho)$$

قطر لوله (D)، سرعت سیال (v)، ویسکوزیته (μ)

ΔP_L به τ بستگی دارد $\tau = \mu\frac{du}{dy}$ پس به سرعت و μ بستگی دارد.

$\tau \rightsquigarrow \frac{N}{m^2} = \mu\left(\frac{1}{s}\right)$

تعداد پارامترها $\rightarrow K=5$

⊛ چیزی که باید آن را حساب کنیم نیز یک پارامتر می‌باشد $\rightarrow$ در اینجا ΔP_L

Date　　　　No

② نوشتن بُعد پارامترهای مؤثر برحسب واحدهای اصلی (FLT / MLT)　　$\rho \doteq \frac{kg}{m^3} = \frac{F/\frac{m}{s^2}}{m^3}$

$\Delta P_L \doteq FL^{-3}$　　$D \doteq L$　　$\mu \doteq FL^{-2}T$　　$\rho \doteq FL^{-4}T^2$　　$v \doteq LT^{-1}$

تعداد ابعاد اصلی که در مسئله ظاهر می‌شوند را مشخص می‌کنیم ← $r = 3$ ← F، L و T

پی بزرگ

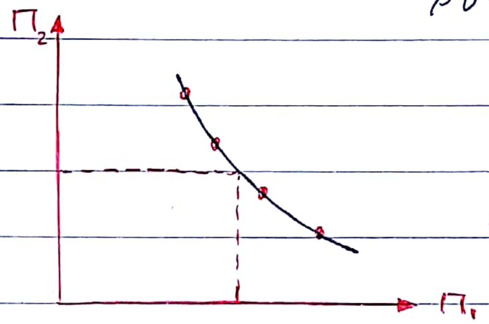
③ تشکیل گروه‌های بی‌بعد به تعداد مشخص از پارامترهای مسئله با استفاده از قضیه‌ی باکینگهام (گروه‌های بی‌بعد $\Pi_1, \Pi_2, \dots$)

قضیه‌ی باکینگهام: برای هر معادله‌ی همگن که دارای k پارامتر و r بعد اصلی می‌باشد، تعداد گروه‌های بدون بعد لازم برای این مسئله k−r می‌باشد　$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{k-r}$

برای مسئله‌ی افت فشار داریم: $K-r = 5-3 = 2 \rightarrow \Pi_2 = \overset{\text{تابع}}{\varphi}(\Pi_1)$,　$\Pi_2 = \frac{D\Delta P_L}{\rho v^2}$

سپس در آزمایشگاه برای Π_1 و Π_2 های متفاوت آزمایش انجام می‌دهیم: مثلاً:

$\Pi_1 = \frac{\rho V D}{\mu}$



روش متغیرهای تکراری برای تعیین گروه‌های بی‌بعد (Πها):

تعداد r متغیر تکراری از پارامترهای مسئله جدا می‌کنیم که دارای ویژگی‌های زیر هستند:

① متغیرهای تکراری از نظر ابعادی از هم مستقل باشند.

② تمام ابعاد اصلی مسئله در این متغیرها حضور داشته باشند.

③ متغیر اصلی مسئله هیچ وقت جزو متغیرهای تکراری نیست.

④ از متغیرهای با ابعاد ساده‌تر ابتدا انتخاب کنید. از هم مستقل نیستند چون هر دو F، L و T را دارند

برای مسئله‌ی افت فشار متغیرهای تکراری عبارتند از D, V, ρ (μ, L) ← به ترتیب ساده‌تر

تشکیل گروه‌های بی‌بعد با استفاده از متغیرهای تکراری — دو متغیری که استفاده نشده‌اند

$$\Pi_1 = \Delta P_L \, D^a V^b \rho^c \rightsquigarrow F^0 L^0 T^0 = F L^{-3} \, L^a (L T^{-1})^b (F L^{-4} T^2)^c \quad ①$$

$$\Pi_2 = \mu \, D^a V^b \rho^c \rightsquigarrow F^0 L^0 T^0 = F L^{-2} T \, L^a (L T^{-1})^b (F L^{-4} T^2)^c \quad ②$$

① →
$$\begin{cases} F: \; 0 = 1 + c \to \boxed{c = -1} \\ L: \; 0 = -3 + a + b - 4c \to \boxed{a = 1} \\ T: \; 0 = -b + 2c \to \boxed{b = -2} \end{cases} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{\Delta P_L D}{\rho V^2}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\Delta P_L D}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

② →
$$\begin{cases} F: \; 0 = 1 + c \to \boxed{c = -1} \\ L: \; 0 = -2 + a + b - 4c \to \boxed{a = -1} \\ T: \; 0 = 1 - b + 2c \to \boxed{b = -1} \end{cases} \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu}$$

✱ گروه‌های بی‌بعد تشکیل به متغیرهای تکراری انتخاب شده دارند. بنابراین گروه‌های بی‌بعد یکتا نیستند. یعنی بر اساس انتخاب متغیرها مختلف Π های مختلف بدست می‌آیند اما همگی ΔP_L (جواب) یکسانی به ما می‌دهند.

