حل معادلات ديفرانسيل جزيي از نوع بيضوي

Elliptic Partial Differential Equations

- ❑ مقدمه

Laplace's Equation

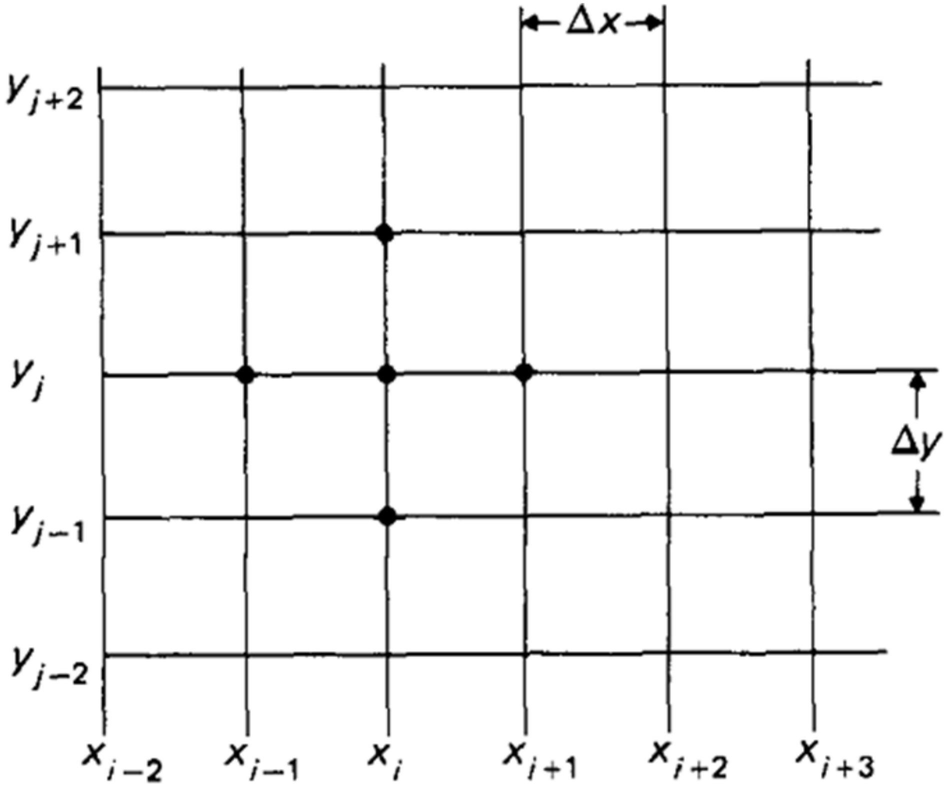
معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

- شرط مرزی دیریشله: مقدار تابع در مرز مشخص است.
- شرط مرزی نیومن: مشتق تابع در مرز مشخص است.

شبکه یکنواخت



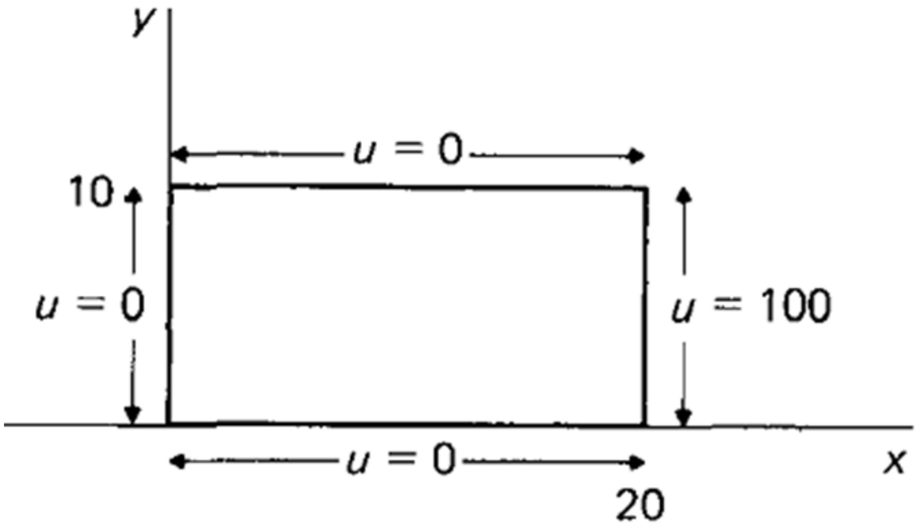
$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}] = 0$$

