مبانی علوم ریاضی

نسخه (اسفند 1389)

تألیف:

دکتر محمدمهدی ابراهیمی و دکتر مژگان محمودی

گروه ریاضی

دانشگاه شهید بهشتی

فهرست مطالب

پیشگفتار و سخنی با
دانشجو و استاد

اگر ریاضیات، آنگونه که گفته می‌شود، **مادر همه‌ی دانش‌ها** است، یقیناً بـه **ابزاری دقیـق** و توانمند برای گفتگوی بدون جدل و نزاع، برای انتقال اطلاعات، و تهیه‌ی خوراک و آذوقـه‌ی لازم برای خود و فرزندان و میهمانانش، نیاز دارد!

زبان ریاضیات امروز، زبان مجموعه‌ها است.

مجموعه، **رابطه**، و **تابع** از مفاهیم و ابزارهـای بنیـادی در سراسـر ریاضـیات و کاربردهـای آن است. بدون این ابزار یارای درست، منطقی، و بدون جدل صحبت و بیان کـردن یافتـه‌هایمـان را نداریم!

کتاب **مبانی علوم ریاضی** قصد معرفی واژه ها وابزار دقیق این زبان زیبا را دارد.

در یک فصل کوتاه اول این کتاب اندکی با منطق گزاره‌ها آشنا می‌شـویم و روش‌هـای آن را در سراسر کتاب تمرین می کنیم. برای کسب اطلاعات بیشتر در باره‌ی منطق ریاضی، به کتاب‌های ... مذکور در فهرست منابع رجوع نمایید.

سپس در فصل 2، مفاهیم اولیه‌ی مربوط به مجموعه‌ها را آورده‌ایم، کـه در تمـام فصـل‌هـای دیگر این کتاب و تمام دروس دیگر علوم ریاضی به‌کار می‌آیند. در فصل های 3 تا 10 مفـاهیم بسیار اساسی و پر کاربرد رابطه و تابع را مطالعه می کنیم، که در فصل‌های دیگر کتـاب بـه‌کـار می‌روند.

دانشجویان عزیز علوم ریاضی

با سلام و تبریک و تشکر از اینکه رشته‌ی ریاضیات را انتخاب کردید. لازم اسـت مطـالبی را در زیر بیان کنیم.

قصد ما و استاد درس **مبانی علوم ریاضی** و نویسندگان این کتاب صرفاً انتقال اطلاعات و آشنا کردن **سطحی** شما با مفاهیم بنیادی مبحث زیبای ریاضیات نیست، بلکه می‌خواهیم، به کمک خود شما، **فوت و فن** کار را طوری بیاموزید که ملکه‌ی ذهنتان و جزئـی از بصـیرت تـان شود. در واقع قصد ما و استاد این درس شما این است که:

اندیشیدن بیاموزیم، و اندیشه ورزی کنیم!

هشدار هشدار!

حتماً با دیدن سر فصل درس **مبانی علوم ریاضی** واین کتاب متوجه شـده‌ایـد کـه اکثـر این مطالب صرفاً یادآوری از دوره‌ی دبیرستان است!

آیا این یک مزیت برای شما و استاد درس است یا برعکس؟

به نظر ما این یک **مزیت** است که در صورت عدم استفاده‌ی درسـت از آن بـه **ضـدش** تبـدیل می‌شود!

به دلیل وجود آزمون ورودی سراسری به دانشگاه ها، سطح دانش دانشجویان، دست کم در یک دانشگاه، تقریباً یکسان است. ولی، چرا افرادی این درس را با نمرات بسیار بالا می گذرانند ولی برخی، که متاسفانه گاهی تعداد آن‌ها کم نیست، دراین درس نمره‌ی بسیار **پایین** می‌گیرند؟! (این عدم هماهنگی در درس ریاضی عمومی 1 نیز رخ می‌دهد!) یکی از دلایلش شاید این باشد که برخی از دانشجویان به **هشدار**های استادانشان کم توجه می‌کنند و ظاهر مطالب این دروس، **مزیت** دانش خوب دبیرستانی آن‌ها را به ضدش تبدیل می‌کند!

این هشدار را جدی بگیریم!

نکته‌ی دیگری که لازم است مورد توجه قرار گیرد این است که

هیچ مبحثی از ریاضیات، به ویژه مباحث مجرد، بلافاصله درک نمی‌شوند و در ذهن نمی‌نشینند!

بنا براین، صبر و حوصله، پشتکار و امید شما را می‌طلبد. طولی نمی‌کشد که چنان با مفاهیم و روش‌های اثبات احکام ریاضی انس می‌گیرید که مجرد بودن آن‌ها را فراموش می‌کنید!

مسائل بخش کلیدی آموزش ریاضیات هستند.

کسب تبحر دراین مبحث از علم و درک ظرافت‌هایش جز با تلاش برای حل کردن تمرین‌های آن (چه به جواب نهایی برسد یا نرسد) ممکن نیست!

صرفاً با تماشای بازی فوتبال نمی‌توان فوتبالیست شد! ما که نشدیم!

تجربه‌ی سال‌ها تحصیل و تدریس نویسندگان این کتاب نشان داده است که دانشجویان مشکل چندانی با حل کردن مسئله‌های محاسباتی ندارند، ولی در درک و حل کردن مسئله‌های مجرد **قدری** مشکل دارند. نادیده گرفتن این مشکل عواقب نامناسبی در دروس ریاضی دارد. یقیناً این مشکل به خودی خود و به مرور زمان بر طرف نمی‌شود!

بیاییم تلاش کنیم و این مشکل را حل کنیم!

دانشجویان در نگاه اولیه به مسئله‌های مجرد، تصور می‌کنند که هیچ یک از آن‌ها را نمی‌توانند حل کنند. ولی آن دانشجویانی که مصمم هستند، ترسی به دل راه نمی‌دهند و با خود می‌گویند که:

این درس و مسئله‌های آن برای آن‌ها طرح شده است و یقینا با ابزاری که آموخته‌اند قابل حل هستند!

طولی نمی‌کشد که چنان تبحری در درک و حل مسئله‌ها به دست می‌آورید و از زیبایی این بازی فکری لذت می‌برید که در لابلای کتاب های دیگر به دنبال مسئله‌های جدید و مبارز طلب می‌گردید و خود نیز تلاش می‌کنید مسئله هایی طرح و حل کنید! به هر حال، وقت محدودی در اختیار استاد درس است و بدون کمک شما نمی‌تواند سرفصل درس را به خوبی به پایان برساند، **پس**

باید آستین ها را بالا زد و قسمتی از وظیفه را خود به عهده گرفت!

همکار ارجمند درس **مبانی علوم ریاضی**

از آنجا که این اولین باری است که دانشجویان با مفاهیم **شیرین مجرد ریاضی** آشنا می شوند، و در دروس مجرد است که با **اندیشه ورزی** می‌توانند استعدادهای خود را پرورش دهند، باید محتاط‌تر باشیم تا به هدفمان برسیم! همان‌طور که متوجه شده‌اید، زمان چندان زیادی به این درس اختصاص داده نشده است، با وجود این، باید در عین حال که مطالب مورد نظر را تدریس می‌کنیم، هر چقدر که می‌توانیم دانشجویان را نیز به فعالیت تشویق کنیم. بندهای **بحث در کلاس** به این منظور تهیه شده‌اند.

سعی کرده‌ایم مطالب هر بخش را برای **یک جلسه درس** (یک ساعت و بیست دقیقه) تدوین کنیم. امیدواریم زیاد خطا در محاسبه‌ی زمان نداشته باشیم. البته اگر کمتر روی تابلو بنویسیم و

بیشتر صحبت کنیم، موفق‌تر هستیم. اگر امکان نمایش متن درس روی تابلو باشد، یقیناً فرصت بیشتری برای به بحث گذاشتن مطالب خواهیم داشت. آرزوی ما **موفقیت شما** و **ما** در آمـوزش این درس و **موفقیت دانشجویان** عزیز در آموختن دقیق مطالب درس است.

فصل 1

منطق و اثبات

هر علم، به ویژه ریاضیات، از یک طرف با مفاهیم سر و کار دارد که باید با **تعریف** دقیق شناخته شوند، از طرف دیگر بر آن است که **احکامی** را، هر چند که سرراست و ساده باشند، با استدلال **اثبات** کند (نه با جنگ و دعوا یا سوگند خوردن !)

تعریف چیست، **حکم** کدام است، **چطور استدلال** کنیم؟

منطق ریاضی قواعد و روشهای علمی رسیدن به این مقصود را در اختیار می گذارد.

قصد ما در این فصل کوتاه، که برای دو جلسه‌ی درس "مبانی علوم ریاضی" تهیه شده است، معرفی مختصر این مطالب است. برای کسب اطلاعات بیشتر در باره‌ی منطق ریاضی، به کتاب‌های ... مذکور در فهرست منابع رجوع نمایید.

اندیشیدن بیاموزیم، و اندیشه ورزی کنیم!

1.1 منطق

در این بخش برخی از واژه‌ها و مفاهیم مربوط به منطق گزاره‌ها را می‌آوریم که به مرور به کار خواهیم برد.

تعریف چیست؟

از همان دوران کودکی متوجه شدیم که به کمک حواس می‌توانیم از هر شئ، با توجه به مشخصات ظاهری ای که دارد، تصویری در ذهن ایجاد کنیم.

مشخصات هر شئ معرف آن است.

یکی از مشکلات مبتدیان علم و دانش درک تعریف مفاهیم علمی، به ویژه مفاهیم مجرد ریاضی، است زیرا غالباً شاهد عینی و تصویری ندارند و **عقل** عامل اصلی درک مشخصات آن‌ها است.

استعداد ممکن است فطری باشد، ولی به پرورش نیاز دارد. با **تمرین کردن** و **اندیشه ورزی،** عقل نیز قادر به درک مفاهیم مجرد می شود.

به توانایی‌های خود کم اهمیت ندهیم!

حتی خبره ترین دانشمندان نیز فرایند پیچیده‌ی فراگیری مفاهیم علمی را به مرور و با تلاش پشت سر گذاشتند!

البته تنها با تماشای بازی فوتبال، نمی توان فوتبالیست شد، **ما که نشدیم!**

گفتیم که درک حسی ساده‌تر از درک عقلی است. برای مثال، درک سیب ساده‌تر از درک عنصر اکسیژن است. حتی درک اعداد 1، 2، 3، . . . بسیار آسان‌تر از قبول و درک اعدادی چون، $-5, 5^3, 2^{\sqrt{2}}, \pi, ...$ است. البته میزان و نوع نیاز افراد به درک اشیاء یا مفاهیم یکسان نیست و لزومی هم ندارد یکسان باشد. میزان شناخت میوه فروش از سیب با میزان شناخت کشاورز یا گیاه شناس متفاوت است. کودک برای انتخاب رنگ آب نباتش نیازی به آگاهی از طول موج نوری که از آن منعکس می شود، ندارد.

میزان نیاز شناخت **دانشجوی علوم ریاضی** از تعریف مفاهیم بسیار بیشتر از دیگران است!

تعریف باید جامع و مانع باشد!

یعنی باید تمام اشیای مورد نظر را دربر گیرد و مانع شمول شیئی که مورد نظر نیست شود.

تعریف نباید مستلزم دور باشد!

نمی‌توان گفت که متناهی آن است که نامتناهی نباشد، و نامتناهی آن است که متناهی نباشد.

گزاره

حال که نسبتاً با **تعریف** مفاهیم آشنا شدیم، یکی از اساسی‌ترین مفاهیم منطق ریاضی یعنی **گزاره** را معرفی می‌کنیم. گفتیم که ریاضیدانان برآنند که **درستی** یا **نادرستی** جمله-هایی را با استدلال اثبات کنند. پس این جمله‌ها باید قابلیت **درست** یا **نادرست** بودن را داشته باشند.

جمله‌ای خبری را که بتواند یک و تنها یکی از دو صفت
درست یا نادرست را بپذیرد، گزاره می‌نامیم.

1.1.1 بحث در کلاس

1- آیا باید درستی یا نادرستی گزاره همین حالا معلوم باشد؟

2- گزاره بودن جمله‌های زیر و درستی یا نادرستی آن‌ها را (در صورت امکان) به کمک **استاد درس** به بحث بگذارید.

(الف) عدد π از 3 بزرگتر است.

(ب) عدد π از 4 کوچکتر است.

(پ) $\pi = 3/14$.

(ت) برخی انسان‌ها باسوادند.

(ث) اگر باران بر زمین ببارد، زمین خیس می شود.

(ج) بیست و ششم اردیبهشت سال 1389 یکشنبه بود.

(چ) پنجم اسفند سال 2000 شمسی یکشنبه است.

(ح) رقم صدم بسط اعشاری عدد $\sqrt{2}$ برابر با 4 است.

(خ) فردوسی در روز اول بیست سالگی‌اش شعری سرود.

