



دانشگاه اردکان

دانشکده فنی و مهندسی

مجموعه تمرین‌های درس معادلات دیفرانسیل

تهیه و تنظیم

کبری اسمعیلی

مسائل معادلات دیفرانسیل (بخش اول)

مسیرهای قائم بر دسته منحنی های زیر را بیابید.

$$y = ce^{-2x} \quad (1)$$

$$y = \ln(x^2 + c) \quad (2)$$

$$y = c \sin x \quad (3)$$

$$y = \frac{c}{x^2} \quad (4)$$

$$x^2 - c^2 y^2 = 16 \quad (5)$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$y' \sin x = y \ln y, \quad y(\pi/2) = e \quad (6)$$

$$y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0 \quad (7)$$

$$\left(\sin y - y \sin x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y + \cos x - \frac{1}{y}\right) dy = 0 \quad (8)$$

$$y' \ln \frac{x+y}{x+2} = \frac{x+y}{x+2} - \ln \frac{x+y}{x+2} \quad (9)$$

$$(x - y \ln y + y \ln x) dx + x(\ln y - \ln x) dy = 0 \quad (10)$$

$$y' - \tan \frac{y-2x}{x+1} = \frac{y+2}{x+1} \quad (11)$$

$$y' - \tan y = \frac{e^x}{\cos y} \quad (12)$$

مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$x^2 y' = 1 + y, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = 0 \quad (13)$$

$$x \sin\left(\frac{y}{x}\right) y' = y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x \cos\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(1) = 0 \quad (14)$$

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad y(e) = 0 \quad (15)$$

$$ye^{-x^2} dx + \left[\int_0^x e^{-t^2} dt + y \right] dy = 0, \quad y(1) = 1 \quad (16)$$

$$\left(2x^2 y^2 - \frac{1}{xy} \right) dx + \left(2x^2 y + \frac{\ln x}{y^2} - \frac{1}{y} \right) dy = 0, \quad y(1) = -1 \quad (17)$$

$$2x \sec ye^{\sin y} dx + (x^2 e^{\sin y} - \tan y) dy = 0, \quad y(0) = 0 \quad (18)$$

$$(x^4 \ln x - 2xy^3) dx + 3x^2 y^2 dy = 0 \quad y(2) = 1 \quad (19)$$

$$(y + \ln x) dx - x dy = 0 \quad y(1) = 1 \quad (20)$$

اگر عامل انتگرال‌ساز معادلات زیر به فرم $x^\alpha y^\beta$ باشد، α و β را بیابید و معادله را حل کنید.

$$(2y^2 - 3xy) dx + (x^2 + xy^2) dy = 0 \quad (21)$$

$$y(2x^2 + y^3) dx - x(2x^2 - y^3) dy = 0 \quad (22)$$

(23) منحنی‌های عمود بر کلیه دایره‌گذرنده از نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ را بیابید.

(24) منحنی‌های عمود بر همه خطوط که ضریب زاویه آنها برابر عرض از مبدا آنهاست، را تعیین کنید.

(25) منحنی‌های عمود بر کلیه دایره‌گذرنده از مبدا که مرکزشان بر محور X واقع است را بیابید.

مسائل معادلات دیفرانسیل (بخش دوم)

معادلات زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{1}{x(1 + xe^y)} \quad (23)$$

$$2 \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + x^2 \cos y = 0 \quad (24)$$

$$2y dx + (x - \sqrt{y} \sin y) dy = 0 \quad (25)$$

$$2y' \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y} \quad (26)$$

$$2y' \sin x + y \cos x = y^2 \sin^2 x \quad (27)$$

$$y' = y + y^2 e^{-x} \quad (28)$$

$$\tan(x + y) dx = x dx + x dy \quad (29)$$

$$y' = \frac{y - 1}{x + 1} + 1 \quad (30)$$

$$(1 + y^2) dx = (\arctan y - x) dy \quad (31)$$

مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y' + 4(\tan 2x)y = \tan 2x, \quad y(\pi/8) = 2 \quad (32)$$

$$xy' + y = 2x^2 y' \ln y, \quad y(1) = e \quad (33)$$

$$y' + y \cot x = 5e^{\cos x}, \quad x > 0, y(\pi/2) = -4 \quad (34)$$

$$x(\ln x)y' = x \ln x - y, \quad y(e) = 1 \quad (35)$$

در صورتیکه y_1 یک جواب خصوصی معادله داده شده باشد، جواب عمومی آن را بدست آورید.

