①

@elmos_jozveh

بردار مکان
$$\begin{cases} r = x a_x + y a_y + z a_z & \text{کارتزین} \\ r = \rho a_\rho + z a_z & \text{استوانه‌ای} \\ r = r a_r & \text{کروی} \end{cases}$$

استوانه‌ای به کارتزین

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \quad y = \rho \sin\phi \quad z = z \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = z \end{cases}$$

کروی ـ کارتزین

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\theta \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

کروی ـ استوانه‌ای

$$\begin{cases} \rho = r\sin\theta \quad \phi = \phi \quad z = r\cos\theta \\ r = \sqrt{\rho^2+z^2} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right) \quad \phi = \phi \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} \qquad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

∞ میدان میله $E = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho} a_\rho$ میدان صفحه $E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} a_N$ دو صفحه موازی $E = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} a_N$

گرادیان، انتگرال سطح:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z \qquad a_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \qquad dS = ds\, a_n$$

گاوس
$\Psi_{\text{شار}} = \Phi$, $D = \varepsilon_0 E \rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$, $\Psi = \oint_s D \cdot ds =$ بار محصور $= Q$

چگالی شار الکتریکی کابل هم محور
$D = \frac{a \cdot \rho_s}{\rho} a_\rho$ $\boxed{a < \rho < b}$

∇ عملگر: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$

شار خالص خروجی در واحد حجم وقتی حجم حول نقطه به صفر میل کند.

دیورژانس $\rightarrow \operatorname{div} D = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint D \cdot ds}{\Delta v}$ اسکالر

$\nabla \cdot F$ دیورژانس ∇F گرادیان $\nabla \times F$ کرل $\nabla \times F = 0$ آنگاه $\rightarrow$ پایستار

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 h_1 V_3)\right]$$

(۲)

$$\nabla\cdot D = \lim_{\Delta v\to 0} \frac{\oint D\cdot ds}{\Delta v} = \lim_{\Delta v\to 0} \frac{Q}{\Delta v} \rightarrow \nabla\cdot D = \rho_v$$ معادله اول ماکسول

چگالی بار حجمی

دیورژانس ← شار یک نقطه ← انتگرال حجمی دیورژانس ← شار کل عبوری در داراز سطح دربرگیرنده حجم مورد نظر!

$$\oint D\cdot ds = \oint_v \nabla\cdot D\, dv$$ قضیه دیورژانس

$$dW = F\,dL = -QE\cdot dL \rightarrow W = -Q\int_B^A E\cdot dL$$

(کار)

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A E\cdot dL$$

@elmos_jozveh

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$ پتانسیل بار نقطه‌ای در مبدأ

$$V = \frac{-\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\rho) + C$$ پتانسیل بار خطی ∞

$$E = -\nabla V \qquad \nabla V = \frac{\partial V}{h_1 \partial u_1} a_{u_1} + \frac{\partial V}{h_2\partial u_2} a_{u_2} + \frac{\partial V}{h_3 \partial u_3} a_{u_3}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\oint E\cdot dL = V_B - V_A$$ انتگرال گردشی تابع اسکالر V حول هر مسیر بسته همواره صفر است.

پتانسیل دوقطبی الکتریکی $V = \frac{P a_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \rightarrow E = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\, a_r + \sin\theta\, a_\theta)$ (کروی)

انرژی الکتریکی : $W_E = \frac{1}{2}QV$ (بار نقطه‌ای)

$$W_E = \frac{1}{2}\int_v \rho_v V\, dv \quad W_E = \int_v D\cdot E\, dv = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon_0 E^2 dv$$

(بار حجمی) (میدان EQ)

$$J = \sigma E \qquad I = \int_s J\cdot ds \qquad R = \frac{L}{\sigma S}$$

چگالی جریان — هدایت مخصوص هادی — هادی استوانه‌ای با مقاومت R — طول — سطح مقطع — هدایت مخصوص هادی

شدت میدان الکتریکی در داخل هادی صفر است.

