## مقدمه

جزوه حاضر شامل خلاصه نکات تستی مهم از درس کاربرد ریاضیات در مهندسی شیمی می‌باشد که برای دانشجویان در مرحله مطالعه نهایی و یا دانشجویان متقاضی مطالعه فشرده درس طراحی شده است این جزوه در ابتدا نکات درسی مهم را به‌صورت خلاصه شده در فصول چهارده‌گانه در اختیار دانشجویان قرار می‌دهد پس از ذکر نکات مهم و کلیدی، نمونه‌هایی از سوالات کنکورهای مختلف شده است تا دانشجو بتواند با تکنیک‌های حل تست نیز آشنا شود.

برای دانشجویانی که به علت ضیق وقت به دنبال تمرکز بر روی یک سری فصول خاص بوده و مشتاق حذف برخی از فصول هستند. پیشنهاد می‌شود تمرکز ویژه‌ای بر روی مطالب مباحثی داشته باشند که در سال‌های اخیر بیشتر مورد سوال بوده است. به همین منظور در انتهای جزوه بودجه‌بندی سوالات در پنج سال اخیر کنکور مهندسی شیمی ارائه شده است.

هر چقدر نوشتار حاضر تحت عنوان آخرین قدم نامگذاری شده است لکن شرط موفقیت آن پیمودن گام‌های قبلی به‌صورت جامع و مانع است. امید است مجموعه حاضر بتواند نقش موثری را در قبولی شما ایفا نماید.

به امید موفقیت

دکتر رضا طاهری

دی‌ماه ۱۳۸۹

# فصل اول

# معادلات دیفرانسیل معمولی

## ۱ـ۱ـ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

### ۱ـ۱ـ۱ـ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول نوع کامل (Exact Equations)

معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را کامل می‌گوییم هرگاه:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

اگر تابعی مانند $u(x,y)$ وجود داشته باشد به نحوی که:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=q(X,Y)$$

در این صورت $u(x,y)=c$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌باشد.

برای پیدا کردن تابع $u(x,y)$ به‌شرح زیر عمل می‌کنیم:

۱) هرکدام از معادلات $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$ و $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$ را که حل آن ساده‌تر است انتخاب می‌کنیم.

۲) با فرض اینکه $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$ را انتخاب کنیم، با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$u(x,y)=\int Q(x,y)dy=...+f(x) \tag{۱ـ۱}$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

۳) پس از اینکه عبارت فوق به‌دست آمد از عبارت فوق نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=\ldots+f'(x)$$

۴) از تساوی فوق، $f'(x)$ و در نتیجه $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

۵) با تعیین $f(x)$ و جایگذاری در رابطه (۱ـ۱)، مقدار $u(x,y)$ به‌دست می‌آید که $u(x,y)=c$ جواب معادله می‌باشد.

**نکته مهم:** اگر معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ کامل باشد، برای محاسبه تابع پتانسیل $u(x,y)$ کافی است از جملات شامل y در P صرف‌نظر کرده و از سایر جملات P نسبت به x و از تمامی جملات Q نسبت به y انتگرال می‌گیریم.

**مثال ۱** جواب عمومی معادله $y'=\frac{x-y}{x+y}$ از کدام معادله به‌دست می‌آید؟

۱) $x^2y+y^2x=c \quad , \quad c<0$

۲) $x^2+2xy-y^2=c \quad , \quad c>0$

۳) $x^2-2xy-y^2=c \quad , \quad c\in R$

۴) $x^2+xy-y^2=c \quad , \quad c>0$

**حل:** گزینه ۳ درست است.

با نوشتن معادله به‌صورت زیر کامل بودن آن دیده می‌شود:

$$(y-x)dx+(x+y)dy=0$$

لذا تابع پتانسیل مسأله عبارت است از:

$$\begin{aligned}P(x,y)&=y-x\\ Q(x,y)&=x+y\end{aligned} \quad \to \quad u=-\frac{x^2}{2}+\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)$$

پس جواب عمومی چنین است:

$$yx-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=k \quad \to \quad x^2-2xy-y^2=c$$

که البته c هیچ شرطی نداشته و گزینه ۳ درست است.

## ۱ـ۱ـ۲ـ فاکتور انتگرال یا عامل انتگرال‌ساز (Integrating Factor)

اگر معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ کامل نباشد، ولی بتوان تابعی مانند $\mu(x,y)\neq 0$ را به‌گونه‌ای یافت که با ضرب آن در طرفین این معادله، یک معادله دیفرانسیل کامل به‌دست آید $\mu$ را یک عامل انتگرال‌ساز (فاکتور انتگرال) برای معادله مورد نظر می‌نامیم.

برای یافتن عامل انتگرال‌ساز به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

اگر: $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x) \quad \to \quad \mu(x,y)=\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$

اگر: $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(y) \quad \to \quad \mu(x,y)=\mu(y)=e^{-\int f(y)dy}$

**یادداشت:**

................................................................................

................................................................................

................................................................................

................................................................................

**نکته ۱** برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی $y'+yP(x)=Q(x)$ فاکتور انتگرال به‌صورت $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$ می‌باشد. بدیهی است برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی $x'+xP(y)=Q(y)$ عامل انتگرال‌سازی به‌صورت $\mu(y)=e^{\int P(y)dy}$ خواهد بود.

**نکته ۲**: اگر معادله دیفرانسیل به‌صورت $(a+1)ydx+(b+1)xdy=0$ نوشته شود، دارای عامل انتگرالی به‌صورت $\mu(x,y)=x^a y^b$ می‌باشد.

به‌طور کلی برای یافتن فاکتور انتگرالی به‌صورت $\mu=x^\alpha y^\beta$، طرفین معادله $Pdx+Qdy=0$ را در $x^\alpha y^\beta$ ضرب می‌کنیم و با برقراری شرط کامل بودن برای معادله حاصله یعنی ارضاء شرط $\frac{\partial}{\partial y}(P.\mu)=\frac{\partial}{\partial x}(Q.\mu)$ مقادیر $\beta$ و $\alpha$ به‌دست می‌آید.

توجه داشته باشید هرگاه برای معادله‌ای فاکتور انتگرال به‌دست آید، آن‌گاه آن معادله دارای بی‌نهایت فاکتور انتگرال خواهد بود.

**مثال ۲** کدام‌یک از توابع زیر عامل انتگرال‌سازی برای معادله دیفرانسیل $y^2\sin xdx-y\cos xdy=0$ است؟

۱) $\cos x$ ۲) $y^{-1}$ ۳) گزینه اول و دوم ۴) $x^{-1}$

**حل**: گزینه ۳ درست است.

$$P(x,y)=y^2\sin x \quad \text{و} \quad Q(x,y)=-y\cos x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\sin x-y\sin x=y\sin x$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{-y\cos x}(2y\sin x-y\sin x)=-\tan x$$

$$\mu(x)=e^{-\int \tan xdx}=e^{\ln\cos x}=\cos x$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{y\sin x}{y^2\sin x}=\frac{1}{y}$$

$$\mu(y)=e^{\int\frac{-1}{y}dy}=e^{-\ln y}=y^{-1}$$

## ۱ـ۱ـ۳ـ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به‌صورت $y'+yf(x)=q(x)$ نوشته می‌شود. هرگاه $q(x)=0$ باشد معادله همگن و اگر $q(x)\neq 0$ معادله ناهمگن می‌باشد.

$$\frac{dy}{dx}+yf(x)=q(x) \quad \to \quad [yf(x)-q(x)]dx+dy=0$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{1}[f(x)-0]=f(x)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی $y'+yf(x)=q(x)$ دارای عامل انتگرال‌سازی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$$

**یادداشت**:

............................................................

............................................................

............................................................

............................................................

پس از یافتن عامل انتگرال‌ساز (فاکتور انتگرال) و حل معادله می‌توان نشان داد که جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int f(x)dx}dx + c\right]$$

**مثال۳** جواب معادله دیفرانسیل $y' + y\tan x = 2\cos^2 x$ با شرط $y(0) = 0$ برابر است با:

۱) $\cos x$ ۲) $\sin x$ ۳) $\cos 2x$ ۴) $\sin 2x$

**حل**: گزینه ۴ درست است.

معادله از نوع مرتبه اول خطی است و داریم:

$$y(x) = e^{-\int \tan x\,dx}\left[\int 2\cos^2 x e^{\int \tan x dx}dx + c\right]$$

$$y(x) = e^{\ln(\cos x)}\left[\int 2\cos^2 x . e^{-\ln(\cos x)}dx + c\right]$$

$$y(x) = \cos x\left[\int 2\cos^2 x \frac{1}{\cos x}dx + c\right] = \cos x\left[2\sin x + c\right]$$

با اعمال شرط مرزی $y(0) = 0$ مقدار $c = 0$ به‌دست می‌آید و لذا:

$$y(x) = \cos x\left(2\sin x\right) = \sin 2x$$

## ۱ـ۱ـ۴ـ معادله برنولی

شکل کلی معادله برنولی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y' + y f(x) = y^n q(x) \qquad n \neq 0,1$$

در حالتی‌که $n = 1$ باشد معادله به یک معادله تفکیک‌پذیر و برای $n = 0$ معادله، به معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی تبدیل خواهد شد.

برای حل معادله برنولی از تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ استفاده می‌کنیم. با این تغییر متغیر، معادله برنولی به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی تبدیل می‌شود:

با جایگذاری در معادله اصلی:

$$\frac{1}{(1-n)}u' + uf(x) = q(x)$$

$$u' + (1-n)f(x)u = (1-n)q(x)$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی است.

عامل انتگرال‌ساز (فاکتور انتگرال) برای معادله برنولی عبارت است از:

$$\mu(x) = e^{(1-n)\int f(x)dx}$$

**یادداشت**:

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**مثال۴** پاسخ معادله دیفرانسیل $xy'+y=xy^3$ کدام است؟

۱) $y^2=\frac{1}{cx^2-2x}$ ۲) $y^2=\frac{1}{2x+cx^2}$ ۳) $y^2=2x+cx^2$ ۴) $y^2=\frac{1}{x+cx^2}$

**حل:** گزینه ۲ درست است.

با نوشتن معادله به‌فرم $y'+\frac{1}{x}y=y^3$، واضح است که معادله از نوع برنولی بوده و با تغییر متغیر $u=y^{1-3}$ خواهیم داشت:

$$u=y^{-2}\quad\to\quad u'=-2y^{-3}y'$$

و با تقسیم معادله به‌دست آمده بر $y^3$ و نوشتن آن برحسب u خواهیم داشت:

$$y'y^{-3}+\frac{1}{x}y^{-2}=1\quad\to\quad\frac{-u'}{2}+\frac{1}{x}u=1\quad\to\quad u'-\frac{2}{x}u=-2$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی می‌باشد و داریم:

$$u(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int -2e^{\int\frac{-2}{x}dx}dx+c\right]=e^{2\ln x}\left[\int -2e^{-2\ln x}dx+c\right]$$

$$u(x)=x^2\left[\int\frac{-2}{x^2}dx+c\right]\quad\Rightarrow\quad u(x)=x^2\left(\frac{2}{x}+c\right)=2x+cx^2\quad\to\quad y^2=\frac{1}{2x+cx^2}$$

## ۱ـ۲ـ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

کلی‌ترین شکل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y''+y'f(x)+yq(x)=h(x)$$

### ۱ـ۲ـ۱ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل غیرهمگن

اگر $y_h$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم و $y_p$ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل ناهمگن باشد، جواب کلی معادله دیفرانسیل برابر مجموع این دو جواب خواهد بود:

$$y=y_h+y_p$$

### ۱ـ۲ـ۲ـ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت در حالت کلی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$ay''+by'+cy=0$$

که در آن a، b و c ضرایب ثابت می‌باشند.

برای یافتن جواب‌های معادله دیفرانسیل فوق، ابتدا ریشه‌های معادله زیر را که به معادله مشخصه معروف است به‌دست می‌آوریم:

$$at^2+bt+c=0\qquad(۲ـ۱)$$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ترکیب خطی از دو جواب مستقل خطی می‌باشد. با توجه به ریشه‌های معادله (۱ـ۲) سه حالت زیر را خواهیم داشت:

**حالت اول:** معادله مشخصه، دارای دو ریشه مختلف و حقیقی باشد $(t_1\ ,\ t_2)$:

$$y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$$

**حالت دوم:** معادله مشخصه، دارای دو ریشه برابر باشد $(t_1 = t_2 = t)$:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{tx}$$

**حالت سوم:** معادله مشخصه دارای ریشه‌های مختلط باشد $(t_1\ ,\ t_2 = p \pm iq)$:

$$y = e^{px}\left[c_1 \sin qx + c_2 \cos qx\right]$$

**مثال۵** جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 4y' + 3y = 0$ کدام است؟

۱) $y = (c_1 + c_2 x)e^x$ ۲) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$ ۳) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$ ۴) $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$

**حل:** گزینه ۴ درست است.

معادله مشخصه را تشکیل داده و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1\,,\,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 1\ ,\ 3$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

## ۱ـ۲ـ۳ـ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیرهمگن و بحث جواب خصوصی

اگر معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = h(x)$ را در نظر بگیریم، جواب کلی این معادله به‌صورت $y = y_h + y_p$ می‌باشد که $y_h$ جواب حالت همگن و $y_p$ جواب خصوصی معادله است که باید با توجه به شکل تابع $h(x)$ تعیین شود. برای تعیین $y_p$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

اگر برای معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = h(x)$ بخواهیم جواب خصوصی را پیدا کنیم کافیست ابتدا معادله مشخصه را برای معادله دیفرانسیل همگن تشکیل داده و ریشه‌های آن را به دست آوریم. در چهار حالت زیر می‌توان ساختار کلی جواب خصوصی را تعیین کرد:

الف) اگر $h(x) = M(x)$ باشد که در آن $M(x)$ یک چند جمله‌ای درجه $n$ است در این‌صورت جواب خصوصی به‌صورت $y_p = x^m N(x)$ خواهد بود که $N(x)$ یک چند جمله‌ای کامل از درجه $n$ و $m$ تعداد ریشه‌های صفر معادله مشخصه می‌باشد.

ب) اگر $h(x) = e^{px} M(x)$ باشد که در آن $p$ یک عدد حقیقی و $M(x)$ یک چند جمله‌ای درجه $n$ است، در این‌صورت جواب خصوصی به‌صورت $y_p = x^m e^{px} N(x)$ بیان می‌شود که $m$ تعداد ریشه‌های مساوی $p$ معادله مشخصه و $N(x)$ یک چند جمله‌ای کامل از درجه $n$ می‌باشد.

ج) اگر $h(x) = \left[M(x)\sin qx + N(x)\cos qx\right]$ باشد که در آن $q$ عدد حقیقی و $M(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله‌ای هستند که درجه چند جمله‌ای با توان بیشتر را $n$ فرض می‌کنیم در این‌صورت جواب خصوصی به فرم:

$$x^m\left[V(x)\sin qx + W(x)\cos qx\right]$$

**یادداشت:**

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

می‌باشد که در آن $m$ تعداد ریشه $iq+$ معادله مشخصه بوده و $V(x)$ و $W(x)$ دو چند جمله‌ای کامل از درجه $n$ می‌باشد.

**مثال۶** جواب کلی معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}=x$ کدام است؟

۱) $y=c_1+c_2e^{-4x}-\frac{x^2}{8}-\frac{x}{64}$

۲) $y=c_1+c_2e^{-4x}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{16}$

۳) $y=c_1+c_2e^{4x}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{16}$

۴) $y=c_1+c_2e^{-4x}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{64}$

**حل:** گزینه ۲ درست است.

ابتدا معادله مشخصه معادله دیفرانسیل همگن را تشکیل و جواب حالت همگن را پیدا می‌کنیم:

$$t^2+4t=0 \rightarrow t_1=0\,,\,t_2=-4 \rightarrow y_h=c_1+c_2e^{-4x}$$

چون $t_1=0$ ریشه معادله مشخصه می‌باشد پس جواب خصوصی به‌صورت زیر است:

$$y_p=x^1(Ax+B)=Ax^2+Bx$$

این جواب باید در معادله دیفرانسیل اصلی صدق کند:

$$y_p=Ax^2+Bx \rightarrow y_p'=2Ax+B \rightarrow y_p''=2A$$

حال در معادله دیفرانسیل اصلی قرار می‌دهیم:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}=x \rightarrow 2A+4(2Ax+B)=x \rightarrow \begin{cases}2A+4B=0\\8A=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}A=\frac{1}{8}\\B=\frac{-1}{16}\end{cases} \rightarrow y_p=\frac{x^2}{8}-\frac{x}{16}$$

پس جواب کلی به‌صورت $y=y_h+y_p=c_1+c_2e^{-4x}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{16}$ خواهد بود.

### ۱ـ۲ـ۴ـ معادله کوشی یا اولر (Cauchy or Euler equation)

شکل این معادله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x^2y''+axy'+by=0 \qquad (۱ـ۳)$$

به‌طوری که $a$ و $b$ ثابت می‌باشند. با اعمال تغییر متغیر $z=\ln x$ $\left(x=e^z\right)$ و جایگزین کردن مشتق‌های اول و دوم در معادلهٔ (۱-۳) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(a-1)\frac{dy}{dz}+by=0 \qquad (۱ـ۴)$$

به این ترتیب معادله (۱-۳) به معادله (۱-۴) با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود که معادله مشخصه آن عبارت است از:

$$t^2+(a-1)t+b=0$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

در این‌صورت برحسب علامت دلتا $\left(\Delta=(a-1)^2-4b\right)$ سه حالت پیش می‌آید که در نهایت تابع y را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Delta>0 \quad \to \quad t_1\ ,\ t_2 \quad \to \quad y=Ax^{t_1}+Bx^{t_2}$$

$$\Delta=0 \quad \to \quad t_1=t_2=t \quad \to \quad y=x^t\left(A+B\ln x\right)$$

$$\Delta<0 \quad \to \quad t_1\ ,\ t_2=p\pm iq \quad \to \quad y=x^p\left[A\sin(q\ln x)+B\cos(q\ln x)\right]$$

**مثال۷** جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y''+2xy'+\frac{1}{4}y=0$ در حالت کلی عبارت است از:

۱) $\left(a+\frac{b}{\sqrt{x}}\right)\ln x$ ۲) $\frac{a}{\sqrt{x}}+b\ln x$ ۳) $(a+b\ln x)\sqrt{x}$ ۴) $(a+b\ln x)\frac{1}{\sqrt{x}}$

**حل:** گزینه ۴ درست است.

واضح است که معادله از نوع کوشی ـ اولر بوده و با تشکیل معادله مشخصه داریم:

$$t^2+(2-1)t+\frac{1}{4}=0 \quad \to \quad t^2+t+\frac{1}{4}=0 \quad \to \quad t_1=t_2=\frac{-1}{2}$$

لذا جواب عمومی عبارت است از:

$$y=x^{\frac{-1}{2}}(a+b\ln x) \quad \to \quad y=(a+b\ln x)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

**یادآوری:** در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو کوشی به‌صورت $ax^2y''+bxy'+cy=0$ که دارای معادله مشخصه $at^2+(b-a)t+c=0$ می‌باشد، بدیهی است:

الف) اگر ریشه‌های معادله مشخصه مختلط باشند، پایه‌های جواب طبیعت نوسانی پیدا می‌کنند، زیرا برای ریشه‌های مشخصه به‌صورت $p\pm iq$ پایه‌های جواب $x^p\cos(q\ln x)$ و $x^p\sin(q\ln x)$ خواهد شد.

طبیعی است اگر $p>0$ باشد دامنه نوسانات برای $x\to+\infty$ به بی‌نهایت می‌گراید و اگر $p<0$ باشد دامنه نوسانات برای $x\to+\infty$ به صفر می‌گراید.

در حالتی که $p=0$ باشد پایه‌های جواب $\cos(q\ln x)$ و $\sin(q\ln x)$ خواهد شد که دامنه نوساناتشان محدود (در بازه $[-1\ ,1]$) است ولی توابعی متناوب نمی‌باشند.

ب) اگر بخواهیم پایه‌های جواب در $x\to+\infty$ به صفر بگرایند باید در معادله مشخصه داشته باشیم:

مجموع دو ریشه $<0 \quad \to \quad -\frac{(b-a)}{a}<0$

حاصلضرب دو ریشه $>0 \quad \to \quad \frac{c}{a}>0$

ج) اگر بخواهیم پایه‌های جواب در $x\to0^+$ به صفر بگرایند در معادله مشخصه داشته باشیم:

مجموع دو ریشه $>0 \quad \to \quad -\frac{(b-a)}{a}>0$

حاصلضرب دو ریشه $>0 \quad \to \quad \frac{c}{a}>0$

**یادداشت:**

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

# فصل دوم

# حل معادلات دیفرانسیل با روش سری‌های توانی

## ۲ـ۱ـ معادله بسل (Bessel Equation)

هر معادله دیفرانسیل به فرم $x^2 y''+xy'+\left(x^2-p^2\right)y=0$ که در آن p یک عدد دلخواه است را معادله بسل گوییم. چون $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله بسل می‌باشد، معادله دارای جوابی به صورت $C_0 \neq 0$، $y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$ خواهد بود. با قرار دادن $y$، $y'$ و $y''$ در معادله بسل و مساوی صفر قرار دادن ضرایب $x$ های هم توان، مقدار $r$ و ضرایب $C_n$ را می‌توان محاسبه نمود. از طرفی می‌توان نشان داد که ریشه‌های معادله مشخصه به صورت $r=\pm p$ می‌باشد (تحقیق به عهده دانشجویان).

به طور خلاصه می‌توان گفت معادله بسل معمولی با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$x^2 y''+xy'+\left(x^2-p^2\right)y=0$$

جواب عمومی این معادله به صورت زیر می‌باشد:

$y(x)=c_1 J_p(x)+c_2 J_{-p}(x)$ : اگر p عدد صحیح یا صفر نباشد

$y(x)=c_1 J_p(x)+c_2 Y_p(x)$ : اگر p عدد صحیح باشد

که $Y_p(x)$ تابع بسل نوع دوم از مرتبه $p$ می‌باشد.

**یادداشت:**

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

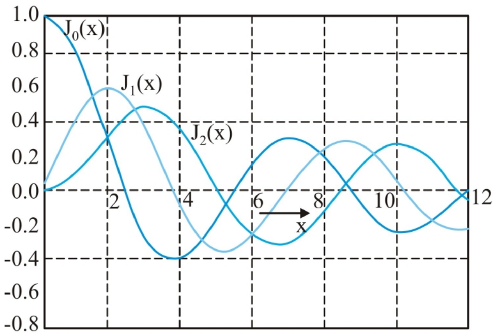
.............................................................................................................

## ۲ـ۲ـ روابط و خواص مهم بین توابع بسل نوع اول

الف) (p عدد طبیعی) $J_{-p}(x)=(-1)^p J_p(x)$

پس هر گاه p عدد صحیح مثبت باشد $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ وابسته خطی می‌باشند.

ب) نمودار توابع بسل نوع اول در شکل (۲-۱) نشان داده شده است:




**نمایش تابع بسل نوع اول**

ج) با توجه به نمودار توابع بسل نوع اول مشخص است که:

(ج ـ۱) $J_0(0)=1$

(ج ـ۲) اگر $p\neq 0$ باشد: $J_p(0)=0$

(ج ـ ۳) توابع بسل نوع اول ( $J_p(x)$ ها) در $x=0$ کراندار می‌باشند.

(ج ـ ۴) توابع بسل نوع اول به ازاء $x\to\infty$، میرا می‌شوند.

(ج ـ۵) توابع بسل نوع اول دارای بی‌نهایت صفر مثبت می‌باشند.