گروه‌های بی‌بعد مهم در مکانیک سیالات: بقیه در درس افزار

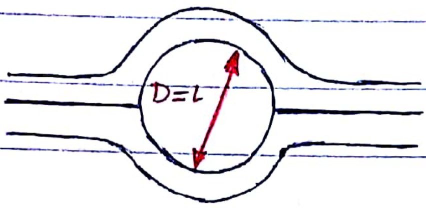
① عدد رینولدز $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$ یا $Re = \frac{V L}{\nu}$ ، بعد طولی مهم = L (قطر برای لوله)

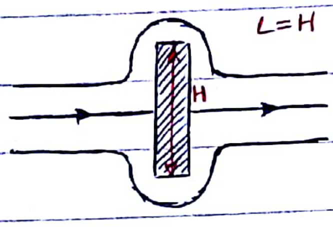
مسئله = طول مشخصه

ویسکوزیته دینامیکی — ویسکوزیته سینماتیکی

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Date No





اگر عدد Re بسیار بزرگ باشد، اثرات ویسکوزیته کم می باشد. $\rightarrow Re = \frac{\text{نیروهای اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}} = \frac{\rho V L}{\mu}$

اگر عدد Re بسیار کوچک باشد، اثرات ویسکوزیته زیاد می باشد.

② عدد اویلر: $\frac{\text{تغییرات فشار}}{\text{فشار دینامیکی}} = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}$

③ عدد ماخ : Mach # $\frac{\text{سرعت سیال}}{\text{سرعت صوت}} \rightarrow M = \frac{V}{c}$

↲ نشان دهنده‌ی اثرات تراکم‌پذیری در سیال

$M > 0{,}3 \rightarrow$ اثرات تراکم‌پذیری زیاد

$M < 0{,}3 \rightarrow$ اثرات تراکم‌پذیری قابل صرف‌نظر کردن است

④ عدد وبر: طول مشخصه $= L$ ، $\sigma =$ کشش سطحی $= FL^{-1}$ $\quad We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} = \frac{\text{نیروهای اینرسی}}{\text{کشش سطحی}}$

مثال: اختلاف فشار بین داخل و خارج یک حباب (ΔP): $\quad \Delta P = f(D, \sigma)$

$\rightarrow K = 3 \quad \Delta P \doteq FL^{-2}, \quad D \doteq L, \quad \sigma \doteq FL^{-1}$ $\quad$ تعداد Πها $= K - r = 3 - 2 = 1$

از آنالیز ابعادی بدست می آید

تعیین متغیرهای تکراری (r): σ, D $\quad \Rightarrow \Pi_1 = C =$ ثابت $\quad \rightarrow r = 2 \rightarrow$ L و F

$$\Pi_1 = \Delta P (D^a \sigma^b) = FL^{-2} L^a \times (FL^{-1})^b$$

$$\begin{cases} F: \; 0 = 1 + b \rightarrow \boxed{b = -1} \\ L: \; 0 = -2 + a - b \rightarrow \boxed{a = 1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \Pi_1 = \Delta P \frac{D}{\sigma} \rightarrow \frac{\Delta P D}{\sigma} = C \rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{\sigma C}{D}}$$

مدل سازی: ساختن مدلی از نمونه ی اصلی جهت انجام آزمایش (مثلاً در تونل باد)

Prototype — model

← مدل می تواند کوچکتر یا بزرگتر از نمونه ی اصلی باشد.

تشابه: برای مدل: $\Pi_{1m} = \varphi_1 (\Pi_{2m}, \dots, \Pi_{nm})$ ، برای نمونه ی اصلی: $\Pi_{1p} = \varphi_2 (\Pi_{2p}, \dots, \Pi_{np})$

← اگر پدیده های مورد بررسی و فیزیک آنها در مدل و نمونه اصلی یکی باشد، $\varphi_1 = \varphi_2$ خواهد بود. (یعنی اگر گراف ($\Pi_{1p} - \Pi_{2p}$) و گراف ($\Pi_{1m} - \Pi_{2m}$) را رسم کنیم شکل آنها یکی خواهد بود مثلاً هر دو سینوسی یا هر دو درجه 3 اند)

اگر $\Pi_{2m} = \Pi_{2p}$, ... , $\Pi_{nm} = \Pi_{np}$ آنگاه: $\boxed{\Pi_{1m} = \Pi_{1p}}$ شرایط برقراری تشابه

اگر روابط تشابهی شامل نسبت اندازه ها باشد، آنها را روابط تشابهی هندسی و اگر نسبت نیروها باشد، آنها را روابط تشابهی دینامیکی می گویند. ← وقتی تشابه دینامیکی و هندسی برقرار باشد، تشابه را سینماتیکی می گویند.