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2}\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u_{i,j} = 0.$$

حل معادله لاپلاس- مثال

- مثال

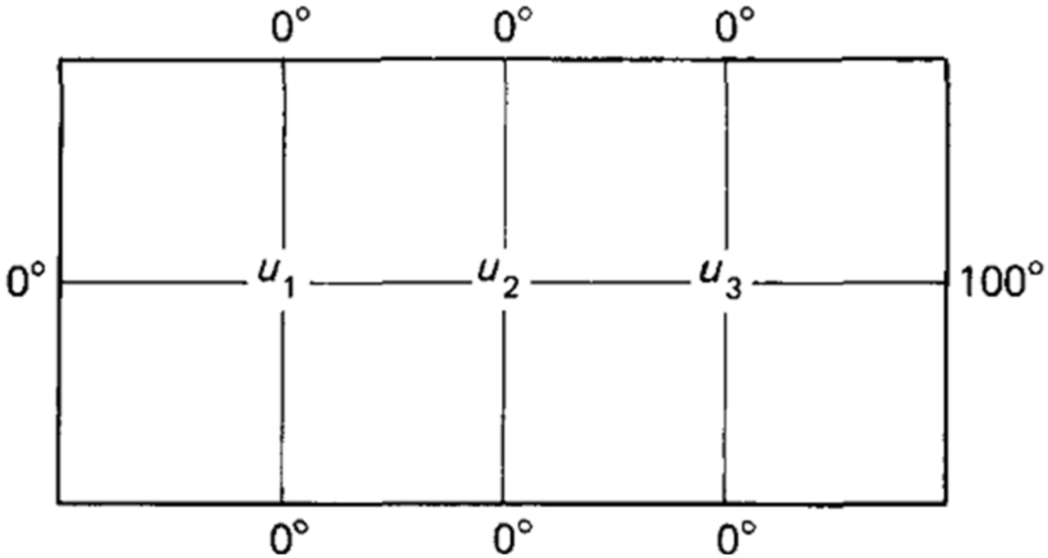
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$



$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u(x, 10) &= 0, \\ u(0, y) &= 0, \\ u(20, y) &= 100 \end{aligned}$$