یقیناً به‌آسانی متوجه شدید که همه‌ی این جمله‌ها گزاره‌اند. از گزاره‌های **(الف)** تا **(ج)** تنها **(پ)** نادرست است (**چرا؟**) برای تعیین درستی یا نادرستی (چ) و (ح) محاسبه‌های زیادی باید انجام داد، ولی به هر حال یا درست هستند یا نادرست و حالت سومی وجود ندارد. همچنین، درستی یا نادرستی گزاره‌ی **(خ)** معلوم نیست، ولی مجدداً از دو حالت **درست** یا **نادرست** خارج نیست، حتی اگر تا ابد معلوم نشود!

حتماً شنیده‌اید که درستی گزاره‌ی

"معادله‌ی $x^n + y^n = z^n$ با $n \geq 3$ جواب صحیح برای $x, y, z \neq 0$ ندارد."

که به **آخرین قضیه‌ی فرما** معروف است، پس از حدود 350 سال اثبات شد و شگفتی قرن بیستم نام گرفت.

احتمالاً برخی از شما با ناممکن بودن **تثلیث زاویه**، **تربیع دایره**، و**تضعیف مکعب** با خط کش و پرگار آشنا هستید. با وجودی که ناممکن بودن آن‌ها سال‌هاست اثبات شده، هنوز برخی از غیر ریاضیدانان به جای استفاده‌ی بهتر از وقت و انرژی خود و دیگران، برای اثبات ممکن بودن آن‌ها تلاش می‌کنند.

2.1.1 بحث درکلاس

دلیل گزاره نبودن جمله‌های زیر را به بحث بگذارید.

1- قیمت کفش شما ارزان است.

2- او فوتبالیست است.

3- x عددی مثبت است.

حتماً متوجه شده‌اید که جمله‌های بالا با وجود خبری بودن، به این دلیل گزاره نیستند که نمی‌توان یکی از دو صفت **درست** یا **نادرست** را برای آن‌ها قائل شد. توجه کنید که نمی‌دانیم ارزان یعنی چقدر، او کیست، و x کدام است.

ترکیب گزاره ها

گزاره‌ها می‌توانند ساده یا مرکب باشند، یعنی به‌گونه‌ای از ترکیب چند گزاره تشکیل شده باشند. برای مثال، "عدد πاز 3 بزرگ‌تر و از 4 کوچک‌تر است" گزاره‌ای مرکب است که از دو گزاره‌ی ساده‌ی "عدد π از 3 بزرگ تر است" و "عدد π از 4 کوچک‌تر است" ساخته شده-است. به‌طور کلی گزاره‌ها را چطور می‌توان با هم ترکیب کرد؟ اگر P و Q گزاره باشند، برخی از روش‌های اصلی و متداول ترکیب آن‌ها به صورت زیرند:

ردیف	نام	می خوانیم	نماد گذاری ریاضی
1	نقیض گزاره	چنین نیست که P	$P', \sim P, \neg P$
2	ترکیب عطفی	P و Q	$P \wedge Q$
3	ترکیب فصلی	P یا Q	$P \vee Q$
4	ترکیب شرطی	اگر P آنگاه Q	$P \to Q$
5	ترکیب دوشرطی	P اگر و تنها اگر Q	$P \leftrightarrow Q$

بسیاری از گزاره‌های دیگر با تکرار و ترکیبی از این روش‌ها به‌دست می‌آیند. روشن است که درستی یا نادرستی گزاره‌های مرکب به درستی یا نادرستی گزاره‌های سازنده‌اش بستگی دارد. از گزاره‌های بالا، حالت‌های درست و نادرست 1، 3، و 4 را مورد بحث قرار می‌دهیم، بقیه روشن هستند.

3.1.1 نقیض گزاره

توجه می‌کنیم که وقتی گزاره‌ای واقعی جانشین P می‌شود، جمله‌ی "**چنین نیست که P**" را به گونه‌ای می‌نویسیم که روان و سلیس خوانده شود. توجه می‌کنیم که

اگر P **درست** باشد، $\neg P$ **نادرست** است، و اگر P **نادرست** باشد، $\neg P$ **درست** است.

جدول زیر مبین این واقعیت است.

P	$\neg P$
د	ن
د	ن

4.1.1 بحث درکلاس

1- آیا نقیض گزاره‌ی **5<2** را می‌توان به‌جای **چنین نیست که 5<2** یا به جای $5 \not< 2$ به صورت $5 \geq 2$ نیز نوشت؟

2- آیا نقیض "$5|2$" را می توان به جای "چنین نیست که $5|2$" یا به جای" $5 \nmid 2$" به صورت "$2|5$" نوشت ؟

3- آیا نقیض گزاره‌ی همه‌ی انسان‌ها باسواد هستند را می‌توان به‌صورت همه‌ی انسان‌ها با سواد نیستند یا همه‌ی انسان‌ها بی سواد هستند نوشت؟

گرچه پاسخ سؤال 3 منفی است، ممکن است با لحنی ادا شود که صحیح به نظر آید! در ریاضیات باید هر آنچه می‌گوییم یا می‌نویسیم نزد همه و در هر شرایطی به یک معنی باشد.

5.1.1 ترکیب فصلی $P \vee Q$

تذکر این نکته لازم است که گرچه در زبان محاوره‌ای وقتی می‌گوییم **این یا آن** معمولاً منظورمان هر دو نیست. ولی در ریاضیات رابط یا هر دو حالت را نیز در بر می‌گیرد. پس

گزاره‌ی مرکب "P یا Q" ($P \vee Q$) تنها وقتی **نادرست** است که **هر دو** گزاره‌ی P و Q **نادرست** باشند.

P	Q	$P \vee Q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

6.1.1 ترکیب شرطی $P \to Q$

درک گزاره‌ی شرطی **اگر** P **آنگاه** Q دقت و توجه بیشتری را می‌طلبد. ابتدا در بحث زیر شرکت کنید.

7.1.1 بحث در کلاس

به‌نظر شما در چه صورتی ادعای "**اگر باران بر زمین ببارد، زمین خیس می‌شود**" **نادرست** است؟ روشن است که

تنها در صورتی گزاره‌ی شرطی "**اگر** P **آنگاه** Q" **نادرست** است که P **درست** باشد ولی Q **نادرست**!

پس جدول زیر را داریم

P	Q	$P \to Q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

اگر قبول سطرهای سوم و چهارم آزار دهنده‌اند، نگران نباشید، حتی ریاضیدانان حرفه‌ای نیز مدت‌ها درگیر آن بودند! وقتی باران نباریده، گوینده‌ی جمله ضامن خیس شدن یا خیس نشدن زمین نیست، هست؟

در سطرهای 3 و 4 جدول بالا، می گوییم که

گزاره‌ی $P \to Q$ **به انتفای مقدم** درست است.

اگر گزاره‌ای درست باشد، آن را **قضیه** می‌نامیم. متداول است که وقتی $P \to Q$ درست است، یعنی قضیه است، آن را به صورت $P \Rightarrow Q$ نشان دهیم. همچنین، با توجه به جدول بالا، اگر P نادرست باشد، صرف نظر از درستی یا نادرستی Q، گزاره‌ی $P \Rightarrow Q$ درست است. پس با توجه به سطر اول جدول، باید از فرض درستی P، درستی Q را اثبات کنیم.

گزاره‌های سوردار

در بحث **2.1.1** دیدیم که جمله‌های او فوتبالیست است و x عددی مثبت است به این دلیل گزاره نیستند که **او** و x مجهول هستند. البته اگر به‌جای **او** نام شخصی، مثلاً علی دایی یا ابراهیمی و به جای x عددی چون 7 یا $-\sqrt{2}$ قرار دهیم، گزاره به دست می‌آید که می‌توان یکی از دو صفت درست یا نادرست را برای آن قائل شویم!

8.1.1 تعریف

جمله‌ای که شامل **متغیر** (مجهول) باشد به طوری که وقتی عضوی از مجموعه‌ی معینی را جانشین آن متغیر می‌کنیم گزاره‌ای به دست می‌آید، **گزاره نما** می نامیم.

گزاره نماها را به‌گونه‌ای که در زیر می‌بینیم نیز می توان به گزاره تبدیل کرد.

برخی از گزاره‌ها شامل الفاظ **هر** یا **بعضی** هستند. برای مثال "هر انسانی فانی است" و "بعضی انسانها با سوادند" از این نوع‌اند. **سور عمومی هر** را با $\forall$ و **سور وجودی بعضی** را با $\exists$ نشان می‌دهیم. در زبان ریاضی، الفاظ **هر** و به ویژه **بعضی** معنی خاصی دارند که خواهیم دید.

اگر $P(x)$ گزاره‌نما، یعنی شرطی روی x، باشد، گزاره‌ی "**برای هر** x، $P(x)$" را به‌صورت $\forall x, P(x)$ می‌نویسیم. همچنین، گزاره‌ی "**برای بعضی از** x**ها**، $P(x)$" را به صورت $\exists x,\ P(x)$ می‌نویسیم.

گزاره‌ی "$\forall x ، P(x)$" را گزاره‌ی با سور عمومی یا گزاره‌ی عمومی و گزاره‌ی "$\exists x, P(x)$" را گزاره‌ی وجودی می‌نامیم. گاهی به جای **برای هر**، می‌نویسیم **برای همه**، **به‌ازای هر**، و از این قبیل. همچنین، به‌جای **برای بعضی** می‌نویسیم **وجود دارد**، **به‌ازای برخی** و از این قبیل.

توجه کنید که جمله‌ی **برای هر x** بسیار کلی است و ممکن است شامل اشیائی شود که برای آن‌ها شرط $P(x)$ بی‌معنی باشد. از این رو، اغلب تغییرات x را در مجموعه‌ای چون A محدود می‌کنیم و می‌نویسیم "$\forall x \in A, P(x)$". روشن است که اگر A را تغییر دهیم، گزاره‌ی دیگری به دست می‌آید. برای مثال، اگر x در مجموعه‌ی {علی کریمی ، کریم باقری، علی دایی}= B تغییر کند، گزاره‌ی **برای هر $x \in A$ ، x فوتبالیست است** گزاره‌ای **درست**، و اگر x در {علی دایی، دکتر کرمزاده، دکتر بهزاد، دکتر محمودی و دکتر ابراهیمی}=A، که چهار نفر ریاضیدان هستند و نفر دیگر فوتبالیست است تغییر کند گزاره‌ای **نادرست** به دست می‌آید. توجه می‌کنیم که

9.1.1 تعریف

گزاره‌ی "$\forall x \in A, P(x)$" نادرست است اگر و تنها اگر **دست کم یک عضو** – حتی یک عضو- چون a در A وجود داشته باشد به‌طوری که $P(a)$ نادرست باشد!
و گزاره‌ی "$\exists x \in A, P(x)$" نادرست است اگر و تنها اگر **هیچ** عضوی چون $a \in A$ وجود نداشته باشد به‌طوری که $P(a)$ درست باشد.

10.1.1 بحث در کلاس

مجموعه‌های A و B بالا را در نظر بگیرید. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

1- عضوی در B وجود دارد که فوتبالیست است.
2- عضوی در A وجود دارد که فوتبالیست است.
3- برخی از اعضای B فوتبالیست هستند.
4- برخی از اعضای A فوتبالیست هستند.

یقیناً به راحتی متوجه شدید که گزاره های **1** و **2** درست هستند. ولی، اگر چه گزاره‌ی **3** همان گزاره‌ی **1** و گزاره‌ی **4** همان گزاره‌ی **2** است، گاهی با این چنین گزاره‌هایی قدری مشکل داریم! مشکل از اینجا ناشی می‌شود که در زبان محاوره‌ای اغلب لفظ برخی به این معنی تعبیر می‌شود که بیش از یکی ولی نه همه، که در ریاضیات چنین نیست و بیش از یکی و حتی همه می‌تواند باشد. البته ممکن است بگویید که اگر فقط یکی یا همه مورد نظر است، چرا از لفظ برخی استفاده می‌شود؟ حق با شما است، ولی این موضوع حقایق بالا را بی اعتبار نمی‌کند!

11.1.1 نقیض گزاره‌های سوردار

نکته‌ی دیگری که باید در مورد این سورها بیان کنیم، نحوه‌ی نقیض کردن آن‌ها است که به روشی به صورت‌های زیر انجام می‌شوند.

$$\neg\left(\forall x \in A, P\left(x\right)\right) = \exists x \in A, \neg P\left(x\right)$$

$$\neg\left(\exists x \in A, P\left(x\right)\right) = \forall x \in A, \neg P\left(x\right)$$

2.1 اثبات ریاضی

هنر ریاضیات خلق اثباتها است!

یادآوری می‌کنیم که هر گزاره‌ای را که درستی آن اثبات شده باشد، **قضیه** می‌نامیم. به بیان ساده،

اثبات درستی یک گزاره یعنی **نمایشی قانع کننده** از درست بود آن، **به روش‌های استانده‌ی مورد قبول** .

برخی از روش‌های اثبات را به اختصار در زیر می‌آوریم. برای کسب اطلاع بیشتر به کتاب-های ... در فهرست منابع رجوع نمایید.