د) $$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right]=x^p J_{p-1}(x)$$

از این رابطه دو نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

(دـ۱) $$p=0 \quad\to\quad J'_0(x)=J_{-1}(x)=-J_1(x)$$

(دـ۲) $$\int x^p J_{p-1}(x)dx=x^p J_p(x)+c$$

هـ) $$\frac{d}{dx}\left[x^{-p}J_p(x)\right]=-x^{-p}J_{p+1}(x)$$

از این رابطه نیز دو نتیجه مهم زیر حاصل می‌شود:

(هـ ـ۱) $$p=0 \quad\to\quad J'_0(x)=-J_1(x)$$

(هـ ـ۲) $$\int x^{-p}J_{p+1}(x)dx=-x^{-p}J_p(x)+c$$

**یادداشت:**

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

و ( $L$ علامت تبدیل لاپلاس می‌باشد)
$$L\left\{J_0(x)\right\}=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

## ۲ـ۳ـ تابع بسل نوع دوم

تابع بسل نوع دوم از مرتبه $p$ که با $Y_p(x)$ نشان داده می‌شود، روابط زیر برقرار است:

الف) ($p$ عدد طبیعی)
$$Y_{-p}(x)=(-1)^p Y_p(x)$$

اگر $p$ عدد طبیعی باشد $Y_p(x)$ و $Y_{-p}(x)$ وابسته خطی می‌باشند.

ب)
$$\frac{d}{dx}\left[x^p Y_p(x)\right]=x^p Y_{p-1}(x)$$

از این رابطه نتایج زیر به‌دست می‌آید:

(ب ـ ۱)
$$p=0 \quad \rightarrow \quad Y'_0(x)=Y_{-1}(x)=-Y_1(x)$$

(ب ـ ۲)
$$\int x^p Y_{p-1}(x)\,dx=x^p Y_p(x)+c$$

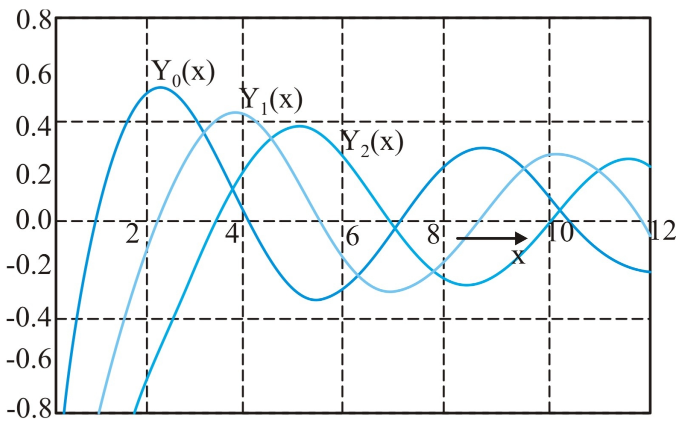
ج)
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} Y_p(x)\right]=-x^{-p} Y_{p+1}(x)$$

از این رابطه هم نتایج مهم زیر را خواهیم داشت:

(ج ـ ۱)
$$p=0 \quad \rightarrow \quad Y'_0(x)=-Y_1(x)$$

(ج ـ ۲)
$$\int x^{-p} Y_{p+1}(x)\,dx=-x^{-p}Y_p(x)+c$$

د) نمودار توابع بسل نوع دوم در شکل (۲-۲) نشان داده شده است:




**نمایش تابع بسل نوع دوم**

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

از نمودار توابع بسل نوع دوم مشخص است که:

(د-۱) توابع بسل نوع دوم ( $Y_p(x)$ ها) در $x=0$ بی‌کرانند یعنی:

$$Y_p(0)=-\infty$$

(د-۲) توابع بسل نوع دوم به ازاء $x\to\infty$ میرا می‌شوند.

(د-۳) توابع بسل نوع دوم دارای بی شمار صفر مثبت می‌باشند.

## ۲-۴- معادله بسل اصلاح شده

هر معادله دیفرانسیل به فرم $x^2y''+xy'-(x^2+p^2)y=0$ را معادله بسل اصلاح شده می‌نامیم. برای این معادله نیز $x=0$ یک نقطه منفرد منظم می‌باشد (تحقیق به عهده دانشجویان). لذا برای حل این معادله از سری فروبنیوس استفاده می‌کنیم و معادله دارای جوابی به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$ می‌باشد.

جواب معادله بسل اصلاح شده را نیز می‌توان به شکل زیر نوشت:

اگر p عدد صحیح یا صفر نباشد : $y=c_1I_p(x)+c_2I_{-p}(x)$

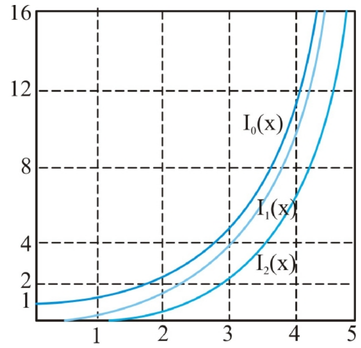
اگر p عدد صحیح یا صفر باشد : $y=c_1I_p(x)+c_2K_p(x)$

$I_p$ تابع بسل نوع سوم از مرتبه p (یا تابع بسل اصلاح شده نوع اول) و $K_p$ تابع بسل نوع چهارم از مرتبه p (یا تابع بسل اصلاح شده نوع دوم) می‌باشد.

## ۲-۵- روابط و خواص مهم توابع بسل نوع سوم:

الف) ( p عدد طبیعی) $\quad I_{-p}(x)=I_p(x)$

ب) نمودار توابع بسل نوع سوم در شکل (۲-۳) نشان داده شده است:




**نمایش تابع بسل نوع سوم**

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

ج) با توجه به نمودار توابع بسل نوع سوم مشخص است که:

(ج ـ۱) $I_0(0)=1$

(ج ـ۲) اگر $p \neq 0$ باشد: $I_p(0)=0$

(ج ـ۳) توابع بسل نوع سوم ($I_p(x)$ها) در $x=0$ کراندار می‌باشند.

د) $\frac{d}{dx}\left[x^p I_p(x)\right]=x^p I_{p-1}(x)$

از این رابطه دو نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

(د ـ۱) $p=0 \quad \rightarrow \quad I_0'(x)=I_{-1}(x)=I_1(x)$

(د ـ۲) $\int x^p I_{p-1}(x)dx=x^p I_p(x)+c$

هـ) $\frac{d}{dx}\left[x^{-p} I_p(x)\right]=x^p I_{p+1}(x)$

(هـ ـ۱) $p=0 \quad \rightarrow \quad I_0'(x)=I_1(x)=I_{-1}(x)$

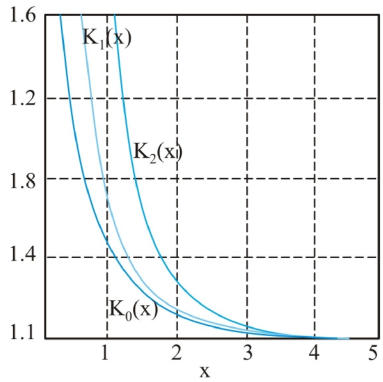
(هـ ـ۲) $\int x^p I_{p+1}(x)dx=x^{-p} I_p(x)+c$

## ۲ـ۶ـ روابط و خواص مهم توابع بسل نوع چهارم

برای تابع بسل نوع چهارم از مرتبه p که با $K_p$ نشان داده می‌شود، روابط زیر برقرار است:

الف) ( p عدد طبیعی) $K_{-p}(x)=K_p(x)$

ب) نمودار توابع بسل نوع چهارم در (۲-۴) نشان داده شده است:




**نمایش تابع بسل نوع چهارم**

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

از نمودار مشخص است که با افزایش متغیر مستقل مقدار تابع بسل نوع چهارم کاهش می‌یابد و داریم:

$K_p(0)=+\infty$

ج) $\frac{d}{dx}\left[x^p K_p(x)\right]=-x^p K_{p-1}(x)$

که از این رابطه، نتایج زیر به‌دست می‌آید:

(ج ـ۱) $p=0 \quad \to \quad K'_0(x)=-K_{-1}(x)=-K_1(x)$

(ج ـ ۲) $\int x^p K_{p-1}(x)dx=-x^p K_p(x)+c$

د) $\frac{d}{dx}\left[x^{-p} K_p(x)\right]=-x^{-p} K_{p+1}(x)$

از رابطه فوق نتایج زیر به‌دست می‌آید:

(دـ۱) $p=0 \quad \to \quad K'_0(x)=-K_1(x)=-K_{-1}(x)$

(دـ۲) $\int x^{-p} K_{p+1}(x)dx=-x^{-p} K_p(x)+c$

**نکته**: وقتی $x \to 0$ میل کند در این‌صورت داریم:

$p=0 \quad \to \quad J_0(0)=I_0(0)=1$

$p>0 \quad \to \quad J_p(0)=I_p(0)=0$

مثبت و غیرصحیح $p$ : $J_{-p}(0)$ و $\pm I_{-p}(0) \quad \to \quad \pm\infty$

به ازای تمام مقادیر $p$ : $K_p(0) \quad \to \quad +\infty \quad , \quad Y_p(0) \quad \to \quad -\infty$

**نکته**: هر گاه $p$ یک عدد صحیح باشد روابط زیر برقرار است:

$J_{-p}(x)=(-1)^p J_p(x)$

$Y_{-p}(x)=(-1)^p Y_p(x)$

$I_{-p}(x)=I_p(x)$

$K_{-p}(x)=K_p(x)$

# ۲ـ ۷ـ توابع خاص

## ۲ـ ۷ـ ۱ ـ تابع گاما (Gamma Function)

تابع گاما به صورت $\Gamma(n)$ نمایش داده شده و با رابطه زیر تعریف می‌شود:

(۱ـ۲) $\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$

**یادداشت**:

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

برای تابع گاما رابطه زیر برقرار است:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

که اگر $n$ عددی صحیح و مثبت باشد خواهیم داشت:

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad n=1,2,3,\cdots$$

به‌همین خاطر گاهی تابع گاما را تابع فاکتوریل (Factorial Function) نیز می‌نامند.
با انتگرال‌گیری از رابطه (۲ـ۱) دیده می‌شود:

$$\Gamma(1)=1 \quad , \quad \Gamma(2)=1 \quad , \quad \Gamma(0.5)=\sqrt{\pi}$$

**مثال ۱** مقدار تابع $\Gamma(6)$ کدام است؟

۱) 6 ۲) 24 ۳) 60 ۴) 120

**حل**: گزینه ۴ درست است.

$$\Gamma(n)=(n-1)! \ \rightarrow \ \Gamma(6)=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$$

**مثال ۲** حاصل $I=\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx$ برابر است با:

۱) 2 ۲) 6 ۳) 24 ۴) 12

**حل**: گزینه ۲ درست است.
از روابط زیر داریم:

$$\begin{cases} I=\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx \\ \Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx \end{cases} \rightarrow \ I=\Gamma(4)=3!=6$$

**۲ـ ۷ـ۲ـ تابع خطا**

تابع خطا که در مسائل مهندسی کاربرد زیادی دارد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du \qquad (۲ـ۲)$$

مکمل تابع خطا (Complementary Error Function) نیز با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{erfc}(x)=1-\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du$$

## ۲ـ۷ـ۳ـ خواص تابع خطا و مکمل تابع خطا

۱) $\operatorname{erf}(\infty)=1 \quad , \quad \operatorname{erf}(0)=0$

۲) $\operatorname{erfc}(\infty)=0 \quad , \quad \operatorname{erfc}(0)=1$

۳) $\operatorname{erf}(x)+\operatorname{erfc}(x)=1$

۴) $\operatorname{erf}(-x)=-\operatorname{erf}(x)$

۵) $\frac{d}{dx}\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$

**یادداشت**:

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

........................................................................................................................................

# فصل سوم

# تبدیل لاپلاس و حل معادلات دیفرانسیل

## ۳ـ۱ـ تعریف تبدیل لاپلاس

لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t).e^{-st}\,dt=F(s)$$

در این کتاب در فصل تبدیل لاپلاس از حروف کوچک مانند $f(t)$ برای توابع در فضای $t$ (محیط معمول حل مساله) و از حروف بزرگ مانند $F(s)$ برای توابع در فضای $s$ (محیط تبدیل شده) استفاده خواهیم کرد.

## ۳ـ۲ـ تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد

تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{u_a(t)\}=\frac{e^{-as}}{s}\qquad (s>0)$$

در حالت کلی هر گاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L\{u_a(t)f(t-a)\}=e^{-as}L\{f(t)\}=e^{-as}F(s)\qquad (s>a)$$

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=u_a(t)f(t-a)$$

که a یک ثابت مثبت می‌باشد.

**یادداشت:**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**تبدیل لاپلاس توابع مهم**

| تابع f(t) | تبدیل لاپلاس F(s) | شرط |
|---|---|---|
| $a$ | $\frac{a}{s}$ | با شرط $s>0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ | با شرط $s>a$ |
| $\cos at$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ | با شرط $s>a$ |
| $\sin at$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ | با شرط $s>a$ |
| $\cosh at$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ | با شرط $s>\|a\|$ |
| $\sin at$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ | با شرط $s>\|a\|$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | با شرط $s>0$ و $n\in N$ |
| $t^a$ | $\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ | با شرط $s>0$ و $a>-1$ |
| $J_0(at)$ | $\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ | با شرط $s>0$ |
| $u(t-a)$ | $\frac{e^{-as}}{s}$ | با شرط $s>0$ |
| $\delta(t-a)$ | $e^{-as}$ | با شرط $s>0$ |

**مثال ۱** عکس تبدیل لاپلاس $F(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}$ عبارت است از:

۱) $f(t)=t-\sin t$
۲) $f(t)=t^2-\sin t$
۳) $f(t)=t(\cos t-1)$
۴) $f(t)=t^2(1-\cos t)$

**حل:** گزینه ۱ درست است.

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}$$

از آن‌جا $L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$ , $L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$ می‌باشد، لذا: $f(t)=t-\sin t$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

### ۳ـ۳ـ قضیه اول انتقال (First shifting theorem)

اگر $a$ یک عدد حقیقی و $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد می‌توان نوشت:

$$L\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$$

$$L^{-1}\left\{F(s-a)\right\}=e^{at}f(t)$$

### ۳ـ۴ـ قضیه دوم انتقال (Second shifting theorem)

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$، $u(t)$ یک تابع پله‌ای واحد و $a$ یک عدد حقیقی باشد می‌توان نوشت:

$$L\left\{u(t-a)f(t-a)\right\}=e^{-as}F(s)$$

$$L^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}=u(t-a)f(t-a)$$

**مثال ۲** لاپلاس معکوس $F(s)=\dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$ کدام است؟

۱) $u_2(t)\sinh(t-4)$ ۲) $u_2(t)\sinh(2t-2)$

۳) $u_2(t)\sinh(t-2)$ ۴) $u_2(t)\sinh(2t-4)$

### ۳ـ۵ـ تبدیل لاپلاس حاصل‌ضرب یک تابع در $t^n$

هر گاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، خواهیم داشت:

$$L\left\{t^n f(t)\right\}=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$L^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}=(-1)^n t^n f(t)$$

$F^{(n)}(s)$ مشتق مرتبه $n$ ام تابع $F(s)$ نسبت به $s$ است.

**مثال ۳** تبدیل لاپلاس تابع $g(t)=t\cos at$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{2as}{s^2+a^2}$ ۲) $\dfrac{s^2-a^2}{s^2+a^2}$ ۳) $\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$ ۴) $\dfrac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$

**حل:** گزینه ۳ درست است.

$$G(s)=(-1)^1\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)=-\frac{\left(s^2+a^2\right)-(2s)(s)}{\left(s^2+a^2\right)^2}=\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

### ۳ـ۶ـ تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع

هرگاه تابع $f(t)$ و مشتقات تا مرتبه $(n-1)$ ام آن در بازه $[0,\infty]$ پیوسته و $f^{(n)}(t)$ در این بازه تکه‌ای پیوسته باشد خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^{n}F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌باشد. به ازای مقادیر مختلف $n$، تبدیل لاپلاس برای مشتق اول، دوم و ... به‌دست می‌آید:

$$n=1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$$

$$n=2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}\{f''(t)\}=s^{2}F(s)-sf(0)-f'(0)$$

### ۳ـ۷ـ تبدیل لاپلاس انتگرال تابع

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، در این صورت تبدیل لاپلاس برای انتگرال تابع $f(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_0^t f(x)\,dx$$

**مثال۴** حاصل $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \left(t^{2}+\cos 2t\right)dt\right\}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{s^{3}}+\frac{s}{s^{2}+4}$ ۲) $\frac{2}{s^{4}}+\frac{1}{s^{2}+4}$ ۳) $\frac{2}{s^{2}\left(s^{2}+4\right)}$ ۴) $\frac{2}{s^{4}\left(s^{2}+4\right)}$

**حل**: گزینه ۲ درست است.

$$f(t)=t^{2}+\cos 2t \quad \rightarrow \quad F(s)=\frac{2!}{s^{3}}+\frac{s}{s^{2}+4}$$

طبق رابطه تعریف شده در بند (۳ـ۷) خواهیم داشت:

$$L\left\{\int_0^t \left(t^{2}+\cos 2t\right)dt\right\}=\frac{F(s)}{s}=\frac{2}{s^{4}}+\frac{1}{s^{2}+4}$$

### ۳ـ۸ـ انتگرال تابع تبدیل لاپلاس یک تابع

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد در این‌صورت می‌توان نوشت:

$$\int_s^{\infty} F(s)\,ds=\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

### ۳ـ۹ـ قضیه مقدار اولیه تابع

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد، خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

البته رابطه فوق به شرطی درست است که $\lim_{s\to\infty} sF(s)$ وجود داشته باشد.

**مثال۵** مقدار $L^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2+1}\right\}$ وقتی $t=0$ است برابر خواهد بود با:

۱) $-2$ ۲) $1$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-1$

### ۳ـ۱۰ـ قضیه مقدار نهایی تابع

اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را با $F(s)$ نشان دهیم در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

البته رابطه بالا به شرطی درست است که حد $\underset{s\to 0}{sF(s)}$ وجود داشته باشد.

**مثال۶** هر گاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $\frac{e^{-s}-3}{s^2-2s}$ باشد در این‌صورت مقدار تابع $f(t)$ وقتی $t\to\infty$ برابر خواهد بود با:

۱) $0$ ۲) $-1$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $1$

**حل**: گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0}\{sF(s)\}=\lim_{s\to 0}\frac{e^{-s}-3}{s-2}=\frac{1-3}{0-2}=1$$

### ۳ـ۱۱ـ قضیه پیچش یا کانولوشن (Convolution)

اگر لاپلاس دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ را با $F(s)$ و $G(s)$ نشان دهیم، کانولوشن یا پیچش دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{f*g\}=F(s).G(s)$$

که در آن

$$f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$f*g$ را کانولوشن توابع $f$ و $g$ می‌نامیم. لازم به یادآوری است که $\tau$ متغیر مجازی بوده و پس از انتگرال‌گیری از روابط حذف می‌شود.

**یادداشت**:

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

### ۳ـ۱۲ـ خواص کانولوشن

برای کانولوشن دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ روابط زیر وجود دارد:

۱) خاصیت جابجایی:

$$f*g=g*f$$

۲) خاصیت شرکت‌پذیری:

$$(f*g)*h=f*(g*h)$$

۳) خاصیت پخشی:

$$f*(g+h)=f*g+f*h$$

۴) ( a عدد ثابت)

$$f*(ag)=(af)*g=a(f*g)$$

۵)

$$f*0=0*f=0$$

۶)

$$f*1\neq f$$

۷)

$$1*f=\int_0^t f(t)dt \quad\rightarrow\quad L\{1*f\}=\frac{L\{f(t)\}}{s}=\frac{F(s)}{s}$$

**مثال۷** جواب معادله انتگرالی $y(t)=1-\int_0^t (t-x)y(x)dx$ کدام است؟

۱) $\sin t$ ۲) $\cos t$ ۳) $\sinh t$ ۴) $\cosh t$

**حل**: گزینه ۲ درست است.

با توجه به تعریف پیچش دو تابع داریم:

$$y(t)=1-(t*y(t))$$

حال از طرفین معادله فوق لاپلاس می‌گیریم:

$$Y(s)=\frac{1}{s}-L\{t\}.L\{y(t)\} \quad\rightarrow\quad Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}Y(s)$$

$$Y(s)\left(1+\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{s} \quad\rightarrow\quad Y(s)\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)=\frac{1}{s}$$

$$\rightarrow\quad Y(s)=\frac{s}{s^2+1} \quad\rightarrow\quad y(t)=\cos t$$

**یادداشت**:

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

......................................................................................................................

## ۳ـ۱۳ـ حل معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) با استفاده از روش تبدیل لاپلاس

برای حل یک معادله ODE با استفاده از تبدیل لاپلاس، ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل، لاپلاس گرفته و با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع، معادل آن‌ها را قرار داده و در نهایت با تبدیل لاپلاس جواب را می‌یابیم که تبدیل معکوس لاپلاس آن، جواب معادله را خواهد داد.

**مثال۸** جواب معادله انتگرالی $y(0)=1$ و $\frac{dy}{dt}+\int_0^t y(\lambda)d\lambda=1$ کدام است؟

۱) $y(t)=\sin t+\cos t+t$ ۲) $y(t)=\sin t+\cos t$

۳) $y(t)=\sin t-\cos t+t$ ۴) $y(t)=\sin t-\cos t$

**حل**: گزینه ۲ درست است.

واضح است که $\int_0^t y(\lambda)d\lambda$ بیانگر کانولوشن دو تابع 1 و $y(t)$ می‌باشد، لذا چنانچه از دو طرف معادله داده شده تبدیل لاپلاس بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\left[sY(s)-y(0)\right]+\left[Y(s)\times\frac{1}{s}\right]=\frac{1}{s}$$

$$sY-1+\frac{Y}{s}=\frac{1}{s} \rightarrow \left(s+\frac{1}{s}\right)Y=1+\frac{1}{s} \rightarrow Y(s)=\frac{s+1}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1} \rightarrow y(t)=\cos t+\sin t$$

**یادداشت:**

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

# فصل چهارم

# سری فوریه

## ۴ـ۱ـ تعریف سری فوریه

هر گاه تابع $f(x)$ در فاصله $[-L,L]$ تعریف شده باشد و در خارج از این فاصله داشته باشیم، $f(x+2L)=f(x)$، به تعبیر دیگر تابع $f(x)$ دارای دوره تناوب $T=2L$ باشد، آن گاه سری فوریه یا بسط فوریه این تابع را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

جائی که

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad , \quad n=1,2,3,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad , \quad n=1,2,3,\cdots$$

با استفاده از فرم سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ و روابط مربوط به $a_n$ و $b_n$ می‌توان دو حالت خاص زیر را در نظر گرفت:

الف) اگر تابع $f(x)$، تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2L$ بوده و شرایط زیر را نیز داشته باشد:

$$\forall x\in D_f \quad \Rightarrow \quad -x\in D_f \quad , \quad f(-x)=f(x)$$

**یادداشت:**

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

یعنی $f(x)$ تابعی زوج باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad , \quad b_n=0 \quad , \quad n=0,1,2,3,...$$

(تابع زوج از نظر هندسی تابعی است که نمودار آن نسبت به محور $y$ ها متقارن باشد.)

ب) اگر تابع $f(x)$، تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2L$ باشد و شرایط زیر را نیز داشته باشد:

$$\forall x\in D_f \quad \Rightarrow \quad -x\in D_f \quad , \quad f(-x)=-f(x)$$

یعنی $f(x)$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad , \quad a_n=0$$

(تابع فرد از نظر هندسی تابعی است که نمودار آن نسبت به مبدا مختصات متقارن باشد)

**خلاصه**: سری فوریه یک تابع زوج را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

که در آن:

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \ , \ a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \ , \ b_n=0$$

سری فوق را سری فوریه نیم دانه کسینوسی می‌نامند.