حل معادله لاپلاس- مثال

- مثال- ابعاد شبکه h=5 cm



$$\frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij}] = 0,$$

$$\frac{1}{5^2}(0 + 0 + u_2 + 0 - 4u_1) = 0,$$

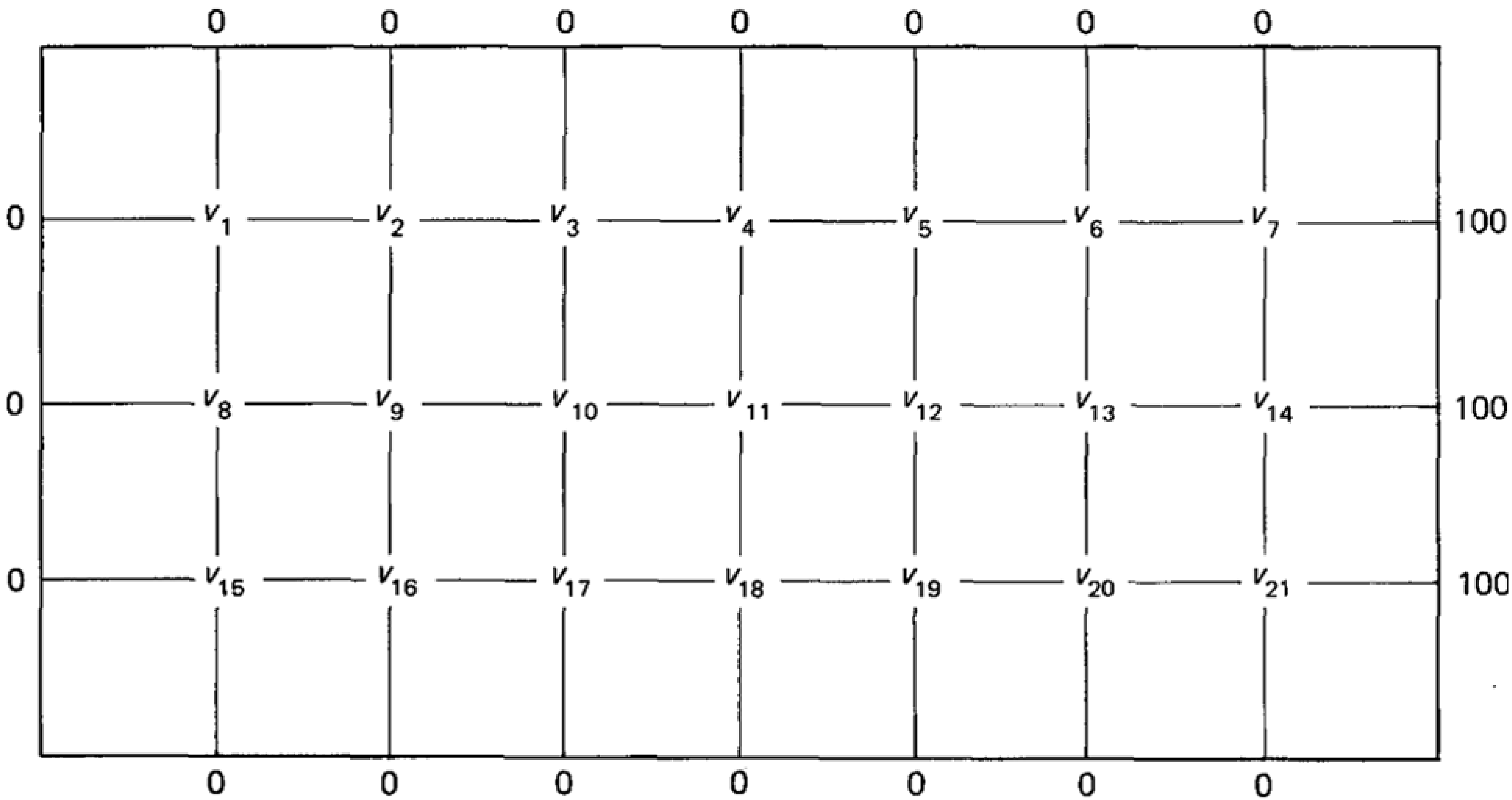
$$\frac{1}{5^2}(u_1 + 0 + u_3 + 0 - 4u_2) = 0,$$

$$\frac{1}{5^2}(u_2 + 0 + 100 + 0 - 4u_3) = 0.$$

$$\boxed{u_1 = 1.786, \qquad u_2 = 7.143, \qquad u_3 = 26.786.}$$

حل معادله لاپلاس- مثال

- ❑ مثال- ابعاد شبکه h=2.5 cm



حل معادله لاپلاس- مثال

- مثال- ابعاد شبکه h=2.5 cm

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 0.3530, & v_8 &= 0.4988, & v_{15} &= 0.3530,\\
v_2 &= 0.9132, & v_9 &= 1.2894, & v_{16} &= 0.9132,\\
v_3 &= 2.0103, & v_{10} &= 2.8323, & v_{17} &= 2.0103,\\
v_4 &= 4.2957, & v_{11} &= 6.0193, & v_{18} &= 4.2957,\\
v_5 &= 9.1531, & v_{12} &= 12.6537, & v_{19} &= 9.1531,\\
v_6 &= 19.6631, & v_{13} &= 26.2893, & v_{20} &= 19.6631,\\
v_7 &= 43.2101, & v_{14} &= 53.1774, & v_{21} &= 43.2101.
\end{aligned}
$$