1.2.1 روش اثبات مستقیم

قضیه‌ها اغلب به‌صورت گزاره‌های شرطی اگر P آنگاه Q هستند، یعنی دارای فرض‌هایی هستند که حکمی را نتیجه می‌دهند. در روش اثبات مستقیم این گونه قضیه‌ها، دو مرحله‌ی زیر را انجام می‌دهیم.

1- فرض می‌کنیم P **درست** است.
2- با استفاده‌ی مستقیم از اصول موضوع، تعریف‌ها، قضیه‌های قبلی و **درستی** P، **درستی** Q را اثبات می‌کنیم.

2.2.1 بحث در کلاس

برای مثال، می‌خواهیم قضیه‌ی زیر را به‌این روش اثبات کنیم.

3.2.1 قضیه

مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است.

اثبات

اثبات را مرحله به مرحله انجام می‌دهیم.

1- فرض می‌کنیم که اعداد x و y زوج هستند.
2- در این صورت، بنابر تعریف اعداد زوج، اعدادی صحیح چون a و b وجود دارند به‌طوری که $x=2a$ و $y=2b$. حال، بنابر ویژگی توزیع‌پذیری جمع روی ضرب اعداد، داریم $x+y=2a+2b=2(a+b)$.
3- مجدداً بنابر تعریف زوج بودن اعداد، چون $x+y$ مضرب 2 است، پس زوج است. □

4.2.1 تذکر

بیان نکته‌های زیر مفید است.

1- جمله‌ی "**اگر** P " لزوماً به این معنی نیست که گزاره‌ی P به خودی خود درست است، بلکه ما آن را **درست فرض می‌کنیم**. برای مثال، ممکن است استاد درس بگوید که

اگر معدل کلاس در امتحان از 15 بیشتر باشد،
آنگاه نمره‌ی هر دانشجو را در 1/1 ضرب می کنم!

یقیناً منظور او این نیست که معدل کلاس از 15 بیشتر خواهد شد!

2- جمله‌ی "**آنگاه** Q " نیز لزوماً به‌این معنی نیست که گزاره Q به‌خودی خود درست است و لذا منظور استاد در گزاره‌ی بالا لزوماً به این معنی نیست که نمره‌ی هر دانشجو را، صرف نظر از معدل کلاس، در 1/1 ضرب می‌کند! بلکه قول او همان است که گفته است!

بکوشید به یکدیگر کمک کنید که معدل کلاس از 15 بیشتر شود! آنوقت من هم ارفاق می‌کنم!

5.2.1 روش عکس نقیض

با توجه به ستون‌های مربوط به گزاره‌های $P \to Q$ و $\neg Q \to \neg P$ در جدول زیر

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

مشاهده می‌کنیم که اولی درست است اگر و تنها اگر دومی درست باشد. پس می‌توانیم برای اثبات درستی $P \to Q$، درستی $\neg Q \to \neg P$ را نشان دهیم. گزاره‌ی دوم را **عکس نقیض** گزاره‌ی اول و این روش اثبات را **روش عکس نقیض** می‌نامیم.

6.2.1 بحث در کلاس

1- عکس نقیض گزاره‌ی مذکور در قضیه‌ی 3.2.1 را بنویسید.

2- قضیه‌ی 3.2.1 را به‌روش عکس نقیض اثبات کنید.

با توجه به پاسخ بند 1، باید فرض کنید که x فرد است و نشان دهید که x^2 نیز فرد است.

7.2.1 روش برهان خلف

در این روش برای اثبات درستی گزاره، آن را نادرست فرض می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این **فرض خلف**، حقیقت دانسته‌ای را **نقض** می‌کند. در بحث زیر شرکت کنید.

8.2.1 بحث درکلاس

به روش برهان خلف ثابت کنید که $\sqrt{2}$اصم است. یعنی فرض کنید که، برخلاف حکم، $\sqrt{2}$ گویا است، و مثلاً $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$،و به تناقض برسید. می‌توانید $\frac{a}{b}$ را به گونه‌ای به $\frac{m}{n}$ ساده کنید که $(m,n)=1$. سپس با عملیاتی به این نتیجه برسید که $(m,n)\neq 1$، که متناقض $(m,n)=1$ است!

برخی از دانشجویان عادت کرده‌اند که درستی قضیه‌ها را به روش برهان خلف اثبات کنند! ولی اگر به روش مستقیم می‌توان راحت‌تر به نتیجه رسید، چرا با برهان خلف؟!

9.2.1 روش اثبات وجود

گاهی لازم است وجود شیئی را که دارای ویژگی‌هایی خاص است اثبات کنیم. این کار به دو روش انجام می‌شود. در یکی مثالی واقعی از آن شئ ارائه می‌دهیم. برای مثال، برای اثبات

وجود اعداد اصم، $\sqrt{2}$ را مثال می‌زنیم. در روش دیگر، بدون ارائه‌ی دستورالعملی برای پیدا کردن آن عضو، تنها وجود آن را اثبات می‌کنیم. برای مثال، "برای اثبات وجود دو عدد اصم a و b با این ویژگی که a^b گویا باشد، بدون ذکر مثالی از a و b با ویژگی مورد نظر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

اگر عدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویا باشد، آنگاه حکم (با قراردادن $a=b=\sqrt{2}$) اثبات می‌شود. اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ اصم باشد، آنگاه با قراردادن $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ و $b=\sqrt{2}$ حکم اثبات می‌شود، زیرا $a^b=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2$ عددی گویا است.

10.2.1 اثبات به روش حالت‌ها

در این روش، حکم را به تعدادی متناهی حالت تقسیم می‌کنیم و هر حالت را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم. البته گاهی تعداد حالت‌ها ممکن است بسیار زیاد باشد. برای مثال، اثبات اولیه‌ی قضیه‌ی "چهار رنگ" به این روش و با در نظر گرفتن 1936 حالت اثبات شد. البته بعدها تعداد حالت‌ها به حدود 600 حالت تقلیل داده شد.

11.2.1 اثبات به روش استقرا

فرض کنیم $P(n)$ گزاره‌نمایی درباره‌ی اعداد طبیعی است و می‌خواهیم درستی گزاره‌ی برای هر عدد n، $P(n)$ درست است را اثبات کنیم. در واقع باید نشان دهیم که $P(1), P(2), P(3)$، و الی آخر درست هستند. ولی تعداد این گزاره‌ها نامتناهی است و یقیناً نمی‌توانیم همه را بیازماییم! این کار را در دو مرحله‌ی زیر انجام می‌دهیم:

1- نشان می‌دهیم که $P(1)$ درست است؛ یعنی $P(n)$ به ازای $n=1$ درست است.

2- با فرض درستی $P(n)$ به درستی $P(n+1)$ می‌رسیم.

سپس می‌گوییم که بنابر استقرا $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است. این روش اثبات را **اثبات به روش استقرا** می‌گوییم.

12.2.1 بحث در کلاس

به روش استقرا نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، داریم

$$P(n)=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

روشن است که به ازای $n=1$، سمت چپ $P(n)$ برابر با 1 و سمت راست آن نیز برابر با $\frac{1(1+1)}{2}=1$ است. پس $p(n)$ درست است. ؟؟؟؟

حال فرض کنید $P(n)$ درست است، یعنی داریم

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

برای اثبات درستی $P(n+1)$، نشان دهید که

$$(1+2+...+n)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

پس، **بنا به استقرا**، $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست است.

این بخش را با بیان این نکته به پایان می‌بریم که گاهی در پایان اثبات‌ها عبارت QED را می‌بینید. این حروف، حروف اول کلمه‌های جمله‌ی لاتین "Quad Evat Demonstrandun" هستند که به معنی آنچه می خواستیم نشان دهیم است . نمادهای متداول‌تر عبارتند از □,□,□,#

توجه کنید که **تنها** با آگاهی از روشها و فنون اثبات، **ضمانتی** برای خلق اثبات نیست.

تبحر در ارائه‌ی اثبات‌ها به خودی خود و با بالارفتن سن به دست نمی‌آید؛ می‌آید؟! بلکه دست کم باید اثبات‌های دیگران را با دقت و برای آموزش پیچ و خم‌ها و ترفندهای آن‌ها مطالعه کرد و با تمرین و پشتکار این ترفندها را آموخت.

تنها با تماشای فوتبال، نمی توان
فوتبالیست شد! **می‌توان**؟!

فصل 2

مجموعه‌ها و اعمال روی آن‌ها

امروزه مفهوم **مجموعه** در سراسر ریاضیات و بسیاری از علوم دیگر، بنیادی تلقی می شود- حتی بنیادی تر از مفهوم **عدد** که در گذشته اساس کار شمرده می شد.
از آنجا که با این مفهوم و برخی از مفاهیم مرتبط با آن به‌طور شهودی در دوره دبیرستان آشنا شده‌اید، سعی می کنیم از مطالب ساده‌تر سریع‌تر گذر کنیم و بیشتر به مطالب جدیدتر و مجرد تر بپردازیم. سعی ما بر این است که دانسته‌هایتان را عمیق‌تر و شما را برای درک مطالب مجردتر این کتاب و دروس دیگر آماده کنیم و از شما نیز چنین انتظاری داریم.

1.2 مجموعه و زیرمجموعه

در این بخش، به بهانه‌ی یادآوری مفهوم **مجموعه**، تلاش می شود که دقت شما در برخورد با واژه‌های ریاضی تقویت شود. استادان درس معمولاً مطالعه‌ی قسمتی از مطالب این بخش را به عهده‌ی دانشجویان می گذارند تا بتوانند آن را در یک جلسه به پایان برسانند.

مانند مفهوم بنیادی **نقطه** در هندسه، مجموعه نیز مفهومی به اصطلاح **تعریف نشده** است. با وجود این، عبارت زیر **توصیفی** ساده و قابل استفاده از این واژه ارائه می کند که برای خوانندگان این کتاب مقدماتی مناسب و کافی است. (پیوست ??? را نیز بعداً ببینند.)

مجموعه دسته‌ای از اشیای مشخص و دوبه‌دو متمایز است.

درک مدرسه‌ای شما از این مفهوم، نیازهای اولیه‌ی شما را برآورده می کند. ولی همان طور که گفتیم، برای تقویت ذهنتان، خواندن مطالب تشریحی زیر آموزنده است.

هرگاه مفهوم یا واژه‌ای علمی معرفی می شود، باید قراردادهای کار با آن را نیز بیان کنیم، که به مرور در این کتاب چنین خواهیم کرد. ابتدا کلمه‌ها و واژه‌های به‌کار رفته برای توصیف **مجموعه** را روشن‌تر می‌کنیم، و به این وسیله دقت علمی‌مان را بهبود می بخشیم. یادآوری می‌کنیم که گاهی معنی واژه‌های علمی، به‌ویژه ریاضی، با معنی لغوی و متداول آن‌ها تفاوت-هایی دارد.

از آنجا که هدف شما تنها به خاطر سپردن واژه ها نیست (استاد درس و ما نیز چنین هدفی را دنبال نمی کنیم)، با راهنمایی استاد درس، سؤال‌های زیر را با همکلاسی‌های خود به بحث بگذارید تا سلول‌های خاکستری مغز شما بی‌کار ننشینند !

تا فرد سخن نگفته باشد   عیب و هنرش نهفته باشد!

همان‌طور که تنها با تماشای بازی فوتبال، نمی توان فوتبالیست شد (ما که نشدیم!)، تنها با شنیدن و خواندن مباحث علمی، به‌ویژه ریاضی، نمی‌توان ریاضیدانی سازنده و خلاق شد.

فکر کنید و بحث کنید.

1.1.2 بحث در کلاس

1- در معرفی واژه‌ی **مجموعه** در برخی لغت نامه‌ها آمده است که:

مجموعه دسته‌ای از اشیاء است که دارای خواص مشترک باشند.

آیا در توصیف ریاضی این واژه که در بالا داده شد، چنین شرطی وجود دارد؟ برای مثال، آیا در ریاضیات دسته‌ی متشکل از **میدان آزادی**، **ملانصرالدین**، و **استان گلستان** را می توان **مجموعه** نامید؟

2- آیا واژه‌ی **شئ** که در توصیف مجموعه به‌کار بردیم، منظور **شیئ** بی‌جان است؟ آیا با وجودی که من و شما اشیایی بی‌جان نیستیم، دسته‌ی متشکل از من، شما،و صندلی شما را می توان **مجموعه** نامید؟

3- منظور از واژه‌ی **مشخص** که در توصیف مجموعه به‌کار بردیم، چیست؟ آیا به این دلیل که در این لحظه برایمان مشخص نیست که فلان عدد هزار رقمی اول است یا نیست، نمی توانیم **دسته‌ی اعداد اول** را **مجموعه** بنامیم؟

4- آیا **دسته‌ی دانشجویان قدبلند** یا **دسته‌ی کفش‌های ارزان** را می توان **مجموعه** نامید؟

5- منظور از **دو به دو متمایز** چیست؟ آیا اگر این قید را برداریم، مفهوم با معنی دیگری به دست می آید؟ اگر اطلاعات عددی به دست آمده در سه آزمایش علمی اعداد 2،5،2 باشند و مهم باشد که هر سه نتیجه را ثبت کنیم، کافی است این دسته را با واژه‌ای دیگر بجز **مجموعه** بنامیم، همان‌طور که میوه‌ی سیب را گلابی نمی‌نامیم، یا حتی خیار سبز را خیار چنبر نمی‌نامیم.