⊛ جریان های سیال را به دو دسته تقسیم می کنیم:

① جریان های داخلی: لوله، شیرها، اتصالات و ... ② جریان های خارجی: جریان حول اجسام

۱) برای جریان های داخلی تراکم ناپذیر:

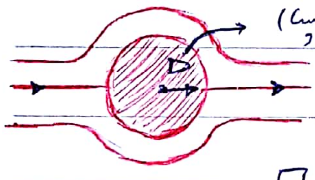
افت فشار در واحد طول → $\Pi_1 = \varphi \left(Re , \frac{\varepsilon}{L} , \frac{L_i}{L} \right)$

Π_1: $\frac{\Delta P_L L}{\rho V^2}$ یا

(فرعی)

طول های دیگر مسئله = L_i و (قطر لوله) طول مشخصه = L ، $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$ ، زبری سطح = ε

۲) برای جریان های خارجی تراکم ناپذیر:



زبری سطح ، نیروی درگ

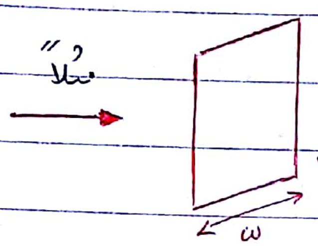
$\Pi_1 = \varphi \left(Re , \frac{\varepsilon}{L} , \frac{L_i}{L} \right)$ ، $\Pi_1 : \frac{D/L^2}{\frac{1}{2} \rho V^2} = C_D$ ضریب درگ (درگ بدون بعد)

$Re \rightarrow \frac{\rho V L}{\mu}$

Date No

$\rightsquigarrow D = f(\rho, v, \overset{\uparrow \text{قطر } D}{L}, \mu, \varepsilon) \rightsquigarrow C_D = \varphi\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$

"مثلا"



$C_D = \varphi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{H}, \frac{\omega}{H}\right) \rightarrow$ H را طول مشخصه در نظر گرفتیم

$R_e = \frac{\rho v H}{\mu}$

مثال: هواپیمایی با سرعت v پرواز می‌کند. می‌خواهیم مدل 1:10 آن را در آزمایشگاه بررسی می‌کنیم شرایط تشابه را بررسی و نیروی درگ روی هواپیما بدست آورید. (از نتایج آزمایشگاه)

$C_D = \varphi\left(Re, \frac{\varepsilon}{L}, \frac{L_i}{L}\right)$

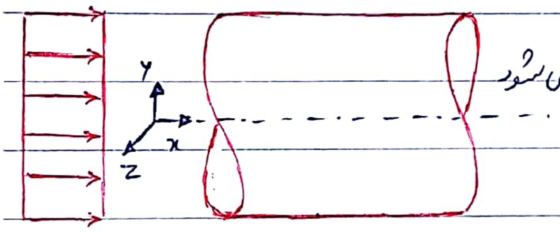
شرایط تشابه هندسی (1)
$$\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)_m = \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)_p, \quad \left(\frac{L_i}{L}\right)_m = \left(\frac{L_i}{L}\right)_p$$

تشابه دینامیکی (2)
$$Re_m = Re_p \;\Rightarrow\; \left(\frac{\rho v L}{\mu}\right)_m = \left(\frac{\rho v L}{\mu}\right)_p$$

برای برقراری این تساوی مدل را باید در تانک آب قرار داد

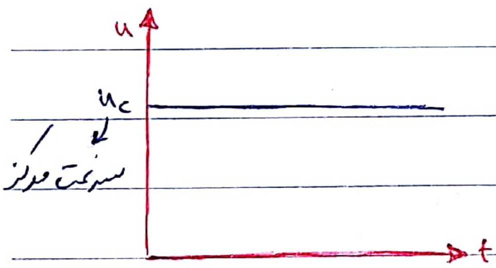
$$\Rightarrow \frac{\rho_m^{\to w}}{\rho_p^{\to a}} \times \frac{v_m}{v_p} \times \frac{L_m}{L_p} \times \frac{\mu_p^{\to w}}{\mu_m^{\to a}} = 1 \qquad \frac{L_m}{L_p} = 0{,}1 \rightarrow \frac{v_m}{v_p} = ?$$

فصل هشتم "جریان در لوله‌ها" (pipe flows)



براساس عدد رینولدز جریان $Re = \frac{uD}{\nu}$ رژیم جریان تعریف می‌شود

و یک حالت گذر براساس آزمایش رینولدز:



(1) جریان آرام (لایه‌ای) : (Laminar $Re < 2100$

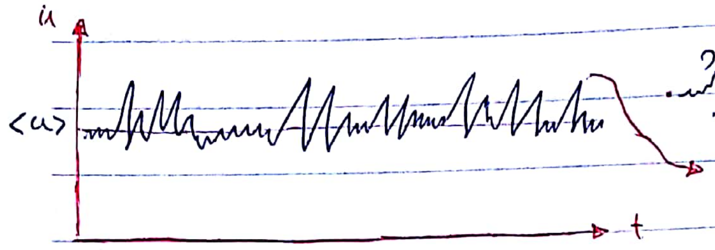
ویژگی‌ها: $\vec{V} = u\hat{i}$

(2) جریان آشفته : (Turbulent Flow) $Re > 4000$

ویژگی ها:

$\vec{v} = u(x,y,z,t)\hat{i} + v(x,y,z,t)\hat{j} + w(x,y,z,t)\hat{k}$

مؤلفه های سرعت u و v و w کاملاً تصادفی می باشد. (بی نظمی)