روی سطح هادی عمود بر سطح است.

سطح هادی یک سطح هم‌پتانسیل است.

$$D_t = E_t = 0 \quad D_N = \varepsilon_0 E_N = \rho_s$$ چگالی سطحی بار هادی

استوانه‌ای ← دکارتی

ضرب داخلی	a_ρ	a_ϕ	a_z
a_x	$\cos\phi$	$-\sin\phi$	0
a_y	$\sin\phi$	$\cos\phi$	0
a_z	0	0	1

در حل مسائل مختلف (مثلاً میدان نسیم صریح)
به جای متغیر سوال (اینجا z چون دو حد داریم)
عددگذاری نکن تا بعد از انتگرال (مثلاً تو $R=\rho a_\rho - a_z z$ نمی‌نویسی $R=\rho a_\rho - 2a_z$) برای مقادیر ثابت هم مثلاً
بذار آخر کار!

کروی ← دکارتی

@elmos_jozveh

ضرب داخلی	a_r	a_θ	a_ϕ
a_x	$\sin\theta\cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\sin\phi$
a_y	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$\cos\phi$
a_z	$\cos\theta$	$-\sin\phi$	0

سرعت نور $c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\left(\dfrac{m}{s}\right)$

استوانه‌ای ← کروی

ضرب داخلی	a_ρ	a_ϕ	a_z
a_r	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
a_θ	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
a_ϕ	0	1	0

شکل کلی کرل: $\nabla\times A=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} a_{u_1}h_1 & a_{u_2}h_2 & a_{u_3}h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$

شکل کلی گرادیان و دیورژانس

$$\begin{cases} \nabla V=\dfrac{\partial V}{h_1\partial u_1}+\dfrac{\partial V}{h_2\partial u_2}+\dfrac{\partial V}{h_3\partial u_3} \\ \nabla\cdot V=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_1}[h_2h_3V_1]+\dfrac{\partial}{\partial u_2}[h_1h_3V_2]+\dfrac{\partial}{\partial u_3}[h_1h_2V_3]\right] \end{cases}$$

$\Rightarrow \nabla^2V=\nabla\cdot(\nabla V)$

معادله لاپلاس در انواع دستگاه‌های مختصات

$$\begin{cases} \nabla^2V=\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ \nabla^2V=\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\right)\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\right)+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ \nabla^2V=\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} \end{cases}$$

٤

اصول مغناطیس ساکن (دیفرانسیلی)	اصول موضوعی الکترواستاتیک (دیفرانسیلی)	اصول مغناطیس ساکن (انتگرالی)	اصول موضوعی الکترواستاتیک (انتگرالی)
$\nabla\cdot B=0$	$\nabla\cdot E=\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$	$\xrightarrow{div} \oint_s B\cdot ds=0$	$\oint_s E\cdot ds=\frac{Q}{\varepsilon_0}$
$\nabla\times B=\mu_0 J \downarrow \frac{A}{m^2}$	$\nabla\times E=0$	$\xrightarrow{stoke's} \oint_c B\cdot dL=\mu_0 I$	$\oint_c E\cdot dl=0$

بیوساوار: $B=\oint_c \frac{\mu_0 I\, d\vec{L}\times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$ $\quad \frac{Wb}{m^2}$ (T)

کولن: $E=\int \frac{\rho_L\, dL\, \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 |R^3|}$

	الکترواستاتیک	مغناطیس
سیم جریان	$E=\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}a_\rho$	$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}a_\phi$
حلقه جریان	$E=\frac{\rho_L z a}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}a_z$	$B=\frac{\mu_0 I \rho^2}{2(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}a_z$

۳ پتانسیل مغناطیسی:

عددی (A): $B=-\mu_0\nabla V_m$ ، $V_m=-\int_b^a H\cdot dl$

برداری $\left(\frac{Wb}{m}\right)$: $A=\int_c \frac{\mu_0 I\, dL}{4\pi R}$ ، $B=\nabla\times A$