6- آیا در توصیف داده شده برای مجموعه، **ترتیب** نام بردن اشیای مجموعه مهم است؟ به عبارت دیگر آیا اگر ترتیب نام بردن اشیای مجموعه را تغییر دهیم، مجموعه‌ی دیگری به دست می آید؟ اگر اطلاعات عددی به دست آمده در سه آزمایش علمی به ترتیب 10،30،20 باشند و ترتیب ثبت و رجوع به این خروجی ها مهم باشد، چه پیشنهاد می‌کنید؟ مانند خیارسبز و خیار چنبر که از صفت های سبز و چنبر استفاده شد، استفاده از صفت **مرتب** و نامیدن آن با واژه‌ی مرکب **مجموعه‌ی مرتب** چطور است؟

7- آیا **مجموعه** لزوماً باید بیش از یک شئ داشته باشد؟ آیا اصلاً لازم است حتماً شیئی داشته باشد؟

2.1.2 نمادگذاری

زبان ریاضیات، مانند هر زبان دیگر، نماد گذاری خاص خود را دارد. اگرچه معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین $A,B,\ldots$ و اشیای آن‌ها را با حروف کوچک $a,b,\ldots$ نمایش خواهیم داد. رعایت این قرارداد الزامی نیست.

هر شیئ مجموعه را **عضو** آن مجموعه می‌نامیم و اگر شیء a عضو مجموعه‌ی A باشد می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم **a عضو A است**، یا هر عبارتی که به این معنی باشد. اگر شئ a عضو A نباشد می‌نویسیم $a \notin A$. (توجه کنید که اگر چه نماد عضویت $\in$ شکل تغییر یافته‌ی حرف یونانی ε (اپسیلون) است، آن را اپسیلون نخوانید.)

برخی از مجموعه‌ها به دلایلی، خاص هستند و به آن‌ها اسامی و نمادهایی خاص نسبت می‌دهیم. برای مثال،

هر مجموعه‌ای را که تنها یک عضو دارد، **مجموعه‌ای تک عضوی** می‌نامیم.

همچنین، گاهی شرط معرف یک مجموعه طوری است که هیچ شیئی در آن شرط صدق نمی-کند. برای مثال، مجموعه‌ی انسان‌های با قد 10 متر عضوی ندارد.

مجموعه‌ای را که هیچ عضوی ندارد، **مجموعه‌ی تهی** (یا پوچ) می نامیم و آن‌را با نماد Ø نمایش می‌دهیم.

نباید چنین تصور شود که این مجموعه بی‌اهمیت است. خواهیم دید که این مجموعه و نماد Ø دست کم برای بیان اختصاری برخی از واقعیت‌ها مفیداند. (نماد Ø را گروه بورباکی، به‌ویژه آندره وایل، در سال 1939 معرفی کردند. این نماد از حرف دانمارکی و نروژی Ø گرفته شده است، و علی‌رغم شباهت آن به حرف یونانی φ (فی) هیچ ربطی به آن ندارد و آن را فی نمی-خوانیم.)

3.1.2 نمایش مجموعه‌ها

مجموعه را بر حسب مورد و نیاز، به روش‌های زیر می‌توان نمایش داد.

نمایش تفضیلی یا فهرستی

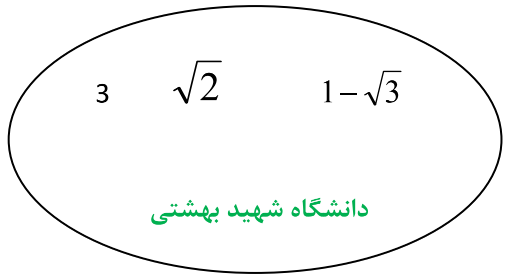
شاید ساده‌ترین روش مشخص کردن یک مجموعه، فهرست کردن عضوهایش درون آکولادها باشد. برای مثال،

$$A=\{3,\sqrt{2},\text{دانشگاه شهید بهشتی},1-\sqrt{3}\}$$

نمایش **تفضیلی** یا **فهرستی** مجموعه‌ای است که سه عضوش اعداد 3، $\sqrt{2}$، $1-\sqrt{3}$ و یک عضو دیگر آن، دانشگاه شهید بهشتی، و تنها این چهار عضو، هستند.

آیا عدد $\sqrt{3}$ یا گروه ریاضی عضو این مجموعه هستند؟

گاهی عضوهای یک مجموعه را درون یک منحنی بسته، به نام **نمودار ون** (Venn)، فهرست می‌کنیم:



نمایش توصیفی یا شرطی

روش فهرستی برای نمایش مجموعه‌های دارای عضوهای زیاد مناسب نیست. برای مثال مجموعه‌ی اعداد اول با همین توصیف بهتر مشخص می‌شود تا به صورت فهرستی و ناقص

$$\{2,3,5,7,11,13, \ldots\}$$

دست کم به این دلیل که چون، طبق قرارداد، برای عضوهای داخل آکولادها هیچ ترتیبی قایل نمی‌شویم، فهرست بالا را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\{7,5,13,11,2,3, \ldots\}$$

حال چه کسی می تواند از این آشفتگی سردر آورد و با اطمینان بگوید که عضوهای نانوشته چه اعداد یا اشیائی هستند و این مجموعه همان مجموعه‌ی اعداد اول است ؟! البته باید اذعان کنیم که ریاضیدانان گاهی نمادگذاری فهرستی را برای چنین مجموعه‌هایی نیز به کار می‌برند. مثال‌های زیر را ببینید.

$\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$; مجموعه‌ی اعداد طبیعی.

$\mathbf{N}_{\circ} = \{0, 1,2,3,...\}$; مجموعه‌ی اعداد حسابی.

$\mathbf{Z} = \{ \quad ... ,-2,-1,0 ,1 ,2,3 ,...\}$; مجموعه‌ی اعدادصحیح.

$\mathbf{E} \ = \{0,2,4,6,...\}$; مجموعه‌ی اعداد (حسابی) زوج.

$\mathbf{O} = \{1,3,5,... \}$; مجموعه‌ی اعداد (طبیعی) فرد.

$$A = \{1,2,3,...,999\}$$

اگر عضوهای مجموعه‌ای چون A با تحمیل شرط یا شرایطی، کاملاً و بدون ابهام مشخص شوند، آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

A={x | x شرط یا شرایطی درباره‌ی}

و می خوانیم مجموعه‌ی **همه‌ی** x ها (اشیا)ئی که در شرط یا شرایط داده شده صدق می‌کنند، یا با هر عبارتی که به این معنی باشد. برای مثال،

N ={ x| x عددی طبیعی است }

E ={ x| xعددی حسابی و زوج است }

A={ x| x دانشجوی دانشگاه شهید بهشتی است}

اگر عضوهای A با تحمیل شرط یا شرایطی از عضوهای مجموعه‌ی مشخص دیگری چون Y انتخاب شوند، می‌توانیم بنویسیم.

A={ x| x شرط یا شرایطی در باره‌ی و $x \in Y$ }

البته متداول‌تر است که شرط $x \in Y$ را در سمت چپ خط عمودی بنویسیم:

A= { $x \in Y$ | x شرط یا شرایطی در باره‌ی}

و می‌خوانیم مجموعه‌ی **همه‌ی** عضوهایی چون x از مجموعه‌ی Y که... یا با هر عبارتی که به این معنی باشد.

نکته‌ی جالب در نمایش شرطی این است که بدون اینکه حتی یک عضو از مجموعه را نام ببریم، می‌توانیم آن را کاملاً توصیف کنیم. البته شرایط معرف مجموعه باید بدون ابهام و برای عضوهای مجموعه زمینه‌ی Y با معنی باشند. به مثال‌های زیر نیز توجه کنید.

$$\mathbf{E}=\{n\in\mathbf{N} \mid n \text{ زوج است}\}$$

$$\mathbf{O}=\{n\in\mathbf{N} \mid n \text{ فرد است}\}$$

$$A=\{n\in\mathbf{N} \mid 1\le x\le 999\}$$

$$B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{Z} \mid x^5-3x^2-20=0\}$$

که آخری مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیحی است که در معادله‌ی $x^5-3x^2-20=0$ صدق می‌کنند. مثلاً $2\in A$، زیرا عددی طبیعی است و ... . ولی چرا $1\notin A$ و $\frac{1}{2}\notin A$. البته اگر بخواهیم، و امکان‌پذیر باشد، که همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی A را بیابیم، باید معادله‌ی $x^5-3x^2-20=0$ را حل کنیم و همه‌ی جواب‌های آن را که در $\mathbf{Z}$ هستند، بیابیم، که لزوماً کار ساده‌ای نیست. مجموعه‌ی

$$\mathbf{Q}=\{x \mid x=m/n, m,n\in\mathbf{Z}, n\ne 0\}$$

مجموعه‌ی اعداد گویا است. اگر $\mathbf{R}$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، آنگاه

$$\mathbf{C}=\{a+bi \mid a, b\in\mathbf{R}, i=\sqrt{-1}\}$$

مجموعه‌ی اعداد مختلط است. ممکن است با $i=\sqrt{-1}$ آشنا نباشید و آن را بی‌معنی بپندارید. حق با شما است، در این لحظه آن را صرفاً یک نماد در نظر بگیرید تا در دروس دیگر ریاضی با آن بیشتر آشنا شوید.

به مثال نمونه‌ای زیر نیز توجه کنید. فرض کنید $Y=\{2, 5, 7\}$ و

$$A=\{x\in\mathbf{N} \mid x \text{ نصف عضوی از } Y \text{ است}\}$$

$$=\{x \in \mathbf{N} \,|\, x=1/2k,\ k \in Y\}$$
$$=\{1\}$$ (چرا؟)

4.1.2 تساوی مجموعه‌ها

حال که اشیای جدیدی به نام مجموعه معرفی شدند، اولین سؤالی را که باید پاسخ داد این است که چه وقت دو مجموعه را **مساوی** در نظر می‌گیریم؟ شاید بگویید که پاسخ به این سؤال روشن است. البته اگر مجموعه‌های A و B به صورت فهرستی با نوشتن همه‌ی عضوهای آن‌ها نمایش داده شده باشند، تشخیص تساوی یا عدم تساوی آن‌ها، گرچه ممکن است پر زحمت باشد، چندان مشکل نیست. ولی اگر A یا B به صورت شرطی و با شرایط متفاوت معرفی شده باشند، تشخیص تساوی یا عدم تساوی آن‌ها گاهی سریع یا آسان نیست. در ریاضیات نمونه‌هایی از این نوع وجود دارد که تشخیص تساوی یا عدم تساوی آن‌ها بعد از صدها سال هنوز میسر نشده است. حال تعریف رسمی زیر را می‌آوریم:

5.1.2 تعریف

مجموعه‌های A و B را **مساوی** می گوییم اگر هر عضو A عضوی از B باشد، و برعکس، به زبان نمادهای منطقی، دو گزاره‌ی زیر درست باشند:

$$a \in A \Rightarrow a \in B$$
$$a \in B \Rightarrow a \in A$$

اگر A، B مساوی باشند، می‌نویسیم $A = B$، و در غیر این‌صورت می‌نویسیم $A \neq B$.

6.1.2 بحث در کلاس

1- به چند دلیل می‌توانید بگویید که $\{4,2\} \neq \{4,5,7\}$ ؟ آیا لازم است همه‌ی این دلایل را بیاوریم؟

2- در چه شرط یا شرایطی $A \neq B$؟ آیا باید هیچ عضو مشترکی نداشته باشند؟

3- چطور می‌توان بدون محاسبه‌ی عضوهای مجموعه‌های زیر، نشان داد که

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{Z} \middle| 2x+2=0 \right\} \neq \left\{ 1,-1 \right\}$$
$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{N} \middle| x^2+1=2 \right\} = \left\{ x \in \mathbf{N} \middle| 2x^2+2=4 \right\}$$
$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{Z} \middle| x^3=4x \right\} \neq \left\{ 2x \in \mathbf{N} \middle| x^2=4 \right\}$$

4- نشان دهید که $\left\{ x \in \mathbf{N} \middle| x+1=0 \right\} = \{ x$ انسانی با قد 10 متر است $|x\}$.

5- چطور ثابت می‌شود که تنها یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد؟

تا اینجا، در این بخش، اغلب به معرفی و تفسیر واژه‌ها پرداختیم – حال قدری، نه چندان زیاد، به استدلال نیز می‌پردازیم. از این رو دقت و تفکر بیشتری از خواننده طلب می‌شود.