سرعت در یک شعاع مشخص

بی نظمی ← جریان آشفته

عملیات متوسط گیری: اگر T به اندازه ی کافی طولانی باشد، $\langle u\rangle$ تابعی از زمان نیست (در جریان پایا)

$$\langle u\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u\,d\tau$$

$$\langle v\rangle = \langle w\rangle = 0$$

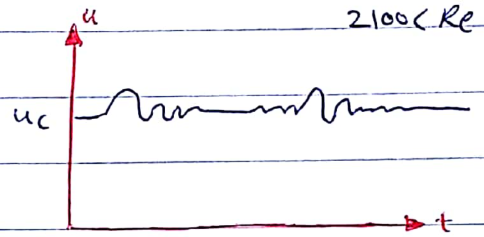
ناپایداری

$$Re = \frac{\text{نیروهای اینرسی}}{\text{نیروهای ویسکوز}}$$

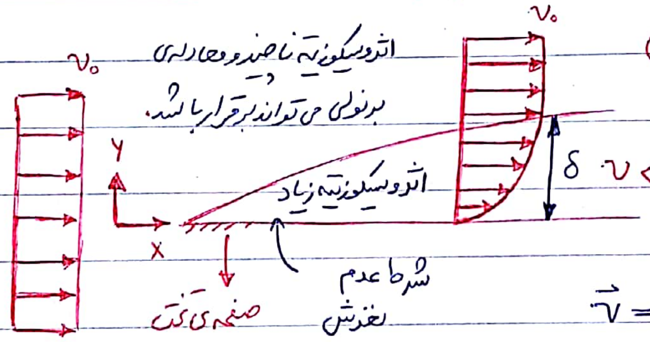
پایداری

(*) جریان آشفته در رینولدزهای بسیار بالاتری نسبت به جریان آرام اتفاق می افتد.

③ جریان گذرا (Transient flow) $2100 < Re < 4000$



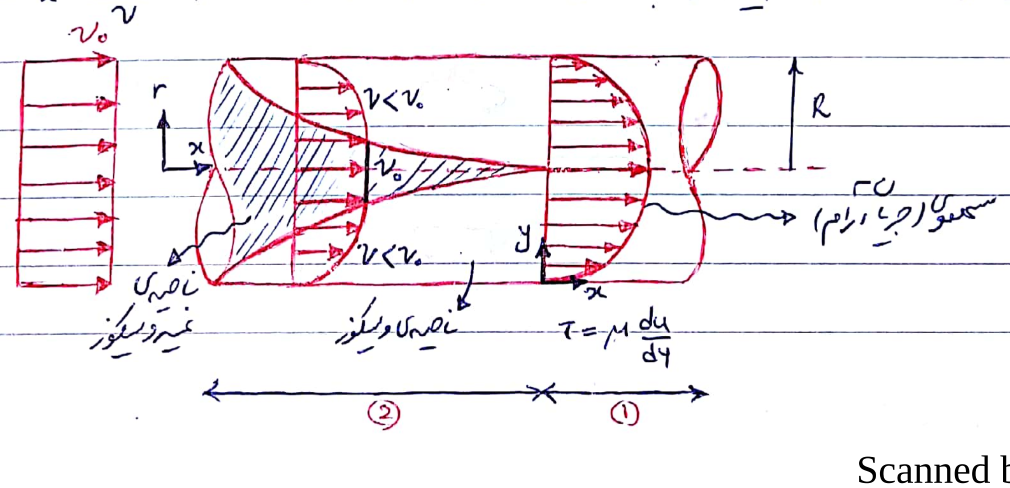
لایه ی مرزی: (Boundary layer)



ضخامت لایه ی مرزی = δ

$\vec{v} = u(x,y)\hat{i} + v(x,y)\hat{j}$

جایی که سرعت ٪99 سرعت جریان آزاد باشد ← $u(x,\delta) = 0{,}99\,v_0$, $Re_x = \frac{v_0 x}{\nu}$

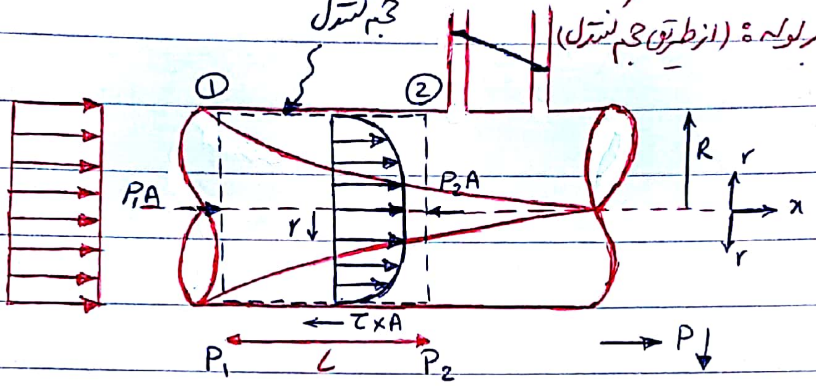


① ← ناحیه‌ی توسعه یافته ← پروفیل سرعت تغییری با x نمی‌کند.

② ← ناحیه‌ی ورودی = ناحیه‌ی درحال توسعه (طول ورودی = L_e) ← پروفیل سرعت با x تغییر می‌کند.

