Finite Volume Method (FVM) روش حجم محدود

- مقدمه

- در این روش از معادلات روی حجمهای کنترل انتگرال گیری می شود و مرتبه معادلات یک واحد کاهش می یابد.

- کاربرد بیشتری نسبت به روش تفاضل محدود دارد به طور خاص در هندسه های پیچیده.

انتگرال‌گيري از معادله انتقال

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S_\phi$$

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

Gauss's divergence theorem $$\int_{CV} \text{div}(\mathbf{a}) dV = \int_{A} \mathbf{n} \,.\, \mathbf{a} dA$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \rho\phi dV\right) + \int_{A} \mathbf{n} \,.\, (\rho\phi\mathbf{u}) dA = \int_{A} \mathbf{n} \,.\, (\Gamma \text{ grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

Diffusion Problems

مسائل نفوذ

- معادله نفوذ

$$\operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \phi) + S_\phi = 0$$

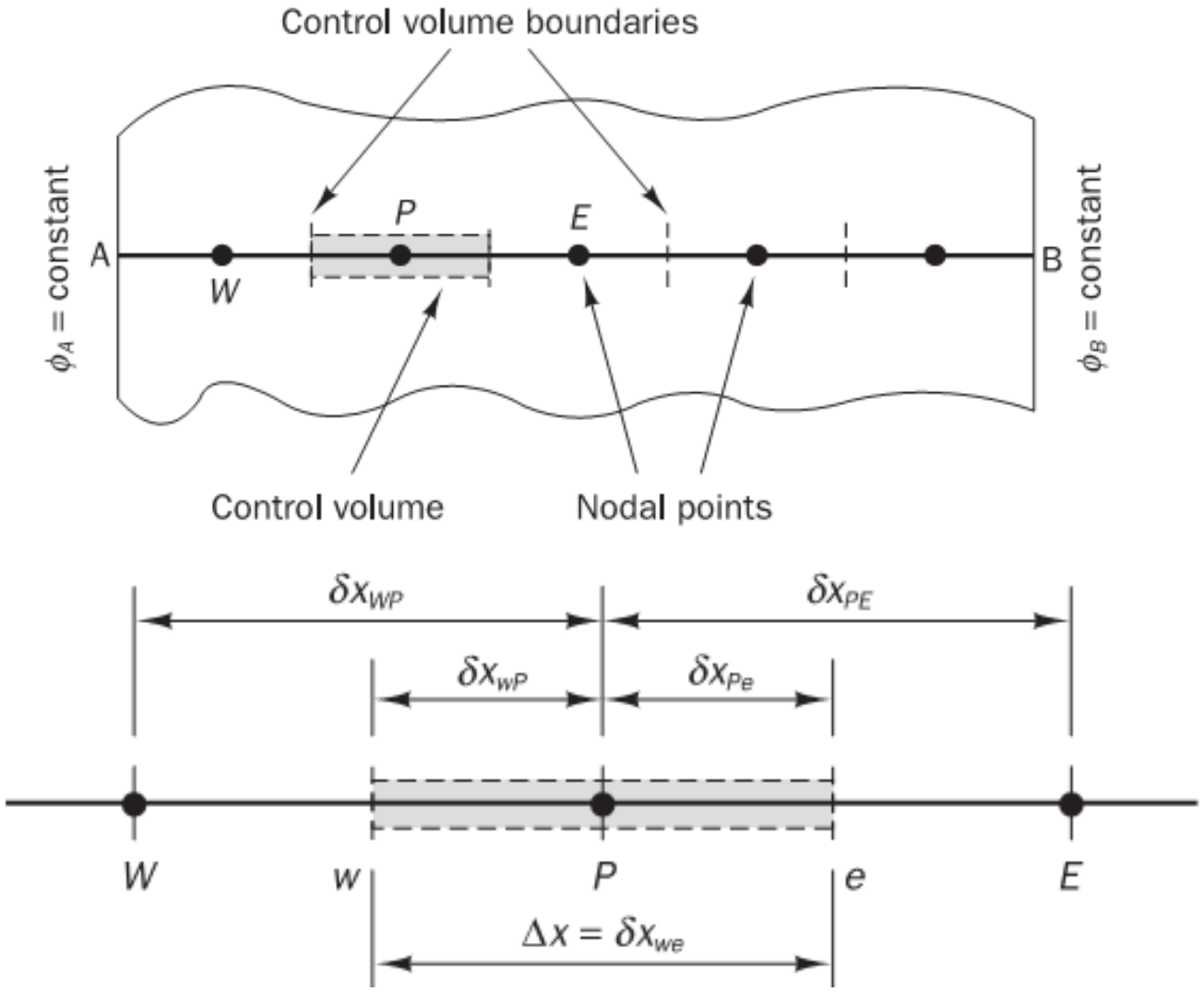
$$\int_{CV} \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV = \int_{A} \mathbf{n} . (\Gamma \operatorname{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV = 0$$

- معادله نفوذ یک بعدی

$$\frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0$$

مسائل نفوذ یک بعدي

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+S=0$$



مسائل نفوذ یک بعدي

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)+S=0$$

$$\int_{\Delta V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}V+\int_{\Delta V}S\mathrm{d}V=\left(\Gamma A\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_e-\left(\Gamma A\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_w+\bar{S}\Delta V=0$$

$$\left(\Gamma A\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_e=\Gamma_e A_e\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_{PE}}\right)$$

$$\Gamma_w=\frac{\Gamma_W+\Gamma_P}{2}$$

$$\bar{S}\Delta V=S_u+S_p\phi_P$$

$$\left(\Gamma A\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_w=\Gamma_w A_w\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_{WP}}\right)$$

$$\Gamma_e=\frac{\Gamma_P+\Gamma_E}{2}$$

$$\Gamma_e A_e\left(\frac{\phi_E-\phi_P}{\delta x_{PE}}\right)-\Gamma_w A_w\left(\frac{\phi_P-\phi_W}{\delta x_{WP}}\right)+(S_u+S_p\phi_P)=0$$

مسائل نفوذ یک بعدي

- معادله منفصل شده

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w-S_p\right)\phi_P=\left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)\phi_W+\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)\phi_E+S_u$$

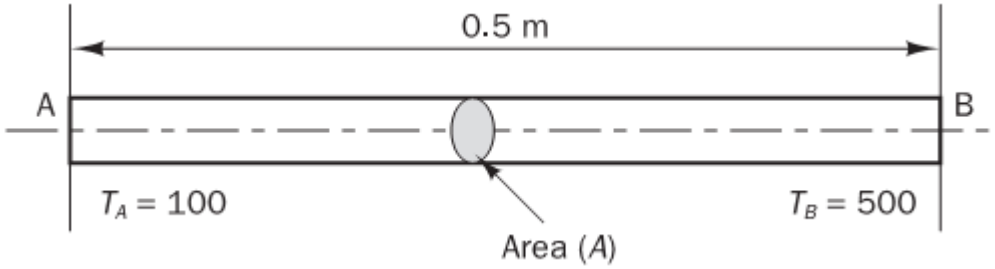
$$a_P\phi_P=a_W\phi_W+a_E\phi_E+S_u$$

a_W	a_E	a_P
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}A_e$	$a_W+a_E-S_P$

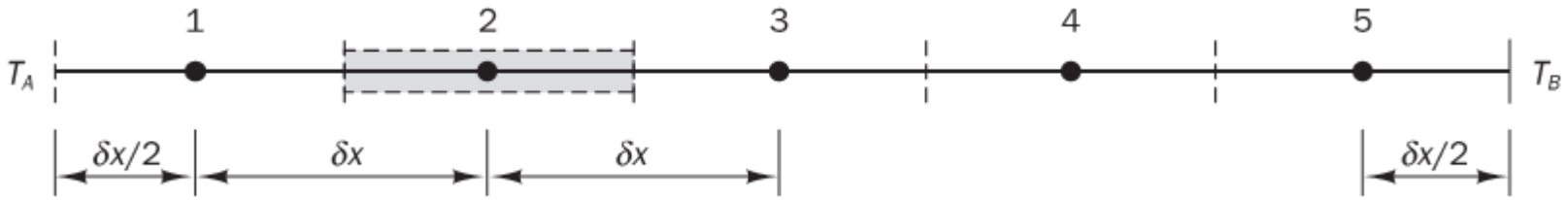
مسائل نفوذ یک بعدي- مثال

در یک میله مطابق شکل شرایط زیر حاکم است. مطلوب است توزیع دما در میله. هیچ‌گونه منبع تولید گرما در میله وجود ندارد.

k equals 1000 W/m.K, cross-sectional area A is 10×10^{-3} m^2.



