سری فوریه: نوشتن یک تابع بر حسب توابع کسینوسی و سینوسی متناوب

$-l<x<l$ $\qquad f(x)=f(x+2l)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$



$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx$$

تبصره:

اگر f زوج $f(-x)=f(x)$ ⟵ $b_n=0$ , $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$ (سری فوریه کسینوسی داریم)

اگر f فرد $f(-x)=-f(x)$ ⟵ $a_n=0$ , $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$ (سری فوریه سینوسی داریم)

خاصیت دوگان

$$\boxed{\begin{aligned}F(f(x))&=F(w)\\ F(F(x))&=2\pi f(-w)\end{aligned}}$$

---

سری فوریه توابع دو متغیره (دوگانه):

$$f(x+2l,y)=f(x,y+2l')=f(x,y)$$

$$f(x,y)=\frac{a_{00}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{0m}\cos\frac{m\pi}{l'}y+b_{0m}\sin\frac{m\pi}{l'}y\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n0}\cos\frac{n\pi}{l}x+b_{n0}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{nm}\cos\frac{m\pi}{l'}y\cos\frac{n\pi}{l}x+b_{nm}\sin\frac{m\pi}{l'}y\cos\frac{n\pi}{l}x+c_{nm}\cos\frac{m\pi}{l'}y\sin\frac{n\pi}{l}x+d_{nm}\sin\frac{m\pi}{l'}y\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

که داریم:

$$a_{nm}=\frac{1}{ll'}\int_{-l'}^{l'}\int_{-l}^{l}f(x,y)\cos\frac{m\pi}{l'}y\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\,dy \qquad c_{nm}=\frac{1}{ll'}\int_{-l'}^{l'}\int_{-l}^{l}f(x,y)\cos\frac{m\pi}{l'}y\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\,dy$$

$$b_{nm}=\frac{1}{ll'}\int_{-l'}^{l'}\int_{-l}^{l}f(x,y)\sin\frac{m\pi}{l'}y\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\,dy \qquad d_{nm}=\frac{1}{ll'}\int_{-l'}^{l'}\int_{-l}^{l}f(x,y)\sin\frac{m\pi}{l'}y\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\,dy$$

---

سری فوریه توابع نامتناوب: $(0<x<l)$ $f(x)$ نامتناوب باشد، آن را به صورت فرد یا زوج گسترش می‌دهیم، حال در بازه متناوب ایجاد شده، سری فوریه را برای تابع جدید می‌نویسیم که در قسمت مورد نظر ما بر تابع $f(x)$ منطبق است!

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<l\\ f(-x) & -l<x<0 \longrightarrow \text{سری کسینوسی}\\ -f(-x) & \longrightarrow \text{سری سینوسی}\end{cases}$$

---

صورت مختلط سری فوریه:

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \qquad C_n=\frac{a_n-ib_n}{2} \qquad C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

$$C_0=\frac{a_0}{2} \qquad C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}\,dx$$

---

رابطه پارسوال:

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)g(x)\,dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\alpha_n+b_n\beta_n\right)$$

$g(x)$ ، $f(x)$ متناوب! با دوره تناوب مشترک $2l$ هستند!

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

**انتگرال فوریه:** توابع غیرمتناوب ② $-\infty<x<\infty$ ، $f(x)$ سری فوریه ندارد ولی سری فوریه اش یا $f(x)$ که $f(x)$ ، $f_1(x)$ در نظر (حد سری فوریه)

که $L$ برابر $\infty$ است و این حد را با یک انتگرال نشان می‌دهیم،

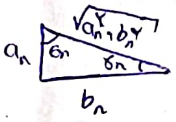
$$f(x)=\int^{\infty}\left(A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\right)dw$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos wx\,dx \qquad B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin wx\,dx$$

---

**صورت سینوسی و کسینوسی سری فوریه:**

$$A_0=\frac{a_0}{2} \qquad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$



$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\left(\gamma_n+\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\left(\theta_n-\frac{n\pi}{L}x\right)$$

@elmos-jozveh

---

**مقدار سری فوریه در نقاط ناپیوستگی $x_0$:**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\left[f_+(x_0)+f_-(x_0)\right]$$

---

**صورت مختلط انتگرال فوریه:**

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}C(w)e^{iwx}dw$$

$$C(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iwx}dx$$ ← همان تبدیل فوریه است!