$\nabla^2 A=-\mu_0 J$

شرط: $J=0$

$A_x \to J_x$

$A_y \to J_y$

$A_z \to J_z$

$(I\,dL=J\,dv=K\,ds)$

$\Phi=\int_c A\cdot dl=\int_s B\cdot ds$

$X_m = 1-\mu_R \leftarrow M=X_m H \leftarrow \int M\cdot dL = I_b \leftarrow \mu=\mu_R\mu_0$

μ_0: نفوذپذیری فضای آزاد $4\pi\times10^{-7}$ $\left(\frac{H}{m}\right)$

ε_0: گذردهی فضای آزاد $\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}$ $\left(\frac{F}{m}\right)$

$D=\varepsilon E \leftarrow \varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_R$

مدار الکتریکی	مدار مغناطیسی
$I=\int_s J\cdot ds$	(وبر) $\Phi=\int B\cdot ds$ ← سطح مقطع چنبره
$V=RI$	$V_m=\mathcal{R}\Phi$
$R=\frac{d}{\sigma S}$	$\mathcal{R}=\frac{d}{\mu S}$ (d ← محیط چنبره، S ← سطح مقطع چنبره)
$J=\sigma E$	$B=\mu H$

محیط:

$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\eta=\eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$

$\mu=\mu_r\mu_0$

$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$

ثابت ← $f=\frac{v}{\lambda}$

$v=\frac{v_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$

شرایط مرزی مغناطیسی: $\bar{B}_{N_1} = \bar{B}_{N_2} \to \mu_1 \bar{H}_{N_1} = \mu_2 \bar{H}_{N_2}$

$$\frac{\bar{B}_{t_1}}{\mu_1} - \frac{\bar{B}_{t_2}}{\mu_2} = J_s = K \left(\frac{A}{m}\right) \to H_{t_1} - H_{t_2} = J_s = K$$

چگالی جریان سطحی

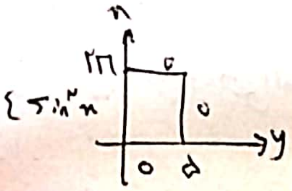
• اگر مثلاً صفحه $x=0$ دو ماده مغناطیسی را از هم جدا کند، بردارهای B_{n_1} و B_{n_2} چون مولفه a_x هر کدام از صفحه‌ها هست

و مولفه‌های a_y و a_z هم می‌شوند B_{t_1}, B_{t_2} و رابطه بین آن‌ها به دست آورد!

I • در حل مسائل پواسون به محورها نگاه کن، سیم چی هستند، شاید $x \uparrow \to y$ باشد!

$$\bar{n} \times \bar{H} = J_s = K \quad \frac{A}{m}$$

II • در پواسون‌ها وقتی یکی از مرزها عدد بود مثلاً



معادله سمت y رو به جای توابع هذلولوی، تابع نمایی بنویس که راحت‌تر ساده می‌شود...

III • در پواسون و لاپلاس وقتی یک طرف از صفحات پتانسیل‌ش به شکل تابعی هست، هم عبارات چپ و راست می‌تواند مؤثر باشد!

IV

• $\sin 2k\pi = 0 \to k = n$ و نه فقط $\to k = \frac{n}{2}$!

$E \times H$ = چگالی توان

$\frac{V}{m} \quad \frac{A}{m} \quad \left(\frac{W}{m^2}\right)$

اندوکتانس چنبره  $L = \frac{\mu N^2 S}{2\pi \rho}$

اندوکتانس کابل کواکسیال  $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

۶

میدان مغناطیسی ناشی از آرایش های مختلف :

صفحه با چگالی جریان سطحی K و بردار عمود a_N : $B = \frac{\mu_0 K}{2} a_N$

سیم حامل جریان

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\, a_\phi$$

حلقه جریان در روی محور z : $B = \frac{\mu_0 I \rho^2}{2(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} a_z$

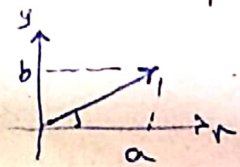
سیم پیچ

$$B = \frac{\mu_0 I N}{l} a_z$$

@elmos_jozveh

چنبره : $B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi\rho} a_\phi$

در تجزیه بردار نیاز نیست اندازه رو پیدا کنی، ضرب در $\cos\theta$ و $\sin\theta$ و ...