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$



مسائل نفوذ یک بعدي- مثال

نقاط وسط

$$\left(\frac{k_e}{\delta x_{PE}}A_e+\frac{k_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)T_P=\left(\frac{k_w}{\delta x_{WP}}A_w\right)T_W+\left(\frac{k_e}{\delta x_{PE}}A_e\right)T_E$$

نقطه اول

$$kA\left(\frac{T_E-T_P}{\delta x}\right)-kA\left(\frac{T_P-T_A}{\delta x/2}\right)=0$$

$$\left(\frac{k}{\delta x}A+\frac{2k}{\delta x}A\right)T_P=0\ .\ T_W+\left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_E+\left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_A$$

$$\boxed{a_P T_P=a_W T_W+a_E T_E+S_u}$$

a_W	a_E	a_P	S_P	S_u
0	$\frac{kA}{\delta x}$	$a_W+a_E-S_p$	$-\frac{2kA}{\delta x}$	$\frac{2kA}{\delta x}T_A$

مسائل نفوذ یک بعدي- مثال

نقطه آخر

$$kA\left(\frac{T_B - T_P}{\delta x/2}\right) - kA\left(\frac{T_P - T_W}{\delta x}\right) = 0$$

$$\left(\frac{k}{\delta x}A + \frac{2k}{\delta x}A\right)T_P = \left(\frac{k}{\delta x}A\right)T_W + 0\,.\,T_E + \left(\frac{2k}{\delta x}A\right)T_B$$

a_W	a_E	a_P	S_P	S_u
$\frac{kA}{\delta x}$	0	$a_W + a_E - S_p$	$-\frac{2kA}{\delta x}$	$\frac{2kA}{\delta x}T_B$

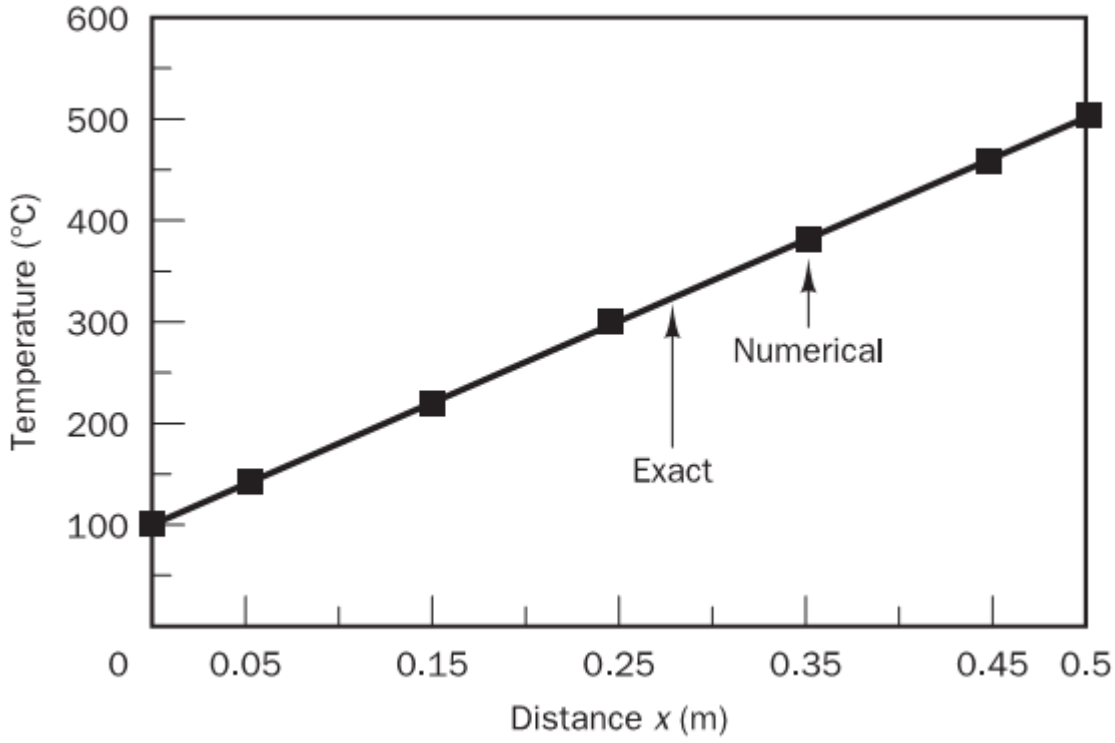
مسائل نفوذ یک بعدي- مثال

$$300T_1 = 100T_2 + 200T_A$$
$$200T_2 = 100T_1 + 100T_3$$
$$200T_3 = 100T_2 + 100T_4$$
$$200T_4 = 100T_3 + 100T_5$$
$$300T_5 = 100T_4 + 200T_B$$

Node	a_W	a_E	S_u	S_P	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	100	$200T_A$	−200	300
2	100	100	0	0	200
3	100	100	0	0	200
4	100	100	0	0	200
5	100	0	$200T_B$	−200	300

مسائل نفوذ یک بعدي- مثال

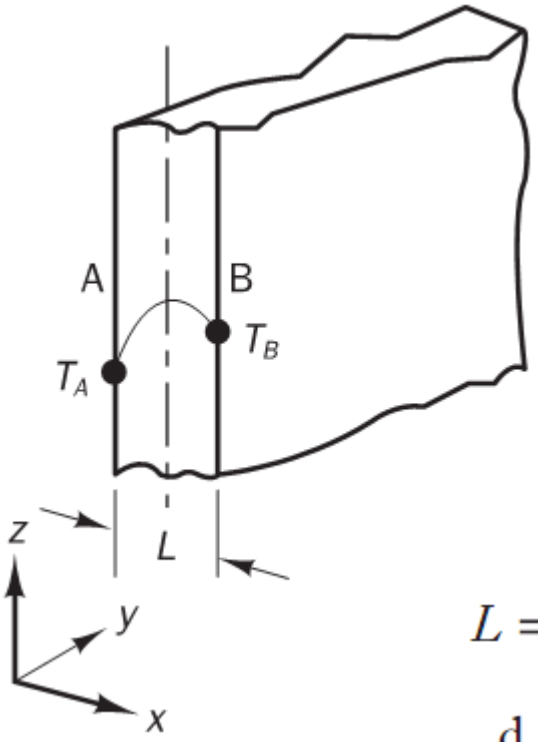
$$\begin{bmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{bmatrix}$$



حل تحلیلی

$$T = 800x + 100$$

مسائل نفوذ یک بعدي- مثال



صفحه مقابل را در نظر بگیرید که دمای صفحات A و B به ترتیب برابر ۱۰۰ و ۲۰۰ درجه سانتی‌گراد است. همچنین شرایط زیر حاکم است توزیع دما در صفحه را به دست آورید.

ابعاد صفحه در جهات y و z به اندازه کافی بلند است به طوری که می‌توان از گرادیان دما در این جهات صرف نظر کرد.