سری فوریه یک تابع فرد را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

که در آن

$$a_0=0 \ , \ a_n=0 \ , \ b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

سری فوق را سری فوریه نیم‌دامنه سینوسی گویند.

**مثال ۱** ضریب $\sin 5x$ در بسط سری فوریه تابع $f(x)=\frac{x}{4}$ $(-\pi<x<\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{-1}{5}$ ۲) $\frac{-1}{10}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{10}$

**یادداشت**:

............................................................

............................................................

............................................................

............................................................

**حل:** گزینه ۴ درست است.

چون تابع $f(x)$ فرد است می‌توان نوشت:

$$b_5=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{4}\sin 5x dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x\sin 5x dx$$

| انتگرال | | مشتق |
|---|---|---|
| $\sin 5x$ | | $x$ |
| $\frac{-1}{5}\cos 5x$ | $+$ | $1$ |
| $\frac{-1}{25}\sin 5x$ | $-$ | $0$ |

$$b_5=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{5}\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\pi}{5}\times(-1)\right]=\frac{1}{10}$$

## ۴ـ۲ـ مشتق‌گیری از سری فوریه

هرگاه تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب $T=2L$ دارای سری فوریه‌ای به فرم زیر باشد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

و داشته باشیم $f(L)=f(-L)$، چنانچه $f'(x)$ در فاصله $[-L,L]$ تکه‌ای پیوسته باشد، سری فوریه آن به فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(-a_n\sin\frac{n\pi}{L}x+b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)$$

## ۴ـ۳ـ انتگرال‌گیری از سری فوریه

هر گاه تابع $f(x)$ متناوب با دوره تناوب $T=2L$، دارای سری فوریه‌ای به فرم زیر باشد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

می‌توان نوشت:

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}x-b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right)+k$$

البته طبیعی است که برای رسیدن به سری فوریه تابع $\int_0^x f(t)dt$ لازم است سری فوریه تابع $x$ را با در نظر گرفتن $T=2L$ به‌دست آورده و در عبارت $\frac{a_0}{2}x$ جایگزین نماییم.

به تعبیری دقت کنید سری فوریه یک تابع شامل جمله‌ای مانند $\frac{a_0}{2}x$ نخواهد بود.

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

# فصل پنجم

# تعامد و توابع متعامد

## ۵ـ۱ـ تعامد یا اورتوگونالیتی در مجموعه توابع

اگر مجموعه‌ای از توابع را به صورت زیر در محدودهٔ $a \le x \le b$ داشته باشیم:

$$\phi = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)\} \quad , \quad n = 1,2,3,\cdots \qquad (۵\text{ـ}۱)$$

مجموعه $\phi$ را یک مجموعه اورتوگونال می‌نامیم هر گاه به ازای دو عضو دلخواه از این مجموعه داشته باشیم:

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & i \ne j \\ \ne 0 & i = j \end{cases} \qquad (۵\text{ـ}۲)$$

بردار $A$ را بردار واحد (Unit Vector) یا بردار نرمالیزه (Normalized Vector) می‌نامیم در صورتی‌که دامنه یا طول آن برابر یک باشد:

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 = 1$$

مطابق تعریف فوق برای بردارها، برای تابع $\phi(x)$ نیز می‌توان گفت تابع $\phi(x)$ را در $a \le x \le b$ نرمال یا نرمالیزه می‌گوییم اگر داشته باشیم:

$$\int_a^b \{\phi(x)\}^2\,dx = 1$$

حال اگر مجموعه توابع $\phi$ را مطابق معادله (۵ـ۱) در نظر بگیریم به‌طوری که هر تابع نسبت به تمامی توابع دیگر مجموعه اورتوگونال باشد و هر تابع در این مجموعه نرمالیزه بوده باشد مجموعه توابع $\phi$ را مجموعه‌ای از توابع اورتونرمال (Orthonormal) می‌نامیم یعنی برای مجموعهٔ فوق باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = 0 \quad , \quad i \ne j \\ \int_a^b \{\phi_i(x)\}^2\,dx = 1 \quad , \quad i = 1,2,3,\cdots \end{cases}$$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

## ۵ـ۲ـ توابع قابل تبدیل به توابع اورتوگونال و تعریف تابع وزنی

بعضی از مجموعه توابع به خودی خود در معادله (۵ـ۲) صدق نمی‌کنند یعنی $\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx$ برای آن‌ها مساوی صفر نمی‌شود اما اگر تابعی مثل $w(x)$ در حاصل‌ضرب آن‌ها ضرب شود در آن صورت انتگرال حاصله صفر می‌گردد:

$$\int_a^b w(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx=0$$

که $w(x)$ را تابع دانسیته یا تابع وزنی (Weight Function یا Density Function) می‌نامیم. در این صورت توابع $\phi_i(x)$ و $\phi_j(x)$ را نسبت به هم اورتوگونال با تابع وزنی $w(x)$ می‌نامیم.

در این حالت اگر توابع فوق با تابع وزنی $w(x)\geq 0$ اورتونرمال باشند خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_a^b w(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\,dx=0 \quad , \quad i\neq j\\ \displaystyle\int_a^b \left\{\sqrt{w(x)}\,\phi_i(x)\right\}^2 dx=1 \quad , \quad i=j\end{cases}$$

دیده می‌شود که توابع $\sqrt{w(x)}\phi_i(x)$ در محدودهٔ $a\leq x\leq b$ توابعی اورتونرمال هستند.

## ۵ـ۳ـ تعامد توابع خاص

### ۵ـ۳ـ ۱ـ تعامد توابع sin و cos

توابع متناوب $\sin\frac{m\pi x}{L}$ و $\cos\frac{m\pi x}{L}$ با توجه به روابط زیر در محدودهٔ $2L\,(-L\leq x\leq L)$ اورتوگونال هستند.

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases} \tag{۵ـ۳}$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ L & m=n\end{cases} \tag{۵ـ۴}$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=0 \tag{۵ـ۵}$$

برای چندجمله‌ای‌های لژاندر داریم:

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1} & m=n\end{cases} \tag{۵ـ۶}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که چندجمله‌ای‌های لژاندر در فاصله $-1\leq x\leq 1$ اورتوگونال هستند.

**یادداشت:**

............................................................

............................................................

............................................................

............................................................

**مثال ۱** اگر $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+6y=0$ و $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$ به ترتیب دارای جواب‌هایی به صورت $y_1(x)$ و $y_2(x)$ باشند داریم: (مهندسی فرآوری و انتقال گاز ـ ۸۴)

۱) $\int_{-1}^{1} y_1 y_2\,dx=\frac{2}{5}$

۲) $\int_{-1}^{1} xy_1 y_2\,dx=0$

۳) $\int_{-1}^{1} y_1 y_2\,dx=\frac{2}{3}$

۴) $\int_{-1}^{1} y_1 y_2\,dx=0$

**حل:** گزینه ۴ درست است.

معادلات داده شده در صورت تست معادلات لژاندر بوده و چندجمله‌ای‌های لژاندر در بازه $[-1,1]$ متعامد هستند پس داریم:

$$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\,dx=0$$

برای چندجمله‌ای لژاندر مرتبه اول داریم:

$$P_1(x)=x$$
$$I=\int_{-1}^{1} xP_n(x)dx=\int_{-1}^{1} P_1(x)P_n(x)dx$$

از رابطه (۵ـ۶) می‌توان نوشت:

$$I=\begin{cases}0 & n\neq 1\\ \frac{2}{2\times1+1}=\frac{2}{3} & n=1\end{cases}$$

که توابع $\sqrt{x}\,J_n(\lambda x)$ , $\sqrt{x}\,J_n(\mu x)$ در فاصله $0\le x\le 1$ اورتوگونال هستند به عبارتی می‌توان گفت که **توابع $J_n(\lambda x)$ و $J_n(\mu x)$ با تابع وزنی $X$ در فاصله $0\le x\le 1$ اورتوگونال می‌باشند.**

## ۵ـ۴ـ بسط یک تابع بر حسب مجموعه توابع اورتوگونال

فرض می‌کنیم بخواهیم تابع $f(x)$ را بر حسب مجموعه توابع اورتوگونال $n=1,2,\cdots$ , $\{\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_n(x)\}$ بسط دهیم. در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\phi_n(x)$$
$$f(x)=C_1\phi_1(x)+C_2\phi_2(x)+\cdots+C_n\phi_n(x)$$

اگر طرفین را در $\phi_n(x)$ ضرب و از طرفین انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx=C_n\int_a^b \phi_n^2(x)dx$$

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

**مثال ۲** مقادیر و توابع ویژه مساله $y''+\lambda y=0$ با فرض $y(a)=0$ و $y'(0)=0$ کدامند؟

۱) $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ , $y_n=\cos\frac{n\pi x}{a}$

۲) $\lambda_n=\frac{n\pi}{a}$ , $y_n=\cos\frac{n\pi x}{a}$

۳) $\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2a}\pi\right)^2$ , $y_n=\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$

۴) $\lambda_n=\frac{2n-1}{2a}\pi$ , $y_n=\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$

**حل**: گزینه ۳ درست است.

ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$m^2+\lambda=0 \rightarrow m^2=-\lambda \rightarrow m=\pm\sqrt{\lambda}\, i$$

$$y=C_1\sin\sqrt{\lambda}\,x+C_2\cos\sqrt{\lambda}\,x \rightarrow y'=C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x-C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

با اعمال شرط مرزی $y'(0)=0$ داریم:

$$C_1\sqrt{\lambda}\cos(0)-C_2\sqrt{\lambda}\sin(0)=0 \rightarrow C_1=0 \rightarrow y=C_2\cos\sqrt{\lambda}\,x$$

با اعمال شرط مرزی $y(a)=0$ داریم:

$$C_2\cos\sqrt{\lambda}\,a=0 \xrightarrow{C_2\neq 0} \cos\sqrt{\lambda}\,a=0$$

$$\rightarrow \sqrt{\lambda}\,a=(2n-1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \lambda=\left(\frac{2n-1}{2a}\pi\right)^2$$

پس مقدار ویژه $\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2a}\pi\right)^2$ و توابع ویژه $y_n=\cos\sqrt{\lambda}\,x=\cos\frac{2n-1}{2a}\pi x$ می‌باشد.

**یادداشت**:

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

# فصل ششم

# فرمولاسیون و مدل‌سازی مسایل در مهندسی شیمی

## ۶ـ۱ـ یادآوری

### ۶ـ۱ـ۱ـ گرادیان

گرادیان میدان اسکالر $W=A(x,y,z)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{grad}\,\mathbf{A}=\nabla\mathbf{A}=\mathbf{i}\frac{\partial A}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial A}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial A}{\partial z}$$

### ۶ـ۱ـ۲ـ دیورژانس

دیورژانس میدان برداری $A=A_x\,\mathbf{i}+A_y\,\mathbf{j}+A_z\,\mathbf{k}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{div}\,\mathbf{A}=\nabla.\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

### ۶ـ۱ـ۳ـ کرل

کرل میدان برداری $A$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{curl}\,\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

**یادداشت:**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

### ۶ـ۱ـ۴ـ عملگر لاپلاسین $\nabla^2$

عملگر لاپلاسین در دستگاه‌های مختلف به شکل زیر بیان می‌شود:

الف) مختصات کارتزین

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ب) مختصات استوانه‌ای

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ج) مختصات کروی

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

**نکته:** در حالت کلی لاپلاسین یک کمیت به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\cdots$$

$n=0$ : مختصات کارتزین

$n=1$ : مختصات استوانه‌ای

$n=2$ : مختصات کروی

### ۶ـ۱ـ۵ـ مشتق مادی یا کامل (Material Derivative)

مشتق مادی یا مشتق کامل یک کمیت را که با علامت $\frac{D}{Dt}$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{DM}{Dt}=\frac{\partial M}{\partial t}+V.\nabla M$$

در دستگاه‌های مختلف مشتق کامل یا مشتق مادی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

الف) مختصات کارتزین

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+V_z\frac{\partial}{\partial z}$$

ب) مختصات استوانه‌ای

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+V_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+V_z\frac{\partial}{\partial z}$$

ج) مختصات کروی

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+V_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{V_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

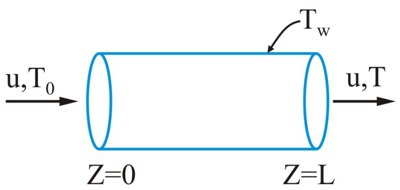
مشتق کامل اخیر را که با علامت $\frac{D}{Dt}$ نشان می‌دهیم Substantial Derivative می‌نامیم. در فرآیند یکنواخت (Steady State) در هر سه حالت فوق $\frac{\partial}{\partial t}=0$ می‌باشد.

و با تعریف $\alpha=\frac{K}{\rho C_p}$ به عنوان ضریب نفوذ حرارتی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}$$

معادله فوق یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای بوده و برای حل آن نیاز به دو شرط مرزی و یک شرط اولیه داریم.

**مثال ۱** جریانی از هوای سرد با عبور از یک لوله استوانه‌ای داغ، مطابق شکل زیر گرم می‌شود. شعاع و طول لوله به ترتیب $R$ و $L$ است. دمای دیواره استوانه مقدار ثابت $T_W$ و ضریب انتقال حرارت هوای لوله $h$ است. چگالی و گرمای ویژه هوا به ترتیب $\rho$ و $C_p$ می‌باشد. هوا با سرعت $u$ در لوله حرکت می‌کند. اگر دمای هوای ورودی $T_0$ باشد، معادله‌ای به‌دست آورید که تغییرات دمای هوا را در طول لوله در شرایط پایدار نشان دهد.




۱) $\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}+\frac{2h}{uR\rho C_p}(T-T_w)=0$

۲) $\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}-\frac{2h}{uR\rho C_p}(T-T_w)=0$

۳) $\frac{\partial T}{\partial Z}-\frac{2h}{uR\rho C_p}(T-T_w)=0$

۴) $\frac{\partial T}{\partial Z}+\frac{2h}{uR\rho C_p}(T-T_w)=0$

**حل**: گزینه ۴ درست است.

از آن‌جا که ضریب هدایت حرارتی گازها نسبت به گرمای ویژه آن‌ها کوچک است می‌توان از نفوذ حرارت نسبت به انتقال حرارت در اثر حرکت سیال صرف‌نظر کرد. این فرض را برای مایعات متحرک در لوله‌ها نیز می‌توان به‌کار برد. ولی در جامدات نمی‌توان از هدایت حرارتی صرف‌نظر کرد، زیرا ضریب هدایت حرارتی زیاد است. علاوه بر این فرض می‌کنیم چگالی، گرما ویژه و سرعت جریان هوا ثابت بوده و تولید یا مصرف حرارت نداریم.

چون توزیع دما فقط تابعی از طول لوله است، جزء حجمی استوانه‌ای شکل به طول $\Delta Z$ در نظر گرفته و موازنه انرژی را روی آن می‌نویسیم:

$$\dot{m}C_pT\Big|_Z-\dot{m}C_pT\Big|_{Z+\Delta Z}-hS(T-T_w)=0$$

$$(\rho uC_pTA)\Big|_Z-(\rho uC_pTA)\Big|_{Z+\Delta Z}-hS(T-T_w)=0 \qquad (۱\_۶)$$

$S$ سطح جانبی جزء حجم و $A$ سطح مقطع جزء حجم است به طوری که:

$$S=2\pi R\Delta Z \quad , \quad A=\pi R^2$$

**یادداشت:**

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

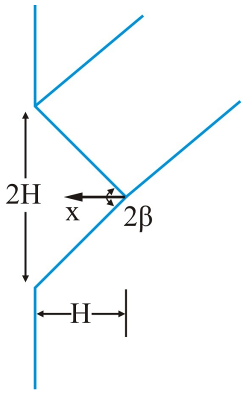
با جایگذاری $A$ و $S$ در معادله (۶ـ۱) و تقسیم طرفین بر $\rho u C_p \pi R^2 \Delta Z$ خواهیم داشت:

$$\frac{T\Big|_{Z} - T\Big|_{Z+\Delta Z}}{\Delta Z} - \frac{2h}{uR\rho C_p}\left(T-T_w\right)=0$$

چنانچه $\Delta Z \to 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{2h}{uR\rho C_p}\left(T-T_w\right)=0$$

**مثال ۲** کدام‌یک از معادلات زیر برای به‌دست آوردن توزیع دما در یک پره مثلثی مطابق شکل نشان داده شده به‌کار می‌رود؟ ضریب انتقال گرمای جابجایی پره با محیط $h$ و دمای محیط در نقاط دور از پره $T_\infty$ و ثابت هدایت گرمایی پره $k$ است. (مهندسی مخازن هیدروکربوری ـ ۸۷)




(۱) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dT}{dx}\right) - \frac{h\left(T-T_\infty\right)}{\sqrt{2}\,k}=0$

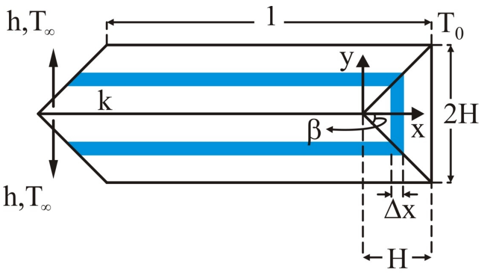
(۲) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dT}{dx}\right) + \frac{h\left(T-T_\infty\right)}{\sqrt{2}\,k}=0$

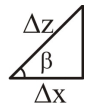
(۳) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dT}{dx}\right) - \frac{\sqrt{2}\,h\left(T-T_\infty\right)}{k}=0$

(۴) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dT}{dx}\right) + \frac{\sqrt{2}\,h\left(T-T_\infty\right)}{k}=0$

**حل**: گزینه ۳ درست است.

برای پرهٔ مثلثی جزء دیفرانسیلی مطابق شکل در نظر گرفته و با فرض یک بعدی بودن انتقال حرارت موازنه انرژی را در حالت پایدار می‌نویسیم:




$$q_x \times (1\times y)\Big|_{x} - q_x \times (1\times y)\Big|_{x+\Delta x} - hS\left(T-T_\infty\right)=0 \qquad (۶ـ۲)$$

که $S$ سطح بالا و پایین جزء دیفرانسیلی در معرض انتقال حرارت جابجایی با محیط می‌باشد.

طبق قضیه تالس:

**یادداشت:**

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

$$\frac{x}{H}=\frac{y}{2H} \quad \to \quad y=2x \qquad (۶\_۳)$$

$$S=2\times(1\times\Delta z) \quad , \quad \cos\beta=\frac{\Delta x}{\Delta z} \quad \to \quad S=2\frac{\Delta x}{\cos\beta} \qquad (۶\_۴)$$

با جایگذاری (۶ـ۳) و (۶ـ۴) در رابطه (۶ـ۲) خواهیم داشت:

$$2xq_x\Big|_x - 2xq_x\Big|_{x+\Delta x} - 2h\frac{\Delta x\left(T-T_\infty\right)}{\cos\beta}=0$$

با تقسیم طرفین بر $\Delta x$ و $\Delta x \to 0$ خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(xq_x\right)-\frac{h\left(T-T_\infty\right)}{\cos\beta}=0$$

با جایگذاری $q=-k\frac{\partial T}{\partial x}$ و ثابت فرض کردن $k$ خواهیم داشت:

$$k\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{h\left(T-T_\infty\right)}{\cos\beta}=0$$

با توجه به شکل مسئله می‌توان فهمید که:

$$\tan\beta=\frac{2}{2}=1 \quad \to \quad \beta=45^\circ \quad \to \quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

## ۶ـ۲ـ نکات مهم در حل تست‌های مدل‌سازی

**نکته ۱** در مدل‌سازی سیستم‌های استوانه‌ای در جهت $r$، در صورت وجود مشتق دوم نسبت به $r$، باید یکی از عبارات زیر در معادلهٔ دیفرانسیل وجود داشته باشد:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

**مثال۳** استوانه‌ای متخلخل و بلند به شعاع $R_0$ بعنوان کاتالیست برای واکنش درجه اول غیربازگشتی $A \xrightarrow{k} B$ در یک راکتور پر شده عمل می‌نماید اگر غلظت مادهٔ واکنش‌کننده روی سطح کاتالیست $C_{AS}$ باشد، معادله توزیع غلظت مادهٔ $A$ در داخل کاتالیست در حالت پایدار با کدام رابطه داده می‌شود؟ (ضریب نفوذ مادهٔ $A$ ثابت و برابر $D_A$ می‌باشد.)

۱) $\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2}-\frac{k}{D_A}C_A=0$

۲) $\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2}-\frac{2k}{D_A}C_A=0$

۳) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C_A}{\partial r}\right)-\frac{k}{D_A}C_A=0$

۴) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C_A}{\partial r}\right)+\frac{k}{D_A}C_A=0$

**حل:** گزینه ۳ درست است.

**یادداشت:**

.................................................................................................

.................................................................................................

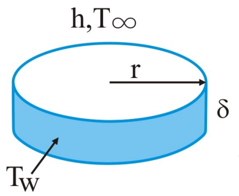
.................................................................................................

.................................................................................................

در سیستم‌های استوانه‌ای جمله $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C_A}{\partial r}\right)$ را خواهیم داشت نه $\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2}$، بنابراین گزینه ۱ و ۲ صحیح نیستند. چون مادهٔ A از بین می‌رود $\left(R_A=-kC_A\right)$ لذا گزینه ۳ درست است.

**مثال۴** سطح جانبی دیسک دایره‌ای به ضخامت ناچیز $\delta$ در دمای $T_W$ قرار دارد. ضریب انتقال حرارت متوسط برای دیسک و هوای اطراف که در دمای $T_\infty$ قرار گرفته $h$ است. کدام معادله توزیع دمای دیسک را پیش‌گویی می‌کند؟ ثابت هدایت حرارتی دیسک $k$ است.

(مهندسی شیمی ـ ۸۴)




۱) $\frac{d^2T}{dr^2}-\frac{h}{k\delta}\left(T-T_\infty\right)=0$

۲) $\frac{d^2T}{dr^2}-\frac{2h}{k\delta}\left(T-T_\infty\right)=0$

۳) $\frac{d}{dr}\left(r-\frac{dT}{dr}\right)-\frac{hr}{k\delta}\left(T-T_\infty\right)=0$

۴) $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)-\frac{2hr}{k\delta}\left(T-T_\infty\right)=0$

**حل**: گزینه ۴ درست است.

در سیستم‌های استوانه‌ای جمله $\frac{d^2T}{dr^2}$ به تنهایی ظاهر نمی‌شود. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح نیستند. در سیستم‌های استوانه‌ای جمله $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$ یا $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$ ظاهر می‌شود و گزینه ۴ درست است.

**نکته ۲** در سیستم‌های کروی در جهت $r$، در صورت وجود مشتق دوم نسبت به $r$ باید یکی از عبارات زیر در معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\quad,\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\quad,\quad r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2r\frac{\partial u}{\partial r}\quad,\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

**مثال۵** کره‌ای فلزی به شعاع $R_0$ و دمای ابتدایی $T_0$ در محیطی به دمای $T_\infty$ سرد می‌شود. توزیع دمای ناپایدار در این کره با کدام‌یک از معادلات زیر داده می‌شود؟ (ضریب هدایت حرارتی، دانسیته و ظرفیت حرارتی کره به ترتیب $k$، $\rho$ و $C$ و $\alpha=\frac{k}{\rho C}$ می‌باشد. ضریب انتقال حرارت جابجایی $h$ فرض می‌شود)

۱) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$

۲) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$

۳) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}-h\left(T-T_\infty\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$

۴) $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$

**حل**: گزینه ۲ درست است.

در مختصات کروی جمله $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$ را خواهیم داشت. عبارات $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$ و $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ و $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ در سیستم کروی ظاهر نمی‌شوند. بنابراین گزینه ۲ درست است.