جریان آرام → $\frac{L_e}{D} = 0.06\,Re$ جریان آشفته → $\frac{L_e}{D} = 4.4\,Re^{1/6}$

تحلیل ناحیه‌ی توسعه یافته در لوله: (از طریق حجم کنترل)



$$\sum F_x = \int_{cs} \rho u(\vec{V}\cdot\hat{n})\,dA$$

اثر تنش برشی (ویسکوزیته) — تغییرات اندازه حرکت خطی — جریان پایا — سرعت متوسط

$$(P_1 - P_2)\pi R^2 - \tau(2\pi R L) = -\rho u_1^2 A + \alpha \rho \bar{u}^2 A \quad ①$$

نیروی ناشی از فشار ΔP — علامت

در ناحیه‌ی توسعه یافته چون سرعت ثابت است ← $\sum F_x = 0$

⊛

① برای ناحیه توسعه یافته → $\frac{\Delta P}{L} = \frac{2\tau}{R} = -\frac{2}{R}\mu \frac{du}{dr}\Big|_{r=R} > 0 \rightarrow \frac{\Delta P}{L} > 0$

⊛ → $-\frac{2}{R}\mu\frac{du}{dr} = \frac{2}{R}\mu\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dr} = -\frac{du}{dy}$ $\quad P_1 - P_2 > 0 \rightarrow P_1 > P_2$

$\frac{\Delta P}{L} =$ ثابت , $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L} < 0$ ثابت — گرادیان فشار در راستای x ثابت و منفی می‌باشد.

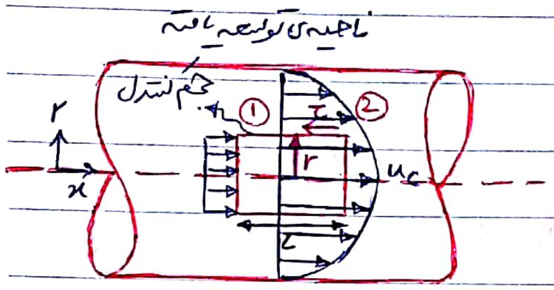
- در ناحیه‌ی توسعه یافته، ثابت = $\frac{\Delta P}{L}$ است چون سرعت در تمام طول ناحیه توسعه یافته ثابت خواهد شد.

تنش برشی دیواره

$$\Delta P\,\pi R^2 = \tau_w \times 2\pi R L = \text{ثابت} > 0 \rightarrow \boxed{\frac{\Delta P}{L} = \frac{2\tau_w}{R}} \quad ②$$

$$\tau_w = \mu\left(-\frac{du}{dy}\right)\Big|_{y=0} = -\mu \overbrace{\frac{du}{dr}}^{<0}\Big|_{r=R} = \text{ثابت} > 0 \longrightarrow \Delta p < 0 \longrightarrow P_1 > P_2$$

$$\frac{\Delta P}{l} = \text{ثابت} > 0 \quad (l \to 0) \rightsquigarrow -\frac{\partial P}{\partial x} > 0 \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} < 0 = \text{ثابت} \longrightarrow P_1 - P_2 > 0 \longrightarrow \boxed{P_1 > P_2}$$



محاسبه پروفیل سرعت در لوله در ناحیه توسعه یافته :

جریان توسعه یافته = جریان هاگن - پوازوی در لوله

قانون دوم نیوتن برای حجم کنترل :

بخاطر توسعه یافتگی

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow \Delta p(\pi r^2) - \tau(2\pi r)l = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{\Delta P}{l} = \frac{2\tau}{r}} \; (3) \quad , \quad \tau = -\mu\frac{du}{dr}$$

$$\longrightarrow \frac{\Delta P}{l} = \frac{-2\mu}{r}\frac{du}{dr} \longrightarrow du = -\frac{\Delta P}{2l\mu} r\,dr \longrightarrow u = \frac{-\Delta P}{4l\mu} r^2 + C^{?}$$

$$\longrightarrow r = R,\ u = 0 \longrightarrow C = \frac{\Delta P}{4l\mu} R^2$$

* مشخصاً یک نقطه را قرار داریم تا C به دست آید :

$$\longrightarrow u = \overbrace{\left(\frac{\Delta P R^2}{4l\mu}\right)}^{u_c}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (4) \qquad r = 0 \longrightarrow u = u_c = \frac{\Delta P R^2}{4l\mu}$$

$$\longrightarrow \boxed{u(r) = u_c\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]} \quad (5)$$

پروفیل سرعت در لوله در ناحیه توسعه یافته برای جریان آرام

محاسبه‌ی دبی حجمی (Q) :

$$Q = \int u\,dA = \frac{\Delta P R^2}{4l\mu}\int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r\,dr = \frac{\pi R^2 \Delta P}{2l\mu}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right) = \frac{\pi \Delta P R^4}{8l\mu}$$

$$\longrightarrow \boxed{Q = \frac{\pi D^4}{128 l\mu}\Delta p} \quad (6)$$

قانون پوازوی

محاسبه‌ی افت هد (h_L) در جریان توسعه یافته آرام در لوله:

سرعت ورودی لوله

رابطه‌ی ⑥ → $Q = \frac{\pi D^4}{128\mu L}\Delta p \rightarrow Q = u\frac{\pi D^2}{4}$

$\rightarrow u\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^4}{128\mu L}\Delta p \rightarrow \boxed{h_L = \frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{32 u\mu L}{D^2\gamma}}$ $\quad Re = \frac{uD}{\nu}$