یکی از ضعف‌های ما انسان‌ها، به ویژه مبتدیان، این است که به خوبی نمی‌توانیم آنچه را که می‌دانیم بیان کنیم یا بنویسیم. این ضعف به خودی خود و در اثر مرور زمان برطرف نمی‌شود. باید تلاش کنیم آن را بهبود بخشیم.

در علوم ، به ویژه در ریاضیات، نمی‌توان با سوگند خوردن یا اصرار کردن درستی یا نادرستی مطلبی را به دیگران قبولاند، بلکه باید آن را با استدلال منطقی **اثبات** کرد.

تلاش کنید از هر فرصتی استفاده کنید تا فن استدلال کردن و به‌ویژه نوشتن اثبات‌ها را در خود بهبود بخشید. از ما گفتن!

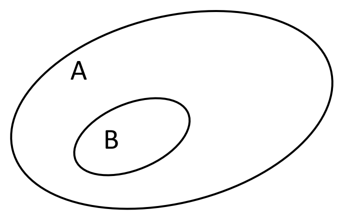
گاهی قسمتی از یک مجموعه مورد نظر است. برای مثال، گاهی مجموعه‌ی همه‌ی موجودات، گاهی فقط مجموعه‌ی جانداران، و گاهی تنها مجموعه‌ی انسان‌ها مورد نظر است. این موضوع تعریف زیر را پیشنهاد می‌کند.

7.1.2 تعریف

اگر هر عضو مجموعه‌ی B عضو مجموعه‌ی A باشد، می‌گوییم که B **زیرمجموعه‌ی** A است و می نویسیم $B \subseteq A$. با نمادهای ریاضی،

$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

نمودار وِن زیر این حالت را نشان می‌دهد:



گاهی می‌گوییم که **A شامل B** یا **B مشمول در A** است. همچنین، نمادگذاری $A \supseteq B$ به معنی $B \subseteq A$ است. لازم به ذکر است که برخی از نویسندگان نماد $\subset$ را به جای $\subseteq$ به کار می‌برند، ولی ما نماد $\subseteq$ را ترجیح می دهیم.

اگر B زیر مجموعه‌ی A نباشد، می نویسیم $B \not\subseteq A$.

مثال‌های مفهوم **زیرمجموعه** بسیارند و ارائه‌ی چند نمونه را به عهده‌ی شما می‌گذاریم. ترجیح می‌دهیم سؤال‌های زیر را به بحث بگذاریم.

8.1.2 بحث در کلاس

سؤال‌های زیر را، به راهنمایی استاد درس، با همکلاسی‌های خود مورد بحث قرار دهید.

1- در چه صورتی $B \not\subseteq A$؟ آیا باید هیچ عضو B در A نباشد؟

2- آیا اگر $A=B$، می توان نتیجه گرفت که هر دو رابطه‌ی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ رخ می‌دهند؟ برعکس چطور؟

3- آیا اگر $A\neq B$، می توان نتیجه گرفت که دست کم یکی از دو حالت $A\not\subseteq B$ یا $B\not\subseteq A$ رخ می‌دهد؟ آیا همواره یکی از دو حالت $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$ رخ می‌دهد؟

4- آیا برای هر مجموعه چون A، عبارت‌های $A\subseteq A$ و $\varnothing\subseteq A$ در تعریف زیرمجموعه می‌گنجند؟ چطور؟

5- چطور استدلال می‌کنید که اگر $X\subseteq Y$ و $Y\subseteq Z$ آنگاه $X\subseteq Z$ ؟

با توجه به پانوشت، مفاهیم جدید زیر را معرفی می‌کنیم. دیدیم که برای هر مجموعه‌ی دلخواه A، داریم $A\subseteq A$ و $\varnothing\subseteq A$.

9.1.2 تعریف

اگر $B\subseteq A$ ولی $B\neq A$، می‌گوییم که B **زیرمجموعه‌ی سره** (حقیقی، محض، *اکید* یا *واقعی*) A است و می‌نویسیم

$$B\subset A \quad \text{یا} \quad B\underset{\neq}{\subset} A$$

تفاوت نمادهای $\subseteq$ و $\subset$ شبیه به تفاوت $\leq$ با $<$ در اعداد است.

اگر $B\subseteq A$ و $B\neq\varnothing$، می‌گوییم که B **زیرمجموعه‌ی ناتهی** A است، اگر $B\subseteq A$،

در یکی از کتاب‌های درسی دوره‌ی دبیرستان آمده است که از حذف برخی از اعضای مجموعه‌ی غیر تهی A، مجموعه‌های دیگری به دست می‌آیند که این مجموعه‌ها را زیر مجموعه‌ی A می‌نامیم. تفاوت‌های این تعریف را با تعریف داده شده در این بخش به بحث بگذارید.

$B\neq\varnothing$ و $B\neq A$، گاهی می‌گوییم که B **زیرمجموعه‌ی نابدیهی** A است؛ شاید بهتر باشد

بگوییم که B زیرمجموعه‌ی **ناتهی و سره‌ی** A است.

مجموعه‌ی توانی

ممکن است چنین تصور شود که یک مجموعه نمی‌تواند عضو مجموعه‌ای دیگر باشد و تنها می‌تواند زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ای باشد. ولی، یادآوری می‌کنیم که هر شئ مشخص، چون عدد، انسان، حرف، کلمه، و **حتی مجموعه**‌های دیگر، می توانند عضو مجموعه باشند. برای مثال، $A=\{\{x\},5,\{x,y\}\}$ مجموعه‌ای با سه عضو $\{x\}$، 5، و $\{x,y\}$ است که دو عضو آن خود مجموعه‌اند. توجه کنید که گرچه $y\in\{x,y\}$ و $\{x,y\}\in A$ ولی $y\notin A$، به عنوان مثالی دیگر $\{\varnothing,\{a\}\}$مجموعه‌ای با دو عضو است که هر دو عضو آن مجموعه‌اند. همچنین ، $\{\varnothing\}$ مجموعه‌ای تک عضوی است که تنها عضو آن مجموعه‌ی تهی است.

11.1.2 تعریف

اگر هر عضو مجموعه‌ای خود یک مجموعه باشد، آن را **مجموعه‌ای از مجموعه‌ها** می‌گوییم.

تجربه نشان داده است که گاهی مبتدیان با مجموعه‌های غیر بسیط، به ویژه مجموعه‌ای از مجموعه‌ها، دیرتر مانوس می‌شوند. پس دقت و توجه بیشتری لازم است. برای تاکید، این نوع مجموعه‌ها را با نمادهای تحریری $\mathscr{A}$،$\mathscr{B}$، . . . نمایش می‌دهیم.

12.1.2 بحث در کلاس

1- درستی یا نادرستی عبارت $\{\varnothing\}\neq\varnothing$ را به بحث بگذارید.

2- مجموعه‌ای سه عضوی چون $\mathscr{A}$ بنویسید که هر عضو آن زیرمجموعه‌ی $\mathscr{A}$ نیز باشد! (کمی بیشتر تلاش کنید!) یک عضو $\mathscr{A}$ را $\varnothing$ بگیرید.

مجموعه‌های از نوع تعریف زیر را بسیار به کار خواهیم برد. فرض کنیم A مجموعه‌ای دلخواه است:

13.1.2 تعریف

مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A را **مجموعه‌ی توانی** A می‌نامیم و آن را با نماد $\mathcal{P}(A)$ نمایش می‌دهیم. پس

$$\mathcal{P}(A)=\{X \mid X \subseteq A\}$$

توجه کنید که A و $\varnothing$ عضو $\mathcal{P}(A)$ هستند.

14.1.2 بحث در کلاس

1- فرض کنید $A=\{a\}$. مجموعه‌های $\mathcal{P}(A)$ و $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ را مشخص کنید.

2- فرض کنید $A=\{\varnothing\}$. مجموعه‌های $\mathcal{P}(A)$ و $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ را مشخص کنید. پاسخ‌های خود را با پاسخ‌های سؤال **1** مقایسه کنید!

3- فرض کنید A_1، A_2، A_3، به ترتیب، مجموعه‌هایی یک، دو، و سه عضوی باشند. هر یک از مجموعه‌های $\mathcal{P}(A_1)$، $\mathcal{P}(A_2)$، $\mathcal{P}(A_3)$ چند عضو دارد؟ نشان دهید که اگر A دارای n عضو باشد، آنگاه $\mathcal{P}(A)$ دارای 2^n عضو است. (یکی از دلایل نامگذاری مجموعه‌ی توانی همین است!)

خانواده

قرارداد کردیم که تکرار عضو در مجموعه‌ها مجاز نیست. اگر به هر دلیلی عضوهایی تکرار شوند و بخواهیم آن‌ها را به تعداد تکرارشان ثبت کنیم، دسته‌ی حاصل را به جای مجموعه، **خانواده** می‌نامیم. به عبارت دقیق‌تر

15.1.2 تعریف

دسته‌ای از اشیای مشخص را که لزوماً دو به دو متمایز نیستند، **خانواده** می‌نامیم.

روشن است که مفهوم خانواده، مفهوم مجموعه را نیز دربر می‌گیرد. گاهی لازم است اشیای یک مجموعه یا خانواده را با اعضای یک مجموعه برچسب بزنیم یا به زبان ریاضی **اندیسدار** کنیم.

16.1.2 تعریف

فرض کنیم I یک مجموعه است و متناظر با هر $i \in I$، شی a_i وجود دارد. دراین صورت خانواده‌ی به نمایش

$$F = \{a_i\}_{i \in I}$$

را **خانواده‌ای اندیسدار** و I را مجموعه‌ی اندیس‌های آن می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که هر مجموعه‌ی A را می‌توانیم مثلاً با خودش اندیسدار کنیم:
$A = \{x_a\}_{a \in A}$ که در آن $x_a = a$. قدری پیچیده شد. نگران نباشید به مرور برایتان روشن‌تر می شود.

17.1.2 پارادکس راسل

درک مطالب زیر ممکن است برای برخی از شما قدری مشکل‌تر از مطالب قبلی باشد. اگر بار اول متوجه نشدید، نگران نباشید (نویسندگان این کتاب نیز مانند شما بودند)، به مرور درک بهتری از آن به دست خواهید آورد.

می‌خواهیم این سؤال را به بحث بگذاریم که

آیا **دسته‌ی** همه‌ی مجموعه‌ها را می‌توان **مجموعه** نامید؟

18.1.2 بحث در کلاس

فرض کنیم پاسخ به سؤال بالا مثبت باشد و **مجموعه‌ی** همه‌ی مجموعه‌ها را Ω بنامیم. در این صورت

$$\mathcal{R} = \left\{ X \in \Omega \middle| X \notin X \right\}$$

نیز باید مجموعه باشد. به عبارت دیگر $\mathcal{R}$ **مجموعه‌ی** همه‌ی مجموعه‌هایی چون X است که به خودشان تعلق ندارند! حال با کمی تلاش، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

1- آیا $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$؟ یعنی آیا $\mathcal{R}$ در شرط معرف مجموعه‌ی $\mathcal{R}$ صدق می کند؟!

2- آیا $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$؟!

3- چه پارادکسی حاصل می شود؟ این پارادکس به پارادکس راسل معروف است. نتیجه بگیرید که واژه‌ی **مجموعه** را نمی توان برای **دسته‌ی** Ω در نظر گرفت.

19.1.2 مجموعه‌ی مرجع

با توجه به مطالب بالا، **دسته‌ی** همه‌ی اشیاء را نمی‌توان مجموعه نامید. ولی وقتی موضوع خاصی را مطالعه می‌کنیم، عضوهای مجموعه‌ای مشخص مورد نظر هستند. برای مثال، گیاه-شناسان عضوهای مجموعه‌ی گیاهان را مطالعه می‌کنند و مثلاً، کاری به برج آزادی یا ملانصرالدین ندارند. در این صورت می‌گوییم که مجموعه‌ی گیاهان **مجموعه‌ی مرجع** مورد بحث گیاه شناسان است. به عنوان مثالی دیگر، ممکن است در مبحثی از ریاضیات تنها اعداد صحیح مورد بحث باشند و به اعداد کسری یا به گیاهان کاری نداشته باشیم. در این صورت $\mathbf{Z}$ را به عنوان **مجموعه‌ی مرجع** مورد بحث در نظر می‌گیریم. بنابراین، مجموعه‌های مرجع متفاوتی وجود دارند که در هر بحث خاص باید مشخص شود.

20.1.2 بحث در کلاس

1- آیا به نظر شما مجموعه‌ی مرجع باید خیلی بزرگ باشد؟ چه اندازه باشد کافی است؟

2- آیا مجموعه‌های $\{1,2,3,...,20\}$ و $\{a,b,c,...z\}$ می توانند مجموعه‌ی مرجع بحث معینی باشند؟

21.1.2 تعریف

از این پس همیشه فرض می‌کنیم که مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌های یک مجموعه به نام **مجموعه‌ی مرجع** به نمایش U (گاهی M) هستند.