خیلی راحت ! :

$$\boxed{a\,\bar{a}_x + b\,\bar{a}_y}$$

تانژانت تلفات

$$\tan\theta = \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده}} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

$$\lambda = \frac{30}{f}$$

λ → cm، f → GHz

عمق نفوذ $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \varepsilon}}$

$\gamma = \alpha + \beta j$ ، $\alpha = \beta$

α → نپر/m ، β → Rad/m

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

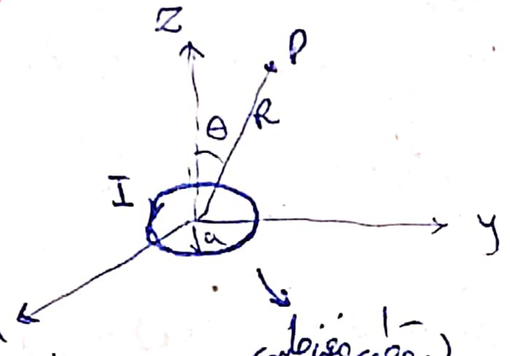
میدان ⑧ نیروی ناشی از المان دیفرانسیلی جریان $I_1 dL_1$ به $I_2 dL_2$:

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint\oint \frac{R_{12}\times d\bar{L}_1}{R_{12}^3} \times d\bar{L}_2$$

• در مدار مغناطیسی داریم: $R = \frac{L}{\mu S}$, $\oint H.dl = NI$, $-\int_a^b H.dl = V_m$, $B = -\mu_0 \nabla V_m$

$\Rightarrow V_m = HL = NI = R\phi$ (A)

@elmos_jozveh



دوقطبی مغناطیسی

مغناطیسی تنگ:

$\bar{m} = I\pi a^2 \bar{a}_z$ گشتاور دوقطبی مغناطیسی $(A.m^2)$

$B = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(2\cos\theta\, a_r + \sin\theta\, a_\phi)$

$A = \frac{\mu_0 \bar{m} \times \bar{a}_R}{4\pi R^2}$

$\oint M.dl = I_b$ جریان مقید $\rightarrow \bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M})$

$\nabla \times B = \mu_0(J + J_m)$

$M = X_m H$, $\mu_r = X_m + 1$

• در المان گیری حتما حتما حتما حتما حواست به ضرایب متریک باشد! (مخصوصاً حقیقی استوانه‌ای و کروی)

$\frac{\partial R}{\partial u} = a_u h_u$

• در مختصات استوانه‌ای و کروی، نمی‌توان مثل کارتزین دو بردار را با جمع ضرایب بردارهای یکه مشابه جمع کرد، چون مثلاً a_r کروی، وابسته به θ است و برای بردارهای مختلف متفاوت است.

انرژی ذخیره شده در میدان الکترواستاتیک: $\boxed{\text{ازدل}}$

بار نقطه‌ای: $W = \frac{1}{2} QV$

بار حجمی: $W = \frac{1}{2}\int \rho_v V dv$

انرژی میدان E: $W = \frac{1}{2}\int D.E\, dv = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon_0 E^2 dv \rightarrow w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |E|^2 \quad \frac{J}{m^3}$

چگالی انرژی ذخیره شده در واحد حجم

قانون گاوس: $\varepsilon_0 \phi = q_{enc} \Rightarrow \varepsilon_0 \oint E.ds = q_{enc} \rightarrow \oint D.ds = q_{enc} = \int \rho_v dv = \int \rho_s ds = \int \rho_L dL$

شار الکتریکی

چگالی شار الکتریکی