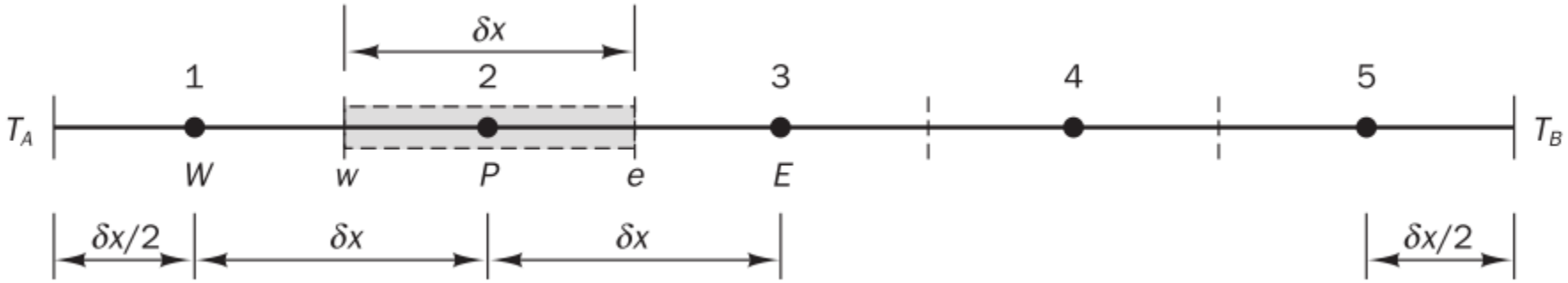
$$L = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) + q = 0$$

heat generation $q = 1000 \text{ kW/m}^3$

thermal conductivity $k = 0.5 \text{ W/m.K}$

مسائل نفوذ یک بعدي- مثال



$$\left[\left(kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_e - \left(kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_w\right] + q\Delta V = 0$$

for **boundary node 1**:

$$\left[k_e A\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - k_A A\left(\frac{T_P - T_A}{\delta x/2}\right)\right] + qA\delta x = 0$$

مسائل نفوذ یک بعدي- مثال

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u$$

a_W	a_E	a_P	S_P	S_u
0	$\frac{kA}{\delta x}$	$a_W + a_E - S_P$	$-\frac{2kA}{\delta x}$	$qA\delta x + \frac{2kA}{\delta x} T_A$

At nodal point 5,

$$\left[k_B A \left(\frac{T_B - T_P}{\delta x/2} \right) - k_w A \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] + qA\delta x = 0$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + S_u$$

a_W	a_E	a_P	S_P	S_u
$\frac{kA}{\delta x}$	0	$a_W + a_E - S_P$	$-\frac{2kA}{\delta x}$	$qA\delta x + \frac{2kA}{\delta x} T_B$

مسائل نفوذ یک بعدي- مثال

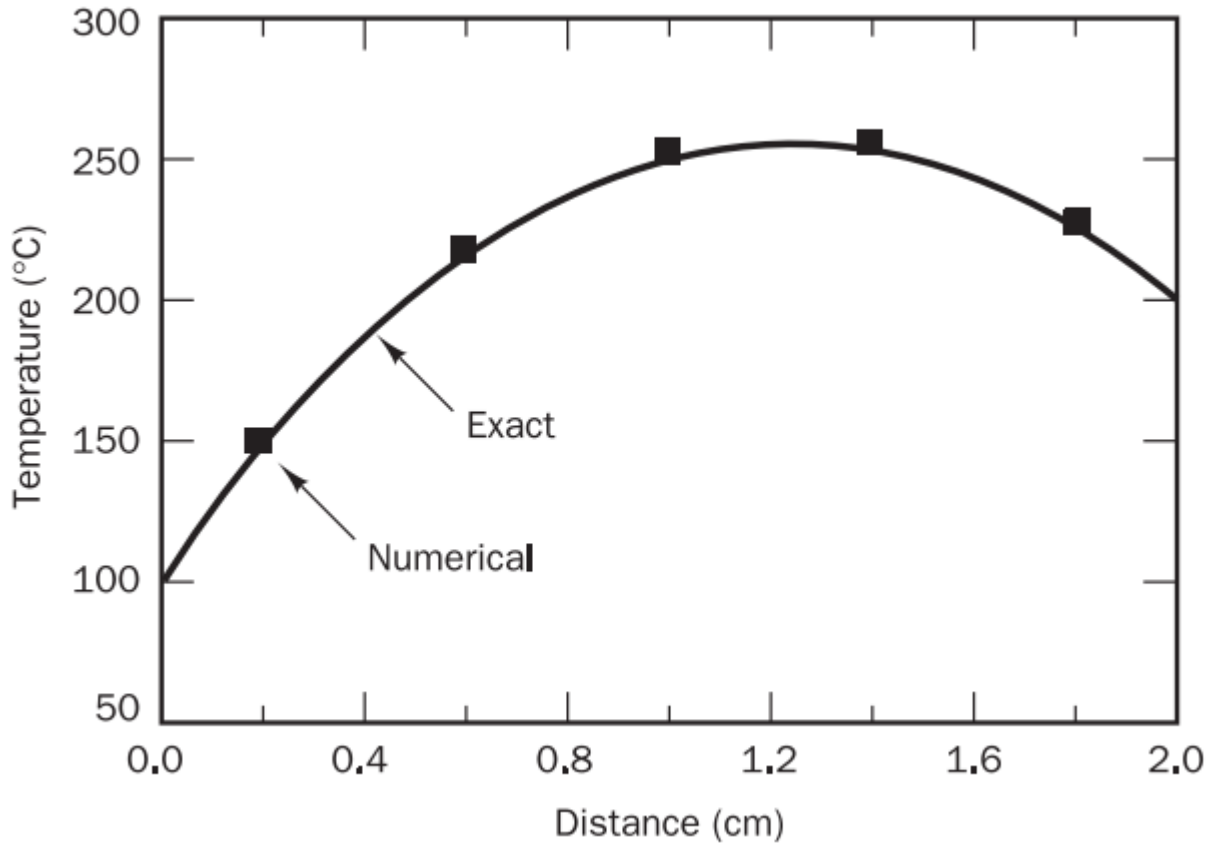
Node	a_W	a_E	S_u	S_P	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	125	$4000 + 250T_A$	−250	375
2	125	125	4000	0	250
3	125	125	4000	0	250
4	125	125	4000	0	250
5	125	0	$4000 + 250T_B$	−250	375

$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 54000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{bmatrix}$$

مسائل نفوذ یک بعدي- مثال

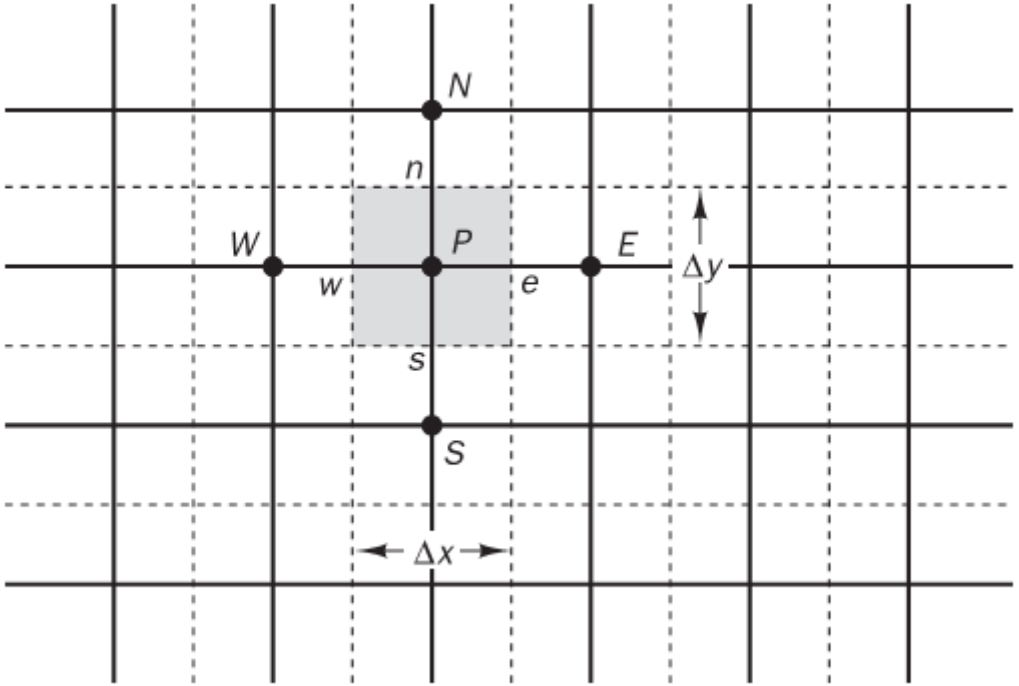
Comparison with the analytical solution

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A$$



مسائل نفوذ دو بعدي

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+S_{\phi}=0$$



مسائل نفوذ دو بعدي

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w\right]$$

$$+\left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s\right] + \bar{S}\Delta V = 0$$

$$\Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}} + \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}}$$

$$- \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}} + \bar{S}\Delta V = 0$$