**یادداشت**:

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

اگر معادله توزیع دمای ناپایدار را در سیستم کروی بنویسیم خواهیم داشت:

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}\right]+\frac{q''}{k}$$
$$=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}+\frac{u_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)$$

با فرض $u_r=u_\theta=u_\phi=0$، $\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}=0$ و $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=0$ به معادلهٔ $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ می‌رسیم.

**مثال۶** یک کره متخلخل به شعاع $R_0$ به‌عنوان کاتالیست برای واکنش درجه دوم غیربرگشتی $A\xrightarrow{k}B$ در یک راکتور پر شده عمل می‌کند. اگر غلظت مادهٔ واکنش‌دهنده $A$ روی سطح کاتالیست $C_{AS}$ باشد، معادله توزیع غلظت ماده $A$ در داخل کاتالیست در حالت ناپایدار با کدام رابطه داده می‌شود؟ (ضریب نفوذ ماده $A$ ثابت و برابر $D_A$ می‌باشد)

۱) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right)=\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t}$

۲) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial C}{\partial r}\right)=\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t}$

۳) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right)=\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{k}{D}C^2$

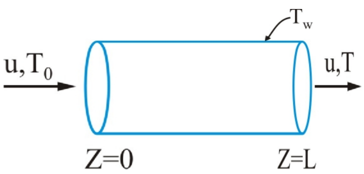
۴) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial C}{\partial r}\right)=\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{k}{D}C^2$

**حل:** گزینه ۴ درست است.

جمله مربوط به واکنش شیمیایی فقط در گزینه‌های ۳ و ۴ وجود دارد پس گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست هستند. از طرف دیگر در مختصات کروی $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial C}{\partial r}\right)$ را داریم نه $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right)$. بنابراین گزینه ۴ درست است.

**نکته ۳** در جهت حرکت توده سیال جمله مربوط به انتقال مولکولی $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد.

**مثال۷** جریانی از هوای سرد با عبور از یک لوله استوانه‌ای داغ، مطابق شکل، گرم می‌شود. شعاع و طول لوله به‌ترتیب $R$ و $L$ است. دمای دیواره استوانه مقدار ثابت $T_w$ و ضریب انتقال حرارت هوای لوله $h$ است. چگالی و گرمای ویژه هوا به ترتیب $\rho$ و $C_p$ می‌باشد. هوا با سرعت $u$ در لوله حرکت می‌کند. تغییرات دمای هوا در طول لوله در شرایط پایا با کدام‌یک از معادلات زیر داده می‌شود؟




۱) $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\frac{2h}{R\rho uC_p}(T-T_w)=0$

۲) $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{2h}{R\rho uC_p}(T-T_w)=0$

۳) $\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{2h}{R\rho uC_p}(T-T_w)=0$

۴) $\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{2h}{R\rho uC_p}(T-T_w)=0$

**حل:** گزینه ۴ درست است.

در جهت $z$ نفوذ حرارتی نداریم پس $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0$. بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست هستند. از طرف دیگر چون هوای سرد داخل لوله گرم می‌شود پس $\frac{\partial T}{\partial z}>0$ لذا گزینه ۴ درست است زیرا:

$$\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{-2h}{R\rho uC_p}\left(T-T_w\right)\xrightarrow{T<T_w}\frac{\partial T}{\partial z}>0$$

**یادداشت:**

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

# فصل هفتم

# حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

### ۷ـ۱ـ حالت کلی شرایط مرزی و شرایط مرزی همگن و غیرهمگن

در حالت کلی شرط مرزی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$au' + bu = c$$

شرط مرزی نوع اول $a = 0 \quad \rightarrow$

شرط مرزی نوع دوم $b = 0 \quad \rightarrow$

شرط مرزی نوع سوم $a, b \neq 0 \quad \rightarrow$

شرط مرزی همگن $c = 0 \quad \rightarrow$

شرط مرزی غیرهمگن $c \neq 0 \quad \rightarrow$

به طور کلی می‌توان گفت اگر درشرط مرزی فقط تابع و مشتق تابع وجود داشته باشد شرط مرزی همگن است ولی اگر در شرط مرزی غیر از تابع و مشتق تابع، عدد ثابت هم وجود داشته باشد شرط مرزی غیر همگن است. به عنوان مثال:

الف) شرط مرزی نوع اول همگن

ب) شرط مرزی نوع دوم همگن

ج) شرط مرزی نوع سوم همگن

$$\begin{cases} T(x=0\ ,\ t) = 0 \\ \dfrac{\partial T(x=L\ ,\ t)}{\partial x} = 0 \\ k\dfrac{\partial T(x=L\ ,\ t)}{\partial x} = h\ T(x=L, t) \end{cases}$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

## ۷ـ۲ـ شرایط استفاده از روش جداسازی متغیرها

سه شرط کلی لازم برای استفاده از روش جداسازی متغیرها وجود دارد:

### الف) شرط فیزیک مسئله

مسائلی را می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل نمود که در راستایی که می‌خواهیم مسئله را حل کنیم طول محدود و مشخصی داشته باشیم مانند میله با طول L یا کره با شعاع مشخص. به همین دلیل معمولاً برای اجسام یا سیستم‌های نیمه بی‌نهایت (Semi Infinite) از این روش استفاده نمی‌شود.

### ب) شرط معادله دیفرانسیل

فقط معادلات دیفرانسیل پاره‌ای همگن را می‌توان از روش جداسازی متغیرها حل نمود. در صورتی‌که معادله دیفرانسیل پاره‌ای ناهمگن باشد، برای حل این معادلات از روش جمع آثار یا بر هم نهی (Super Position) استفاده می‌کنیم.

### ج) شرط شرایط مرزی

شرایط مرزی باید به گونه‌ای باشد که پس از تغییر متغیر بتوانیم شرایط مرزی را به شکل همگن درآوریم.

**مثال ۱** معادله دیفرانسیل توزیع دمای ناپایدار در قطعه‌ای محدود با طول L و سطح مقطع ثابت با رابطه زیر داده شده است. معادله را با شرایط مرزی و اولیه داده شده حل نمائید.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$IC: T(x\ ,\ t=0)=T_0$$

$$BC.1: T(x=0\ ,\ t)=0$$

$$BC.2: T(x=L\ ,\ t)=0$$

**حل** :

برای حل مسئله PDE به روش جداسازی متغیرها، باید شرایط مرزی همگن بوده و یا هر دو شرط مرزی با تغییر متغیر قابل تبدیل به حالت همگن باشند. در این مسئله هر دو شرط مرزی همگن می‌باشد. فرض می‌کنیم مسئله را بتوانیم با استفاده از جداسازی متغیرها حل کنیم:

$$T(x,t)=F(x).\tau(t)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}\quad\rightarrow\quad\frac{\partial^2 (F.\tau)}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial (F.\tau)}{\partial t}$$

**یادداشت:**

...........................................................................................................

...........................................................................................................

...........................................................................................................

...........................................................................................................

$\tau$ تابع x نمی‌باشد همینطور F تابعیتی از t ندارد پس:

$$\tau\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{F}{\alpha}\frac{\partial \tau}{\partial t}\ \xrightarrow[\text{تقسیم می‌شوند}]{\text{طرفین بر } F\tau}\ \frac{F''}{F}=\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}$$

F و درنتیجه $F''$ فقط تابع x است در صورتی که $\tau$ و درنتیجه $\tau'$ فقط تابعی از t است لذا می‌توان گفت یک تابع مستقل از x ( یعنی $\frac{F''}{F}$) با یک تابع مستقل از t یعنی $\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}\right)$ برابر است. این تساوی زمانی برقرار است که هر دو طرف مقدار ثابتی باشند:

$$\frac{F''}{F}=\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=k=\begin{cases}\text{موهومی}\\ \text{حقیقی}\begin{cases}+\lambda^2\\0\\-\lambda^2\end{cases}\end{cases}$$

k را ثابت جداسازی می‌نامیم. ثابت جداسازی k زمانی موهومی است که شرایط مرزی با زمان تغییر کند. این حالت را بررسی نخواهیم کرد.

وقتی k حقیقی باشد به دو معادله دیفرانسیلی معمولی زیر می‌رسیم:

$$\frac{F''}{F}=k \quad , \quad \frac{1}{\alpha}\frac{\tau''}{\tau}=k$$

شرایط مرزی به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases}T(x=0,t)=0 \ \rightarrow\ F(x=0)\tau(t)=0 \ \rightarrow\ F(x=0)=0\\ T(x=L,t)=0 \ \rightarrow\ F(x=L)\tau(t)=0 \ \rightarrow\ F(x=L)=0\end{cases}$$

وقتی k حقیقی باشد سه حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: $k=+\lambda^2>0$

$$\begin{cases}\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=+\lambda^2 \ \rightarrow\ \tau(t)=C_1e^{+\alpha\lambda^2 t}\\ F''-\lambda^2F=0\end{cases}$$

جواب نهایی برابر است با $T(x,t)=F(x).\tau(t)$ و در نتیجه با گذشت زمان، $\tau(t)$ و دما مرتباً افزایش یافته و در زمان بی نهایت دما به سمت بی نهایت میل می کند.

$$t\longrightarrow\infty\ :\ T(x,t)\longrightarrow\infty$$

که این شرط با فیزیک مسأله تطابق ندارد. لذا $k=+\lambda^2$ نمی تواند جواب قابل قبولی باشد.

حالت دوم: $k=0$

$$\begin{cases}\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=0 \ \rightarrow\ \tau(t)=C_1\\ \frac{F''}{F}=0 \ \rightarrow\ F''=0 \ \rightarrow\ F(x)=Ax+B\end{cases}$$

با فرض اینکه $F(x)$ و $\tau(t)$ هر دو به دست آیند از حاصلضرب این دو تابع مقدار $T(x,t)$ نیز به دست می‌آید.

$$T(x,t)=F(x).\tau(t)=C_1(Ax+B)$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

مشخص است که $T(x,t)$ به دست آمده، تابعیتی از t نداشته و جواب پایدار (Steady state) مسئله می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} F(0)=0 \;\rightarrow\; B=0 \;\rightarrow\; F(x)=Ax \\ F(L)=0 \;\rightarrow\; AL=0 \;\rightarrow\; A=0 \end{array}\right\} \rightarrow F(x)=0$$

پس جواب پایدار مسئله برابر صفر می‌باشد.

$$T(x,t)=F(x).\tau(t)\xrightarrow{F(x)=0}T(x,t)=0$$

حالت سوم: $k=-\lambda^2>0$

$$\frac{F''}{F}=-\lambda^2 \;\rightarrow\; F''+\lambda^2F=0$$

معادله مشخصه : $m^2+\lambda^2=0 \rightarrow m_1\,,\,m_2=\pm\lambda i$

$$F(x)=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x$$

$$F(0)=0 \;\rightarrow\; 0=0+B \;\rightarrow\; B=0 \;\rightarrow\; F(x)=A\sin\lambda x$$

$$F(L)=0 \;\rightarrow\; 0=A\sin\lambda L\xrightarrow{A\neq0}\sin\lambda L=0=\sin n\pi \;\rightarrow\; \lambda_n=\frac{n\pi}{L}\;,\; n=1,2,3,\ldots$$

$\lambda_n$ را مقدار ویژه (Eigen value) می‌نامیم. پس:

$$F(x)=A\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=-\lambda^2 \;\rightarrow\; \frac{d\tau}{dt}=-\alpha\lambda^2\tau \;\rightarrow\; \frac{d\tau}{\tau}=-\alpha\lambda^2dt$$

$$\tau(t)=C_2e^{-\alpha\lambda^2t}=C_2e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}$$

به ازای n های مختلف $\lambda_n$های مختلف و درنتیجه $F(x)$ و $\tau(t)$های متفاوت به دست می‌آید. با استفاده از اصل برهم‌نهی، جواب کلی مجموع کلیه جواب‌های فوق است:

$$T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\lambda_nx\right).e^{-\alpha\lambda_n^2t}$$

که $C_n=AC_2$ بوده و $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}\,,\,n=1,2,\ldots$ می‌باشد.

برای به دست آوردن $C_n$ شرط اولیه را اعمال می‌کنیم:

$$T(x,t=0)=T_0 \rightarrow T_0=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\lambda_nx\right)$$

$T_0$ را برحسب مجموعه توابع اورتوگونال $\sin\left(\lambda_nx\right)$ بسط داده‌ایم پس:

$$C_n=\frac{\int_0^L T_0\sin\left(\lambda_nx\right)dx}{\int_0^L\sin^2\left(\lambda_nx\right)dx}$$

$$C_n=\frac{T_0\int_0^L\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}{\frac{L}{2}}=\frac{T_0\frac{L}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]}{\frac{L}{2}}$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{4T_0}{n\pi} & n = \text{فرد} \\ 0 & n = \text{زوج} \end{cases}$$

پس جواب کلی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n x).e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad \text{و} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots)$$

و یا:

$$T(x,t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n=odd}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).e^{-\alpha\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

**خلاصه:** جواب معادله $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$T(x,t) = T_s + \sum A_n \phi_n(x).e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$

که $T_s$ جواب پایدار مسئله بوده و در ادامه روش کوتاهی برای یافتن آن ارائه خواهد شد. $\phi_n(x)$ و $\lambda_n$ به ترتیب تابع ویژه و مقدار ویژه می‌باشند که نوع تابع ویژه و مقدار ویژه به نوع شرط مرزی در $x = 0$ و $x = L$ بستگی دارد. جدول (۷ـ۱) برای یافتن $\phi_n(x)$ و $\lambda_n$ به کار می‌رود. ضمناً برای یافتن $A_n$ کافی است شرط اولیه را اعمال کنیم.

**جدول (۷ـ۱): مقادیر $\lambda_n$ و $\phi_n(x)$ برای معادله** $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$

| حالت | شرایط مرزی | | مقدار ویژه $\lambda_n$ | تابع ویژه $\phi_n(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| | $x = 0$ | $x = L$ | | |
| ۱ | نوع اول | نوع اول | $\frac{n\pi}{L}$ | $\sin \lambda_n x$ |
| ۲ | نوع اول | نوع دوم | $\frac{2n+1}{2L}\pi$ | $\sin \lambda_n x$ |
| ۳ | نوع دوم | نوع دوم | $\frac{n\pi}{L}$ | $\cos \lambda_n x$ |
| ۴ | نوع دوم | نوع اول | $\frac{2n+1}{2L}\pi$ | $\cos \lambda_n x$ |
| ۵ | نوع اول | نوع سوم | $\cot(\lambda L) = \frac{-h}{k\lambda}$ (ریشه‌های مثبت) | $\sin \lambda_n x$ |
| ۶ | نوع دوم | نوع سوم | $\tan(\lambda L) = \frac{+h}{k\lambda}$ (ریشه‌های مثبت) | $\cos \lambda_n x$ |
| ۷ | نوع سوم | نوع اول | با تغییر مبدأ مختصات مشابه حالت (۵) می‌باشد. | $\sin \lambda_n x$ |
| ۸ | نوع سوم | نوع دوم | با تغییر مبدأ مختصات مشابه حالت (۶) می‌باشد. | $\cos \lambda_n x$ |

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## ۷-۳-معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با شرایط مرزی ناهمگن

در این قسمت به حل معادلات PDE با شرایط مرزی ناهمگن می‌پردازیم.

**مثال ۲** معادله توزیع دما را برای معادله دیفرانسیل PDE، با شرایط مرزی و اولیه داده شده به دست آورید.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x\ ,\ t=0) = F(x) \qquad (۱\_۷)$$

$$T(x=0\ ,\ t) = T_1 \qquad (۲\_۷)$$

$$T(x=L\ ,\ t) = T_2 \qquad (۳\_۷)$$

**حل:**

معادله داده شده، همگن می‌باشد. در راستای x که دنبال توزیع دما هستیم، طول محدود و مشخص (L) را داریم. اما با تغییر متغیر نمی‌توانیم شرایط مرزی را در $x=0$ و $x=L$ همزمان به صورت همگن درآوریم. هرگاه شرایط مرزی را نتوانیم همزمان به صورت همگن درآوریم برای حل معادله PDE از روش جمع آثار یا برهم‌نهی (Super Position) استفاده می‌کنیم.

در این روش از مفهوم دمای تعادلی استفاده می‌کنیم. به این شکل که تغییرات $T(x,t)$ را به دو قسمت $v(x,t)$ و $u(x)$ تقسیم می‌کنیم که $v(x,t)$ نمایانگر تغییرات دما تا زمان رسیدن به حالت تعادل و $u(x)$ نمایانگر دمای حالت تعادل می‌باشد. لذا:

$$T(x,t) = v(x,t) + u(x) \qquad (۴\_۷)$$

به عبارتی $u(x)$ جواب حالت Steady State سیستم است و در آن متغیر زمان وجود ندارد.

با قرار دادن مقدار $T(x,t)$ از معادله (۴_۷) در معادله خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

مقدار $T(x,t)$ را در شرایط مرزی و اولیه نیز قرار می‌دهیم:

معادله (۱_۷) $\Rightarrow \quad v(x, t=0) + u(x) = F(x)$

معادله (۲_۷) $\Rightarrow \quad v(x=0, t) + u(x=0) = T_1$

معادله (۳_۷) $\Rightarrow \quad v(x=L, t) + u(x=L) = T_2$

$u(x)$ جواب پایدار می‌باشد $\left(u(x) = T(x, t\to\infty)\right)$ بنابراین باید در معادله PDE و در شرایط مرزی صدق می‌کند. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} \xrightarrow{\text{تابع t نیست. u}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \rightarrow u = C_1 x + C_2 \qquad (۵\_۷)$$

$u(x)$ باید در شرایط مرزی نیز صدق کند:

$$u(x=0) = T_1 \qquad (۶\_۷)$$

$$u(x=L) = T_2 \qquad (۷\_۷)$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

با اعمال شرایط (۷ـ۶) و (۷ـ۷) در معادله (۷ـ۵) مقدار تابع $u(x)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(x)=T_1+\left(\frac{T_2-T_1}{L}\right)x \tag{۷ـ۸}$$

با توجه به اینکه u تابعی از t نمی‌باشد $\left(\frac{\partial u}{\partial t}=0\right)$، معادله زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial t}$$

شرایط مرزی و اولیه را می‌توان برای $V(x,t)$ به صورت زیر درآورد:

$$\begin{cases} v(x,t=0)+u(x)=F(x)\rightarrow v(x,t=0)=g(x) \\ v(x=0,t)+u(x=0)=T_1 \xrightarrow{u(x=0)=T_1} v(x=0,t)=0 \\ v(x=L,t)+u(x=L)=T_2 \xrightarrow{u(x=L)=T_2} v(x=L,t)=0 \end{cases}$$

برای یافتن $v(x,t)$ کافی است معادله زیر را با شرایط مرزی و شرط اولیه داده شده حل کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial t} \\ v(x,t=0)=g(x) \\ v(x=0,t)=0 \\ v(x=L,t)=0 \end{cases}$$

جواب این معادله همانطور که در مثال ۱ همین فصل توضیح داده شد، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\lambda_n x).e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \quad , \quad \lambda_n=\frac{n\pi}{L} \quad , \quad n=1,2,\dots$$

برای یافتن $A_n$ کافی است شرط اولیه را اعمال کنیم.
جواب کلی $T(x,t)$ برابر خواهد بود با:

$$T(x,t)=u(x)+v(x,t)$$

$$T(x,t)=T_1+\left(\frac{T_2-T_1}{L}\right)x+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\lambda_n x).e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

**نکته مهم**: همانطور که در مسئله بالایی مشاهده شد برای پیدا کردن جواب پایدار در یک معادله PDE (Steady State)، کافی است $\frac{\partial}{\partial t}$ را مساوی صفر قرار داده و معادله حاصل را با شرایط مرزی داده شده حل کنیم. به روش حل مثال زیر توجه کنید.

**مثال ۳** معادله دیفرانسیل توزیع درجه حرارت در شرایط ناپایدار (transient) در یک میله به صورت $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ است درجه حرارت در دو طرف میله به صورت $T(L,t)=B$ و $T(0,t)=A$ بیان شده است و نیز شرط اولیه به صورت $T(x,t=0)=f(x)$ می‌باشد. در این صورت درجه حرارت تعادلی میله (وقتی که زمان به بی‌نهایت نزدیک شود) کدام است؟(مهندسی مخازن هیدروکربوری ـ ۱۳۸۱)

۱) $f(x)$ ۲) $A+Bx$ ۳) $B+\frac{A-B}{L}x$ ۴) $A+\frac{B-A}{L}x$

**یادداشت**:

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

**حل:** گزینه ۴ درست است.

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x\,,\,t=0)=f(x)$$

$$T(0\,,\,t)=A$$

$$T\left(L,t\right)=B$$

همانطور که گفته شد برای پیدا کردن جواب پایدار یک معادله PDE، کافی است $\frac{\partial}{\partial t}$ را مساوی صفر قرار داده و معادله حاصل را با شرایط مرزی داده شده حل کنیم:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=0 \;\rightarrow\; \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0 \;\rightarrow\; T=C_1x+C_2$$

$$\begin{cases} T(0)=A \;\rightarrow\; 0+C_2=A \;\rightarrow\; C_2=A \;\rightarrow\; T=C_1x+A \\ T(L)=B \;\rightarrow\; B=C_1L+A \;\rightarrow\; C_1=\dfrac{B-A}{L} \end{cases}$$

پس:

$$T_{st.st.}=A+\frac{B-A}{L}x$$

## ۷-۴- حل معادله‌ی لاپلاس برای یک صفحه (دوبعدی)

**مثال ۴** معادله دو بعدی توزیع دما را در صفحه در حالت پایدار براساس شرایط مرزی داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

$$\begin{cases} T\left(x=0,y\right)=T_0 \\ T\left(x=a,y\right)=T_0 \\ T\left(x,y=0\right)=T_0 \\ T\left(x,y=b\right)=T_1 \end{cases}$$

برای حل معادله لاپلاس از روش جداسازی متغیرها، فقط یک شرط مرزی غیرهمگن قابل قبول است پس، پیش از حل مساله با استفاده از یک تغییر متغیر، سه تا از شرایط مرزی را همگن می‌کنیم.

$$\theta\left(x,y\right)=T\left(x,y\right)-T_0$$

با اعمال تغییر متغیر و بازنویسی مساله، معادله و شرایط مرزی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=0$$

**یادداشت:**

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

$$\begin{cases}\theta(x=0,y)=0\\ \theta(x=a,y)=0\\ \theta(x,y=0)=0\\ \theta(x,y=b)=\theta_1\end{cases}$$

این معادله دیفرانسیل پاره‌ای را می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کرد.

$$\theta(x,y)=X(x).Y(y)\ \rightarrow\ \frac{\partial^2(XY)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(XY)}{\partial y^2}=0$$

$$\rightarrow\quad Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0\quad \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین را بر } XY}\quad \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0$$

$$\frac{-X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=k=\begin{cases}0\\ \lambda^2\\ -\lambda^2\end{cases}$$

قبل از ادامه حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای، شرایط مرزی را بازنویسی می‌کنیم:

$$\theta(x=0,y)=0\ \rightarrow\ X(x=0).Y(y)=0\ \rightarrow\ X(x=0)=0$$

از سایر شرایط مرزی نیز می‌توان به نتایج مشابهی رسید:

$$\begin{cases}X(x=0)=0\\ X(x=a)=0\\ Y(y=0)=0\\ \theta(x,y=b)=\theta_1\end{cases}$$

**نکته:** علامت $\lambda^2$ را طوری انتخاب می‌کنیم که همیشه در راستا یا راستاهای ناهمگن به جواب اورتوگونال برسیم.

در این مثال باید علامت $\lambda^2$ به گونه‌ای باشدکه در راستای $x$ به تابع اورتوگونال برسیم (طبیعی است در چنین شرایطی باید در راستای $y$ به تابع غیر اورتوگونال برسیم) زیرا راستای ناهمگن در این مسئله، راستای $x$ است.