$$y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}, \quad y_1 = e^x \quad (36)$$

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2, \quad y_1 = \frac{1}{x} \quad (37)$$

مسائل معادلات دیفرانسیل (بخش سوم)

با استفاده از روش ضرایب نامعین فرم کلی جواب معادلات زیر را بیابید (انجام محاسبات جهت بدست آوردن ضرایب لزومی ندارد).

$$y'' + 9y = x \cos 3x + (1 + e^x) \sin 3x \quad (38)$$

$$y^{(4)} - 4y'' = e^x \sin 2x + xe^{-x} + 2 \quad (39)$$

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x} + xe^x \cos 3x \quad (40)$$

$$y'' + y' + 4y = x^2 + (2x + 3)(1 + \cos x) \quad (41)$$

$$y'' - y' = x \sinh x + \cos 2x - 5 \quad (42)$$

$$y''' - 2y'' + y' = x^2 + 2e^x + \cos x \sin 2x \sin x \quad (43)$$

$$y^{(4)} + 8y'' + 16 = \cos^4 x \quad (44)$$

$$y'' + 2y' + 5y = \sinh x \cos 2x + \cosh x \sin 2x \quad (45)$$

معادلات ناهمگن زیر را حل کنید.

$$y'' - 9y' + 18y = e^{-2x} \quad (46)$$

$$y'' + 10y' - 12y = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{e^{2x}} \quad (47)$$

$$y'' + y = \csc x \quad (48)$$

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x} \quad (49)$$

$$y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = \sin x \quad (50)$$

$$x^2 + xy^{(4)} = y^{(3)} + 1 \quad (51)$$

$$y'' + 4y = \sin 2x + \sin x \quad (52)$$

۱۶) یک جواب خصوصی معادله $2x^4 = 2xy' + x^2y'' + x^3y'''$ را بیابید وقتی بدانیم $\frac{1}{x}$ و x^2 و x سه جواب مستقل خطی معادله همگن متناظرند.

(۱۷) نشان دهید $y = x$ یک جواب معادله $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ است. جواب مستقل خطی دوم را بیابید.

(۱۸) اگر $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ جواب معادله $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ باشد، جواب عمومی آن را بیابید.

(۱۹) اگر $y = \sin x^2$ جوابی برای معادله $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$ باشد، پایه جوابی برای این معادله بیابید.

مسائل معادلات دیفرانسیل (بخش چهارم)

پنج جمله اول سری جواب معادلات زیر را مشخص نموده و شعاع همگرایی جواب را نیز تعیین کنید.

$$(2 + x^2)y'' + y' + y = 0 \quad (53)$$

$$x^2 y'' + 3xy' + (1 + 4x^2)y = 0 \quad (54)$$

$$2x^2 y'' + x(2x - 1)y' + y = 0 \quad (55)$$

$$x(x - 1)y'' + (3x - 1)y' + y = 0 \quad (56)$$

مسائل مقدار اولیه زیر را با استفاده از روش لایب نیتز - مک لورن حل کنید. (نوشتن پنج جمله اول سری جواب کافیت)

$$y'' + y \ln x = 0 \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1 \quad (57)$$

$$(x^2 + 1)y'' + y = 0 \quad y(1) = y'(1) = 2 \quad (58)$$

$$y'' + y \cos x = 0 \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1 \quad (59)$$

$$y'' + y' + y \ln(x + 2) = 0 \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 0 \quad (60)$$