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_p \phi_P,$$

مسائل نفوذ دو بعدي

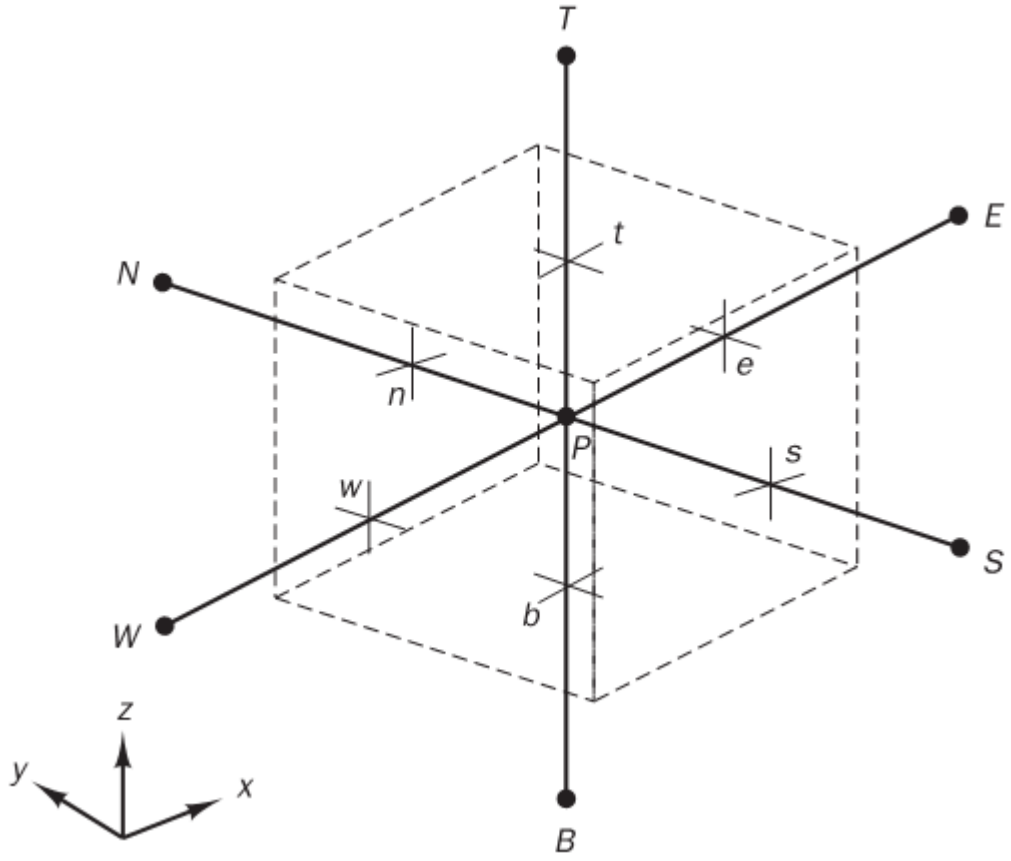
$$\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}+\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}+\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}+\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}-S_p\right)\phi_P$$

$$=\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}\right)\phi_W+\left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}\right)\phi_E+\left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}\right)\phi_S+\left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}\right)\phi_N+S_u$$

$$a_P\phi_P=a_W\phi_W+a_E\phi_E+a_S\phi_S+a_N\phi_N+S_u$$

a_W	a_E	a_S	a_N	a_P
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$a_W+a_E+a_S+a_N-S_p$

مسائل نفوذ سه بعدي



مسائل نفوذ سه بعدي

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+S_\phi=0$$

$$\left[\Gamma_e A_e\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e-\Gamma_w A_w\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right]+\left[\Gamma_n A_n\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n\right.$$

$$\left.-\Gamma_s A_s\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s\right]+\left[\Gamma_t A_t\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_t-\Gamma_b A_b\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_b\right]+\bar{S}\Delta V=0$$

$$\left[\Gamma_e A_e\frac{(\phi_E-\phi_P)}{\delta x_{PE}}-\Gamma_w A_w\frac{(\phi_P-\phi_W)}{\delta x_{WP}}\right]+\left[\Gamma_n A_n\frac{(\phi_N-\phi_P)}{\delta y_{PN}}\right.$$

$$\left.-\Gamma_s A_s\frac{(\phi_P-\phi_S)}{\delta y_{SP}}\right]+\left[\Gamma_t A_t\frac{(\phi_T-\phi_P)}{\delta z_{PT}}-\Gamma_b A_b\frac{(\phi_P-\phi_B)}{\delta z_{BP}}\right]$$

$$+(S_u+S_P\phi_P)=0$$

مسائل نفوذ در حالت سه بعدي

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + a_B\phi_B + a_T\phi_T + S_u$$

a_W	a_E	a_S	a_N	a_B	a_T	a_P
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$	$a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_P$

مسائل نفوذ در حالت کلي

معادله منفصل شده

$$a_P\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + S_u$$

$$a_P = \sum a_{nb} - S_p$$

	a_W	a_E	a_S	a_N	a_B	a_T
1D	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	–	–	–	–
2D	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	–	–
3D	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$

Convection-diffusion Problems مسائل نفوذ- جابجايي

$$\mathrm{div}(\rho \mathbf{u}\phi) = \mathrm{div}(\Gamma \ \mathrm{grad}\ \phi) + S_\phi$$

$$\int_A \mathbf{n} \,.\, (\rho\phi\mathbf{u})\mathrm{d}A = \int_A \mathbf{n} \,.\, (\Gamma \ \mathrm{grad}\ \phi)\mathrm{d}A + \int_{\mathrm{CV}} S_\phi \mathrm{d}V$$

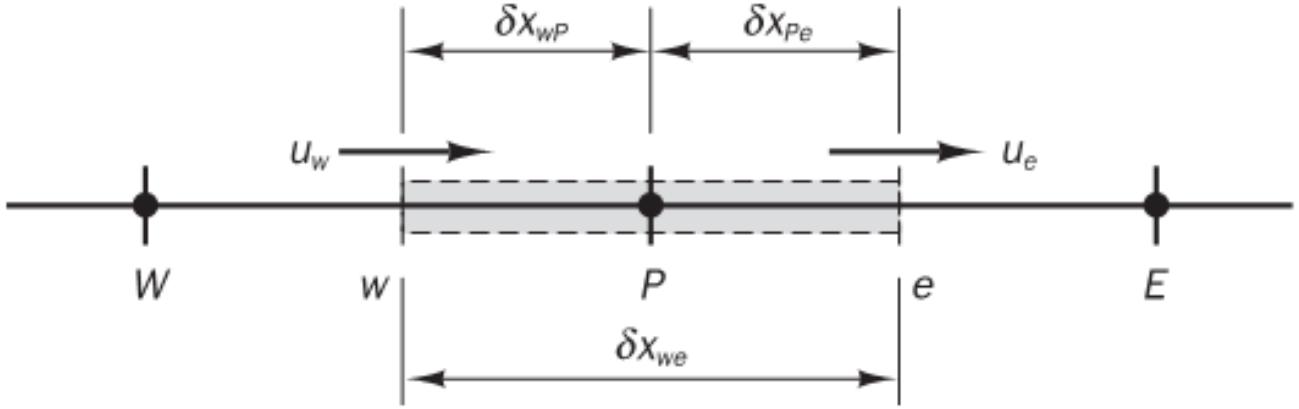
مسائل نفوذ- جابجايي يک بعدي در حالت پايا

معادله انتقال

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho u\phi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)$$

معادله پایستاری جرم

$$\frac{\mathrm{d}(\rho u)}{\mathrm{d}x}=0$$



مسائل نفوذ- جابجايي يک بعدي در حالت پايا

$$(\rho u A\phi)_e - (\rho u A\phi)_w = \left(\Gamma A\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_e - \left(\Gamma A\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_w$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0$$

$$F = \rho u \text{ and } D = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

$$F_w = (\rho u)_w \qquad F_e = (\rho u)_e$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \qquad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$$