اصطلاح‌های دیگری که برای مجموعه‌ی مرجع به کار می‌روند عبارت‌اند از: *مجموعه‌ی عام*، *اصلی*، *مادر*، *جهانی*، *جامع*، *عالم سخن*، و از این قبیل.

حال نوبت شماست که آستین‌ها را بالا بزنید و با **تلاش** برای حل کردن تمرین‌های این بخش، حتی اگر کاملاً موفق نشدید، آموخته‌های خود را تقویت کنید. بسیاری از این تمرین‌ها به آسانی حل می شوند.

2.2 اجتماع و اشتراک

در بخش قبل، پس از معرفی و شناختن مفهوم مجموعه، توانستیم با معرفی مفهوم‌های **زیرمجموعه** و **مجموعه‌ی توانی**، مجموعه‌های جدیدی از یک مجموعه‌ی داده شده بسازیم.
در بقیه‌ی این فصل، روش‌ها و ابزارهای دیگری برای ساختن مجموعه‌های جدیدی از مجموعه‌های داده شده معرفی می‌کنیم. با این اعمال در دبیرستان به صورت شهودی آشنا شده‌اید. پس، مطابق معمول این درس و دروس دیگر دانشگاهی، **سعی ما** و **شما** این باید باشد که ضمن تقویت دانسته‌هایمان و علاوه بر به‌خاطر سپردن مفاهیم و مطالب، **فعالانه وارد بازی شویم** و

اندیشه ورزی کنیم!

عمل اجتماع

به بیان ساده و غیر رسمی، عمل اجتماع مثل این است که اشیای دو پاکت را در یک پاکت بریزیم، و قرارداد عدم تکرار عضو در مجموعه را اعمال کنیم. به زبان ریاضی

1.2.2 تعریف

اجتماع مجموعه‌های A و B مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که به A **یا به** B (یا به هر دو) تعلق دارند. این مجموعه را با نماد $A\cup B$ نمایش می‌دهیم، و می‌خوانیم A **اجتماع** B.

اگر از شما بخواهیم که، برای مثال، اجتماع $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{3,4,5\}$ را پیدا کنید، شک نداریم که به‌راحتی می‌نویسید $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$.

پس سعی کنیم به قضیه‌ها و مسئله‌های مجرد مربوط به این عمل بیشتر توجه کنیم. برای مثال، تمرین کنید که بتوانید روش انشایی تعریف اجتماع A و B را به روش شرطی بنویسید، یعنی عبارت $A \cup B = \{x | ...,...\}$ را کامل کنید.

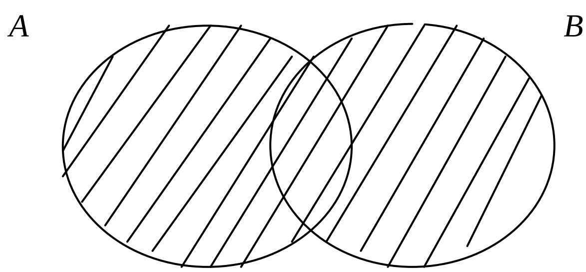
دو نکته در تعریف اجتماع قابل توجه است. همان‌طور که قبلاً نیز گفتیم، گاهی معنی لغوی و متداول کلمات با تعبیر ریاضی آن‌ها متفاوت است. در زبان محاوره‌ای وقتی می‌گوییم **این یا آن** معمولاً منظور **تنها یکی** از آن دو است، ولی در زبان ریاضی **هر دو** نیز می‌تواند باشد. نمادی که گاهی به جای **یا** در ریاضیات به کار می‌رود به صورت "$\vee$" است . پس، می‌نویسیم

$$A \cup B = \{x | \ x \in A \text{ یا } x \in B \text{ (یا هر دو)}\}$$
$$= \{x | x \in A \quad \vee \quad x \in B\}$$

نکته‌ی مهم دیگری که لازم به بیان است، کلمه‌ی **همه** در تعریف انشایی اجتماع است. اگر این کلمه را ننویسیم و مانند یکی از کتاب‌های دبیرستان بنویسیم: **اجتماع مجموعه‌های A و B مجموعه‌ای (به "ای" توجه کنید) است که اعضایش متعلق به A و B باشند**، آنگاه، برای مثال مجموعه‌ی $\{2,3\}$، و چند مجموعه‌ی دیگر، و البته $\{1,2,3,4,5,\}$، در شرط داده شده در این عبارت برای $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{3,4,5\}$ صدق می‌کنند! **این طور نیست**؟ از فصل 1 یادآوری می‌کنیم که باید دقت کنیم که در ریاضیات

تعریف باید جامع و مانع باشد.

نمایش تصویری $A \cup B$ با نمودار ون به صورت زیر است



$A \cup B$ ناحیه‌ی سایه زده است.

2.2.2 بحث در کلاس

1- اجتماع $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ و $B=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$ را پیدا کنید.

2- اجتماع $\mathrm{A}=\{\mathrm{x}\in\mathbf{Z}|-2<\mathrm{x}<5\}$ و $B=\{x\in\mathbf{Z}|x>2\}$ را بیابید.

3- بدون تعیین عضوهای $A=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-4x-5=0\}$ و $B=\{x\in\mathbf{Z}|2x^2-5x+3=0\}$، نشان دهید که $1,-1\in A\cup B$ ولی $2\notin A\cup B$.

ویژگی‌های عمل اجتماع

وقتی اعمال جدیدی معرفی می‌شوند، لازم است ویژگی‌های دیگر آن‌ها را که حاصل تعریف هستند، بررسی کنیم تا بهتر بتوانیم در مباحث مجرد آن‌ها را به‌کار ببریم. اگر چه گاهی اثبات درستی این ویژگی‌ها (که تحت عنوان لم، قضیه، یا نتیجه) می‌آیند سرراست و آسان است، آوردن آن‌ها برای استفاده‌ی بعدی لازم است. شما برخی از آن‌ها را به عنوان تمرین حل کنید، تا **فن نوشتن** را در خود تقویت کنید.

3.2.2 قضیه

فرض کنیم C,B,A مجموعه‌هایی دلخواه هستند. در این صورت، داریم

(الف) $A\cup A=A$ (خودتوانی)

(ب) $A\cup B=B\cup A$ (تعویضپذیری)

(پ) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (شرکتپذیری)

(ت) $A\cup\varnothing=A$ (ویژگی $\varnothing$)

(ث) $A\cup M=M$ (ویژگی M)

اثبات

همگی سرراست هستند.

لازم به ذکر است که ویژگی شرکتپذیری اجتماع نشان می‌دهد که حاصل اجتماع $A \cup B \cup C$ مستقل از نحوه‌ی قراردادن پرانتزها است و معمولاً هیچ پرانتزی در این عبارت نمی‌نویسیم.

ارتباط $\cup$ با $\subseteq$

همان‌طور که در اعداد ارتباط بین چهار عمل اصلی، و با ترتیب، اهمیت دارد، بررسی ارتباط بین اعمالی که به مرور روی مجموعه‌ها تعریف خواهیم کرد، اهمیت دارد. در زیر ویژگی‌های عمل اجتماع را نسبت به $\subseteq$ مطالعه می‌کنیم.

صورت و اثبات قضیه‌ی زیر آموزنده است. همتای آن را به کرات در این درس و درس‌های دیگر، برای مفاهیم مختلف، خواهید دید. این قضیه در واقع **ویژگی مشخصه‌ی** اجتماع است، به این معنی که حکمی معادل با تعریف اجتماع ارائه می‌دهد. این نوع ارائه‌ی مجرد تعریف را می‌توان **تعریف براساس ویژگی** نامید.

4.2.2 قضیه

مجموعه‌ی $A \cup B$ کوچکترین مجموعه‌ی شامل A و B است؛ به عبارت دیگر

(الف) $A \cup B$ مجموعه‌ای شامل A و B است، یعنی $A, B \subseteq A \cup B$ و

(ب) اگر C هر مجموعه‌ای با ویژگی (الف) باشد، یعنی $A, B \subseteq C$، آنگاه $A \cup B$ کوچکتر از C است، یعنی $A \cup B \subseteq C$.

اثبات

حکم **(الف)** روشن است. به اثبات **(ب)** توجه کنید. فرض کنیم C شامل A و B است و $x \in A \cup B$. تنها دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in C. & (\text{زیرا } A \subseteq C) \\ \text{یا} & \\ x \in B \Rightarrow x \in C. & (\text{زیرا } B \subseteq C) \end{cases}$$

در نتیجه $A \cup B \subseteq C$.

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که $\subseteq$ را می‌توان با استفاده از $\cup$ تعریف کرد. اثبات آن سرراست است.

5.2.2 قضیه

$A \subseteq B$ اگر و تنها $A \cup B = B$.

قضیه‌ی زیر بیان می‌کند که عمل اجتماع رابطه‌ی $\subseteq$ را به اصطلاح **حفظ می‌کند** یا با آن **سازگار** است.

6.2.2 قضیه

گزاره‌ی زیر همیشه درست است.

$$(A \subseteq C, B \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$$

7.2.2 بحث در کلاس

از عبارت‌های زیر کدام(ها) همواره درست هستند؟ اگر حکمی دو طرفه نادرست است، کدام طرف آن نادرست است؟

(الف) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

(ب) $C \subseteq A \cup B \Leftrightarrow C \subseteq A \quad \wedge \quad C \subseteq B$.

(پ) $C \subseteq A \cup B \Leftrightarrow C \subseteq A \quad \vee \quad C \subseteq B$.

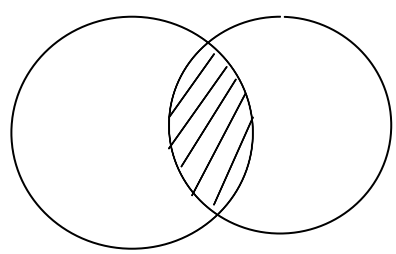
عمل اشتراک

عمل دیگری که می‌توان با مجموعه‌ها انجام داد و مجدداً مجموعه به‌دست آورد، **عمل اشتراک** یا مقطع نام دارد.

8.2.2 تعریف

اشتراک مجموعه‌های A و B مجموعه‌ی **همه‌ی** عضوهایی است که به هر دو مجموعه تعلق دارند. این مجموعه را با $A \cap B$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم ***A* اشتراک *B***.

در نمودار ون داریم



$A \cap B$ ناحیه‌ی سایه زده است.

ویژگی‌های این عمل همتای ویژگی‌های عمل اجتماع است. با این حال آن‌ها را می‌آوریم.

ابتدا باید بگوییم که پیدا کردن اشتراک دو مجموعه که عضوهایش داده شده باشند، برایتان آسان است، پس روی موارد مجرد متمرکز می‌شویم. قبل از ادامه‌ی بحث، عبارت $A\cap B=\{x|......\}$ را کامل کنید.

همان‌طور که در قسمت عمل اجتماع نیز گفتیم، کلمه‌ی **همه** در تعریف انشایی اشتراک نیز با اهمیت است. در همان کتاب دبیرستانی آمده است که اشتراک دو مجموعه‌ی A و B مجموعه‌ای (**به "ای" توجه کنید**) است که اعضایش به هر دو مجموعه‌ی A و B تعلق داشته باشند. این نیز ایجاد شبهه می‌کند (چطور؟)

9.2.2 بحث در کلاس

1- بندهای 1 و 2 بحث در کلاس 2.2.2 را برای عمل اشتراک نیز حل کنید.

2- بدون تعیین عضوهای مجموعه‌های $A=\{x\in \mathbf{Z}|x^2-4x-5=0\}$ و $B=\{x\in \mathbf{Z}|x^2-1=0\}$، نشان دهید که $-1\in A\cap B$ و $0,1\notin A\cap B$.

3- همتای قضیه‌های 4.2.2، 5.2.2، و 6.2.2 را برای عمل اشتراک بنویسید.

10.2.2 قضیه

برای مجموعه‌های دلخواه A، B، C داریم.

(الف) (**ویژگی‌های جذب**)

$$A\cup(A\cap B)=A$$
$$A\cap(A\cup B)=A$$

(ب) (**ویژگی‌های توزیع‌پذیری**)

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

اثبات

(الف) با توجه به اینکه $A\cap B\subseteq A$ و با استفاده از قضیه‌ی 5.2.2، حکم اول اثبات می‌شود. حکم دوم مشابه است.