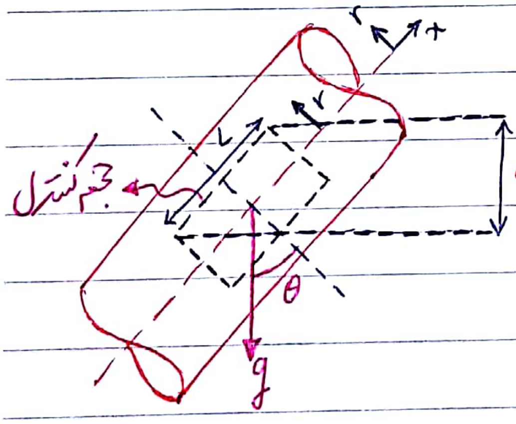
$\rightarrow \frac{\Delta P}{\gamma} = h_L = \underbrace{\frac{64\nu}{uD}}_{1/Re}\frac{1}{2}\rho\frac{u^2}{\gamma}\left(\frac{L}{D}\right) \rightarrow \boxed{h_L = \left(\frac{64}{Re}\right)\times\left(\frac{L}{D}\right)\times\left(\frac{u^2}{2g}\right)}$ ⑦

$f = \frac{64}{Re}$ = ضریب اصطکاک → Friction factor $\quad \boxed{h_L = f\frac{L}{D}\frac{u^2}{2g}}$ رابطه‌ی دارسی - وایزباخ

* با افزایش سرعت (u) چون f و Re رابطه‌ی عکس دارند و $Re = \frac{uD}{\nu}$ است، f کاهش می‌یابد اما

عبارت $\frac{u^2}{2g}$ به علت توان 2 روی u افزایش بیشتری خواهد داشت در نتیجه h_L افزایش می‌یابد.

در لوله‌های مایل: (توسعه یافته)



$\sum F_x = 0$

$\Delta p\pi r^2 - \gamma(\pi r^2 L)\sin\theta - \tau(2\pi r L) = 0$

تنش برشی دیواره

$\Rightarrow (\Delta p - \gamma L\sin\theta)\pi r^2 = \tau(2\pi r L)$

$\frac{\Delta P}{L} = \frac{2\tau_w}{R}$

$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu L}(\Delta p - \gamma L\sin\theta)$ ⑧ ← ⑥ رابطه‌ی بین افت هد و تنش برشی دیواره

در لوله‌های مایل

$\Rightarrow \boxed{h_L = \frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{\tau_w L}{\gamma D}}$ ⑨ افت کلی

افت هد در لوله ها: 1) افت کلی (Major Loss): ناشی از جریان سیال در لوله

2) افت موضعی (minor Loss): ناشی از اتصالات و شیرها در مسیر جریان

بررسی افت فشار در لوله در رژیم جریان آشفته برای حالت توسعه یافته (جریان داری) [تعیین f]:

آنالیز ابعادی: $\Delta P = g(u, L, D, \mu, \rho, \varepsilon)$ ① فقط برای جریان های آشفته

ε = زبری متوسط سطح لوله (از جدول 1-8 کتاب مانسون) ← زبری باعث افت فشار می‌شود

آنالیز ابعادی

$$\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \varphi_1\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{L}{D}\right) \quad ②$$

آزمایش نشان می دهد که $\Delta P \sim \frac{L}{D}$ ③

$$\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \left(\frac{L}{D}\right)\varphi_2\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

افت هد در لوله با جریان توسعه یافته و آشفته ④

$$\boxed{h_L = \frac{\Delta P}{\gamma} = \overbrace{\varphi_2\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)}^{f=?} \frac{L}{D} \times \frac{u^2}{2g}}$$

* حال اگر رابطه ی 4 را با فرمول دارسی - وایزباخ مقایسه کنیم خواهیم دید که برای جریان های آشفته ε هم در افت هد (h) تأثیرگذار است.

پیدا کردن ε برای لوله ها با جنس های مختلف:

نیکورادزه: آزمایش روی لوله هایی با زبری مختلف با استفاده از دانه های شن با قطر متفاوت $\varepsilon = D_{\text{دانه های شن}}$

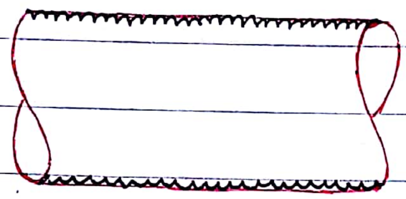
دیاگرام های مودی: با استفاده از نتایج نیکورادزه، دیاگرام های مودی را ارائه کرد. $f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$

زیرلایه ی ویسکوز (لزج) (Viscous sublayer): لایه ی بسیار باریکی نزدیک دیواره که اثر ویسکوزیته

Scanned by CamScanner

Date No

حالت و جریان شبه جریان آرام است (توربولانسی اثری ندارد.) ضخامت زیرلایه تابع معکوس عدد Re می باشد.



* هنگامیکه عدد Re بسیار کم است، زبری به زیرلایه ی لزج می روند و تأثیر آنها بسیار کم و ناچیز خواهد بود، برای همین هم در جریان آرام ε را بررسی نمی کنیم. ولی اگر Re بزرگ باشد، زبری ها از زیرلایه ی ویسکوز بیرون آمده و افت فشار را تحت تأثیر قرار می دهند به طوری که f تنها تابعی از $\frac{\varepsilon}{D}$ است. ($f(\frac{\varepsilon}{D})$)

* در جاییکه نمودار کاملاً افقی می شود، f تابعی از $\frac{\varepsilon}{D}$ خواهد بود. میزان خطای نتایج حاصل از مودی حدود ۱۰٪ با واقعیت می باشد.