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$F_e - F_w = 0$$

Central Differencing Scheme

طرح اختلاف مركزي

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E)/2$$

$$\phi_w = (\phi_W + \phi_P)/2$$

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2}\right)\right]\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right) + (F_e - F_w)\right]\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

مسائل نفوذ- جابجايي يک بعدي در حالت پايا

معادله منفصل شده

$$\left[\left(D_w+\frac{F_w}{2}\right)+\left(D_e-\frac{F_e}{2}\right)+(F_e-F_w)\right]\phi_P=\left(D_w+\frac{F_w}{2}\right)\phi_W+\left(D_e-\frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

$$a_P\phi_P=a_W\phi_W+a_E\phi_E$$

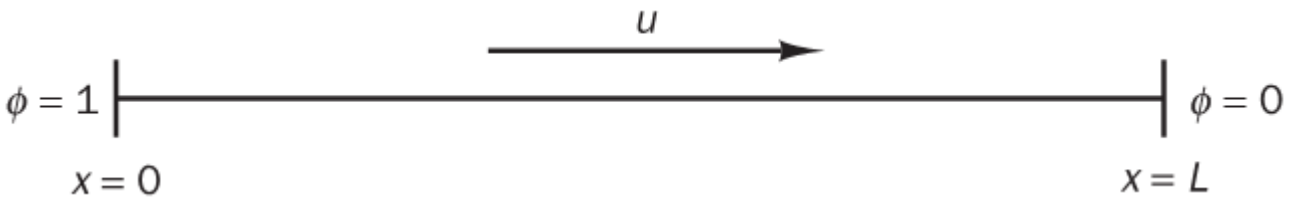
a_W	a_E	a_P
$D_w+\frac{F_w}{2}$	$D_e-\frac{F_e}{2}$	$a_W+a_E+(F_e-F_w)$

مسائل نفوذ- جابجایي یک بعدي در حالت پایا- مثال

خاصیت φ به صورت یک بعدی به وسیله جابجایی و پخش مطابق شکل منتقل می‌شود. مطلوب است محاسبه توزیع این خاصیت در امتداد x برای دو حالت زیر

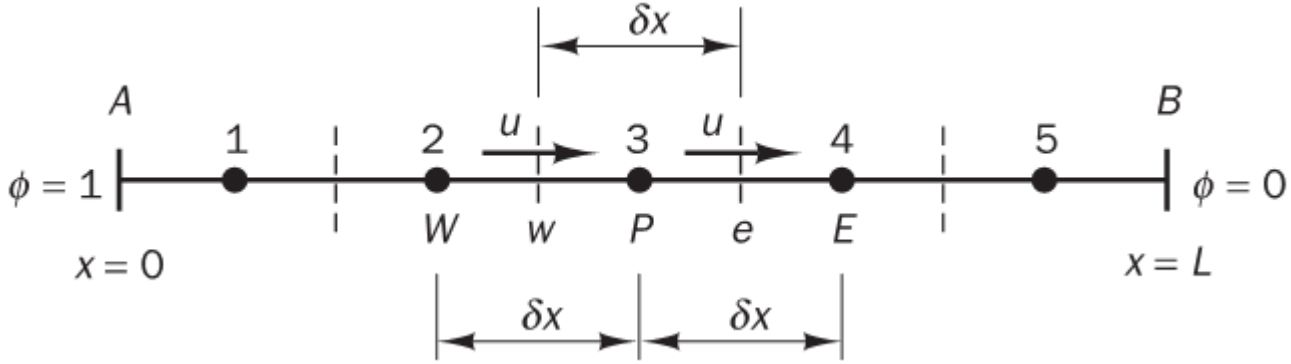
الف- u=0.1 m/s ب- u=2.5 m/s

نتایج را با حل تحلیلی مقایسه کنید. محدوده را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنید و از مقادیر عددی زیر استفاده کنید. ρ=1, Γ=0.1, L=1



$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(\rho u x/\Gamma) - 1}{\exp(\rho u L/\Gamma) - 1}$$

مسائل نفوذ- جابجايي يک بعدي در حالت پايا- مثال



$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - F_A\phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_A(\phi_P - \phi_A)$$

گره اول

$$F_B\phi_B - \frac{F_w}{2}(\phi_P + \phi_W) = D_B(\phi_B - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

گره آخر

مسائل نفوذ- جابجايي يک بعدي در حالت پايا- مثال

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$$

Node	a_W	a_E	S_P	S_u
1	0	$D - F/2$	$-(2D + F)$	$(2D + F)\phi_A$
2, 3, 4	$D + F/2$	$D - F/2$	0	0
5	$D + F/2$	0	$-(2D - F)$	$(2D - F)\phi_B$

(i) Case 1

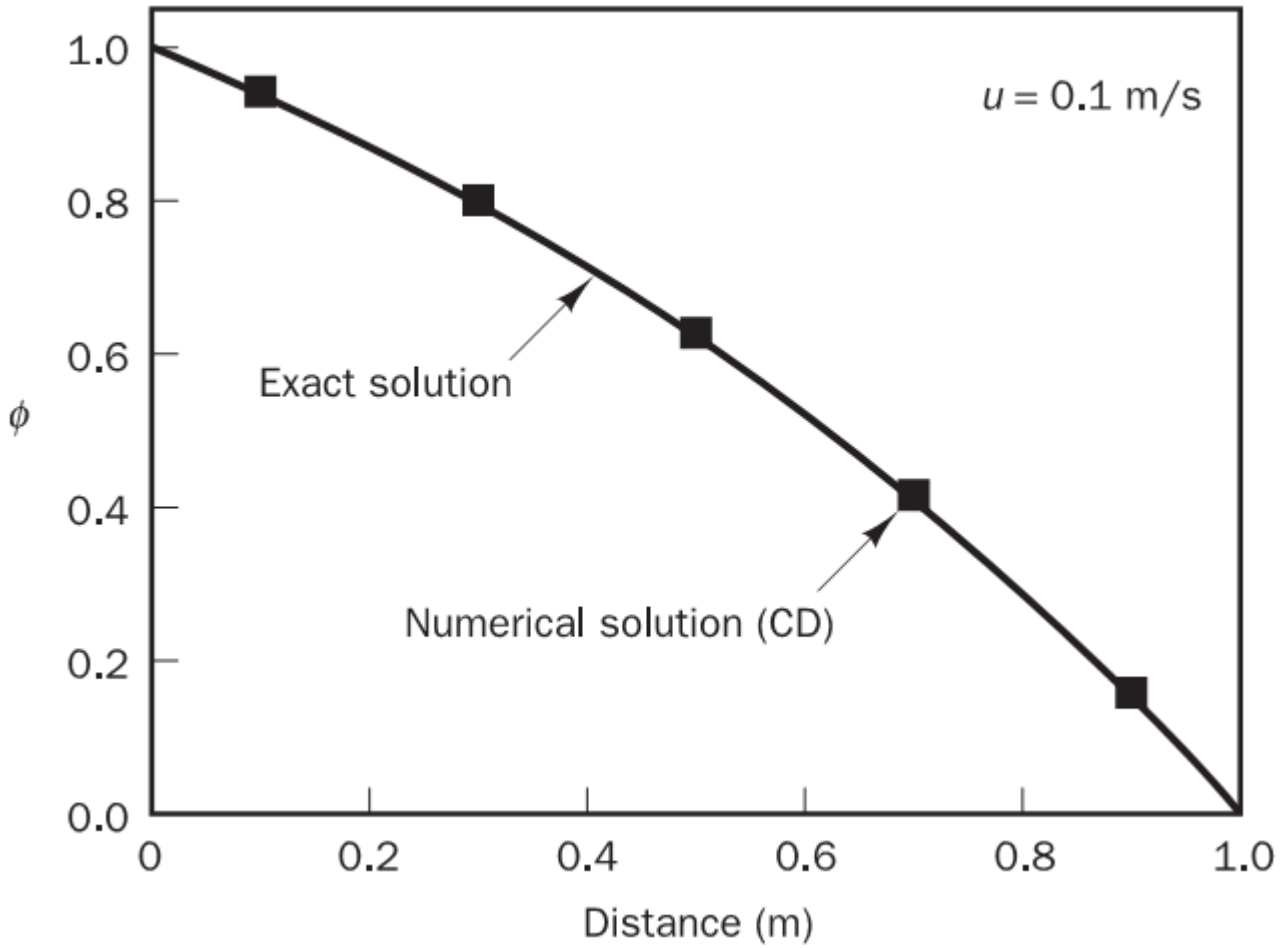
$u = 0.1$ m/s: $F = \rho u = 0.1$, $D = \Gamma/\delta x = 0.1/0.2 = 0.5$