(ب) از آنجا که $A\subseteq A\cup B, A\cup C$ ، $B\cap C\subseteq C\subseteq A\cup C$، و $B\cap C\subseteq B\subseteq A\cup B$، نتیجه می‌گیریم که $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
برای اثبات عکس این رابطه، فرض می‌کنیم $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. در این صورت اگر $x\in A$ آنگاه $x\in A\cup(B\cap C)$، و اگر $x\notin A$ آنگاه $x\in B$ و $x\in C$. در نتیجه $x\in(B\cap C)$. پس باز هم $x\in A\cup(B\cap C)$ و حکم تساوی اول اثبات شده است.
اثبات تساوی دوم مشابه اولی است. البته راه دیگری نیز وجود دارد: دومی را از اولی نتیجه بگیرید (چطور؟)

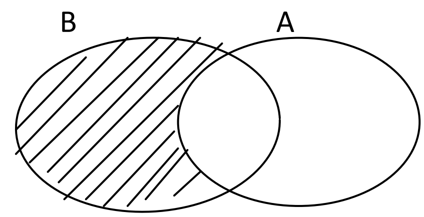
3.2 تفاضل و متمم

دو عمل اساسی دیگر که می‌توان با مجموعه‌ها انجام داد، تفاضل و متمم گیری هستند.

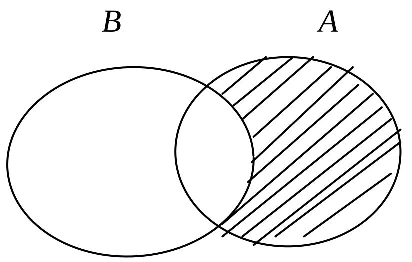
1.3.2 تعریف

تفاضل مجموعه‌ی B از مجموعه‌ی A همه‌ی عضوهایی از A است که به B تعلق ندارند. این مجموعه را با $A\text{-}B$ یا $A\backslash B$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم A منهای B.

نمودار ون متناظر به صورت زیر است.



$B\backslash A$ ناحیه‌ی سایه زده است



$A\backslash B$ ناحیه‌ی سایه زده است

چون این عمل ممکن است با تصور اولیه‌ی ما کمی متفاوت باشد، توجه بیشتری را می‌طلبد. برای مثال، اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{1,3,a,b,c\}$، آنگاه

$$A \setminus B=\{2,4\} \text{ و } B \setminus A=\{a,b,c\}$$

ملاحظه می‌کنیم که در تفاضل مجموعه‌ی Y از مجموعه‌ی X تنها آن عضوهایی از Y موثرند که در X نیز هستند و تنها این عضوها از X حذف می‌شوند و با بقیه‌ی عضوهای Y کاری نداریم. نکته‌ی دیگر این است که برای تعریف تفاضل Y از X لزومی ندارد که Y زیر مجموعه‌ی X باشد.

2.3.2 بحث در کلاس

1- روش انشایی تعریف تفاضل B از A را به روش شرطی بنویسید.

2- مجموعه‌ی $\{\varnothing,\{\varnothing\}\setminus\{\varnothing\}\}$ را بیابید.

3- فرض کنید $C=\{x\in \mathbf{N} \mid 2<x<8\}$ و $D=\{x\in \mathbf{Z} \mid x<4\}$. درستی یا نادرستی $3\in C\setminus D, 9\notin C\setminus D, 5\in C\setminus D$ را بررسی کنید.

ویژگی‌های عمل تفاضل و ارتباط این عمل با اعمالی که قبلاً دیدیم بسیارند. برخی را در زیر و تعدادی را در تمرین ها می‌آوریم. گرچه به خاطر سپردن همه‌ی آن‌ها چندان ضروری نیست، ولی تلاش برای اثبات کردن برخی از آن‌ها تمرین خوبی برایتان است. برخی از اثبات‌های خود را با اثبات‌های همکلاسی هایتان مقایسه کنید و ببینید آیا زبان ریاضی یکدیگر را درک می‌کنید؟ آیا اثبات های یکدیگر را قبول دارید؟ شاید حتی به هم **نمره** دهید!

3.3.2 قضیه

برای مجموعه های دلخواه A و B داریم

(الف) $A\setminus B = A\setminus(B\cap A)$.

(ب) $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\varnothing$.

(پ) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cup B)$.

(ت) $A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$.

اثبات

حکم (پ) را اثبات می‌کنیم. شما نیز یکی را انتخاب و اثبات کنید.

باید ثابت کنیم که هر عضو طرف چپ عبارت (پ)، عضوی از طرف راست آن است، و بر عکس. این اثبات را به تفضیل می‌آوریم. شما نیز اوایل کار چنین کنید، ولی بعدها می‌توانید اثبات‌ها را خلاصه‌تر بنویسید.

(یک) فرض کنیم $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. بنا به تعریف اجتماع، دو حالت $x\in A\setminus B$ یا $x\in B\setminus A$ رخ می دهد. در حالت $x\in A\setminus B$، داریم $x\in A$ ولی $x\notin B$. بنابراین $x\in A\cup B$ ولی $x\notin A\cap B$ (چرا؟) در نتیجه $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. به همین روش از حالت دوم $x\in B\setminus A$ نیز نتیجه می گیریم که x متعلق به طرف راست عبارت (پ) است.

(دو) حال فرض می‌کنیم $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. بنا بر تعریف تفاضل، داریم $x\in A\cup B$ ولی $x\notin A\cap B$. از $x\in A\cup B$ دو حالت $x\in A$ یا $x\in B$ و از

$x \notin A \cap B$ نیز دو حالت $x \notin A$ یا $x \notin B$ نتیجه می‌شوند. بنابراین باید $2 \times 2 = 4$ حالت "$x \in A$ و $x \notin A$"، "$x \in A$ و $x \notin B$"، "$x \in B$ و $x \notin A$"، و "$x \in B$ و $x \notin B$" را در نظر بگیریم. روشن است که دو حالت اول و حالت آخر رخ نمی‌دهند. پس فرض می‌کنیم "$x \in A$ و $x \notin B$" که در نتیجه $x \in A \setminus B$ و لذا $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. به همین صورت، از حالت "$x \in B$ و $x \notin A$" در نهایت همین نتیجه حاصل می‌شود . بنابراین، در هر حالت x متعلق به طرف چپ عبارت **(پ)** است و حکم اثبات شده است.

4.3.2 بحث در کلاس

روشن است که $A \setminus A = \varnothing$. آیا این حکم معادل تعریف مجموعه‌ی $\varnothing$ است؟

متمم مجموعه

این عمل حالت خاص عمل تفاضل است. فرض کنیم M مجموعه‌ی مرجع است و $A \subseteq M$.

5.3.2 تعریف

مجموعه‌ی $M \setminus A$، یعنی همه‌ی عضوهای M که در A نیستند، را **متمم** A می نامیم و با A' یا A^C نشان می دهیم.

با توجه به ارتباط تعریف متمم با تعریف تفاضل، گاهی تفاضل $A \setminus B$ را **متمم نسبی** B در A، و $B' = M \setminus B$ را **متمم مطلق** نیز می‌نامند.

6.3.2 بحث در کلاس

از آنجا که $A' = M \setminus A$، ویژگی‌های عمل متمم‌گیری حالت خاص ویژگی‌های عمل تفاضل است . احکام زیر را اثبات کنید.

1- $\varnothing' = M$ و $M' = \varnothing$.

2- $A''=A$، که در آن $A''=(A')'$؛ یعنی عمل متمم گیری **خودتوان** است .

3- اگر $A\subseteq B$ آنگاه $B'\subseteq A'$؛ یعنی عمل متمم گیری رابطه‌ی $\subseteq$ را عکس می‌کند.

4- $A\setminus B=A\cap B'$. این حکم، تعریف تفاضل با فرض دانستن تعریف متمم است.

از این رو، و با توجه به تجرد کمتر مفهوم متمم نسبت به مفهوم تفاضل، در کتاب‌های مقدماتی (دبیرستانی) مفهوم متمم قبل از تفاضل تعریف می‌شود.

قضیه‌ی زیر بسیار آموزنده است. در واقع حکم سوم **"تعریف براساس ویژگی"**، یعنی تعریفی بدون اشاره به عضو مجموعه‌ها، برای متمم ارائه می کند.

7.3.2 قضیه

برای مجموعه‌های A و B داریم

(الف) $A\cap A'=\varnothing$ و اگر $A\cap B=\varnothing$، آنگاه داریم $B\subseteq A'$؛ یعنی A' **بزرگترین** مجموعه با ویژگی $A\cap A'=\varnothing$ است.

(ب) $A\cup A'=M$ و اگر $A\cup B=M$، آنگاه $A'\subseteq B$؛ یعنی A' **کوچکترین** مجموعه با ویژگی $A\cup A'=M$ است.

(پ) اگر برای مجموعه‌ای چون B داشته باشیم $A\cap B=\varnothing$ و $A\cup B=M$ آنگاه $B=A'$؛ یعنی A' با ویژگی‌های $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cup A'=M$، که در بندهای (الف) و (ب) آمدند، منحصر به فرد است.

اثبات

ابتدا توضیحات داده شده در احکام قضیه را به کمک استاد درس به بحث بگذارید. حکم **(الف)** را اثبات می‌کنیم و بقیه را به شما واگذار می‌کنیم.

برای اثبات قسمت اول بند **(الف)**، یعنی $A\cap A'=\varnothing$، فرض می‌کنیم، بر خلاف حکم، $A\cap A'\neq\varnothing$ و لذا عضوی چون x در $A\cap A'$ وجود دارد. پس باید "$x\in A$ و $x\in A'$"،

یعنی "$x \in A$ و $x \notin A$" که یک تناقض است. پس فرض $A \cap A' \neq \varnothing$ نادرست است، یعنی باید $A \cap A' = \varnothing$.

برای اثبات قسمت دوم حکم **(الف)**، باید از $A \cap B = \varnothing$ نتیجه بگیریم که $B \subseteq A'$. فرض می‌کنیم $x \in B$. ادعا می‌کنیم که $x \in A'$. اگر چنین نباشد، آنگاه باید $x \in A$ و لذا از $x \in B$ و $x \in A$، باید $x \in A \cap B = \varnothing$، که تناقض است. از این رو $B \subseteq A'$.

احکام قضیه‌ی زیر به **قوانین دمورگان** معروف اند.

8.3.2 قضیه (قوانین دمورگان)

برای مجموعه‌های دلخواه A و B، داریم

(الف) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ب) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

اثبات

(الف) به مرور اثبات‌ها را کوتاه‌تر می‌نویسیم. دلیل هر مرحله‌ی زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned} x \in A' \cap B' &\Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \\ &\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B)' \end{aligned}$$

بنابراین، حکم **(الف)** اثبات شده است (چطور؟)

حکم **(ب)** را می‌توان به صورت بالا یا به روش زیر اثبات کرد. گرچه ممکن است درک آن هوشمندی بیشتری بخواهد، ولی ترفند جدید معرفی می‌کند.

از آنجا که حکم **(الف)** برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه درست است، به ویژه برای A' و B' نیز برقرار است. پس

$$\left(A' \cup B'\right)' = A'' \cap B'' = A \cap B \qquad \text{(چرا؟)}$$

حال از دو طرف این تساوی متمم می‌گیریم. داریم

$$\left(A' \cup B'\right) = \left(A \cap B\right)'$$

که حکم **(ب)** را نتیجه می‌دهد (چرا؟) ملاحظه می‌کنیم که خودتوانی عمل متمم گیری، یعنی $A'' = A$، در این اثبات بسیار با اهمیت است.

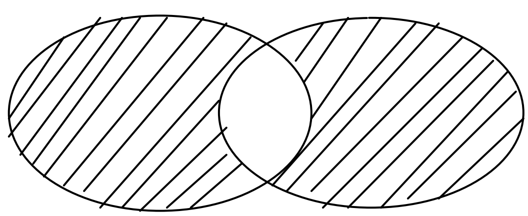
تفاضل متقارن

این بخش را با معرفی عمل دیگری به نام **تفاضل متقارن** مجموعه‌ها ادامه می‌دهیم. خواهیم دهید که تفاضل متقارن A و B اجتماع دو تفاضل $A \setminus B$ و $B \setminus A$ است و ویژگی-هایی بهتر از ویژگی‌های تفاضل دارد. یادآوری می‌کنیم که واژه‌ی **یا** در زبان محاوره‌ای مانع جمع است، در حالی که در ریاضی چنین نیست و می‌تواند هر دو حالت مورد بحث را در بر گیرد. تفاضل متقارن به **یا** در زبان محاوری توجه دارد.

9.3.2 تعریف

تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که به A یا B ولی نه به هر دو تعلق دارند. آن را به صورت $A \Delta B$ (یا $A \oplus B$) نمایش می‌دهیم.

نمودار ون زیر گویای این تعریف است.



$A \Delta B$ ناحیه سایه زده است.

10.3.2 بحث در کلاس

1- تفاضل متقارن $\{1,2,a\}\ \Delta\{1,5,b\}$ را بیابید.

2- مجموعه‌ی $A\Delta B$ را با استفاده از هر سه عمل اجتماع، تفاضل، و اشتراک بنویسید.

3- مجموعه‌ی $A\Delta B$ را تنها با استفاده از دو عمل تفاضل و اجتماع بنویسید و ادعای خود را اثبات کنید.