حالت اول: $k=0$

$$\frac{-X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=0\quad\rightarrow\quad X''=0$$

$$X''=0\quad\rightarrow\quad X(x)=C_1x+C_2$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$X(x=0)=0\quad\rightarrow\quad 0=0+C_2\quad\rightarrow\quad C_2=0\quad\rightarrow\quad X(x)=C_1x$$

$$X(x=a)=0\quad\rightarrow\quad C_1a=0\quad\xrightarrow{a\neq 0}\quad C_1=0\quad\rightarrow\quad X(x)=0$$

بنابراین به‌ازای $k=0$ جواب برابر خواهد بود با:

$$\theta(x,y)=X(x)\cdot Y(y)\quad\xrightarrow{X(x)=0}\quad\theta(x,y)=0$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

حالت دوم: $k=+\lambda^2$

علامت $\lambda^2$ باید به گونه‌ای انتخاب شود که در راستای x به جواب اورتوگونال برسیم:

$$\begin{cases} -\dfrac{X''}{X}=\lambda^2 \rightarrow X''+\lambda^2 X=0 \rightarrow D^2+\lambda^2=0 \rightarrow D=\pm\lambda i \\ X(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{Y''}{Y}=\lambda^2 \rightarrow Y''-\lambda^2 Y=0 \rightarrow D^2-\lambda^2=0 \rightarrow D=\pm\lambda \\ Y(y)=A'\sinh(\lambda y)+B'\cosh(\lambda y) \end{cases}$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases} X(x=0)=0 \;\rightarrow\; 0=0+B \;\rightarrow\; B=0 \;\rightarrow\; X(x)=A\sin(\lambda x) \\ X(x=a)=0 \;\rightarrow\; 0=A\sin(\lambda a) \;\rightarrow\; \sin(\lambda a)=0=\sin(n\pi) \;\rightarrow\; \lambda_n=\dfrac{n\pi}{a} \quad , \quad n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

$$Y(y=0)=0 \;\rightarrow\; 0=0+B' \;\rightarrow\; B'=0 \;\rightarrow\; Y(y)=A'\sinh(\lambda y)$$

$\theta(x,y)=X(x).Y(y)$ بوده و بنابراین $\theta(x,y)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\theta(x,y)=0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sinh\frac{n\pi}{a}y \;\rightarrow\; T(x,y)=T_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{a}x\cdot\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

برای یافتن $C_n$ کافیست شرط مرزی غیرهمگن $\theta(x,y=b)=\theta_1$ را در معادله (بالا) اعمال کنیم.

## ۷ـ۵ـ کاربرد روش جداسازی متغیرها برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در سیستم استوانه‌ای

در این قسمت می‌خواهیم با حل مثال‌هائی روش جداسازی متغیرها را برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در سیستم استوانه‌ای بررسی کنیم.

**مثال ۵** معادله توزیع دما را در استوانه‌ای مطابق شکل با شرایط مرزی داده شده به دست آورید.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ T(r,t=0)=T_0 \\ \dfrac{\partial T(r=0,t)}{\partial r}=0 \quad \text{یا} \quad T(r=0,t)=\text{محدود} \\ T(r=R,t)=T_1 \end{cases}$$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

ابتدا شرایط مرزی را به حالت همگن درمی‌آوریم. برای این کار از تغییر متغیر $\theta(r,t)=T(r,t)-T_1$ استفاده می‌کنیم. با بازنویسی معادله، شرایط مرزی و اولیه خواهیم داشت:

(۹ـ۷)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\right)=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial\theta}{\partial t} \\ \theta(r,t=0)=T_0-T_1=\theta_0 \\ \dfrac{\partial\theta(r=0,t)}{\partial r}=0 \quad \text{یا} \quad \theta(r=0,t)=\text{محدود} \\ \theta(r=R,t)=0 \end{cases}$$

حال معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی همگن بوده و در راستای r که می‌خواهیم توزیع دما را به دست آوریم طول محدود و مشخص (R) داریم. پس از روش جداسازی متغیرها می‌توان استفاده کرد.

$$\theta(r,t)=F(r).\tau(t)$$

حال در معادله اصلی قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial(F\tau)}{\partial r}\right]=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial(F\tau)}{\partial t} \longrightarrow \frac{\tau}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF')=\frac{F}{\alpha}\tau'$$

طرفین را بر $F\tau$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{Fr}\frac{\partial}{\partial r}(rF')=\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=k=\begin{cases}0\\+\lambda^2\\-\lambda^2\end{cases}$$

یک تابع زمانی با یک تابع مکانی فقط زمانی برابر خواهند بود که هردو برابر مقدار ثابتی باشند.

حال شرایط مرزی را برحسب تابع مکانی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \theta(r=0,t)=\text{محدود} \rightarrow F(r=0)\tau(t)=\text{محدود} \rightarrow F(r=0)=\text{محدود} \\ \theta(r=R,t)=0 \rightarrow F(r=R).\tau(t)=0 \rightarrow F(r=R)=0 \end{cases}$$

حالت اول: $k=0$

به ازای $k=0$ جواب حالت پایدار به دست می‌آید. برای معادله (۹ـ۷) جواب پایدار برابر صفر می‌باشد (تحقیق به عهده دانشجویان).

حالت دوم: $k=+\lambda^2$

در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای که $\dfrac{\partial}{\partial t}$ وجود داشته باشد $k=\lambda^2$ غیرقابل قبول می‌باشد.

حالت سوم: $k=-\lambda^2$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=-\lambda^2 \rightarrow \tau(t)=c_1e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

$$\frac{1}{Fr}\frac{\partial}{\partial r}(rF') = -\lambda^2 \rightarrow \frac{1}{Fr}(F' + rF'') = -\lambda^2$$
$$\rightarrow \quad rF'' + F' + \lambda^2 rF = 0 \quad \rightarrow \quad r^2F'' + rF' + \lambda^2 r^2 F = 0$$

جواب این معادله بسل معمولی برابر است با:

$$F(r) = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r)$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$F(r=0) = \text{محدود} \quad \rightarrow \quad AJ_0(0) + B(-\infty) = \text{محدود} \quad \rightarrow \quad B = 0 \quad \rightarrow \quad F(r) = AJ_0(\lambda r)$$
$$F(r=R) = 0 \quad \rightarrow \quad AJ_0(\lambda R) = 0 \quad \xrightarrow{A \neq 0} \quad J_0(\lambda R) = 0$$

از این رابطه می‌توان برای پیدا کردن مقادیر ویژه $\lambda_n$ استفاده کرد.
بنابراین جواب $\theta(x,y)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\theta(x,y) = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r) \cdot e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

$$T(x,y) = T_1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r) \cdot e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

برای پیدا کردن $C_n$ کافی است شرط اولیه $\theta(r,t=0) = \theta_0$ را در معادله‌ی (۱۱ـ۱۴۴) اعمال کنیم.

## ۷-۶- کاربرد روش جداسازی متغیرها برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در سیستم کروی

در این قسمت با حل مثال‌هائی کاربرد روش جداسازی متغیرها را برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در سیستم کروی بررسی می‌کنیم.

**مثال ۶** با شرایط مرزی داده شده، توزیع دما را در کره نشان شده به دست آورید.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\begin{cases} T(r,t=0) = T_0 \\ T(r=0,t) = \text{محدود} \\ T(r=R,t) = T_1 \end{cases}$$

ابتدا با تغییر متغیر $\theta(r,t) = T(r,t) - T_1$ شرایط مرزی را به صورت همگن درمی‌آوریم. با این تغییر متغیر، معادله و شرایط مرزی به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad (۱۰\text{ـ}۷)$$

$$\begin{cases} \theta(r,t=0) = T_0 - T_1 = \theta_0 \\ \theta(r=0,t) = \text{محدود} \\ \theta(r=R,t) = 0 \end{cases}$$

**یادداشت:**

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

حال می‌توان از روش جداسازی متغیرها برای حل این معادله استفاده کرد:

$$\theta(r,t)=F(r).\tau(t)$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل پاره‌ای (۷ـ۱۰) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial(F\tau)}{\partial r}\right]=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial(F\tau)}{\partial t}$$

$$\frac{\tau}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F'\right)=\frac{F}{\alpha}\tau' \xrightarrow[\text{بر } F\tau]{\text{با تقسیم طرفین}} \frac{1}{Fr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F'\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=k=\begin{cases}0\\+\lambda^2\\-\lambda^2\end{cases}$$

حال شرایط مرزی را برحسب تابع مکانی $F(r)$ می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\theta(r=0,t)=\text{محدود} \rightarrow F(r=0).\tau(t)=\text{محدود} \rightarrow F(r=0)=\text{محدود}\\ \theta(r=R,t)=0 \rightarrow F(r=R).\tau(t)=0 \rightarrow F(r=R)=0\end{cases}$$

حالت اول: $k=0$

به ازای $k=0$ جواب پایدار مسئله به دست می‌آید. برای معادله پاره‌ای (۷ـ۱۰) جواب پایدار صفر می‌باشد (تحقیق به عهده دانشجویان).

$$\theta_s=0$$

حالت دوم: $k=+\lambda^2$

همان‌طور که قبلاً هم گفته شد در مسائل ناپایدار که $\frac{\partial}{\partial t}$ وجود دارد $k=+\lambda^2$ غیرقابل قبول بوده و ثابت جدائی همواره منفی می‌باشد.

حالت سوم: $k=-\lambda^2$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=-\lambda^2 \rightarrow \tau(t)=e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{Fr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F'\right)=-\lambda^2 \rightarrow r^2F''+2rF'+\lambda^2r^2F=0 \qquad (۷ـ۱۱)$$

معادله (۷ـ۱۱) را می‌توان حل و جواب آن را برحسب توابع بسل نوشت ولی در مختصات کروی با استفاده از تغییر متغیر $F(r)=\frac{\psi(r)}{r}$ می توان معادله را به یک معادله ساده‌تر در مختصات کارتزین تبدیل کرد:

$$F(r)=\frac{\psi(r)}{r} \rightarrow F'(r)=\frac{r\psi'-\psi}{r^2} \qquad (۷ـ۱۲)$$

$$F''(r)=\frac{\left[(\psi'+r\psi'')-\psi'\right]r^2-2r(r\psi'-\psi)}{r^4}=\frac{r^2\psi''-2r\psi'+2\psi}{r^3} \qquad (۷ـ۱۳)$$

حال روابط (۷ـ۱۲) و (۷ـ۱۳) را در معادله (۷ـ۱۱) قرار می‌دهیم. پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\psi''+\lambda^2\psi=0 \rightarrow D^2+\lambda^2=0 \rightarrow D=\pm\lambda i \rightarrow \psi(r)=A\sin(\lambda r)+B\cos(\lambda r)$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

شرایط مرزی قبلاً برحسب تابع مکانی F نوشته شده بود. حال این شرایط مرزی را روی $\psi(r)$ منتقل می‌کنیم:

$$F(r=0)=\text{محدود} \xrightarrow{\psi(r)=rF(r)} \psi(r=0)=0$$

$$F(r=R)=0 \xrightarrow{\psi(r)=rF(r)} \psi(r=R)=RF(r=R) \rightarrow \psi(r=R)=0$$

حال معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \psi(r)=A\sin(\lambda r)+B\cos(\lambda r) \\ \psi(r=0)=0 \rightarrow 0=0+B \rightarrow B=0 \rightarrow \psi(r)=A\sin(\lambda r) \\ \psi(r=R)=0 \rightarrow A\sin(\lambda R)=0 \xrightarrow{A\neq 0} \sin(\lambda R)=0=\sin(n\pi) \rightarrow \lambda_n=\dfrac{n\pi}{R}, n=1,2,... \end{cases}$$

حال تابع مکانی $F(r)$ را می‌توان به دست آورد:

$$F(r)=\frac{\psi(r)}{r} \rightarrow F(r)=A\frac{\sin(\lambda r)}{r}$$

حال $\theta(r,t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\theta(r,t)=0+T(r,t)=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\sin(\lambda_n r)}{r}\cdot e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

## ۷-۷- روش کوتاه و تستی برای حل معادله‌ی لاپلاس

برای حل معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$ ابتدا با تغییر متغیر تا حد امکان شرایط مرزی را به حالت همگن درمی‌آوریم، چون مسئله لاپلاس درنهایت بایک شرط مرزی غیرهمگن قابل حل می‌باشد. اگر پس از تغییر متغیر معادله لاپلاس به صورت $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=0$ نوشته شود در این صورت پاسخ نهائی معادله لاپلاس به صورت زیر خواهد بود:

$$\theta(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\phi(\lambda_n x)\tau(\lambda_n y)$$

چنان‌چه $\phi$، $\tau$ و $\lambda_n$ مشخص شوند حل مسئله تمام است. برای مشخص کردن این مقادیر کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

۱) در راستای ناهمگن باید به تابع اورتوگونال ( sin یا cos) برسیم.

۲) اگر در یک راستا تابع ویژه، اورتوگونال باشد در راستای دیگر تابع ویژه، غیر اورتوگونال (sinh یا cosh) خواهد بود.

۳) برای تعیین نوع تابع ویژه به شرط مرزی در نقطه $x=0$ یا $y=0$ نگاه می‌کنیم. اگر در نقطه صفر شرط مرزی نوع اول باشد تابع ویژه sin یا sinh خواهد بود (بسته به اورتوگونال یا غیر اورتوگونال بودن تابع)، ولی اگر در $x=0$ یا $y=0$ شرط مرزی نوع دوم باشد تابع ویژه cos یا cosh خواهد بود.

۴) برای تعیین مقدار ویژه $(\lambda_n)$ ابتدا راستای اورتوگونال را با روش گفته شده در مرحله (۱) تعیین می‌کنیم. سپس به شرایط مرزی در این راستا نگاه می‌کنیم. اگر هر دو شرط مرزی از یک جنس باشند $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$ خواهد بود ولی اگر شرایط مرزی از یک جنس نباشند $\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi$ خواهد بود (L بعد مکانی در راستای اورتوگونال).

**یادداشت:**

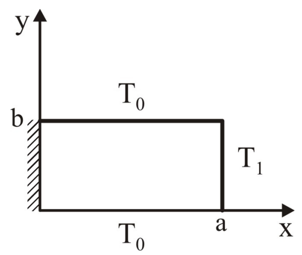
..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**مثال ۷** برای صفحه نشان داده‌شده در شکل مقابل با شرایط مرزی داده شده کدام گزینه توزیع دمای پایدار را درست نشان می‌دهد؟




۱) $T(x,y)=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).\cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$

۲) $T(x,y)=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right).\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$

۳) $T(x,y)=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right).\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$

۴) $T(x,y)=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}x\right).\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$

**حل** : گزینه ۳ درست است.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T(x=0,y)}{\partial x}=0\\ T(x=a,y)=T_1\\ T(x,y=0)=T_0\\ T(x,y=b)=T_0\end{cases} \xrightarrow{\theta=T-T_0} \begin{cases}\dfrac{\partial \theta(x=0,y)}{\partial x}=0\\ \theta(x=a,y)=\theta_1\\ \theta(x,y=0)=0\\ \theta(x,y=b)=0\end{cases}$$

از شرط مرزی $\theta=(x=a\ ,\ y)=\theta_1$ مشخص است راستای y ناهمگن بوده و در راستای y باید به تابع اورتوگونال برسیم و چون در $y=0$ شرط مرزی نوع اول است پس در راستای y تابع ویژه $\sin(\lambda_n y)$ خواهد بود. در راستای x تابع ویژه غیر اورتوگونال است و چون در $x=0$ شرط مرزی نوع دوم است پس تابع ویژه راستای x برابر $\cosh(\lambda_n x)$ خواهد بود. در راستای اورتوگونال (y) هر دو شرط مرزی از یک جنس هستند پس $\lambda_n=\frac{n\pi}{b}$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\theta(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right).\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$T(x,y)=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right).\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

**توجه**: برای حل معادلات دیفرانسیل دوبعدی در سیستم استوانه‌ای در حالت پایدار نیز می‌توان از روشی که برای حل معادله لاپلاس گفته شد استفاده کرد.

**یادداشت**:

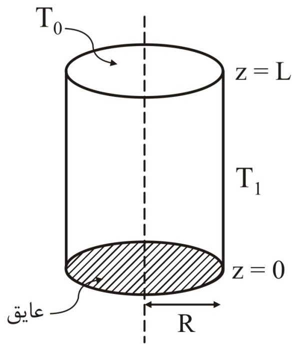
..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

**مثال ۸** برای استوانه توپر نشان داده شده در شکل، توزیع دمای پایدار $T(r,z)$ عبارت است از:




۱) $T=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n r).\cos(\lambda_n z)$

۲) $T=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n r).\cosh(\lambda_n z)$

۳) $T=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}A_nY_n(\lambda_n r).\cos(\lambda_n z)$

۴) $T=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n r).\sinh(\lambda_n z)$

**حل :** گزینه ۲ درست است.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0$$

**توجه مهم:** در استوانه و کره توپر هیچ‌گاه توابع بسل Y و K جواب نمی‌باشند چون در $r=0$ مقدار آن‌ها نامعین می‌شود.

در حالت دیگر با تغییر متغیر $\theta(r,z)=T-T_0$ راستای z اورتوگونال و راستای r غیراورتوگونال می‌شود. چون در $z=0$ شرط مرزی نوع دوم است پس تابع ویژه در راستای z برابر $\cos(\lambda_n z)$ خواهد بود. در این حالت تابع ویژه در راستای r برابر $I_0(\lambda_n r)$ خواهد شد. چون شرط مرزی در $z=0$ نوع دوم و در $z=L$ نوع اول است پس $\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi$ خواهد بود. در نهایت:

$$\theta(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nI_0(\lambda_n r).\cos(\lambda_n z)$$

$$T(r,z)=T_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_nI_0(\lambda_n r).\cos(\lambda_n z)$$

## ۷ـ۸ـ معادلات دیفرانسیل ناهمگن

معادلات دیفرانسیلی که تا این‌جا مورد بررسی قرار گرفتند معادلات دیفرانسیل پاره‌ای همگن بودند. در این قسمت می‌خواهیم روش حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ناهمگن را بیان کنیم.

یکی از مهم‌ترین روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل ناهمگن استفاده از روش تغییر متغیر می‌باشد. در این حالت ناهمگنی معادله دیفرانسیل پاره‌ای را به ناهمگنی معادله دیفرانسیل معمولی منتقل می‌کنیم.

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

معادله دیفرانسیل ناهمگن $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=F$ را درنظر می‌گیریم:

الف) اگر $F=F(x)$ باشد از تغییر متغیر $\theta(x,y)=u(x,y)+v(x)$ استفاده می‌کنیم.

ب) اگر $F=F(y)$ باشد از تغییر متغیر $\theta(x,y)=u(x,y)+v(y)$ استفاده می‌کنیم.

ج) اگر $F=F(x,y)$ باشد معادله از روش جداسازی متغیرها قابل حل نمی‌باشد.

د) اگر F عدد ثابتی باشد از هرکدام از تغییر متغیرهای (الف) یا (ب) می‌توان استفاده کرد.

**مثال ۹** تغییرات دما در یک صفحه در حالت ناپایدار با شرایط مرزی و اولیه داده‌شدهٔ زیر را به دست آورید.

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

$$T(x,y,t)=?\quad,\quad 0\le x\le L\quad,\quad 0\le y\le H\quad,\quad t\ge 0$$

$$T(0,y,t)=0$$

$$T(L,y,t)=0$$

$$T(x,0,t)=0$$

$$T(x,H,t)=0$$

$$T(x,y,0)=P(x,y)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها می‌توان جواب را حاصل‌ضرب دو تابع در نظر گرفت.

$$T(x,y,t)=\psi(t)\phi(x,y)$$

حال در معادله $(PDE)$ قرار می‌دهیم:

$$\phi\frac{d\psi}{dt}=\alpha\left(\psi\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\psi\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)$$

با تقسیم دو طرف معادله به $\alpha\psi\phi$، معادله برحسب متغیرهای $t$ و $(x,y)$ نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\alpha\psi}\frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{\phi}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=-\lambda^2$$

$$\frac{1}{\alpha\psi}\frac{d\psi}{dt}=-\lambda^2 \qquad (۱۴\text{ـ}۷)$$

$$\frac{1}{\phi}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=-\lambda^2 \qquad (۱۵\text{ـ}۷)$$

تابع $\psi(x)$ مستقیماً از حل معادله معمولی (۷ـ۱۴) به دست می‌آید:

$$\psi(t)=ce^{-\alpha\lambda^2 t} \qquad (۱۶\text{ـ}۷)$$

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

برای حل معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای (۷ـ۱۵) از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌نماییم:

$$\phi(x,y)=f(x)g(y) \qquad (۷\text{ـ}۱۷)$$

$$g(y)\frac{d^2f}{dx^2}+f(x)\frac{d^2g}{dy^2}=-\lambda^2 f(x)g(y)$$

توابع برحسب $x$ و $y$ با تقسیم معادله بر $f(x)g(y)$ جدا می‌شوند:

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2}=-\lambda^2-\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dy^2}=-\mu^2$$

مقدار $\mu$ عدد ثابت جداسازی دو تابع $f(x)$ و $g(y)$ می‌باشد که در مراحل بعدی محاسبه می‌شود. بنابراین با توجه به شرایط مرزی داده شده داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2f}{dx^2}=-\mu^2 f\\ f(0)=0\\ f(l)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2g}{dy^2}=-\left(\lambda^2-\mu^2\right)g\\ g(0)=0\\ g(H)=0\end{cases}$$

با استفاده از جدول (۷ـ۱)، دو معادلهٔ دیفرانسیل فوق را حل می‌نماییم:

$$f_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\mu_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right) \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

$$g_{nm}(y)=\sin\frac{m\pi y}{H}$$

$$\lambda_{nm}^2-\mu_n^2=\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$$

$$\lambda_{nm}^2=\mu_n^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$$

$$\lambda_{nm}^2=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \qquad \begin{matrix}n=1,2,\ldots\\ m=1,2,\ldots\end{matrix}$$

با جایگذاری در معادلهٔ (۷ـ۱۷) خواهیم داشت:

$$\phi_{nm}(x,y)=\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H} \qquad \begin{matrix}n=1,2,\ldots\\ m=1,2,3,\ldots\end{matrix}$$

**یادداشت:**

................................................................................

................................................................................

................................................................................

................................................................................

مقدار $\phi_{nm}(x,y)$ را از معادلهٔ فوق و $\psi(t)$ را از معادلهٔ (۷ـ۱۶) در معادلهٔ $T(x,y,t)=\Psi(t)\phi(x,y)$ قرار می‌دهیم:

$$T(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{H}e^{-\alpha\lambda_{nm}t}$$

## ۷ـ۹ـ روش ترکیب متغیرها (Combination of Variables)

چنانچه مدل‌سازی دیفرانسیلی در سیستمی انجام شود که دامنهٔ ابعاد آن نامتناهی باشد، به دلیل عدم احراز خاصیت تعامد درجهت مورد بحث، نمی‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده کرد. در این‌صورت باید از روش‌های دیگری نظیر تبدیل لاپلاس یا روش ترکیب متغیرها استفاده شود.

**مثال ۱۰** معادلهٔ PDE زیر را با شرایط مرزی داده شده از روش ترکیب متغیرها حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u(0,t)=u_0 \\ u(\infty,t)=0 \end{cases}$$

از آنجا که دامنهٔ این مسئله (x) نامتناهی است (از صفر تا بی‌نهایت)، بنابراین نمی توان مسئله را از روش جداسازی متغیرها حل کرد.