فرمول های برای f: فرمول هالند ←

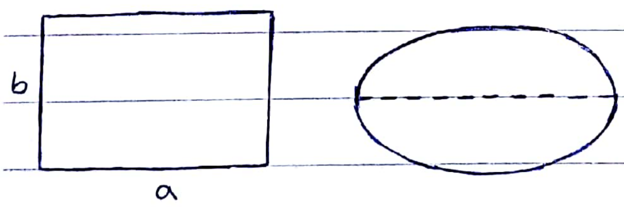
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1{,}8 \log\left[\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)^{1{,}11} + \frac{6{,}9}{Re}\right]$$

فرمول کولبروک ←

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

* در فرمول هالند با افزایش $Re\uparrow$، کسر $\frac{6{,}9}{Re}$ رو به صفر خواهد رفت در نتیجه f تنها تابع $\frac{\varepsilon}{D}$ خواهد بود.

لوله های غیر دایروی از قطر هیدرولیکی (D_h):



$P =$ محیطی که سیال تر کرده است

$D_h = \frac{4A}{P}$ ← مثلاً برای لوله ی مستطیلی بالا $= \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$ $D_h \to D_{\text{دایره}}$

برای محاسبه ی افت هد در جریان آشفته: $Re_h = \frac{uD_h}{\nu}$ ، $\frac{\varepsilon}{D_h}$ ← مراجعه به دیاگرام مودی ← f ← 15٪ خطا

افت موضعی

افت های موضعی (اتصالات، شیرها، تبدیل ها، ...): $h_{L_{minor}} = K_L \frac{u^2}{2g}$

K_L: (ضریب افت) برای آن از نمودارهای جزء اتصالات مورد نظر استفاده می کنیم (جدول 8-2 مانسون)

طول معادل: می خواهیم به جای اینکه یک اتصال داشته باشیم، آن را حذف کرده و طول لوله را افزایش دهیم.

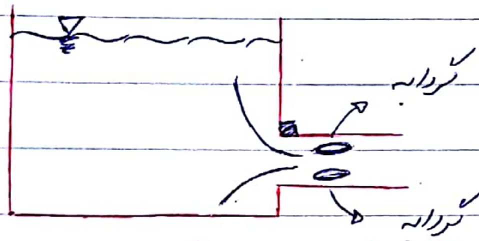
به زبان دیگر، طول معادل، طولی از لوله اصلی است که افت آن معادل افت موضعی می باشد.

$$K_L \frac{u^2}{2g} = f \frac{L_{eq}}{D} \frac{u^2}{2g} \longrightarrow L_{eq} = \frac{K_L D}{f} \quad (*)$$

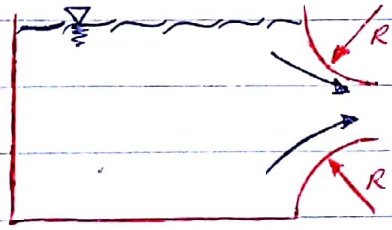
D ← قطر اصلی لوله

f ← ضریب اصطکاک لوله اصلی

افت ورودی لوله از مخزن:



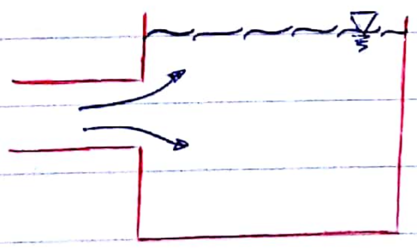
اگر زاویه قائمه باشد ← فرمول (*) در اینجا برقرار است که در اینجا $K_L = 0.5$ خواهد بود. (زیرا بخشی از توان سیال صرف بوجود آوردن گردابه ها می شود)



هر چه شعاع لبه تیزتر باشد، K_L کوچکتر می شود. در شکل 14-8، K_L ها را بر حسب R مشخص کرده است.

$K_L \xrightarrow{\text{تابعی از}} R$

خروج جریان به مخزن: در اینجا سیال با سرعت به یک توده ی سیال برخورد می کند و تمام انرژی جنبشی آن به افت تبدیل می شود، پس $K_L = 1$ خواهد شد:



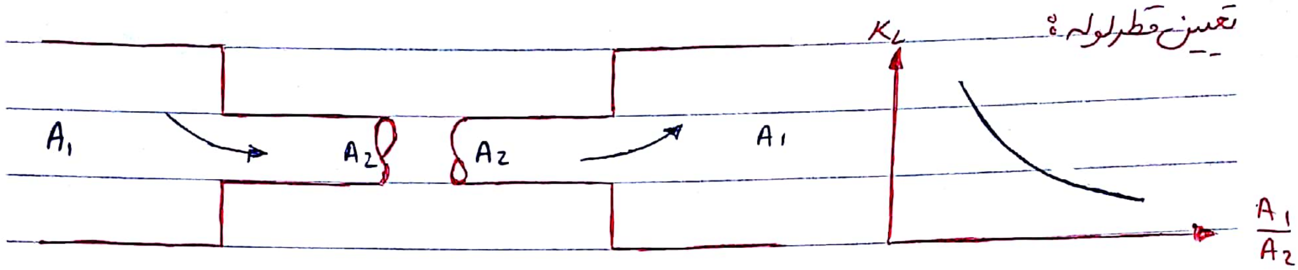
$$h_L = K_L \frac{u^2}{2g} \xrightarrow{K_L = 1} h_L = \frac{u^2}{2g}$$