---

**تبدیل فوریه، معکوس آن و خواصش:**

تبدیل لاپلاس $L\{f(t)\}=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0)$$

$$L\{f^{(n)}(t)\}=s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\dots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0).$$

$$F(w)=\frac{2a}{a^2+w^2}\rightarrow f(t)=e^{-a|t|}$$

$$F(w)=\frac{\sin(kw)}{w}\rightarrow f(t)=\begin{cases}1 & |t|<k\\ 0 & |t|>k\end{cases}$$

با فرض این که $f$ همواره انتگرال‌پذیر باشد، یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\leq M<\infty$ تبدیل فوریه $f$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$F(w)=F\{f\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}dt \qquad F(w\pm w_0)=F\left(e^{\mp iw_0t}f(t)\right)$$

**خواص تبدیل فوریه:**

۱. $F(\alpha f+\beta g)=\alpha F(f)+\beta F(g)$

۲. $F(f(t-t_0))=e^{-iwt_0}F(w)$

۳. $F(f(at))=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right)$

۴. $F^{-1}(F(w))=F^{-1}(F(f(t)))=f(t)$

۴. $F^{-1}(F(w))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{+iwt}dw$

۴. $F^{-1}(\alpha F(w)+\beta G(w))=\alpha F^{-1}(F(w))+\beta F^{-1}(G(w))$

Scanned by CamScanner

۳

@elmos_jozveh

۵ـ ادامه خواص تبدیل فوریه :

$$5.\ F\left(t^{n} f(t)\right) = i^{n} \frac{d^{n} F(w)}{dw^{n}}$$

اگر $f$ مشتق پذیر از مرتبه $n$ و داشته باشیم :

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} f'(x) = \dots = \lim_{|x|\to\infty} f^{(n)}(x) = 0$$

داریم :

$$6.\ F\left(f^{(n)}(x)\right) = (iw)^{n} F(w)$$

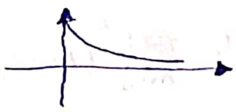
پیچش دو تابع :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(t-u)\, du = f(t) * g(t)$$

$$7.\ F\left((f*g)(t)\right) = F(w) \cdot G(w) \qquad 8.\ F\left(f(t) \cdot g(t)\right) = \frac{1}{2\pi} F(w) * G(w)$$

---

تبدیلات فوریه کسینوسی و سینوسی نامتناهی : * این تبدیلات خطی هستند!

اگر $0 < t < \infty$  تابع را به شکل زوج یا فرد گسترش داده و به تبع آن تبدیل کسینوسی یا سینوسی برای آن می‌نویسیم :

ـ تبدیل فوریه یک فرمول هست که به کمک اون میشه مسائل رو طرح یا حل کرد. حالا اینجا بسته به فرد یا زوج بودن یک تابع (که خودمون گسترش دادیم) شکل سینوسی یا کسینوسی این تبدیل رو می‌نویسیم!

$$F_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos wt\, dt \Rightarrow F^{-1}\left(F_c(f)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(f) \cos wt\, dw = f(t)$$

$$F_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin wt\, dt \Rightarrow F^{-1}\left(F_s(f)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(f) \sin wt\, dw = f(t)$$

فرمول تبدیل مشتق :

$$F_s(f') = -w F_c(f) \quad , \quad F_c(f') = w F_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$$

$$F_s(f'') = -w^2 F_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, w f(0) \qquad \boxed{F_c(f'') = -w^2 F_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)}$$

---

تابع دلتای دیراک :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightarrow \delta(t) = \lim \frac{1}{2a}\left[H(t+a) - H(t-a)\right]$$

$F(\delta(t)) = 1$ ← البته اگر ضریب $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ برای تبدیل فوریه نگیریم!

---

لیستی از چند انتگرال خیلی مهم ++

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = \frac{-1}{a(ax+b)} \qquad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} \qquad \int \frac{x\, dx}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{-a\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\begin{cases} \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b \sin bx + a \cos bx\right) \\ \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a \sin bx - b \cos bx\right) \end{cases}$$

---

رابطه پارسوال ( در انتگرال فوریه و تبدیل فوریه ) :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_{0}^{\infty}\big(A(\omega)C(\omega)+B(\omega)D(\omega)\big)\,d\omega$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^{2}dx = \int_{0}^{\infty}\left(A^{2}(\omega)+B^{2}(\omega)\right)d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^{2}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^{2}d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(\mp x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\pm\omega)$$

---

تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی متناهی :

$$F_c(f) = \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{\pi}{2}a_n$$

$$F_s(f) = \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{\pi}{2}b_n$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}F_c(0) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_c(n)\cos nx$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_s(n)\sin nx$$

$$F_c(f') = (-1)^n f(\pi) - f(0) + n F_s(f)$$

$$F_s(f') = -n F_c(f)$$

۶ حل معادلات با تبدیل فوریه $\begin{cases} 0<x<\infty \\ 0<x<\infty \end{cases}$ ، ،

$u(x,t)$ فرد باشد ← فوریه سینوسی $F_s(f'')=-w^2F_s(f)+w\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$

$u_x(x,t)$ ← فوریه کسینوسی $F_c(f'')=-w^2F_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$

---

۴ روش دالامبر برای معادله موج $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$, $u(x,0)=f(x)$ ← $\begin{cases} z=x+ct \\ v=x-ct \end{cases}$ تغییر متغیر ← $u_{zv}=0$ ← $u(x,t)=f_1(x+ct)+g(x-ct)$

۵

↓ شرایط اولیه مرزی

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]$$

مرز سری فوریه سینوسی داریم!