در روش ترکیب متغیرها یک متغیر جدید به‌صورت یک مدل توانی از ترکیب متغیرهای مستقل مسئله (t , x) در نظر گرفته می‌شود.

$$\eta=ax^m t^n$$

ابتدا $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را بر حسب $\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial^2 u}{\partial \eta}$ نوشته و در معادله اصلی قرار می‌دهیم پس از و برقراری تساوی در دو طرف معادله: n , m , a به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$n=\frac{-1}{2}$$

با اعمال ضرایب معادله حاصل به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{u''}{u'}+\frac{1}{2\alpha a^2}\eta=0$$

$$\ln u'+\frac{1}{4\alpha a^2}\eta^2=\ln(A) \qquad (۷ـ۱۸)$$

در این مرحله ثابت a به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که ضریب $\eta^2$ برابر با یک شود.

یعنی:

$$\frac{1}{4\alpha a^2}=1 \quad\rightarrow\quad a=\frac{1}{\sqrt{4\alpha}}$$

**یادداشت:**

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

به این ترتیب مقدار $\eta$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

و اما حل معادلهٔ (۷ـ۱۸):

$$\ln u' + \eta^2 = \ln(A)$$

$$u' = A\exp\left(-\eta^2\right)d\eta$$

$$u = \int_0^{\eta} A\exp\left(-\eta^2\right)d\eta + B \qquad (۷ـ۱۹)$$

به این ترتیب جواب عمومی تابع $u(\eta)$ به‌دست می‌آید. در معادلهٔ (۷ـ۱۹) ثابت‌های A و B باتوجه به شرایط مرزی و اولیه به‌دست می‌آید. در این‌صورت شرایط مرزی و اولیه برحسب $\eta$ که ترکیبی از x و t است، دوباره بازنویسی می‌شوند.

$$\eta = 0 \quad \rightarrow \quad u(0) = u_0$$

$$\eta = \infty \quad \rightarrow \quad u(\infty) = 0$$

با اعمال شرایط مرزی بالا:

$$\begin{cases} B = u_0 \\ A = \dfrac{-u_0}{\displaystyle\int_0^{\eta} \exp\left(-\eta^2\right)d\eta} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^{\eta} \exp\left(-\eta^2\right)d\eta}{\displaystyle\int_0^{\infty} \exp\left(-\eta^2\right)d\eta}$$

حال معادلهٔ بالا را با استفاده از تعریف تابع خطا (Error function) و خواص آن بازنویسی می‌کنیم:

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \exp\left(-\eta^2\right)d\eta = 1$$

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\eta^2\right)d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

بنابراین تابع u به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}\,d\eta = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$$

**یادداشت:**

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

با قراردادن مقدار $\eta$ جواب نهایی به‌دست می‌آید:

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

**نتیجه :** می‌توان نتیجه گرفت که چنانچه PDE به‌صورت $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ باشد، تغییر متغیر $\eta$ به صورت $\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$ انجام می‌شود و PDE به یک ODE به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$u'' + 2\eta u' = 0$$

جدول (۷ـ۲) جمع‌بندی روش ترکیب متغیرها را برای چند معادله PDE نشان می‌دهد. در این جدول نوع متغیر جدید و تابع ODE حاصل از این روش ارائه شده است.

**تبدیل PDEهای مختلف به ODE به روش ترکیب متغیرها**

| PDE | متغیر جدید $\eta$ | ODE |
|---|---|---|
| $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ | $\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$ | $u'' + 2\eta u' = 0$ |
| $x\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ | $\eta = \frac{x}{\sqrt[3]{9\alpha t}}$ | $u'' + 3\eta^2 u' = 0$ |
| $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ | $\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$ | $u'' + \left(2\eta - \frac{1}{\eta}\right)u' = 0$<br>$\eta u'' + \left(2\eta^2 - 1\right)u' = 0$ |
| $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ | $\eta = \frac{x}{\sqrt[3]{9\alpha t}}$ | $u'' + \left(3\eta - \frac{1}{\eta}\right)u' = 0$<br>$\eta u'' + \left(3\eta^2 - 1\right)u' = 0$ |

**یادداشت:**

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

# فصل هشتم

# حل معادلات غیرخطی

پیش از جستجوی ریشه، باید بازه‌ای چون $[a,b]$ را پیدا کنیم که معادله در آن بازه، پیوسته باشد و تنها یک ریشه داشته باشد و پس از آن به جستجوی آن ریشه می‌پردازیم. شرط این که معادله $f(x)=0$ در فاصله $[a,b]$ دارای تنها یک ریشه باشد به قرار زیر می‌باشد:

الف) تابع $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد.

ب) $f(a)\cdot f(b)<0$

ج) $\forall x\in[a,b] \quad , \quad f'(x)\neq 0$

## ۸-۱- روش‌های عددی برای حل معادلات غیرخطی

### ۸-۱-۱- تکرار ساده (Simple Fixed Point Iteration)

در این روش برای حل معادله $f(x)=0$ آن را به صورت‌های متفاوتی به فرم:

$$x=g(x) \qquad (۸\_۱)$$

بازآرائی می‌کنیم. به تنها x سمت چپ اندیس $n+1$ و به تمام xهای سمت راست در تابع $g(x)$ اندیس n می‌دهیم:

$$x_{n+1}=g(x_n) \qquad (۸\_۲)$$

ابتدا حدس اولیه $x_0$ را می‌زنیم. سپس این حدس را در رابطه بازگشتی (۸-۲) قرار می‌دهیم تا یک دنباله از اعداد به صورت $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تولید شود. اگر دنباله فوق همگرا شود یک ریشه $f(x)=0$ را یافته‌ایم.

**مثال ۱**: در حل معادلهٔ $x=e^{-x}+x^2+2x$ به روش تکرار ساده (نقطه ثابت) و حدس اولیه $x_0=0$ مقدار $x_1$ کدام است؟

(مهندسی مخازن هیدروکربوری آزاد ـ ۸۳)

۱) 1+e ۲) 1 ۳) 1-e ۴) -1

**یادداشت**:

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

..............................................................................................................

**حل** : گزینه ۴ درست است.

$$x = e^{-x} + x^2 + 2x \;\rightarrow\; e^{-x} + x^2 + x = 0 \;\rightarrow\; x = -\left(e^{-x} + x^2\right)$$

$$x_{n+1} = -\left(e^{-x_n} + x_n^2\right)$$

$$x_0 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -\left(e^0 + 0\right) = -1$$

**مثال۲** شرط همگرائی و به کارگیری روش تقارب متوالی (Successive Approximation) برای حل معادلات غیرخطی به صورت $x = \phi(x)$ عبارت است از: (مهندسی مخازن هیدروکربوری ـ ۸۳)

۱) $\phi'(x) < 0$ ۲) $\phi'(x) > 0$ ۳) $|\phi'(x)| > 0$ ۴) $|\phi'(x)| < 1$

**حل**: گزینه ۴ درست است.

## ۸-۱-۲- روش نصف کردن (Bisection method)

فرض می‌کنیم بخواهیم ریشه معادله $f(x) = 0$ را در بازه‌ی $[a,b]$ به دست آوریم و تابع $f$ در فاصله $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد. در این روش ابتدا $c = \frac{a+b}{2}$ را محاسبه کرده و $f(c)$ را محاسبه می‌کنیم؛ آن‌گاه $f(c)$ را با $f(a)$ مقایسه می‌کنیم. اگر $f(c)$ با $f(a)$ هم‌علامت باشند، جای $a$ و $c$ را عوض می‌کنیم و چنان‌چه $f(c)$ و $f(a)$ مختلف‌العلامه باشند، جای $c$ و $b$ را با هم عوض می‌کنیم. نصف کردن و مقایسه علامت‌ها را تا زمانی ادامه می‌دهیم که اختلاف $f(c)$ها از تقریب مسئله کمتر شود. ریشه مطلوب $c$ آن است که $f(c) = 0$ شود.

### نکات مهم در مورد روش نصف کردن:

۱- روش نصف کردن همواره همگرا می‌باشد.

۲- روش نصف کردن روش کندی است و همگرائی آن از مرتبه اول می‌باشد.

۳- اگر بخواهیم با استفاده از روش نصف کردن ریشه معادله را در فاصله $[a,b]$ با حداکثر خطای $\varepsilon$ به دست آوریم تعداد تکرارهای لازم عبارت خواهد بود از:

$$m = \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2} + 1$$

## ۸ـ۱ـ۳ـ روش نیوتن ـ رافسون (روش مماسی)

رابطه بازگشتی روش نیوتن ـ رافسون به صورت زیر است:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**یادداشت**:

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**مثال۳** در حل معادله غیرخطی $x^2 - e^{-x} = 0$ به روش نیوتن (نیوتن ـ رافسون) چنان‌چه حدس اولیه صفر باشد، مقدار $x_1$ کدام است؟
(مهندسی مخازن هیدروکربوری آزاد و مهندسی نفت آزاد ـ ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $1$ ۴) $\frac{3}{4}$

**حل:** گزینه ۳ درست است.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x) = x^2 - e^{-x} \quad , \quad f'(x) = 2x + e^{-x}$$

$$n = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - e^{-x_0}}{2x_0 + e^{-x_0}}$$

$$x_1 = 0 - \frac{0-1}{0+1} \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$$

### نکات مهم:

۱ـ شرط همگرایی روش نیوتن ـ رافسون برای پیدا کردن ریشه معادله $f(x) = 0$ عبارت است از:

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2} \right| < 1$$

۲- اگر $\alpha$ ریشه ساده معادله باشد، روش نیوتن ـ رافسون دارای همگرائی مرتبه ۲ است.

۳- اگر $\alpha$ ریشه تکراری معادله باشد، روش نیوتن ـ رافسون دارای همگرائی مرتبه ۱ است. هرچه مرتبه ریشه بیشتر شود، سرعت همگرائی پائین می‌آید.

### ۸-۱-۴- روش نابجائی (False Position Method)

این روش که به روش میان‌یابی نیز معروف می‌باشد اصلاحی برای روش نصف کردن جهت بالا بردن سرعت همگرائی است.
رابطه زیر برای روش نابجائی به‌کار می‌رود:

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

### نکات مهم:

۱- روش نابجائی همواره همگراست.

۲- مرتبه همگرائی روش نابجائی $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$ می‌باشد.

**مثال۴** معادله $x = \cos x$ در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ یک ریشه دارد. مقدار $x_1$ که از روش نابجائی به دست می‌آید کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{\pi-2}$ ۲) $\frac{\pi}{\pi+2}$ ۳) $\frac{\pi}{2-\pi}$ ۴) $\frac{\pi}{\pi+1}$

**یادداشت:**

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

**حل:** گزینه‌ی ۲ درست است.

منظور از $x_1$ در این مسئله اولین $x_2$ای است که محاسبه می‌شود:

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad f(x) = x - \cos x$$

$$f(x_0) = 0 - 1 = -1 \quad , \quad f(x_1) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)} = \frac{\pi}{\pi + 2}$$

## ۸ـ۱ـ۵ـ روش تقاطع یا وتری

در حالتی که شکل تابع $f(x)$ پیچیده بوده و یا برای محاسبه $f'(x)$ به محاسبات زیادی نیاز داشته باشیم، استفاده از روش نیوتن ـ رافسون مناسب نبوده و از روش وتری استفاده می‌کنیم. رابطه بازگشتی روش وتری به صورت زیر می‌باشد:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

**نکات مهم:**

۱) روش تقاطع یا وتری همواره همگرا می‌باشد.

۲) مرتبه همگرائی این روش $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$ است که نشان می‌دهد این روش از روش نیوتن ـ رافسون کندتر ولی از روش نصف کردن سریع‌تر می‌باشد.

## ۸-۱-۶- مقایسه سرعت همگرائی روش‌های ذکر شده

در مورد سرعت همگرائی روش‌های مختلف برای رسیدن به ریشه می‌توان نوشت:

سرعت همگرائی روش نصف کردن $<$ سرعت همگرائی روش تکرار ساده $<$ سرعت همگرائی روش نابجائی (= سرعت همگرائی روش وتری) $<$ سرعت همگرائی روش نیوتن ـ رافسون

**یادداشت:**

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

# فصل نهم

# میان‌یابی *Interpolation*

## ۹-۱- مقدمه

از دیدگاه ریاضی، می‌توان میان‌یابی را چنین تعریف کرد: تابعی از یک متغیر مستقل، مانند $y = f(x)$ داریم که مقدار تابع یعنی $f_n,...,f_1,f_0$ را برای بعضی از مقادیر متغیر x، مثلاً $x_n,...,x_1,x_0$ می‌دانیم و می‌خواهیم مقدار تابع در نقاط میانی را بیابیم. بسته به این که داده‌ها چگونه باشند، دو روش برای میان‌یابی وجود دارد:

**روش اول:** نقاط داده شده هم‌فاصله هستند.

**روش دوم:** نقاط داده شده هم‌فاصله نیستند.

درا ین فصل ابتدا اختلافات محدود و سپس بحث تقریب و میان‌یابی را با روش‌های مختلف بررسی می‌کنیم.

## ۹-۲ اختلافات محدود (Finite Differences)

اگر جدولی از مقادیر x و تابع آن یعنی $f(x)$ در دست باشد به طور قراردادی، سه نوع علامت برای بیان اختلافات استفاده می‌شود:

### ۹-۲-۱- اختلافات پیشرو (Forward Differences)

در این روش اختلافات با $\Delta$ نشان داده می‌شود تفاضل پیشرو با روابط زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta f_m = f_{m+1} - f_m$$
$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m = f_{m+2} - 2f_{m+1} + f_m$$
$$\vdots$$
$$\Delta^n f_m = \Delta^{n-1} f_{m+1} - \Delta^{n-1} f_m$$

**یادداشت:**

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

$\Delta f_m$ را تفاضل پیشرو مرتبه اول در نقطه m، $\Delta^2 f_m$ را تفاضل پیشرو مرتبه دوم در نقطه $m$،... می‌نامیم.

**توجه**: در تفاضل پیشرو، اختلافات با زیرنویس‌های برابر روی خط راست با شیب منفی قرار دارند.

### ۹-۲-۲- اختلافات پسرو (Backward Differences)

در این روش اختلافات با $\nabla$ نشان داده می‌شود تفاضل پسرو با روابط زیر تعریف می‌شود:

که مطابق جدول داریم:

$$\nabla f_m = f_m - f_{m-1}$$

$$\nabla^2 f_m = \nabla f_m - \nabla f_{m-1} = f_{m-2} - 2f_{m-1} + f_m$$

$$\vdots$$

$$\nabla^n f_m = \nabla^{n-1} f_m - \nabla^{n-1} f_{m-1}$$

که $\nabla f_m$ و $\nabla^2 f_m$ به ترتیب تفاضل‌های پسرو و مرتبه اول و دوم در نقطه m می‌باشند.

**توجه**: در تفاضل پسرو، اختلافات با زیرنویس‌های برابر روی خط راستی با شیب مثبت قرار می‌گیرند.

### ۹-۲-۳- اختلافات مرکزی (Central Differences)

در این روش اختلافات با $\delta$ نشان داده می‌شوند. تفاضل مرکزی با روابط زیر تعریف می‌شود:

در این روش علامت اختلافات به صورت $\delta$ و شماره ستون اختلافات، بالانویس $\delta$ (اختلافات دوم با $\delta^2$ و سوم با $\delta^3$ و ....) و زیرنویس آن مجموع دو زیرنویس ستون تقسیم بر ۲ می‌باشد.

$$\delta f_{m+\frac{1}{2}} = f_{m+1} - f_m$$

$$\delta^2 f_m = \delta f_{m+\frac{1}{2}} - \delta f_{m-\frac{1}{2}} = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}$$

**توجه**: در اختلافات مرکزی، اختلافات با زیرنویس‌های برابر همواره روی یک خط افقی ظاهر می‌شوند.

## ۹-۳- میان‌یابی

برای میان‌یابی دو روش وجود دارد:

الف) نقاط داده شده هم‌فاصله هستند که در این صورت از روش تفاضلات پیشرو و پسرو نیوتن (بسط نیوتن ـ گریگوری) استفاده خواهیم کرد.

ب) نقاط داده شده هم‌فاصله نیستند که در این صورت از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

اینک به بررسی هر دو حالت می‌پردازیم.

**یادداشت**:

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

### ۹-۳-۱- روش تفاضلات پیشرو و پسرو

از این دو روش در حالتی استفاده می‌شود که نقاط داده شده هم‌فاصله باشند. فرض می‌کنیم داده‌های جدول در دسترس بوده و داشته باشیم:

$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = \cdots = x_1 - x_0 = h$

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| $x_0$ | $f_0$ |
| $x_1$ | $f_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_j$ | $f_j$ |
| $x_n$ | $f_n$ |
| $x_{j+1}$ | $f_{j+1}$ |

و از ما خواسته شده باشد که مقدار تابع $f(x)$ را در نقطه $x_n$ به دست آوریم.

ساده‌ترین روش برای یافتن مقدار تابع در نقطه‌ای مثل $x_n$، نوشتن یک چند جمله‌ای برای عبور از یک سری داده‌های $x$ و $f(x)$ با استفاده از اختلافات محدود پیشرو بر اساس فرمول نیوتن ـ گریگوری به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) \cong P_n(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots + \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

با داشتن رابطه $P_n(x)$، مقدار تابع $f(x)$ در هر نقطه‌ای با جاگذاری به دست می‌آید. به ازای $n = 2$ در معادله (۱۳-۹) یک چند جمله‌ای درجه دوم یعنی سهمی از بین سه نقطه عبور داده می‌شود، این میان‌یابی به اینترپولاسیون درجه دوم موسوم است:

$$f(x) \cong P_2(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

فرمول میان‌یابی نیوتن ـ گریگوری در حالت پسرو نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) \cong P_n(x) = f_0 + r\nabla f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\nabla^3 f_0 + \ldots + \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{3!}\nabla^n f_0$$

**مثال ۱** با توجه به مقادیر جدول زیر مطلوبست محاسبه $f(0.73)$ با استفاده از روش تفاضل‌های نیوتن پیشرو از درجه سوم:

(مهندسی شیمی ـ ۸۴)

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| 0.4 | 0.423 |
| 0.6 | 0.684 |
| 0.8 | 1.030 |
| 1 | 1.557 |

۱) 0.446 ۲) 0.893 ۳) 1.786 ۴) 2.679

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**حل:** گزینه ۲ درست است.

| $x_i$ | $f_i$ | $\Delta f_i$ | $\Delta^2 f_i$ | $\Delta^3 f_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.4 | 0.423 | | | |
| | | 0.261 | | |
| 0.6 | 0.684 | | 0.085 | |
| | | 0.346 | | 0.096 |
| 0.8 | 1.030 | | 0.181 | |
| | | 0.527 | | |
| 1 | 1.557 | | | |

$$x = x_0 + rh \quad \rightarrow \quad 0.73 = 0.4 + r(0.2) \quad \rightarrow \quad r = 1.65$$

$$f(x) = f(x_0 + rh) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

با جایگذاری:

$$f(0.73) = 0.423 + (1.65 \times 0.261) + \left(\frac{1.65 \times 0.65}{2} \times 0.085\right) + \frac{1.65 \times 0.65 \times (-0.35)}{6} \times 0.096$$

$$f(0.73) = 0.893$$

### ۹-۳-۲- روش لاگرانژ (Legendre Method)

هرگاه $n+1$ نقطه متمایز از هم مطابق جدول زیر داده شده و این نقاط هم فاصله نباشند، از روش لاگرانژ استفاده کرده و یک چندجمله‌ای درونیاب حداکثر از درجه $n$ را از این نقاط عبور می‌دهیم. با داشتن معادله این چندجمله‌ای می‌توان در هر نقطه‌ای مقدار تابع را به دست آورد.

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_{n-1}$ | $f_n$ |

برای داده‌های جدول، معادله چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ به صورت زیر می‌باشد:

$$P_n(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_n$$

که در آن $L_i(x)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

که $i = 0,1,2,\ldots,n$ می‌باشد.

**نکته مهم:** چندجمله‌ای لاگرانژ از کلیه نقاط درون‌یاب عبور می‌کند یعنی:

$$P_n(x_j) = f(x_j) \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots,n$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

اگر سه نقطه $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ را داشته باشیم، با استفاده از رابطه لاگرانژ می‌توان یک چندجمله‌ای درجه ۲ به شکل زیر ارائه داد:

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

**مثال ۲** دستور میان‌یابی لاگرانژ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}L_k(x)f(x_k) \quad , \quad L_x(x)=\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} \quad , \quad k=0,1,2,\dots,n$$

با استفاده از چندجمله‌ای مرتبه دوم لاگرانژ فشار بخار آب را در 225°F تخمین بزنید. (مهندسی مخازن هیدروکربوری ـ۸۲)

| Temp (°F) | Vapor Pressure (psi) |
|---|---|
| 80 | 0.51 |
| 100 | 0.95 |
| 140 | 2.89 |
| 180 | 7.51 |
| 220 | 17.19 |
| 250 | 29.83 |

۱) 18.48 ۲) 18.98 ۳) 19.30 ۴) 19.83

**حل:** گزینه ۲ درست است.

چون چندجمله‌ای درجه دوم لاگرانژ از سه نقطه عبور می‌کند پس از سه نقطه پایینی جدول استفاده می‌کنیم چون 225°F در این فاصله قرار می‌گیرد لذا می‌توان نوشت:

$$P_2(225)=L_0f_0+L_1f_1+L_2f_2$$

$$L_0(225)=\frac{(225-220)(225-250)}{(180-220)(180-250)}=\frac{5\times(-25)}{(-40)(-70)}=-0.044$$

$$L_1(225)=\frac{(225-180)(225-250)}{(220-180)(220-250)}=\frac{45\times(-25)}{40\times(-30)}=0.9375$$

$$L_2(225)=\frac{(225-180)(225-220)}{(250-180)(250-220)}=\frac{45\times5}{70\times30}=0.1071$$

$$P_2(225)=L_0f_0+L_1f_1+L_2f_2=(-0.044\times7.51)+(0.9375\times17.19)+(0.1071\times29.83)$$

$$P_2(225)=18.98$$

**یادداشت:**

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

..............................................................................................

## ۹-۴- برازش منحنی توسط روش حداقل کردن مجموع مربعات خطا

اگر یک چندجمله‌ای درجه ۲ با معادله $y = ax^2 + bx + c$ برای برازش داده‌های منحنی به کار رود، می‌توان نوشت:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$$

برای این که مجموع مربعات خطا حداقل شود لازم است داشته باشیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \qquad (۹\text{-}۱)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\sum_{i=1}^{n} x_i \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (۹\text{-}۲)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (۹\text{-}۳)$$

$n$ در رابطه (۹-۳) نشان دهنده تعداد نقاط به کار رفته برای برازش می‌باشد. از حل سه معادله و سه مجهول بالا مقادیر $a$، $b$ و $c$ به دست می‌آید.