مسائل نفوذ- جابجايي يک بعدي در حالت پايا- مثال

Node	a_W	a_E	S_u	S_P	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	0.45	$1.1\phi_A$	−1.1	1.55
2	0.55	0.45	0	0	1.0
3	0.55	0.45	0	0	1.0
4	0.55	0.45	0	0	1.0
5	0.55	0	$0.9\phi_B$	−0.9	1.45

$$\begin{bmatrix} 1.55 & -0.45 & 0 & 0 & 0 \\ -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9421 \\ 0.8006 \\ 0.6276 \\ 0.4163 \\ 0.1579 \end{bmatrix}$$

مسائل نفوذ- جابجايي يک بعدي در حالت پايا- مثال



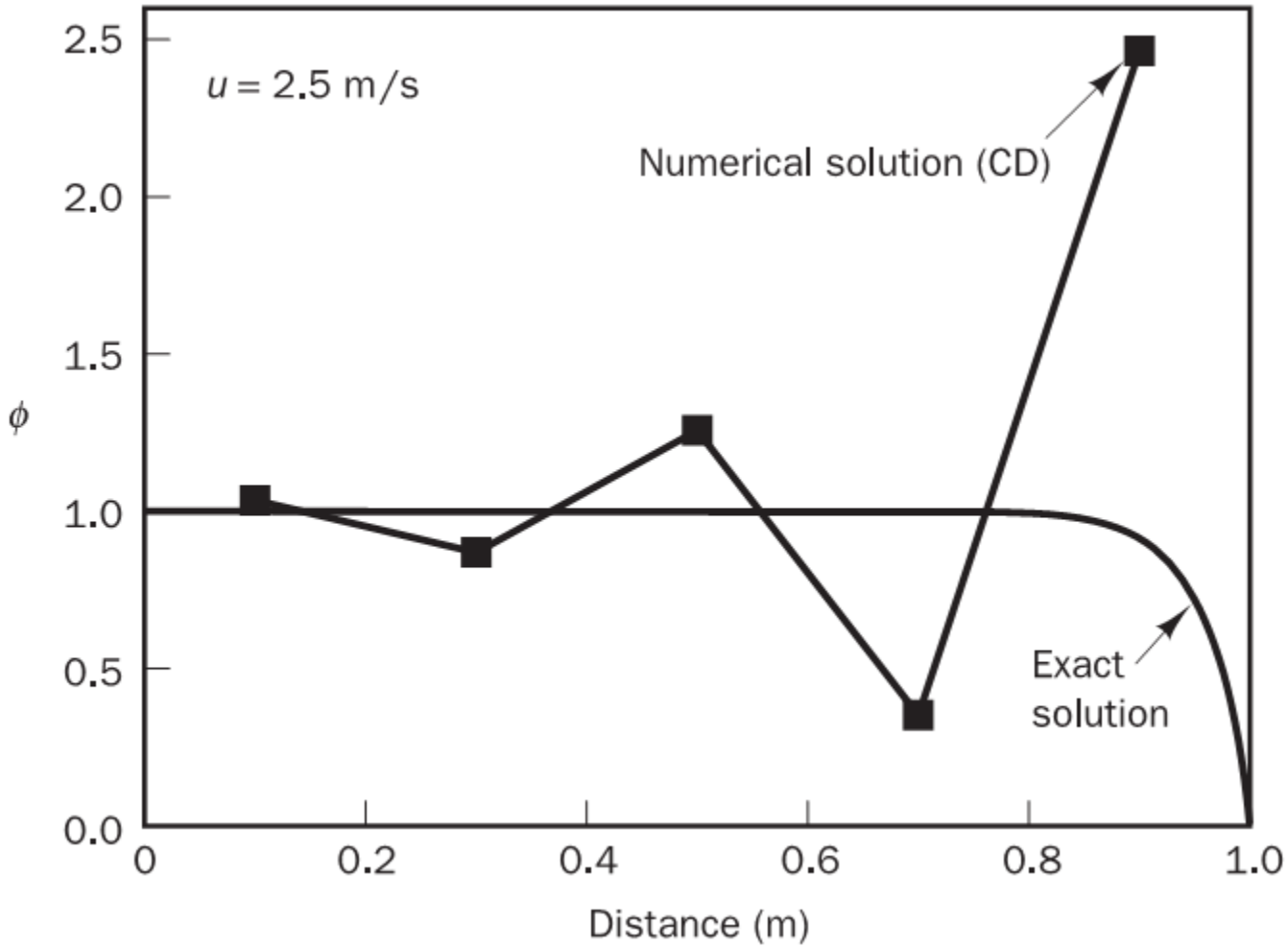
مسائل نفوذ- جابجايي يک بعدي در حالت پايا- مثال

(ii) Case 2

$u = 2.5$ m/s: $F = \rho u = 2.5$, $D = \Gamma/\delta x = 0.1/0.2 = 0.5$

Node	a_W	a_E	S_u	S_P	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	−0.75	$3.5\phi_A$	−3.5	2.75
2	1.75	−0.75	0	0	1.0
3	1.75	−0.75	0	0	1.0
4	1.75	−0.75	0	0	1.0
5	1.75	0	$-1.5\phi_B$	1.5	0.25

مسائل نفوذ- جابجايي يک بعدي در حالت پايا- مثال



مسائل نفوذ- جابجايي- شرط پايداري طرح اختلاف مرکزی

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x}$$

- عدد پکلت: مشابه عدد رینولدز تعریف می شود.

$$Pe = F/D < 2$$

- شرط پایداری

- طرح اختلاف مرکزی هنگامی که نفوذ غالب باشد (در سرعت های پایین یا عدد پکلت پایین)، دقت خوبی دارد.

مسائل نفوذ- جابجايي- روش آپ‌ويند **Upwind Scheme**

- مقدمه

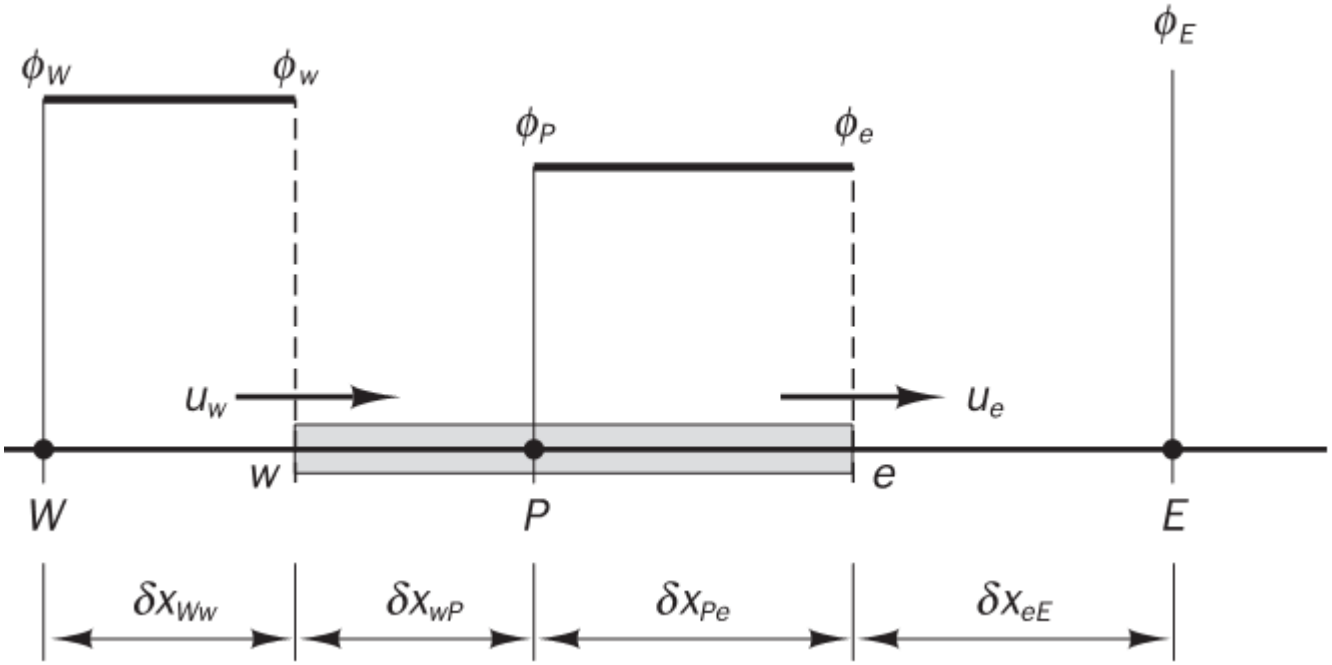
- در صورت وجود سرعت (ترم جابجایی)، تأثیر نقطه پایین دست و بالادست یکسان نخواهد بود.