حل معادله لاپلاس- مثال

- مثال- مقایسه نتایج

	With $h = 5$ cm		With $h = 2.5$ cm		Analytical value
	Value	Error	Value	Error	
u_1	1.786	−0.692	1.289	−0.195	1.0943
u_2	7.143	−1.655	6.019	−0.531	5.4885
u_3	26.786	−0.692	26.289	−0.195	26.0944

حل دستگاه معادلات- روش تکرار

- معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \right\} u_{ij} = 0,$$

$$\frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij}] = 0,$$

$$\left\{ \begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \right\} u_{ij} = 0 \rightarrow u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}$$

حل دستگاه معادلات - روش تکرار

- حل مثال قبل: روش گوس–سایدل

$$
\begin{aligned}
-4u_1 + \quad u_2 \qquad\quad &= 0,\\
u_1 - 4u_2 + \quad u_2 &= 0,\\
u_2 - 4u_3 &= -100.
\end{aligned}
$$

$$u_1 = \frac{u_2}{4},$$

$$u_2 = \frac{u_1 + u_3}{4},$$

$$u_3 = \frac{u_2 + 100}{4}.$$

u_1	u_2	u_3
	Initial values	
2	7.5	30
1.875	7.969	26.992
1.992	7.246	26.812
1.812	7.156	26.789
1.789	7.144	26.786
1.786	7.143	26.786
1.786	7.143	26.786

Piosson’s Equation معادله پوآسون

-

$$\nabla^2\phi + 2 = 0, \qquad \phi = 0 \text{ on boundary.}$$

- پیچش در یک میله

$$\frac{1}{h^2}\left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\}\phi_{i,j} + 2 = 0,$$

$$\phi_{ij} = \tfrac{1}{4}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + 2).$$

حل معادلات ديفرانسيل جزيي سهموي
Parabolic Partial Differential Equations

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

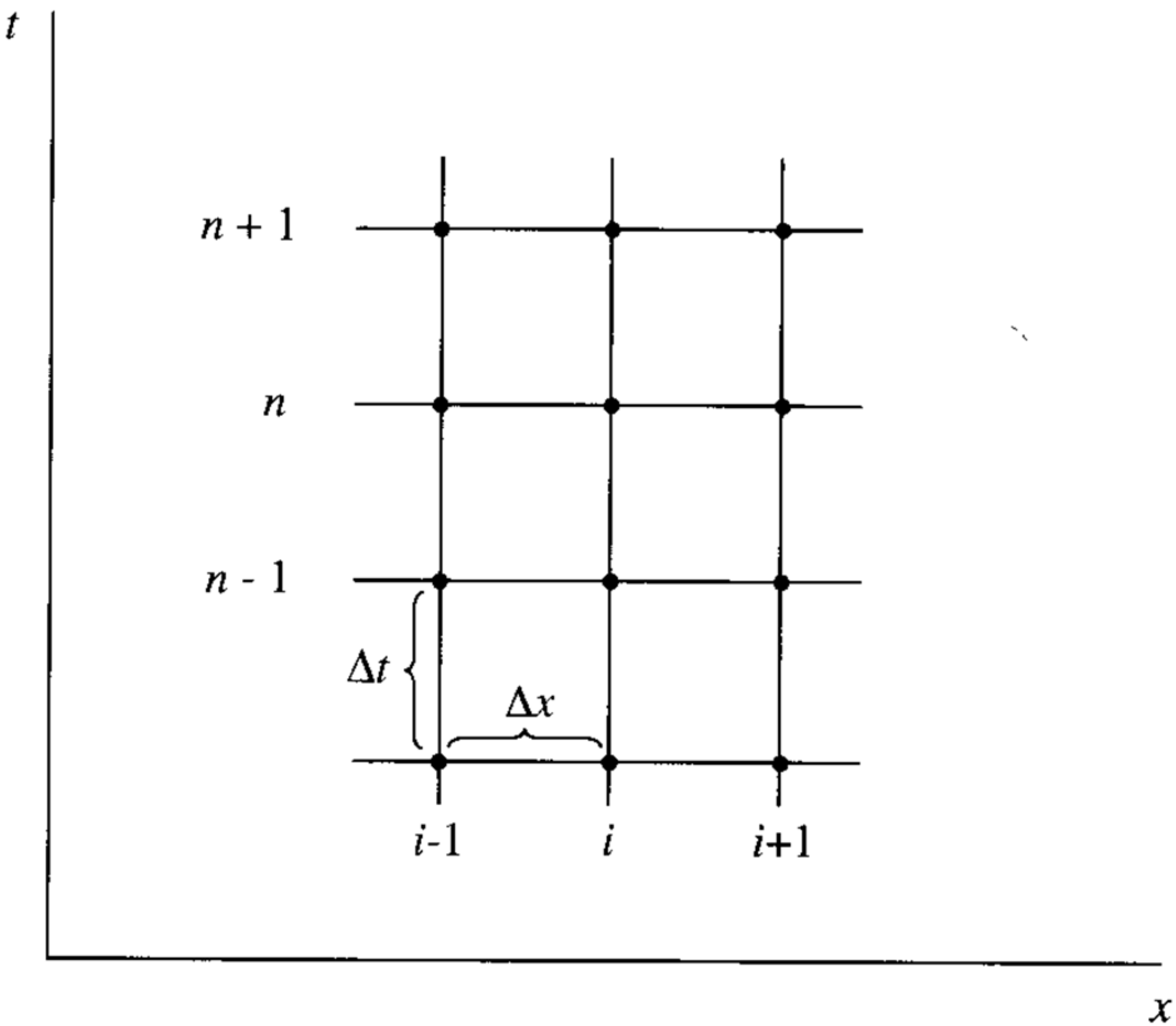
معادلهٔ توزیع دمای یک بعدی برای یک سیال ساکن یا جسم جامد