در صورتی که بخواهیم نقاط داده شده را به خط $y = ax + b$ برازش کنیم، باید عبارت زیر مینیمم شود:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i\right)^2$$

اگر نسبت به $a$ و $b$ مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم، دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر به دست می‌آید که از حل آن می‌توان $a$ و $b$ را به دست آورد:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

**یادداشت:**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**مثال۳** در یک آزمایش نتایج زیر حاصل شده است:

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | -0.9 | 1.2 | 2.8 | 5.2 | 6.8 |

مناسب‌ترین خط مستقیم $y = ax + b$، که با استفاده از روش حداقل مربعات، به این مقادیر نظیر می‌شود کدام است؟

(مهندسی نفت ـ ۸۴)

۱) $\begin{cases} a = 1.6 \\ b = -2 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} a = 1.8 \\ b = -2.5 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} a = 2.4 \\ b = -4.4 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} a = 1.94 \\ b = -2.80 \end{cases}$

**حل:** گزینه ۴ درست است.

$$y = ax + b \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{5} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{5} y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{5} x_i = \sum\limits_{i=1}^{5} x_i y_i \end{cases}$$

بنابراین جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

| | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −0.9 | 1 | −0.9 |
| | 2 | 1.2 | 4 | 2.4 |
| | 3 | 2.8 | 9 | 8.4 |
| | 4 | 5.2 | 16 | 20.8 |
| | 5 | 6.8 | 25 | 34 |
| $\sum$ : | 15 | 15.1 | 55 | 64.7 |

با جایگزینی در روابط خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 15a + 5b = 15.1 \\ 55a + 15b = 64.7 \end{cases} \rightarrow \quad a = 1.94 \quad , \quad b = -2.8$$

**نکته مهم:**

در بعضی حالات می‌توان یک تابع را با وجود آن‌که خطی نمی‌باشد با بازنویسی خطی کرده و با استفاده از روش حداقل کردن مجموع مربعات خطا، معادله آن را به دست آورد. برای مثال چند حالت در زیر آورده می‌شود:

الف) $y = \dfrac{1}{Ax + B}$

ابتدا طرفین را عکس می‌کنیم:

$$\frac{1}{y} = Ax + B$$

فرض : $Y = \dfrac{1}{y} \quad , \quad X = x \qquad \rightarrow \quad Y = AX + B$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

ب) $y = Ax^B$

اگر از طرفین لگاریتم بگیریم:

$$\log y = \log A + B\log x$$

$$\log y = Y \quad , \quad \log x = X \quad , \quad \log A = a \quad \to \quad Y = a + BX$$

ج) $y = \dfrac{D}{x+C}$

$$y = \frac{D}{x+C} \quad \to \quad xy + Cy = D \quad \to \quad y = -\frac{1}{C}xy + \frac{D}{C}$$

با فرض:

$$Y = y \ , \ X = xy \ , \ A = -\frac{1}{C} \ , \ B = \frac{D}{C} \quad \to \quad Y = AX + B$$

روش دوم این است که به شکل زیر تغییرات را اعمال کنیم:

$$y = \frac{D}{x+C} \quad \to \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{D}x + \frac{C}{D}$$

$$Y = \frac{1}{y} \ , \ X = x \quad \to \quad Y = \frac{1}{D}X + \frac{C}{D} \quad \to \quad Y = AX + B$$

**نکته:** اگر خط $y = mx$ را به یک سری داده برازش کنیم m از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \qquad (۴\_۹)$$

**مثال۴** خط $y = mx$ را به اطلاعات زیر برازش کنید. (مهندسی مخازن هیدروکربوری ـ ۸۴)

$(1,2)$ , $(2,3.5)$ , $(-1,-1)$

۱) $m = 0.5$ ۲) $m = 0.917$ ۳) $m = 1.5$ ۴) $m = 1.667$

**حل:** گزینه ۴ درست است.

با استفاده از رابطه (۹-۴) داریم:

$$m = \frac{(1\times 2) + (2\times 3.5) + (-1\times -1)}{\left(1^2 + 2^2 + (-1)^2\right)} = \frac{2+7+1}{1+4+1} = \frac{10}{6} = 1.667$$

**یادداشت:**

...................................................................................................

...................................................................................................

...................................................................................................

...................................................................................................

# فصل دهم

# انتگرال‌گیری عددی

## ۱۰-۱- روش ذوزنقه‌ای (Trapezoidal Rule)

در روش ذوزنقه‌ای اگر محدوده انتگرال $a$ تا $b$ را فقط یک فاصله در نظر بگیریم $\left(x_1, x_0\right)$ و از آن‌ها یک خط (چندجمله‌ای درجه اول $n=1$) عبور دهیم، انتگرال‌گیری از آن نتیجه خواهد داد:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

در صورتی که محدوده‌ی انتگرال $a$ تا $b$ را به $n$ قسمت مساوی تقسیم نموده و در هر قسمت روش ذوزنقه را به کار ببریم خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1\right) + \frac{h}{2}\left(f_1 + f_2\right) + \cdots + \frac{h}{2}\left(f_{n-1} + f_n\right)$$

و در نهایت با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}) + f_n\right] \tag{۱۰-۱}$$

**یادداشت:**

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

**نکات مهم:**

۱) در محاسبه انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ خطای جامع یا خطای کلی (Global Error) برابر است با:

$$\text{خطای کلی} = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(c) = O(h^2) \quad , \quad c \in [a,b]$$

۲) در روش ذوزنقه، هرچقدر h کوچک‌تر باشد دقت محاسبات افزایش و خطا کاهش می‌یابد. ولی از یک مرحله به بعد در اثر خطای گرد کردن دقت محاسبات کاهش پیدا می‌کند.

۳) همان‌طور که از نکته ۱ مشخص است، در روش ذوزنقه خطا متناسب با $h^2$ می‌باشد. مثلاً اگر طول گام h به نصف کاهش پیدا کند (تعداد تقسیمات بازه را دو برابر کنیم) خطا $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود.

۴) با توجه به فرمول (۱۰-۱)، مشخص است که روش ذوزنقه برای چندجمله‌ای‌های درجه 1 بدون خطا است.

۵) برای تعیین h در محاسبه انتگرال به روش ذوزنقه به طوری که خطا کوچک‌تر از $\varepsilon$ باشد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$h = \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)M}} \tag{۱۰ـ۲}$$

که M یک کران بالا برای $|f''(x)|$ در بازه $[a,b]$ می‌باشد یعنی:

$$M = \max|f''(x)| \quad , \quad x \in [a,b]$$

**مثال ۱** برای محاسبه‌ی مقدار تقریبی $\int_0^2 x^2 dx$ با روش ذوزنقه مرکب، تعداد تقسیمات لازم برای آن‌که $|\text{خطا}| \le \frac{1}{3}\times 10^{-4}$ گردد، کدام است؟

۱) 100 ۲) 160 ۳) 200 ۴) 260

**حل:** گزینه ۳ درست است.

با توجه به رابطه (۱۰-۲) داریم:

$$h = \sqrt{\frac{12\times\frac{1}{3}\times 10^{-4}}{(2-0)M}}$$

برای محاسبه M چنین می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 \;\rightarrow\; f'(x) = 2x \;\rightarrow\; f''(x) = 2 \;\rightarrow\; M = 2$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$h = \sqrt{\frac{12\times\frac{1}{3}\times 10^{-4}}{(2-0)\times 2}} \;\rightarrow\; h = 0.01$$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{2-0}{0.01} = 200$$

**یادداشت:**

...............................................................................................................

...............................................................................................................

...............................................................................................................

...............................................................................................................

## ۱۰-۲- روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ (Simpson's 1/3 Rule)

اگر محدوده‌ی انتگرال $a \le x \le b$ را به دو فاصله مساوی تقسیم کنیم $(x_2 = b\ ,\ x_0 = a)$، با عبور یک چندجمله‌ای درجه دوم $(n = 2)$ از سه نقطه حاصل می‌توان از آن انتگرال‌گیری نمود

حاصل انتگرال‌گیری با روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad (۱۰\_۳)$$

اگر محدوده‌ی انتگرال را به اجزاء کوچک‌تری تقسیم کرده و در هر قسمت رابطه‌ی مربوط به روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ را به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

با بازنویسی رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + f_n\right)$$

به عبارت ساده‌تر:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=\text{فرد}}}^{n-1} f_i + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=\text{زوج}}}^{n-2} f_i + f_n\right] \qquad (۱۰\_۴)$$

**مثال۲** فرمول سیمپسون $\frac{1}{3}$ $(\text{Simpson's}\frac{1}{3}\text{Rule})$ با طول گام $h = 0.5$ برای محاسبه مقدار تقریبی $I = \int_0^2 \frac{dx}{1+x}$ استفاده شده، مقدار به دست آمده عبارت است از: (مهندسی فراوری و انتقال گاز ـ ۸۵)

۱) $I = 1.1$ ۲) $I = 0.65$ ۳) $I = 1.35$ ۴) هیچ‌کدام

**حل:** گزینه ۱ درست است.

| x | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0.667 | 0.5 | 0.4 | 0.333 |

و $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{1+x} = \frac{0.5}{3}\left[1 + 4(0.667 + 0.4) + 2(0.5) + 0.333\right] \rightarrow I = 1.1$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

**نکات مهم:**

۱) در محاسبه انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ با روش سیمپسون $\frac{1}{3}$، میزان خطای کلی برابر است با:

$$\text{خطای کلی} = \varepsilon = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^4(c) \quad , \quad c \in [a,b] \qquad (۱۰\_۵)$$

۲) در روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ (یا سیمپسون معمولی) میزان خطای کلی از مرتبه $O(h^4)$ می‌باشد.

## ۱۰-۳- روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ (Simpson's 3/8 Rule)

در محاسبهٔ انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، در صورتی که محدوده‌ی انتگرال (a تا b) را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و از چهار نقطه حاصل یک چندجمله‌ای درجه سوم $(n=3)$ عبور داده و حاصل انتگرال را از روی این چندجمله‌ای محاسبه کنیم، رابطه سیمپسون $\frac{3}{8}$ به دست می‌آید:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx$$

$$I = \frac{3}{8}h\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right)$$

اگر محدوده‌ی انتگرال را به فواصل کوچک تقسیم کرده و در هر قسمت رابطه مربوط به سیمپسون $\frac{3}{8}$ را به کار ببریم، در این صورت خواهیم داشت (دقت کنید تعداد فواصل، باید مضرب 3 باشد):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{3}{8}h\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \cdots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\right) \qquad (۱۰\_۶)$$

**نکات مهم:**

۱) مقدار خطای کلی برای محاسبه انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ در روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ برابر است با:

$$\text{خطای کلی} = \varepsilon = -\frac{(b-a)}{80}h^4 f^4(c) \quad , \quad c \in [a,b] \qquad (۱۰\_۷)$$

۲) خطای کلی در روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ از مرتبه $O(h^4)$ می‌باشد.

**یادداشت:**

............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................
............................................................................................................

۳) با توجه به روابط (۱۰-۵) و (۱۰-۷) مشخص است که روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ و سیمپسون $\frac{3}{8}$ برای محاسبه انتگرال‌هائی که تابع تحت انتگرال، چندجمله‌ای درجه n (n عدد طبیعی و $n \le 3$) باشد، بدون خطا می‌باشد:

$$I = \int_a^b (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)dx \quad , \quad n = \text{عدد صحیح مثبت}$$

$$\text{If} \quad n \le 3 \quad \rightarrow \quad \text{Error} = 0$$

۴) در روش سیمپسون $\frac{1}{3}$ و سیمپسون $\frac{3}{8}$ بر اساس روابط (۱۰-۵) و (۱۰-۷)، خطا متناسب با $h^4$ می‌باشد.

۵) برای تعیین h در روش سیمپسون $\frac{3}{8}$ به طوری که خطا کوچک‌تر از $\varepsilon$ باشد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$h = \sqrt[4]{\frac{80\varepsilon}{(b-a)M}} \qquad (۱۰\text{ـ}۸)$$

که در این رابطه M یک کران بالا برای $\left|f^{(4)}(x)\right|$ در بازه $[a,b]$ می‌باشد:

$$M = \max\left|f^{(4)}(x)\right| \quad , \quad x \in [a,b]$$

## ۱۰-۴- انتگرال‌های چندگانه

فرض می‌کنیم بخواهیم انتگرال دوگانه زیر را به روش عددی محاسبه کنیم:

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

برای محاسبه ابتدا y را ثابت نگه داشته و نسبت به x انتگرال‌گیری می‌کنیم یعنی به ازای تعداد yهای موجود انتگرال‌گیری را انجام می‌دهیم و سپس با استفاده از مقادیر به دست آمده، مقدار نهایی انتگرال دوگانه را به دست می‌آوریم:
البته برعکس همین کار را نیز می‌توان انجام داد یعنی در ابتدا x ها را ثابت نگه داشت و نسبت به y انتگرال‌گیری نمود و سپس جواب نهایی را به دست آورد.

**مثال۳** حاصل انتگرال $\int_4^7 \int_8^{14} f(x,y)\,dy\,dx$ بر اساس اطلاعات جدول زیر برابر است با: (در هر دو راستا از روش ذوزنقه استفاده کنید)

| y \ x | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 10 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 12 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 14 | 13 | 14 | 15 | 16 |

۱) 133 ۲) 147 ۳) 153 ۴) 168

**یادداشت:**

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

**حل:** گزینه ۳ درست است.

ابتدا yها را ثابت فرض می‌کنیم:

$\underline{y=8}$

$$I_1=\int_4^7 f(x,y=8)\,dx=\frac{\Delta x}{2}\left[1+2(2+3)+4\right]=\frac{1}{2}(1+10+4)=\frac{15}{2}$$

$\underline{y=10}$

$$I_2=\int_4^7 f(x,y=10)\,dx=\frac{\Delta x}{2}\left[5+2(6+7)+8\right]=\frac{1}{2}(5+26+8)=\frac{39}{2}$$

$\underline{y=12}$

$$I_3=\int_4^7 f(x,y=12)\,dx=\frac{\Delta x}{2}\left[9+2(10+11)+12\right]=\frac{1}{2}(9+42+12)=\frac{63}{2}$$

$\underline{y=14}$

$$I_4=\int_4^7 f(x,y=14)\,dx=\frac{\Delta x}{2}\left[13+2(14+15)+16\right]=\frac{1}{2}(13+58+16)=\frac{87}{2}$$

اما در راستای y مقدار $\Delta y$ برابر 2 می‌باشد پس:

| y | I |
|---|---|
| 8 | $\frac{15}{2}$ |
| 10 | $\frac{39}{2}$ |
| 12 | $\frac{63}{2}$ |
| 14 | $\frac{87}{2}$ |

در نتیجه جواب نهایی انتگرال برابر خواهد بود با:

$$I=\frac{\Delta y}{2}\left[\frac{15}{2}+2\left(\frac{39}{2}+\frac{63}{2}\right)+\frac{87}{2}\right]=\frac{2}{2}\left[\frac{15}{2}+102+\frac{87}{2}\right]\;\rightarrow\; I=153$$

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

# فصل یازدهم

# مشتق‌گیری عددی

## ۱۱-۱- مقدمه

در این فصل توضیح مختصری در مورد فرمول‌های مشتق‌گیری عددی ارائه می‌شود. یکی از روش‌های مؤثر در محاسبه فرمول‌های مشتقات توابع به روش عددی استفاده از بسط تیلور می‌باشد.

اگر تابع $f(x)$ را در نقطه $x_i$ با همسایگی $h$ بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$f(x_{i+1}) = f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2!}f_i'' + \frac{h^3}{3!}f_i''' + \frac{h^4}{4!}f_i^{(4)} + \cdots \quad (۱\_۱۱)$$

$$f(x_{i-1}) = f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2!}f_i'' - \frac{h^3}{3!}f_i''' + \frac{h^4}{4!}f_i^{(4)} + \cdots \quad (۲\_۱۱)$$

در روابط فوق $x_{i+1} = x_i + h$ و $x_{i-1} = x_i - h$ می‌باشد.

اگر بسط تیلور را به همسایگی $\pm 2h$ بنویسیم:

$$f_{i+2} = f_i + 2hf_i' + 2h^2 f_i'' + \frac{4}{3}h^3 f_i''' + \frac{2}{3}h^4 f_i^{(4)} + \cdots \quad (۳\_۱۱)$$

$$f_{i-2} = f_i - 2hf_i' + 2h^2 f_i'' - \frac{4}{3}h^3 f_i''' + \frac{2}{3}h^4 f_i^{(4)} + \cdots \quad (۴\_۱۱)$$

**یادداشت:**

................................................................................................

................................................................................................

................................................................................................

................................................................................................

## ۱۱-۲- محاسبه مشتق اول با روش‌های مختلف

اگر در رابطه (۱۱-۱) از جملات $\frac{h^2}{2!}f_i''$ و به بعد صرف‌نظر کنیم خواهیم داشت:

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' \quad \to \quad f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta f_i}{h} \tag{۱۱-۵}$$

در به دست آوردن این رابطه از جملات $\frac{h^2}{2!}f_i''$ و به بعد صرف‌نظر کردیم لذا مرتبه خطای محلی یا موضعی (Local Error) برابر ۲ می‌باشد. البته رابطه (۱۱-۵) را می‌توان به شکل دیگری به دست آورد:

$$hf_i' = f_{i+1} - f_i - \frac{h^2}{2!}f_i'' - \frac{h^3}{3!}f_i''' - \cdots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2!}f_i'' - \frac{h^2}{3!}f_i''' - \cdots$$

حال اگر از جملات $\frac{h}{2!}f_i''$ و به بعد صرف‌نظر کنیم، خواهیم داشت:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta f_i}{h}$$

چون پس از انجام محاسبات از جملات $\frac{h}{2!}f_i''$ و به بعد صرف‌نظر کردیم مرتبه خطای کلی یا جامع (Global Error) برابر 1 می‌باشد.

**توجه ۱** در محاسبه مشتق اول با روش تفاضل پیشرو، مرتبه خطای محلی 2 و مرتبه خطای کلی برابر 1 می‌باشد.

با روشی مشابه و با استفاده از رابطه (۱۱-۲) می‌توان تعریف مشتق اول را با تفاضل پسرو به شکل زیر نوشت:

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} = \frac{\nabla f_i}{h}$$

**توجه ۲** در محاسبه مشتق اول با روش تفاضل پسرو، مرتبه خطای محلی 2 و مرتبه خطای کلی برابر 1 می‌باشد.

حال می‌خواهیم تعریف مشتق اول را با استفاده از تفاضل مرکزی به دست آوریم، برای این کار روابط (۱۱-۱) و (۱۱-۲) را از هم کم می‌کنیم:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + \frac{2h^3}{3!}f_i''' + \cdots$$

اگر از جملات $\frac{2h^3}{3!}f_i'''$ و به بعد صرف‌نظر کنیم خواهیم داشت:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \tag{۱۱-۶}$$

چون از جملات $\frac{2h^3}{3!}f_i'''$ و به بعد صرف‌نظر کردیم مرتبه خطای محلی در محاسبه مشتق اول برابر ۳ می‌باشد. با روشی مشابه با تفاضل پیشرو و پسرو می‌توان اثبات کرد، مرتبه خطای کلی یا جامع در محاسبه مشتق اول با تفاضل مرکزی برابر 2 می‌باشد.

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**خلاصه:** در محاسبه مشتق اول تابع با استفاده از تفاضل پیشرو، پسرو و مرکزی می‌توان نوشت:

تفاضل پیشرو: $f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{\Delta f_i}{h}$ , $\begin{cases} \text{خطای کلی}: O(h) \\ \text{خطای محلی}: O(h^2) \end{cases}$

تفاضل پسرو: $f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} = \frac{\nabla f_i}{h}$ , $\begin{cases} \text{خطای کلی}: O(h) \\ \text{خطای محلی}: O(h^2) \end{cases}$

تفاضل مرکزی: $f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ , $\begin{cases} \text{خطای کلی}: O(h^2) \\ \text{خطای محلی}: O(h^3) \end{cases}$

نتیجه می‌شود **در محاسبه مشتق اول همواره مرتبه خطای محلی یک واحد از مرتبه خطای کلی بیشتر است.**

**خلاصه:** در محاسبه مشتق دوم براساس اختلافات پیشرو، پسرو و مرکزی خواهیم داشت:

## ۱۱ـ۳ـ محاسبه مشتق دوم با روش‌های مختلف

(۱۱ـ۷)

تفاضل پیشرو: $f''_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} = \frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$ $\begin{cases} \text{خطای کلی}: O(h) \\ \text{خطای محلی}: O(h^3) \end{cases}$

(۱۱ـ۸)

تفاضل پسرو: $f''_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{h^2} = \frac{\nabla^2 f_i}{h^2}$ , $\begin{cases} \text{خطای کلی}: O(h) \\ \text{خطای محلی}: O(h^3) \end{cases}$

(۱۱ـ۹)

تفاضل مرکزی: $f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} = \frac{\delta^2 f_i}{h^2}$ , $\begin{cases} \text{خطای کلی}: O(h^2) \\ \text{خطای محلی}: O(h^4) \end{cases}$

همان‌طور که از روابط بالا مشخص است **در محاسبه مشتق دوم، مرتبه خطای محلی از مرتبه خطای کلی دو واحد بیش‌تر است.**

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**مثال ۱** با استفاده از جدول زیر، مقدار مشتق تابع در $x = 1$ با استفاده از روش تفاضل مرکزی چقدر است؟(مهندسی نفت -۸۴)

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.5 | 0.2 |
| 1 | 1.1 |
| 1.5 | 0.8 |
| 2 | 0.5 |

۱) -0.6　۲) -1.8　۳) 0.6　۴) 1.8

**یادداشت**:

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

# فصل دوازدهم

# حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

در این فصل به حل معادلات دیفرانسیل معمولی نوع IVP می‌پردازیم. برای حل این معادلات روش‌های زیر را بررسی خواهیم کرد:

۱) روش تیلور

۲) روش اولر

۳) روش اولر اصلاح شده (هیون)

۴) روش رانگ کاتا

## ۱۲-۱- روش تیلور (Taylor Method)

فرض می‌کنیم بخواهیم معادله دیفرانسیل زیر را حل کنیم:

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

در روش تیلور، بسط سری تیلور را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i) \tag{۱\_۱۲}$$

از آن‌جا که در معادله دیفرانسیل فقط مشتق اول به صورت $y' = f(x,y)$ داده شده است برای تعیین جواب در نقطه $x_{i+1}$ لازم است $y''(x_i)$ ، $y'''(x_i)$ ، .... و $y^{(n)}(x_i)$ را محاسبه کنیم. ضمناً در روش تیلور خطای محاسبات از مرتبه $O(h^n)$ می‌باشد.

**مثال ۱** اگر برای تابع $y(x)$ داشته باشیم $y(0.5) = 0.2$ و $\frac{dy}{dx} = f(x,y) = x^2 + y^2$ و برای محاسبه $y(1)$ از سه جمله اول بسط تیلور استفاده شود، $y(1)$ کدام است؟ (مهندسی شیمی -۸۴)

۱) 0.4845 ۲) 0.492 ۳) 0.345 ۴) 0.47

**یادداشت:**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

**حل:** گزینه ۱ درست است.

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2} y''_i$$

$$y' = x^2 + y^2 \rightarrow y'' = 2x + 2yy' \quad , \quad y(x_0 = 0.5) = 0.2$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left(x_i^2 + y_i^2\right) + \frac{h^2}{2}\left[2x_i + 2y_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)\right]$$

$$y_1 = y(x=1) = 0.2 + 0.5\left(0.5^2 + 0.2^2\right) + \frac{0.5^2}{2}\left[(2\times 0.5) + 2\times 0.2\left(0.5^2 + 0.2^2\right)\right]$$

$$y(x=1) = 0.2 + 0.5(0.25 + 0.04) + \frac{0.25}{2}\left[1 + 0.4(0.25 + 0.04)\right]$$

$$y(x=1) = 0.4845$$

## ۱۲-۲- روش اولر (Euler Method)

در روش اولر، اساس کار بسط سری تیلور می‌باشد ولی ساده‌ترین حالت (یعنی فقط تا مشتق اول) را درنظر می‌گیریم. لذا رابطه بازگشتی اولر به صورت زیر می‌باشد:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i \qquad (۱۲\text{-}۲)$$

خطای برشی در روش اولر از مرتبه $O\left(h^2\right)$ می‌باشد.