- در این طرح مقادیر کمیت مجهول برابر مقدار آن در بالادست قرار داده می شود.

- برای اعداد پکلت بزرگتر از ۲ استفاده می شود.

Upwind Scheme

مسائل نفوذ- جابجايي- روش آپ‌ويند



$$u_w > 0,\ u_e > 0\ (F_w > 0,\ F_e > 0),$$

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{and} \quad \phi_e = \phi_P$$

$$F_e\phi_P - F_w\phi_W = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

Upwind Scheme

مسائل نفوذ- جابجايي- روش آپ‌ويند

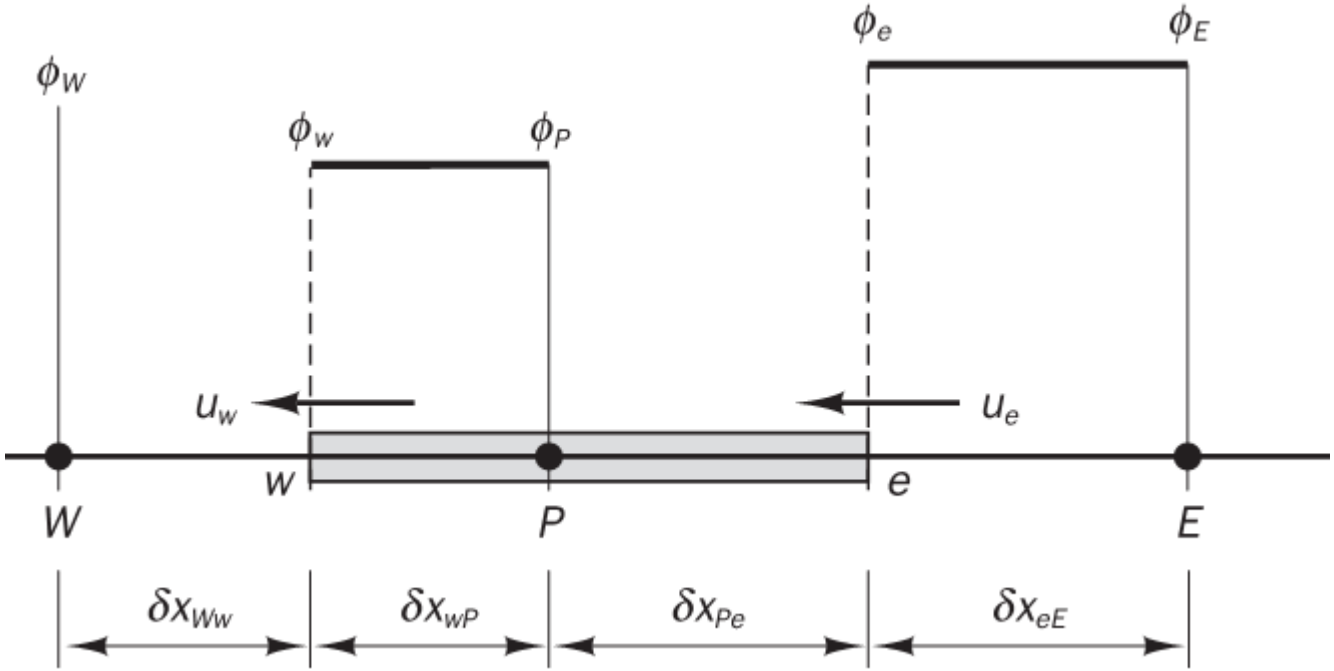
$$F_e\phi_P - F_w\phi_W = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$(D_w + D_e + F_e)\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E$$

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)]\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E$$

Upwind Scheme

مسائل نفوذ- جابجايي- روش آپ‌ويند



$$u_w < 0,\ u_e < 0\ (F_w < 0,\ F_e < 0),$$

$$\phi_w = \phi_P \quad \text{and} \quad \phi_e = \phi_E$$

$$F_e\phi_E - F_w\phi_P = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

Upwind Scheme

مسائل نفوذ- جابجايي- روش آپ‌ويند

$$F_e\phi_E - F_w\phi_P = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)]\phi_P = D_w\phi_W + (D_e - F_e)\phi_E$$

Upwind Scheme

مسائل نفوذ- جابجايي- روش آپ‌ويند

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

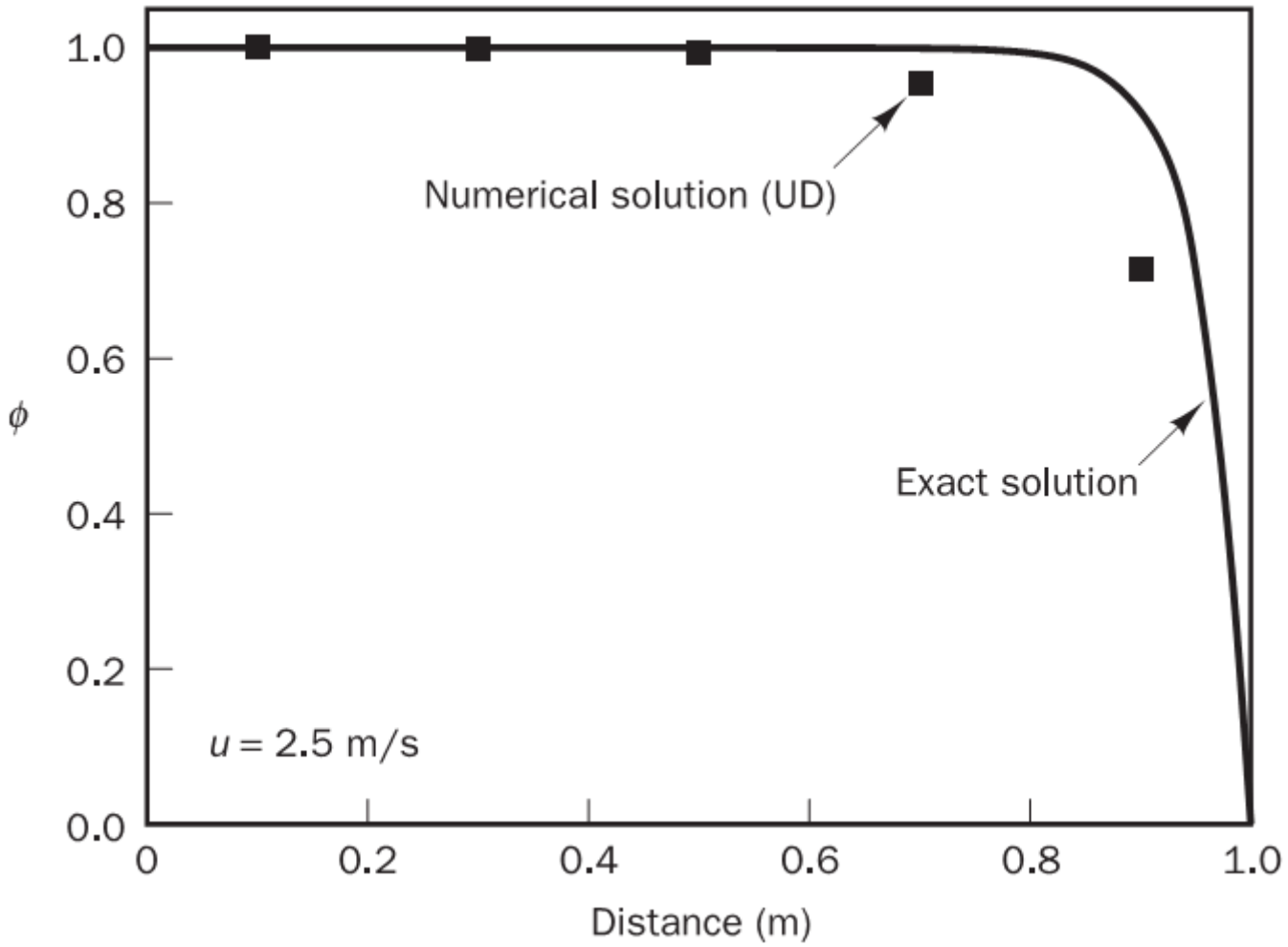
	a_W	a_E
$F_w > 0, F_e > 0$	$D_w + F_w$	D_e
$F_w < 0, F_e < 0$	D_w	$D_e - F_e$