← همه ی سرعت به افت تبدیل می شود

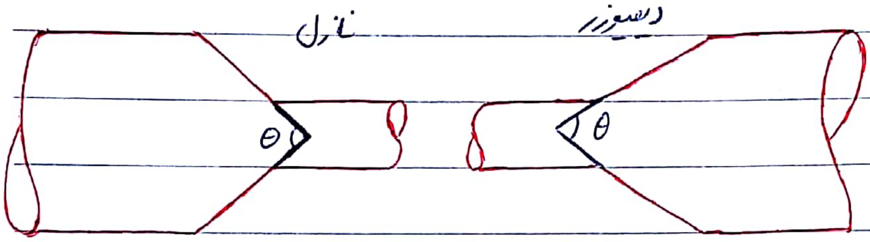
$\frac{u^2}{2g}$ ← هد سرعت

Date No

تعیین قطر لوله:



K_L در شکل های 26-8 و 27-8 ذکر شده است. نسبت $\frac{A_1}{A_2}$ را حساب کرده و از نمودار K_L را پیدا می‌کنیم و h_L و L_{eq} را هم می‌یابیم.



افت در نازل و دیفیوزر:

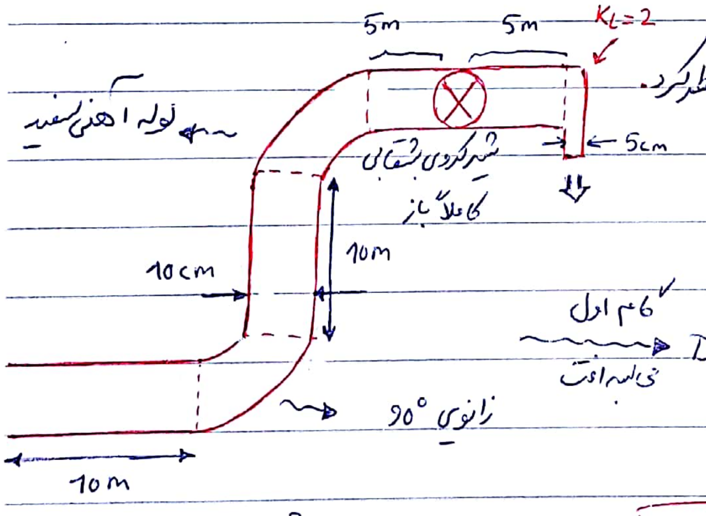
شکل 29-8 برای K_L بر حسب θ

در نازل ها افت تقریباً صفر است

در نازل ها افت فشار بسیار ناچیز است و $K_L \ll 1$ و θ بسیار کم است و از مقدار K_L در نازل ها صرف نظر می‌کنیم.

اما در دیفیوزر ها چون سیال به یک سیال انبوه برخورد می‌کند و در گوشه های دیفیوزر ها گردابه به وجود می‌آید و این خود عامل افت است، پس نمی‌توان از K_L آن صرف نظر کرد.

مثال: در شکل روبه رو افت را محاسبه کنید.



گام اول

$D=0.1m \quad u=\frac{Q}{A}=\frac{8\times10^{-3}}{\frac{\pi\times10^{-2}}{4}}=\frac{32}{10\pi}\simeq 1\frac{m}{s}$

$Re \gg 4200$

$Re=\frac{\rho u D}{\mu}=\frac{10^3\times1\times0.1}{10^{-3}\frac{Ns}{m^2}}=10^5 \rightarrow \boxed{Q=8\times10^{-3}\frac{m^3}{s}}$

پس جریان آشفته است

لوله‌ی آهنی سفید $\rightarrow \frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.15\times10^{-3}}{0.1}=1.5\times10^{-3}$

با داشتن Re و $\frac{\varepsilon}{D}$، از دیاگرام مودی f را پیدا می‌کنیم ← (در اصل از فرمول هالند استفاده می‌شود) $f \simeq 0{,}025$

$\xrightarrow{\text{افت}} h_L = h_{L_{major}} + \sum h_{L_{minor}}$

با توجه به جدول‌ها:

زانوی $90°$ ← $K_L = 1{,}5$ ← زاویه‌ای

شیر بشقابی ← $K_L = 10$ ← شیر بشقابی

$$\Rightarrow h_L = f\frac{L}{D}\frac{u^2}{2g} + \sum_{i=1}^{4} K_L \frac{u^2}{2g} = 0{,}025 \times \frac{30}{0{,}1} \times \frac{1}{20} + (\underbrace{2\times 1{,}5}_{\text{زانویی}} + \overset{\text{بشقابی}}{10} + \underset{\text{خروجی}}{2}) \times \left(\frac{1}{20}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{h_L = 1{,}125\ m} \xrightarrow{\text{افت فشار}} \Delta p = h_L \gamma = 1{,}125 \times 10^4\ Pa$$