**مثال۲** با استفاده از روش اویلر و $h = 0.1$، $y(0.1)$ را محاسبه کنید. (مهندسی مخازن هیدروکربوری -۸۴)

$$y'' - y + x = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 2$$

۱) -0.91 ۲) 1.05 ۳) 1.1 ۴) 1.2

**حل:** گزینه ۴ درست است.

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i \quad , \quad y_0 = 1 \quad , \quad y'_0 = 2$$

$$y_1 = y(0.1) = y_0 + hy'_0$$

$$y(0.1) = 1 + (0.1\times 2) = 1.2$$

## ۱۲-۳- روش اولر اصلاح شده یا روش هیون (Modified Euler Method or Heun Method)

اساس این روش نیز بسط سری تیلور می‌باشد با این تفاوت که بسط سری تیلور را تا مشتق دوم درنظر می‌گیریم:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i$$

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{y'_{i+1} - y'_i}{h}\right)$$

**یادداشت:**

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(y'_i + y'_{i+1}\right) \qquad (۳\_۱۲)$$

در روش اولر اصلاح شده، رابطه بازگشتی مطابق رابطه (۱۲-۳) می‌باشد. خطای برشی روش اولر اصلاح شده $O\left(h^3\right)$ می‌باشد.

## ۱۲-۴- روش رانگ کاتا (Runge- Kutta Method)

در این روش با استفاده از مقادیر کمکی $k_1$، $k_2$، $k_3$ و $k_4$ کلی‌ترین فرم رابطه بازگشتی را می‌نویسیم:

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

به طوری که همواره $a+b+c+d=1$ و مقادیر a، b و c و d مثبت می‌باشند. اگر در رابطه (۱۶-۵) داشته باشیم:

الف) اگر $c,d=0$ رانگ کاتا مرتبه دوم $y_1 = y_0 + ak_1 + bk_2 \rightarrow$

ب) اگر $d=0$ رانگ کاتا مرتبه سوم $y_1 = y_0 + ak_1 + bk_2 + ck_3 \rightarrow$

ج) اگر $a,b,c,d \neq 0$ رانگ کاتا مرتبه چهارم $y_1 = y_0 + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \rightarrow$

حال به بررسی هرکدام از روش‌های فوق می‌پردازیم.

### ۱۲-۴-۱- روش رانگ – کاتای مرتبه ۲ (Runge-Kutta Order 2)

در این روش اغلب $a=b=\frac{1}{2}$ بوده و رابطه بازگشتی به صورت زیر می‌باشد:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) \qquad (۴\_۱۲)$$

که مقادیر $k_1$ و $k_2$ از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + h\ ,\ y_0 + k_1\right)$$

مرتبه خطای برشی در روش رانگ ـ کاتای مرتبه دوم برابر $O\left(h^3\right)$ می‌باشد. در بخش (۱۲-۳) ذکر گردید که مرتبه خطای برشی برای روش اولر اصلاح شده نیز برابر $O\left(h^3\right)$ می‌باشد. بنابراین جواب‌هائی که از روش اولر اصلاح شده برای یک معادله دیفرانسیل معمولی به دست می‌آیند با جواب‌هائی که از روش رانگ ـ کاتای مرتبه دوم به دست می‌آیند، برابر خواهند بود.

**توجه**: با توجه به نکته فوق، اگر جواب معادله‌ای در کنکور با استفاده از روش رانگ – کاتای مرتبه دوم خواسته شود می‌توان از روش اولر اصلاح شده نیز برای محاسبه جواب استفاده کرد.

### ۱۲-۴-۲- رو ش رانگ – کاتای مرتبه ۳ (Runge- Kutta Order 3)

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل:

$$y' = f\left(x,y\right) \quad , \quad y\left(x_0\right) = y_0$$

**یادداشت**:

.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................
.......................................................................................................

رابطه بازگشتی به صورت زیر می‌باشد $\left(a=c=\frac{1}{6}\ ,\ b=\frac{4}{6}\right)$:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right) \tag{۱۲ـ۵}$$

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}\ ,\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + h\ ,\ y_0 + 2k_2 - k_1\right)$$

### ۱۲-۴-۳- روش رانگ - کاتای مرتبه ۴ (Runge- Kutta Order 4)

در این روش برای حل معادله‌ی دیفرانسیل $y(x_0)=y_0$ و $y'=f(x,y)$ رابطه بازگشتی را به صورت زیر می‌نویسیم $\left(a=d=\frac{1}{6}\quad ,\quad b=c=\frac{2}{6}\right)$:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{۱۲ـ۶}$$

$$k_1 = hf\left(x_0, y_0\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}\ ,\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}\ ,\ y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_0 + h\ ,\ y_0 + k_3\right)$$

**مثال۳** خطای موضعی روش رانگ کاتا مرتبه دوم برای اندازه‌ی گام $0.1$ کدام است؟ (مهندسی نفت -۸۲)

۱) $\pm 0.0001$ ۲) $\pm 0.001$ ۳) $\pm 0.01$ ۴) $\pm 0.1$

**حل**: گزینه ۲ درست است.

خطای موضعی روش رانگ ـ کاتای مرتبه دوم $O\left(h^3\right)$ می‌باشد.

**یادداشت**:

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

# فصل سیزدهم

# حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

## ۱۳-۱- مقدمه

معادلات BVP معادلاتی هستند که مقدار جواب تابع در ابتدا و انتهای بازه داده شده و از ما جواب تابع در سایر نقاط خواسته می‌شود:

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(a) = y_a \quad , \quad y(b) = y_b$$

برای حل این معادلات دو روش تیراندازی یا پرتابی (Shooting Method) و تفاضل محدود (Finite Difference) مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

## ۱۳-۲- روش تیراندازی یا پرتابی (Shooting Method)

فرض می‌کنیم بخواهیم معادله مرتبه دوم:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x = a) = y_a \\ y(x = b) = y_b \end{cases} \tag{۱_۱۳}$$

را با روش تیراندازی حل کنیم. برای حل، مقداری برای مشتق تابع در $x = a$ حدس می‌زنیم:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x = a) = y_a \\ y'(x = a) = y'_a \end{cases} \tag{۲_۱۳}$$

**یادداشت:**

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

با شرایط جدید، معادله داده شده به یک معادله IVP تبدیل می‌شود که با روش‌های ذکر شده در فصل قبلی قابل حل می‌باشد. پس از حل، جدول زیر را کامل می‌کنیم:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $x_0 = a$ | $y_a$ |
| $x_1$ | $y_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ |
| … | … |
| $x = b$ | $y_n$ |

اگر $y_n$ به دست آمده با مقدار داده شده در صورت مسئله، $y_b$، برابر بود، حل مسئله تمام بوده و مقدار جواب تابع در سایر نقاط نیز به دست آمده است. در غیر این صورت حدس جدیدی برای $y'(x=a)$ زده و معادله (۱۳-۲) را با شرایط جدید حل می‌کنیم تا جائی که مقدار به دست آمده در $x = b$ برابر $y_b$ باشد.

## ۱۳-۳- روش تفاضل محدود (Finite Difference Method)

در روش تفاضل محدود برای حل معادله‌ی:

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$y(x=a) = y_a$$
$$y(x=b) = y_b$$

به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱) ابتدا تعریف مشتق اول را به صورت عددی می‌نویسیم:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (۱۳\text{ـ}۳)$$

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (۱۳\text{ـ}۴)$$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (۱۳\text{ـ}۵)$$

البته لازم به ذکر است که استفاده از رابطه (۱۳-۵) متداول‌تر است.

۲) تعریف مشتق دوم تابع را نیز براساس یکی از روابط زیر قرار می‌دهیم:

$$y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} \quad (۱۳\text{ـ}۶)$$

$$y''_i = \frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i}{h^2} \quad (۱۳\text{ـ}۷)$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (۱۳\text{ـ}۸)$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

در جاگذاری $y'$ و $y''$ فرمول‌های (۱۳-۵) و (۱۳-۸) متداول‌تر می‌باشند مگر این‌که در صورت مسئله حتماً قید شده باشد که تفاضل پیشرو و یا پسرو به کار برده شود.

۳) بازهٔ $[a,b]$ را به $n+1$ زیر بازه مساوی تقسیم کرده و $n+2$ نقطه و n معادله به دست می‌آوریم که از حل آن‌ها مقادیر مجهول به دست می‌آیند. $\left(h=\dfrac{b-a}{n+1}\right)$.

**مثال ۱** معادله دیفرانسیل تفاضلی متناظر با $y''+2xy=\cos x$ بر حسب روش تفاضل‌های محدود کدام گزینه است؟ $(\Delta x=h)$ (مهندسی پلیمر ـ ۸۲)

۱) $y_{i+1}+h^2\left(2x_i+\cos x_i\right)y_i+y_{i-1}=0$

۲) $y_{i+1}-\left(2-2h^2x_i\right)y_i+y_{i-1}=-h^3\cos x_i$

۳) $y_{i+1}+h^2x_iy_i+y_{i-1}=\cos x_i$

۴) $y_{i+1}-\left(2-2h^2x_i\right)y_i+y_{i-1}=h^2\cos x_i$

**حل:** گزینه ۴ درست است.

$$y''_i+2x_iy_i=\cos x_i \rightarrow \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+2x_iy_i=\cos x_i \rightarrow y_{i+1}-\left(2-2h^2x_i\right)y_i+y_{i-1}=h^2\cos x_i$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

# فصل چهاردهم

# حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

## ۱۴ـ۳ـ بیان تفاضلی مشتقات عددی

### ۱۴ـ۱ـ۱ـ بیان تفاضلی مشتق اول تابع

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j,k}=\frac{u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}}{h}+O(h)$$ : تفاضل پیشرو (۱ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j,k}=\frac{u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}}{h}+O(h)$$ : تفاضل پسرو (۲ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j,k}=\frac{u_{i+1,j,k}-u_{i-1,j,k}}{2h}+O\left(h^2\right)$$ : تفاضل مرکزی (۳ـ۱۴)

برای $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j,k}$ نمایش تفاضلی به صورت زیر است $(\Delta y=s)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j,k}=\frac{u_{i,j+1,k}-u_{i,j,k}}{s}+O(s)$$ : تفاضل پیشرو (۴ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j,k}=\frac{u_{i,j,k}-u_{i,j-1,k}}{s}+O(s)$$ : تفاضل پسرو (۵ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j,k}=\frac{u_{i,j+1,k}-u_{i,j-1,k}}{2s}+O\left(s^2\right)$$ : تفاضل مرکزی (۶ـ۱۴)

**یادداشت:**

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

.............................................................................................................

در نهایت برای $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{i,j,k}$ نمایش تفاضلی به صورت زیر نوشته می‌شود $(\Delta z = r)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{r} + O(r)$$ : تفاضل پیشرو (۷ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{i.j.k} = \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1}}{r} + O(r)$$ : تفاضل پسرو (۸ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}}{2r} + O\left(r^2\right)$$ : تفاضل مرکزی (۹ـ۱۴)

### ۱۴ـ۱ـ۲ـ بیان تفاضلی مشتق دوم تابع

برای $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j,k}$ تعاریف زیر را داریم $(\Delta x = h)$:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i+2,j,k} - 2u_{i+1,j,k} + u_{i,j,k}}{h^2} + O(h)$$ : تفاضل پیشرو (۱۰ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j,k} - 2u_{i-1,j,k} + u_{i-2,j,k}}{h^2} + O(h)$$ : تفاضل پسرو (۱۱ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h^2} + O\left(h^2\right)$$ : تفاضل مرکزی (۱۲ـ۱۴)

در صورتی که نمایش تفاضلی $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j,k}$ به شکل‌های زیر می‌باشد $(\Delta y = s)$:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j+2,k} - 2u_{i,j+1,k} + u_{i,j,k}}{s^2} + O(s)$$ : تفاضل پیشرو (۱۳ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j,k} - 2u_{i,j-1,k} + u_{i,j-2,k}}{s^2} + O(s)$$ : تفاضل پسرو (۱۴ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{s^2} + O\left(s^2\right)$$ : تفاضل مرکزی (۱۵ـ۱۴)

در نهایت $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{i,j,k}$ به صورت‌های زیر تعریف می‌شود $(\Delta z = r)$:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j,k+2} - 2u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k}}{r^2} + O(r)$$ : تفاضل پیشرو (۱۶ـ۱۴)

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j,k} - 2u_{i,j,k-1} + u_{i,j,k-2}}{r^2} + O(r)$$ : تفاضل پسرو (۱۷ـ۱۴)

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

تفاضل مرکزی: $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{i,j,k} = \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{r^2} + O\left(r^2\right)$ (۱۴ـ۱۸)

## ۱۴ـ۲ـ حل معادلات بیضوی با روش عددی

همان‌طور که قبلاً دیدیم معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ یک معادله بیضوی می‌باشد. برای حل این معادله کافی است $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را با استفاده از روش تفاضل مرکزی جایگزین کنیم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \xrightarrow{\Delta x = \Delta y}$$

با ساده‌سازی عبارت فوق داریم:

$$\rightarrow \quad u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = 0 \qquad (۱۴ـ۱۹)$$

**مثال ۱** شکل عددی معادله دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 1$ با فرض $\Delta x = \Delta y = h$ کدام است؟ (مهندسی مخازن هیدروکربوری ـ ۸۵)

۱) $T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4T_{i,j} = h^2$

۲) $T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4h^2 T_{i,j} = 0$

۳) $4h^2 T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} - T_{i-1,j} = 0$

۴) $T_{i,j+1} - T_{i,j-1} + T_{i+1,j} - T_{i-1,j} + 4T_{i,j} = h^2$

**حل**: گزینه ۱ درست است.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

با فرض $\Delta x = \Delta y = h$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 1$$

$$\rightarrow \quad T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = h^2$$

**یادداشت:**

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

## ۱۴ـ۳ـ حل معادلات سهموی با روش عددی

فرض می‌کنیم بخواهیم معادله سهموی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$ را با روش عددی حل کنیم. در این معادله متغیر زمان هم وارد شده است. برای حل معادلات سهموی دو روش وجود دارد: ۱) روش صریح (Explicit Method) ۲) روش ضمنی (Implicit Method). حال به شرح کامل این دو روش می‌پردازیم.

### ۱۴ـ۳ـ۱ـ روش صریح (Explicit Method)

در این روش برای محاسبه $u_{i,n+1}$ (مقدار $u_i$ در زمان $n+1$) مشتقات مکانی را در زمان گذشته در نظر می‌گیریم یعنی:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,n}=\frac{i_{i+1,n}-2u_{i,n}+u_{i-1,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,n}=\frac{u_{i,n+1}-u_{i,n}}{\Delta t}$$

با جاگذاری در معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$ خواهیم داشت:

$$\frac{u_{i+1,n}-2u_{i,n}+u_{i-1,n}}{(\Delta x)^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{u_{i,n+1}-u_{i,n}}{\Delta t}$$

اگر معادله بالا را مرتب کرده و بازنویسی کنیم، معادله تفاضلی زیر به‌دست می‌آید:

$$u_{i,n+1}=Fo\left(u_{i+1,n}+u_{i-1,n}\right)+\left(1-2Fo\right)u_{i,n} \qquad (۱۴ـ۲۰)$$

که $Fo=\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}$ می‌باشد.

**نکته ۱** از معادله بالا مشخص است که برای به‌دست آوردن $u_{i,n+1}$ معادله‌ای تشکیل می‌شود که فقط دارای یک مجهول است و نیازی به حل دستگاه چند معادله چند مجهول نیست و این مزیت روش صریح می‌باشد.

**نکته ۲** اگر معادله تفاضلی به دست آمده در روش تفاضل محدود برای معادلات سهموی به فرم

$$u_{i,n+1}=au_{i+1,n}+bu_{i,n}+cu_{i-1,n}$$

باشد، شرط لازم و کافی برای پایداری عبارت است از:

$$a,b,c>0 \quad , \quad a+b+c\le 1$$

که به قانون مثبت (Positive Rule) معروف است.

با توجه به نکته ۲، شرط پایداری برای معادله تفاضلی به‌دست آمده در رابطه (۱۸ـ۲۰) به صورت زیر می‌باشد:

$$1-2Fo\ge 0 \quad \rightarrow \quad Fo\le\frac{1}{2} \qquad (۱۴ـ۲۱)$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

برای معادله دیفرانسیل زیر که حالت دوبعدی مثال قبلی می‌باشد می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{u_{i+1,j,n}-2u_{i,j,n}+u_{i-1,j,n}}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i,j+1,n}-2u_{i,j,n}+u_{i,j-1,n}}{(\Delta y)^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{u_{i,j,n+1}-u_{i,j,n}}{\Delta t}$$

با فرض $\Delta x=\Delta y$ و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$u_{i,j,n+1}=Fo\left[u_{i+1,j,n}+u_{i-1,j,n}+u_{i,j+1,n}+u_{i,j-1,n}\right]+(1-4Fo)u_{i,j,n} \qquad (۲۲\_۱۴)$$

که $Fo=\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}$ می‌باشد.

مطابق نکته ۲ و رابطه (۱۴ـ۲۲) شرط پایداری برای معادله تفاضلی (۱۴ـ۲۲) که مربوط به حالت دوبعدی می‌باشد، به صورت زیر می‌باشد:

$$1-4Fo\geq 0 \quad\rightarrow\quad Fo\leq\frac{1}{4} \qquad (۲۳\_۱۴)$$

و برای حالت سه بعدی به اختصار می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u_{i,j,k,n+1}=Fo\Big(u_{i+1,j,k,n}+u_{i-1,j,k,n}+u_{i,j+1,k,n}$$
$$+u_{i,j-1,k,n}+u_{i,j,k+1,n}-u_{i,j,k-1,n}\Big)+(1-6Fo)u_{i,j,k,n}$$

و شرط پایداری به صورت زیر می‌باشد:

$$1-6Fo\geq 0 \quad\rightarrow\quad Fo\leq\frac{1}{6} \qquad (۲۴\_۱۴)$$

**مثال ۲** شرط پایداری روش صریح برای حل معادله $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ چیست؟ $(\Delta x=\Delta y)$ (مهندسی شیمی سراسری ـ ۸۷)

۱) $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}<\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}<\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}<\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}<1$

**حل**: گزینه ۲ درست است.

**توجه**: یکی از اشکالات روش صریح این است که شرط پایداری دارد ولی مزیت آن این است که محاسبات ساده‌تر بوده و از حل یک معادله، یک مجهول می‌توان به جواب رسید.

**یادداشت**:

................................................................................................

................................................................................................

................................................................................................

................................................................................................

### ۱۴ـ۳ـ۲ـ روش ضمنی (Implicit Method)

در این روش برای حل معادله سهموی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$ و یافتن $u_{i,n+1}$ مشتقات مکانی را در زمان $n+1$ قرار می‌دهیم:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,n+1}=\frac{u_{i+1,n+1}-2u_{i,n+1}+u_{i-1,n+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,n}=\frac{u_{i,n+1}-u_{i,n}}{\Delta t}$$

حال در معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{u_{i+1,n+1}-2u_{i,n+1}+u_{i-1,n+1}}{(\Delta x)^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{u_{i,n+1}-u_{i,n}}{\Delta t}$$

حال معادله را ساده کرده و معادله تفاضلی را در حالت نهایی می‌نویسیم:

$$u_{i,n+1}=\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)u_{i+1,n+1}+\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)u_{i-1,n+1}+\left(\frac{1}{1+2\lambda}\right)u_{i,n} \quad (۱۴\text{ـ}۲۵)$$

که $\lambda=\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}$ می‌باشد.

در معادله فوق $u_{i+1,n+1}$ و $u_{i,n+1}$ و $u_{i-1,n+1}$ هر سه مجهول می‌باشند که با به کار بردن معادله تفاضلی و با حل دستگاه چند معادله چند مجهول قابل محاسبه می‌باشند.

**نکته ۱** مزیت روش ضمنی این است که همواره پایدار بوده و شرط پایداری ندارد.

**نکته ۲** عیب روش ضمنی این است که برای پیدا کردن مجهول باید دستگاه چند معادله چند مجهول را حل کرد.

**مثال ۳** جهت حل معادله $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ با روش ضمنی (Implicit) با فرض $\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}=0.25$ کدام معادله حاصل می‌شود؟

(مهندسی شیمی ـ ۸۴)

۱) $-T_{i-1,n+1}+1.5T_{i,n+1}-0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$

۲) $-0.25T_{i-1,n+1}+1.5T_{i,n+1}-0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$

۳) $-0.25T_{i-1,n+1}-1.5T_{i,n+1}-0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$

۴) $-0.25T_{i-1,n+1}+1.5T_{i,n+1}+0.25T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$

**حل :** گزینه ۲ درست است.

از معادله (۱۴ـ۲۵) که برای روش ضمنی به‌دست آمده می‌توان نوشت:

$$-\lambda T_{i-1,n+1}+(1+2\lambda)T_{i,n+1}-\lambda T_{i+1,n+1}=T_{i,n}$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

در این مسئله $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = 0.25$ بوده فلذا خواهیم داشت:

$$-0.25T_{i-1,n+1} + 1.5T_{i,n+1} - 0.25T_{i+1,n+1} = T_{i,n}$$

**مثال ۴** برای حل معادله دیفرانسیل $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ در صورتی که $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ باشد و از روش تفاضل محدود ضمنی استفاده شود، شرط پایداری عبارت است از: (مهندسی شیمی ـ ۸۲)

۱) $0 < \lambda \le 2$
۲) $0 < \lambda \le 4$
۳) $0 < \lambda \le \infty$
۴) $0 < \lambda \le \frac{1}{2}$

**حل :** گزینه ۳ درست است.

روش ضمنی همو اره پایدار می‌باشد $(0 < \lambda < \infty)$

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

# بودجه‌بندی سوالات کنکور در سال‌های اخیر

| سر فصل | ۱۳۸۵ | ۱۳۸۶ | ۱۳۸۷ | ۱۳۸۸ | ۱۳۸۹ | مجموع سوالات در ۵ سال | درصد ۵ سال |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | تعداد تست | تعداد تست | تعداد تست | تعداد تست | تعداد تست | | |
| مقدمه معادلات دیفرانسیل | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | %1 |
| مدلسازی و فرمولاسیون | 1 | 3 | 4 | 2 | 5 | 15 | 15% |
| معادله دیفرانسیل مرتبه اول- معادله تفکیک پذیر | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| معادله دیفرانسیل مرتبه اول- معادله همگن | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1% |
| معادله دیفرانسیل مرتبه اول- معادله کامل | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| معادله دیفرانسیل مرتبه اول- معادله برنولی | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| معادله دیفرانسیل مرتبه دوم - حالت کلی | 1 | 0 | 4 | 1 | 1 | 7 | 7% |
| معادله دیفرانسیل مرتبه دوم - معادله اویلر | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1% |
| حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری ها- تعاریف | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری ها- روش فروبنیوس | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری ها- لژاندر | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری ها- بسل و بسل اصلاح شده | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5% |
| حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری ها- توابع خاص | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2% |
| تبدیل لاپلاس | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4% |
| دستگاه معادلات دیفرانسیل | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| سری های فوریه | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1% |
| مسایل اشتورم لیوویل | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1% |
| معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی- تعاریف | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2% |
| معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی- روش جداسازی متغییرها | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 11 | 11% |
| معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی-روش ترکیب متغییرها | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1% |
| روش های عددی برای حل معادلات غیرخطی | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 9 | 9% |
| درون یابی | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 10 | 10% |
| انتگرال گیری عددی | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 4 | 4% |
| مشتق گیری عددی | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 | 3% |
| حل معادلات دیفرانسیل عددی- روش تیلور | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| حل معادلات دیفرانسیل عددی- روش اویلر | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 3% |
| حل معادلات دیفرانسیل عددی- روش اویلر تصحیح شده | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| حل عددی معادلات دیفرانسیل - روش رانگ کاتا | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1% |
| حل عددی معادلات دیفرانسیل - مقدار مرزی | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0% |
| حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی | 1 | 2 | 2 | 0 | 4 | 9 | 9% |
| ماتریس | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 | 4% |
| حل عددی دستگاه های معادله خطی | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 5 | 5% |
| جمع تعداد تست در مباحث | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100 | 100% |
| جمع تعداد تست در کنکور | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100 | 100% |