$$\overbrace{\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}^{\text{Partial differential equation}} = 0 = \underbrace{\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - \frac{\alpha (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2}}_{\text{Difference equation}}$$

$$+ \underbrace{\left[-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right)_i^n \frac{\Delta t}{2} + \alpha \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right)_i^n \frac{(\Delta x)^2}{12} + \cdots \right]}_{\text{Truncation error}}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2}$$

معادله توزیع دما- شبکه مورد استفاده

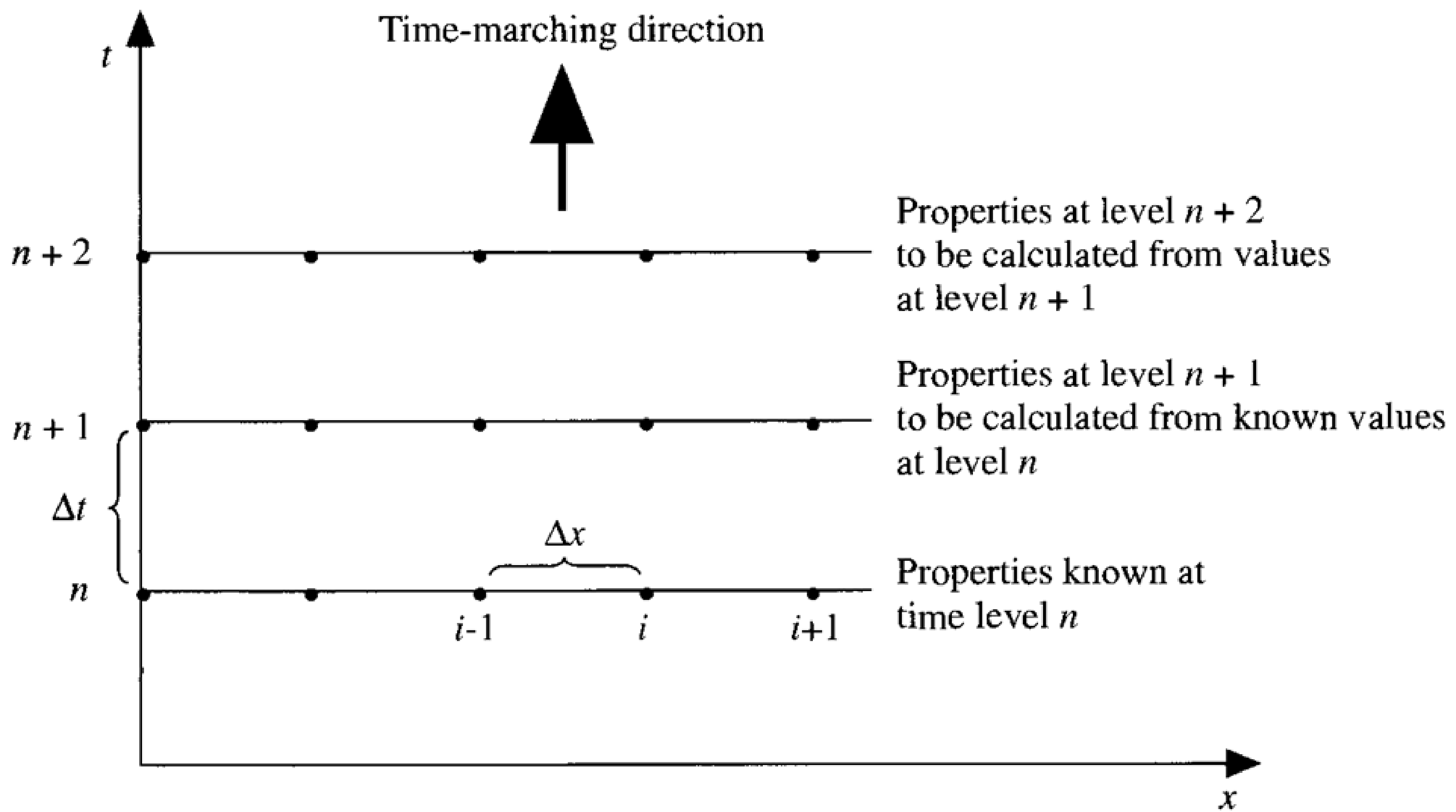


Explicit Method

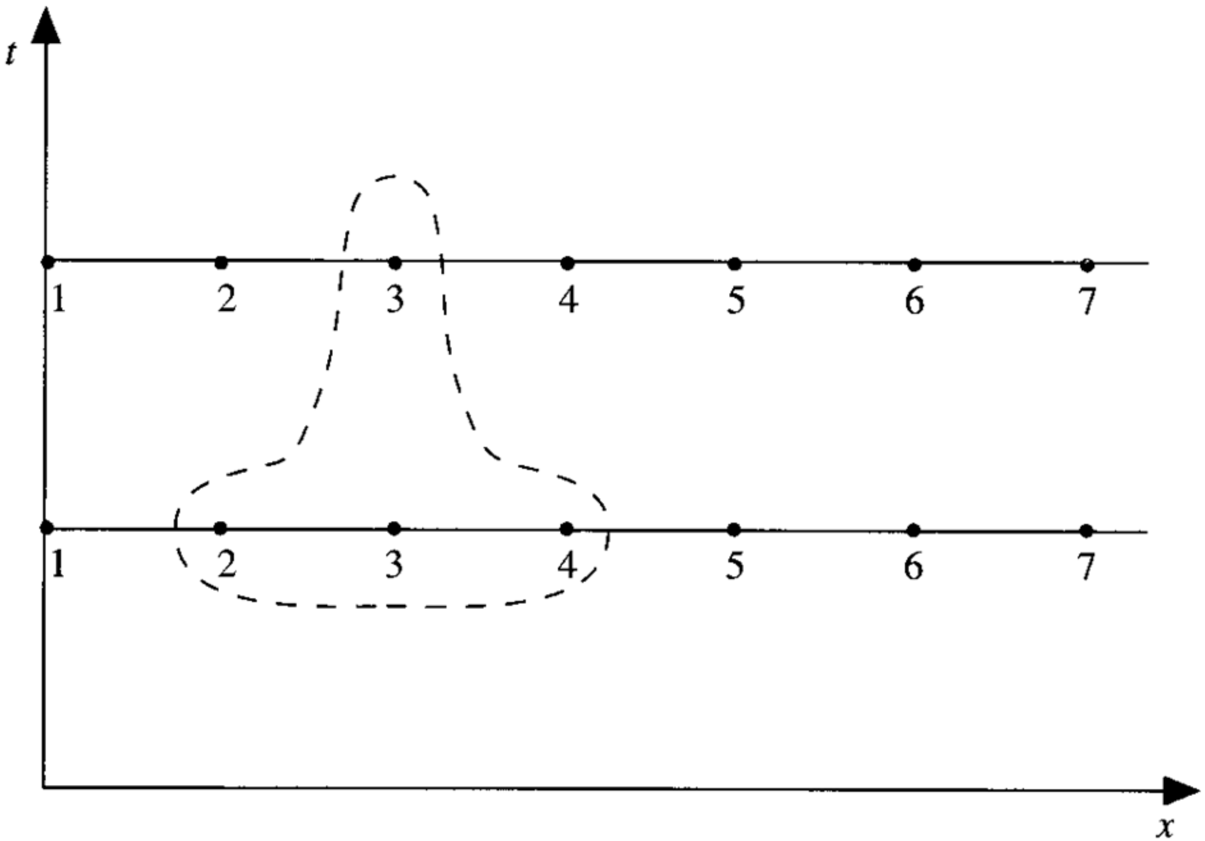
روش صریح

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right)$$

- ❑ محاسبه دما در لحظه جدید بر حسب مقادیر آن در لحظه قبل
- ❑ در معادله منفصل شده فقط یک مجهول وجود دارد.



روش صريح براي حل معادله توزيع دما



$$T_3^{n+1} = T_3^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(T_4^n - 2T_3^n + T_2^n\right)$$