a_W	a_E
$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$

روش آپ‌ویند- حل مثال قبل

Case 2

$u = 2.5$ m/s: $F = \rho u = 2.5$, $D = \Gamma / \delta x = 0.1/0.2 = 0.5$ now $Pe = 5$



مسائل نفوذ- جابجايي: روش تركيبي Hybrid Scheme

- مقدمه

- این طرح برای اعداد پکلت کوچکتر از ۲ از طرح اختلاف مرکزی و برای اعداد پکلت بزرگتر از ۲ از طرح آپ ویند استفاده می کند.

مسائل نفوذ- جابجايي- روش تركيبي **Hybrid Scheme**

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{WP}}$$

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

a_W	a_E
$\max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$

مسائل نفوذ- جابجايي- روش تركيبي- حل مثال قبل

At the boundary node 1

$$F_e\phi_P - F_A\phi_A = 0 - D_A(\phi_P - \phi_A)$$

at node 5

$$F_B\phi_P - F_w\phi_W = D_B(\phi_B - \phi_P) - 0$$

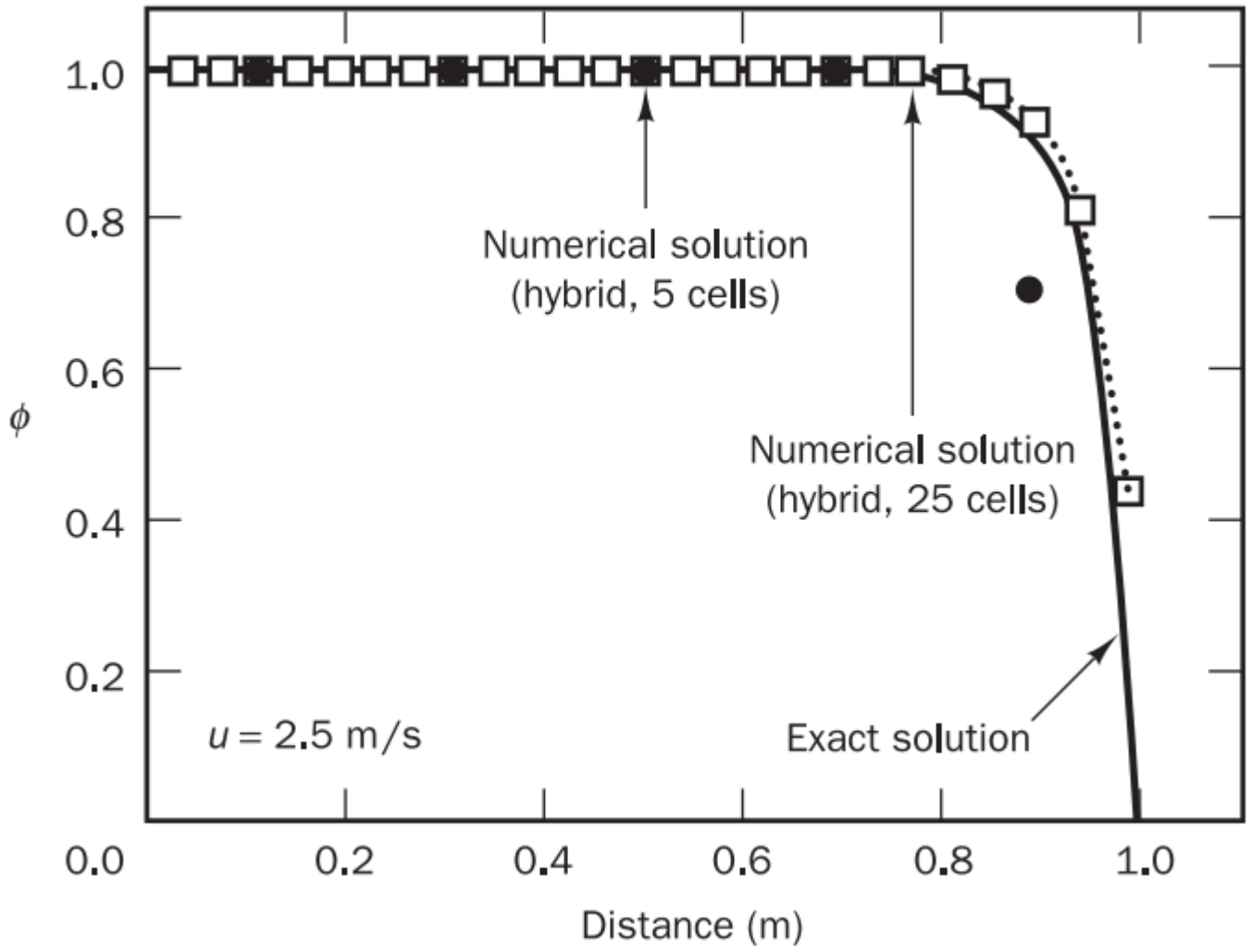
Node	a_W	a_E	S_P	S_u
1	0	0	$-(2D + F)$	$(2D + F)\phi_A$
2,3,4	F	0	0	0
5	F	0	$-2D$	$2D\phi_B$

مسائل نفوذ- جابجايي- روش تركيبي- حل مثال قبل

Node	a_W	a_E	S_u	S_P	$a_P = a_W + a_E - S_P$
1	0	0	$3.5\phi_A$	−3.5	3.5
2	2.5	0	0	0	2.5
3	2.5	0	0	0	2.5
4	2.5	0	0	0	2.5
5	2.5	0	$1.0\phi_B$	−1.0	3.5

$$\begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 0.7143 \end{bmatrix}$$

مسائل نفوذ- جابجايي- روش تركيبي- حل مثال قبل



مسائل نفوذ- جابجايي- روش تركيبي- مسائل چند بعدی

Hybrid differencing scheme for multi-dimensional convection–diffusion

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + a_B\phi_B + a_T\phi_T$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \Delta F$$

مسائل نفوذ- جابجايي- روش تركيبي- مسائل چند بعدی

	One-dimensional flow	*Two-dimensional flow*	*Three-dimensional flow*
a_W	$\max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right]$	$\max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right]$	$\max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right]$
a_E	$\max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$	$\max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$	$\max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$
a_S	–	$\max\left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2}\right), 0\right]$	$\max\left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2}\right), 0\right]$
a_N	–	$\max\left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2}\right), 0\right]$	$\max\left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2}\right), 0\right]$
a_B	–	–	$\max\left[F_b, \left(D_b + \frac{F_b}{2}\right), 0\right]$
a_T	–	–	$\max\left[-F_t, \left(D_t - \frac{F_t}{2}\right), 0\right]$
ΔF	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

مسائل نفوذ- جابجايي- روش تركيبي- مسائل چند بعدی

Face	*w*	*e*	*s*	*n*	*b*	*t*
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta x_{BP}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta x_{PT}} A_t$