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[\sin(x+ct)\frac{n\pi}{L}+\sin(x-ct)\frac{n\pi}{L}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\frac{n\pi}{L}t\times\sin\frac{n\pi}{L}x$$

---

۷ معادله گرما: $u_t-c^2u_{xx}=0$ یا $(u_t-c^2(u_{xx}+u_{yy})=0)$

$\begin{cases} u(0,t)=P(t) \\ u(L,t)=q(t) \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$

چون مرزی‌ها صفر نیستند ←

$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

$w=Ax+B$ → $A, B$ را می‌یابیم → تابع‌ها $v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$

تابعداری ← ضریب فوریه ← حل دیفرانسیل ← خصوصی / عمومی

ضریب‌ها انتگرالی ← بزرگ ← تقسیم راست بر چپ

---

۸ معادله گرما برای میله با طول نامتناهی: $u_t-c^2u_{xx}=0$, $u(x,0)=f(x)$

تبدیل ∫ به Σ

فقط ضرب ←

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}e^{-w^2t}\left[A^*\cos\frac{w}{c}x+B^*\sin\frac{w}{c}x\right]$$

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^{\infty}\left(A^*\cos\frac{w}{c}x+B^*\sin\frac{w}{c}x\right)dw \rightarrow \begin{cases} A^*=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\frac{w}{c}x\,dx \\ B^*=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\frac{w}{c}x\,dx \end{cases}$$

---

معادله پواسون $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$

$u(0,y)=y$, $u(\pi,y)=\cos y$, $0<x<\pi$

$u(x,0)=x$, $u(x,\pi)=2$, $0<y<\pi$

تا از شرایط دو مرز صفر و دو مرز غیر صفر باشد ← در نظر می‌گیریم ←

$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$

$\rightarrow w=Ax+B \xrightarrow[v(\pi,y)=0]{v(0,y)=0} v_{xx}+v_{yy}=x+\frac{y+x\cos y}{\pi}$ , $v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(y)\sin nx$

$\rightarrow G_n(y)=G_h+G_{P_1}+G_{P_2}$

@elmos_jozveh

(۶) @elmos-jozveh

«معادلات با مشتقات جزئی»

① حل معادلات PDE با لاپلاس ←

$L(u(x,t)) = U(x,s)$

$L(u_x) = U_x \quad L(u_{xx}) = U_{xx}$

نکته: $L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{\delta^n}{\delta s^n}(L(f(t)))$

$L(y') = sL(y) - y(0) \quad L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$

$L(u_t) = sU - u(x,0) \quad L(u_{tt}) = s^2 U - sU(x,0) - u_t(x,0)$

$L(xu_t) = xL(u_t) = x(sU - u(x,0)) \quad L(tu_t) = -\frac{\delta}{\delta s} L(u_t) = -\frac{\delta}{\delta s}(sU - u(x,0))$

$L(t^2 u_x) = \frac{\delta^2}{\delta s^2} U_x \quad L(t^2 u_t) = \frac{\delta^2}{\delta s^2}(sU - u(x,0))$

تبدیل معکوس لاپلاس های مهم:

$L(a) = \frac{a}{s}, \quad L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

$L(\sin(at)) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad , \quad L(\cos(at)) = \frac{s}{s^2+a^2}$

$L(\sinh(at)) = \frac{a}{s^2-a^2} \quad , \quad L(\cosh(at)) = \frac{s}{s^2-a^2}$

---

② حل معادلات به فرم

$au_x + bu_y + cu = 0 \rightarrow$

اگر $a \neq 0$: $u = e^{-\frac{c}{a}x} f(ay - bx)$

اگر $b \neq 0$: $u = e^{-\frac{c}{b}x} f(ay - bx)$

---

③ حل معادلات به فرم

$A(x,y,z)\frac{\delta z}{\delta x} + B(x,y,z)\frac{\delta z}{\delta y} = R(x,y,z) \rightarrow \frac{dx}{A(x,y,z)} = \frac{dy}{B(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$

$c_1 = u(x,y,z)$

$c_2 = v(x,y,z)$

→ جواب عمومی: یکی از این حالات

$\begin{cases} u = h(v) \\ v = h(u) \\ h(v,u) = 0 \end{cases}$

---

④ معادله

$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \rightarrow A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0$

$\Delta = B^2 - 4AC \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

$B^2 - 4AC > 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = y - \lambda_1 x \\ \beta = y - \lambda_2 x \end{cases}$

$B^2 - 4AC = 0 \rightarrow \alpha = y - \lambda x \;,\; \beta = x$ یا $\beta = y$

$B^2 - 4AC < 0 \rightarrow \boxed{\alpha = y - \alpha_1 x \;,\; \beta = y + \alpha_1 x}$

Scanned by CamScanner