Stability Condition شرط پايداري در روش صريح

- خطاها با ادامه حل (انجام محاسبات) میرا گردد.

$$\left|\frac{\epsilon_i^{n+1}}{\epsilon_i^n}\right| \leq 1$$

- یک بعدی

$$\frac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

- دو بعدی

$$\frac{\alpha\Delta t}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]} \leq \frac{1}{8}$$

Implicit Method
روش ضمني

- مجهول‌ها از حل همزمان معادلات اختلاف که برای تمامی نقاط شبکه در یک زمان معین نوشته می‌شود، به دست می‌آیند (حل دستگاه).
- روش نیمه ضمنی کرنک- نیکسون Crank-Nicloson

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{\frac{1}{2}(T_{i+1}^{n+1}+T_{i+1}^{n})+\frac{1}{2}(-2T_i^{n+1}-2T_i^n)+\frac{1}{2}(T_{i-1}^{n+1}+T_{i-1}^{n})}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\alpha\,\Delta t}{2(\Delta x)^2}T_{i-1}^{n+1}-\left[1+\frac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2}\right]T_i^{n+1}+\frac{\alpha\,\Delta t}{2(\Delta x)^2}T_{i+1}^{n+1}$$

$$=-T_i^n-\frac{\alpha\,\Delta t}{2(\Delta t)^2}(T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n)$$