شعاع همگرایی سری های زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{\ln n} \quad (61)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}} \quad (62)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n+1)} x^{2n} \quad (63)$$

سری مک لورن توابع زیر را بیابید و شعاع همگرایی آنها را تعیین کنید.

$$\ln \frac{1}{1-x^2} \quad (64)$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \quad (65)$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (66)$$

نقاط تکین منظم و نامنظم معادلات زیر را بیابید.

$$(x \sin x)y'' + 3y' + xy = 0 \quad (67)$$

$$x^2(x-1)y'' + y' \sin x + xy = 0 \quad (68)$$

مسائل معادلات دیفرانسیل (بخش پنجم)

تبدیل لاپلاس توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ [t^2] & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad f(t + \sqrt{2}) = f(t) \quad (69)$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t < \pi/2 \\ \sin t + \cos t & t \geq \pi/2 \end{cases} \quad (70)$$

$$f(t) = \int_0^t \frac{\cos(t-x)}{x} \sinh x dx \quad (71)$$

$$f(t) = e^{\sqrt{t}} \int_0^t \cos^{\sqrt{t}} t dt \quad (72)$$

$$f(t) = \sqrt{t} e^t \int_0^t e^{-t} \cos^{\sqrt{t}} t dt \quad (73)$$

$$f(t) = t \int_0^t \frac{e^{\sqrt{t}} \sinh t}{\sqrt{t}} dt \quad (74)$$

$$f(t) = \frac{\int_0^t \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}}{e^{\sqrt{t}}} \quad (75)$$

$$f(t) = e^{-t} \int_1^t t e^{\sqrt{t}} \sin^{\sqrt{t}} \sqrt{t} dt \quad (76)$$

$$f(t) = [t], \quad t \geq 0 \quad (77)$$

لاپلاس وارون توابع زیر را بیابید.

$$\frac{e^{-4s}}{s^2 - s - 2} \quad (78)$$

$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 4s} \quad (79)$$

$$\frac{1}{s} \tanh \frac{s}{2} \quad (80)$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \tanh s \quad (81)$$

$$\frac{1}{s^2 + 1} \tanh s \quad (82)$$

$$\frac{1}{s^2} \tanh \frac{s}{2} \quad (83)$$

$$\frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})} \quad (84)$$

$$\frac{1}{s^2} \arctan \frac{s}{w} \quad (85)$$

$$\frac{1}{s^2} \arctan s \quad (86)$$

$$s \arctan \frac{1}{s} - 1 \quad (87)$$

$$\frac{s^2 + 2s}{(s^2 + 2s + 2)^2} \quad (88)$$

$$\frac{3s^2 - 8s + 3}{s^2 - 4s^2 + 3s} \quad (89)$$

$$\frac{1}{2^s(s-1)} \quad (90)$$

معادلات زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'' + y = g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad (91)$$

$$g(t+2) = g(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$e^t y(t) = t + \int_0^t e^\lambda y'(\lambda) \cos(t - \lambda) d\lambda, \quad y(0) = 0 \quad (92)$$

$$y'(t) + \Im y(t) + \Re \int_0^t y(x) dx = t, \quad y(0) = 1 \quad (93)$$

$$y'' + y = \frac{1}{\cosh t}, \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad (94)$$

$$y'' - y = \frac{1}{\cosh t}, \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad (95)$$

$$ty'' + \Re y + (\Re - t)y = \Re e^t, \quad y(1) = \sinh 1 \quad (96)$$

مقدار انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$\int_0^\infty \int_0^t \cos \lambda e^{-\delta \lambda + \epsilon t} d\lambda dt \quad (97)$$

$$\int_0^\infty \int_0^t \frac{t}{\lambda} e^{\epsilon(t-\lambda)} \sin \Re \lambda d\lambda dt \quad (98)$$

موفق باشید.