روش نيمه ضمني كرنک- نيكلسون

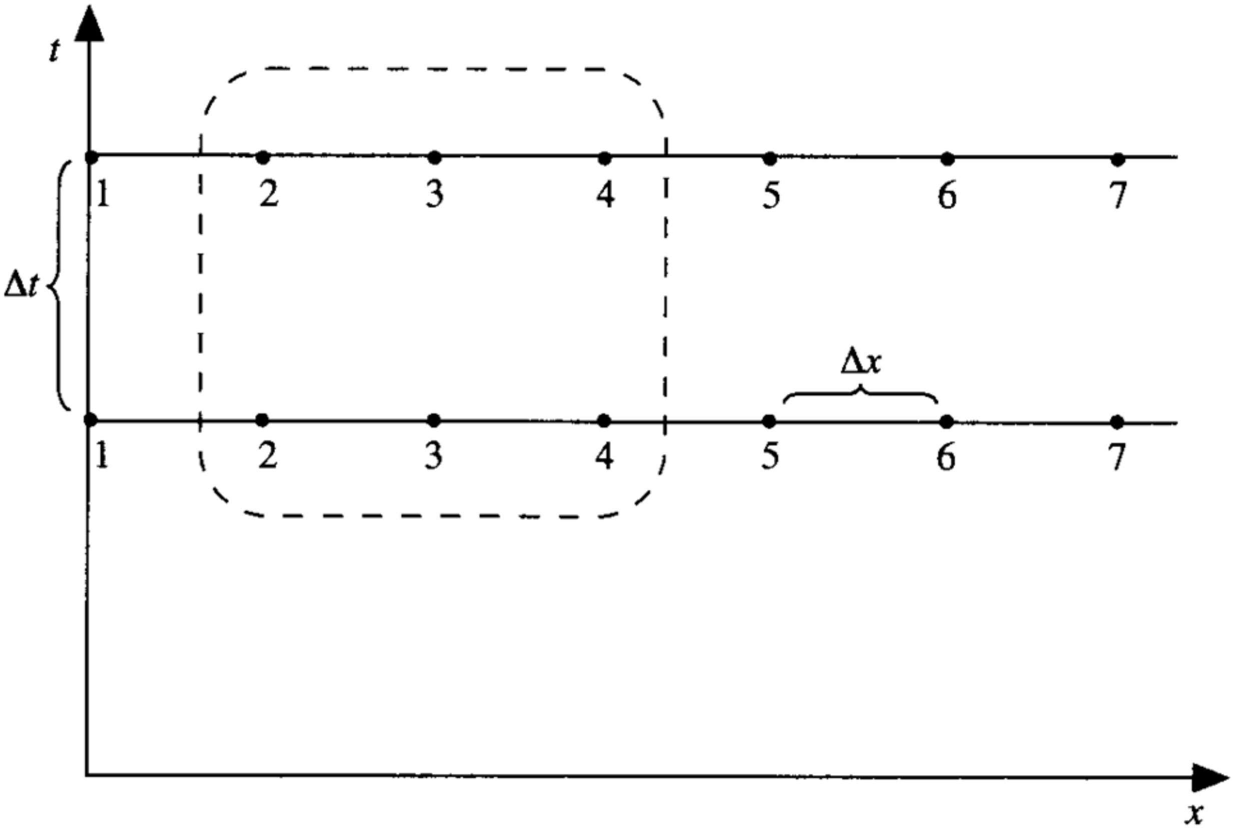
$$A = \frac{\alpha\,\Delta t}{2(\Delta x)^2}$$

$$B = 1 + \frac{\alpha\,\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$K_i = -T_i^n - \frac{\alpha\,\Delta t}{2(\Delta x)^2}\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right)$$

$$AT_{i-1}^{n+1} - BT_i^{n+1} + AT_{i+1}^{n+1} = K_i$$

نقاط درگیر در روش کرنک- نیکلسون



روش کرنک- نیکلسون

معادلهٔ منفصل شده

$$AT_{i-1}^{n+1} - BT_i^{n+1} + AT_{i+1}^{n+1} = K_i$$

At grid point 2 : $AT_1 - BT_2 + AT_3 = K_2$

At grid point 3 : $AT_2 - BT_3 + AT_4 = K_3$

At grid point 4 : $AT_3 - BT_4 + AT_5 = K_4$

At grid point 5 : $AT_4 - BT_5 + AT_6 = K_5$

At grid point 6 : $AT_5 - BT_6 + AT_7 = K_6$

نمایش دستگاه به دست آمده

ماتریس سه قطری

$$\begin{bmatrix} -B & A & 0 & 0 & 0 \\ A & -B & A & 0 & 0 \\ 0 & A & -B & A & 0 \\ 0 & 0 & A & -B & A \\ 0 & 0 & 0 & A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K'_6 \end{bmatrix}$$

مقايسه روش صريح و ضمني

- صریح: معادلات و برنامه نویسی آن ساده‌تر است.
- صریح: مشکلات پایداری دارد.
- صریح: زمان حل ممکن است طولانی‌تر شود.
- ضمنی: معادلات و برنامه‌نویسی آن پیچیده‌تر است.
- ضمنی: مشکلات پایداری آن کمتر و یا به طور کامل پایدار هستند.
- ضمنی: بسته به نوع مسأله زمان حل آن ممکن است کوتاه‌تر یا طولانی‌تر شود.