11.3.2 بحث در کلاس

حتماً این حکم را قبلاً نیز دیده‌اید: **تعریف بر اساس ویژگی**. نشان دهید که مجموعه‌ی $X = A\Delta B$ **کوچکترین** مجموعه‌ای است که در تساوی ؟؟ صدق می‌کند. (ابتدا حکم را به صورت (الف) و (ب) مانند .... بنویسید.)

قضیه‌ی زیر برخی از ویژگی‌های اساسی عمل Δ را نشان می دهد.

12.3.2 قضیه

برای مجموعه‌های دلخواه A، B، C، **داریم**

(الف) $A\Delta\varnothing = A$.

(ب) $A\Delta A = \varnothing$.

(پ) $A\Delta B = B\Delta A$.

(ت) $A\Delta\left(B\Delta C\right) = \left(A\Delta B\right)\Delta C$.

(ث) $A\cap\left(B\Delta C\right) = \left(A\cap B\right)\Delta\left(A\cap C\right)$.

اثبات

این حکم را می‌توان به روش عضو گیری، که تاکنون انجام می‌دادیم، اثبات کرد. ولی سعی می‌کنیم از ویژگی‌های اعمال دیگر استفاده کنیم.

(الف)

$$\begin{aligned} A\Delta\varnothing &= (A\setminus\varnothing)\cup(\varnothing\setminus A) \\ &= A\bigcup\varnothing = A \end{aligned}$$

(ب) $A\Delta A=(A\setminus A)\cup(A\setminus A)=\varnothing\bigcup\varnothing=\varnothing$

(پ) سر راست است.

مراحل اثبات احکام **(ت)** و **(ث)** قدری طولانی است. وقت خود را در کلاس نگیرید. به حل آن‌ها در تمرین‌ها رجوع کنید.

تعمیم اجتماع و اشتراک

اعمال اجتماع و اشتراک دو یا تعدادی متناهی مجموعه را آموختیم. در این قسمت پایانی بخش، این اعمال را به تعدادی دلخواه (متناهی یا نامتناهی) تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم $\mathscr{A}$ مجموعه (یا خانواده) ای متناهی یا نامتناهی از مجموعه‌ها باشد.

13.3.2 تعریف

اجتماع $\mathscr{A}$، به نمایش $\cup\mathscr{A}$ یا $\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}} A$ ، مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که دست کم به یکی از مجموعه‌های خانواده‌ی $\mathscr{A}$ تعلق دارند.

14.3.2 بحث در کلاس

1- روش انشایی تعریف بالا را به روش شرطی بنویسید:

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A=\cup\mathscr{A}=\{x|......\}$$

2- مشابه تعریف بالا، اشتراک خانواده‌ی $\mathscr{A}$ را تعریف کنید.

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = \bigcap \mathscr{A} = \{x \mid ......\}$$

3- اجتماع و اشتراک مجموعه‌ی $\mathcal{A}=\{\{n,n+1\}\}_{n\in N}$ را بیابید.

توجه می‌کنیم که اگر $\mathcal{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای اندیسدار از مجموعه‌ها باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\bigcup\mathcal{A}=\bigcup_{i\in I}A_i=\{x \mid \exists i\in I, x\in A_i\}$$
$$\bigcap\mathcal{A}=\bigcap_{i\in I}A_i=\{x \mid \forall i\in I, x\in A_i\}$$

مبتدیان گاهی به غلط مثلاً به جای $\bigcup_{i\in \boldsymbol{I}}A_i$ می‌نویسند

$$A_1\cup A_2\cup .....$$

البته اگر مجموعه‌ی اندیس‌ها یعنی I برابر با $\{1,2,...,n\}$ یا برابر با $\mathbf{N}$ باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\bigcup\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup ...\cup A_n$$

$$\bigcup\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup ...$$

و به همین صورت برای اشتراک. پس **مراقب نماد گذاری‌ها باشیم**.

15.3.2 بحث در کلاس

1- مطابق معمول، فرض کنید هر مجموعه‌ی A_i زیرمجموعه‌ی M است. حدس بزنید $\bigcup_{i\in\varnothing}A_i$ و $\bigcap_{i\in\varnothing}A_i$ چه مجموعه‌هایی هستند. (یکی M و دیگری $\varnothing$ است).

2- فرض کنید X مجموعه است. مجموعه‌های $\bigcup\mathcal{P}(X)$ و $\bigcap\mathcal{P}(X)$ را مشخص کنید.

4.2 ضرب و همضرب

عمل دیگری را که می‌توان با مجموعه‌ها انجام داد و حاصل آن یک مجموعه باشد، **عمل ضرب** است که به نام ابداع کننده‌ی آن، ضرب دکارتی، معروف است. این عمل قدری با اعمال دیگر متفاوت است. برای معرفی این عمل، ابتدا باید مفهوم **زوج** یا **جفت مرتب** را یادآوری کنیم. با این مفهوم نیز از قبل آشنا هستید و حالت خاصی از آن را برای نمایش صفحه‌ی مختصات به کار برده‌اید. از این رو، به بهانه‌ی معرفی مجدد این مفهوم، چند نکته‌ی مجرد ریاضی را بیان می‌کنیم.

1.4.2 تعریف

"عبارت" (a,b) را **زوج**، **جفت**، یا **دوتایی مرتب** از دو شی (نه لزوماً متمایز) a و b می‌نامیم که تساوی آن‌ها به صورت مولفه ای زیر تعریف می شود:

$$(a,b)=(c.d)\Leftrightarrow a=c\wedge b=d\,(*)$$

اگر حتی هیچ توضیحی درباره‌ی این **عبارت** ندهیم، مشکلی در به کاربردن آن نخواهید داشت، و قبلاً نیز، در دوره‌ی دبیرستان، نداشتید؛ همان‌طور که بدون آگاهی دقیق علمی (فیزیکی) از تعریف رنگ سبز یا آبی، مشکلی برای تشخیص آن ندارید. ولی خواندن مطالب زیر مفید است.

همان‌طور که در معرفی مفهوم **مجموعه** نیز دیدیم، در ریاضیات به چنین جمله‌هایی که در کادر بالا آمده صرفاً توصیف واژه‌ی جفت مرتب یا نمادگذاری (عبارت (a,b)) می‌گوییم و نه تعریف دقیق علمی آن. کوراتوفسکی مفهوم جفت مرتب را به کمک مفهوم مجموعه به صورت زیر تعریف می‌کند:

2.4.2 تعریف

جفت مرتب به نمایش (a,b) عبارت است از

$$(a,b)=\{\{a\},\{a.b\}\}$$

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که تعریف کوراتوفسکی دارای ویژگی $(*)$است.

3.4.2 قضیه

تعریف کوراتوفسکی دارای ویژگی زیر است.

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c\wedge b=d$$

اثبات

روشن است که اگر $a=c$ و $b=d$، آنگاه

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$$

برعکس، فرض کنیم، با توجه به تعریف کواتوفسکی، $(a,b)=(c,d)$، یعنی $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$. دو حالت زیر رخ می‌دهد.

(**حالت 1**): فرض کنیم $a=b$. در این صورت، $\{a\}=\{a.b\}$ و در نتیجه $(a,b)=\{\{a\}\}$ مجموعه‌ای تک عضوی است. حال چون $(a,b)=(c,d)$، نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ی کوراتوفسکی معرف (c,d) یعنی $\{\{c\},\{c,d\}\}$ نیز تک عضوی است. پس $\{c\}=\{c,d\}$ و لذا $c=d$. حال تساوی $(a,b)=(c,d)$ به این معنی است که $\{a\}=\{c\}$ و در نتیجه $a=c$. پس $b=a=c=d$.

(**حالت 2**): فرض کنیم $a \neq b$. در این صورت، $\{a,b\} \neq \{c\}$. در نتیجه $\{a,b\}=\{c,d\}$، $c \neq d$ و $\{a\}=\{c\}$. پس $a=c$. حال $a=c$، و $\{a,b\}=\{c,d\}$، در نتیجه $b=d$ و حکم اثبات شده است.

حال که با توجه به تعریف کوراتوفسکی، جفت‌های مرتب، اشیایی موجه شدند، از این پس تعریف کوراتوفسکی را به حاشیه می‌گذاریم و صرفاً از نماد (a,b) و ویژگی $(*)$ استفاده می‌کنیم.

4.4.2 تعریف

حاصل‌ضرب (دکارتی) مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B را با $A \times B$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A \times B=\{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

5.4.2 بحث در کلاس

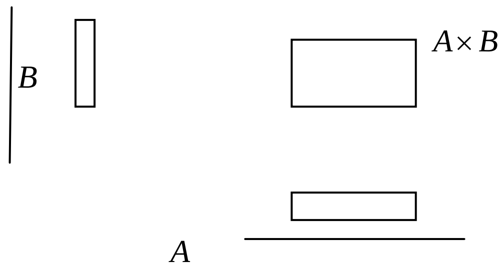
در هر یک از حالت های زیر، $A \times B$ و $B \times A$ را مشخص کنید.

(**الف**) $A=\{a\}$ و $B=\{b\}$.

(**ب**) $A=\varnothing$ و B دلخواه (تهی یا ناتهی) باشد.

(**پ**) $A=B=\{1,2\}$.

این عمل مجموعه‌ها را شاید نتوان به خوبی با نمودار ون نمایش داد. یکی از نمایش‌های متداول حاصل‌ضرب مجموعه‌ها که ایده‌ی آن از نمایش نقطه در صفحه‌ی مختصات دکارتی می آید، به صورت زیر است.



6.4.2 بحث در کلاس

1- مجموعه‌های زیر را در دستگاه مختصات دکارتی نشان دهید.

(الف) $[1,2]\times[3,4]$

(ب) $[1,2]\times[1,2,3]$

2- به این سؤال با دقت و بدون عجله پاسخ دهید. آیا هر زیر مجموعه‌ی $A\times B$ لزوماً به صورت $S\times T$ است که در آن $S\subseteq A$ و $T\subseteq B$؟ برعکس چطور؟

حال برخی از ویژگی‌های عمل ضرب و ارتباط آن را با عمل‌های دیگر که بیشتر استفاده می شوند، می‌آوریم.

7.4.2 قضیه

برای مجموعه‌های دلخواه A، B، C داریم

(الف) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

(ب) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

(پ) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

اثبات

حکم (پ) را اثبات می‌کنیم. شما نیز یکی دیگر را اثبات کنید.

$$A\times(B\setminus C)=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\setminus C\}$$
$$=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C\}$$
$$=\{(x,y)|(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin A\times C\}$$
$$=(A\times B)\setminus(A\times C)\ \}$$

8.4.2 بحث در کلاس

عبارت های زیر را کامل کنید.

$$A\times\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}\dots$$
$$A\times\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap_{i\in I}\dots$$

در زیر با تعمیم جفت مرتب، حاصل‌ضرب دکارتی تعدادی دلخواه مجموعه را معرفی می‌کنیم. ابتدا تعریف زیر را ببینید.

9.4.2 تعریف

برای هر $n\in N$، عبارت $(a_1,\dots,a_n)$ را یک $n-$**تایی مرتب** از n شی (نه لزوماً متمایز) می‌نامیم. هر a_i را **جمله یا مولفه‌ی** iام این $n-$تایی مرتب می نامیم.

همچنین،

$$(a_1,\dots,a_n)=(a_1',\dots,a_n')\Leftrightarrow\forall i,a_i=a_i'$$

حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌های $A_1,\dots,A_n$ عبارت است از

$$A_1\times\dots\times A_n=\{(a_1,\dots a_n)|\forall i,a_i\in A_i\}$$

در حالتی که همه‌ی A_iها با هم برابرند، به جای $A\times\dots A$ می نویسیم A^n.

تعمیم بعدی این مفهوم به صورت زیر است.

10.4.2 تعریف

عبارت $(a_1, a_2, \ldots)$ را یک **دنباله‌ی نامتناهی** می‌نامیم. همچنین،

$(a_1, a_2, \ldots) = (a_1^{'}, a_2^{'}, \ldots) \Leftrightarrow \forall i, a_i = a_i^{'}$.

دنباله‌ی $(a_1, a_2, \ldots)$ را به صورت‌های فشرده‌ی $(a_i)_{i\in N}$ یا $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ نیز نمایش می-دهیم. حال این مفاهیم را به کلی‌ترین صورت آن تعمیم می‌دهیم.

11.4.2 تعریف

برای هر مجموعه‌ی دلخواه $I \neq \varnothing$، عبارت صوری $(a_i)_{i\in I}$ را یک $I-$**تایی** می نامیم. همچنین،

$$(a_i)_{i\in I} = (a_i')_{i\in I} \Leftrightarrow \forall i \in I, a_i = a_i'$$

حاصل‌ضرب دکارتی خانواده‌ی $\{A_i\}_{i\in I}$ عبارت است از :

$$\bigtimes_{i\in I} A_i = \prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I, a_i \in A_i\}$$

البته اگر $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ یا $I = \mathbf{N}$، می نویسیم

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \ldots \times A_n$$

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots$$

همان‌طور که عبارت صوری (a,b) صرفاً نمادی برای نمایش جفت مرتب است، که یک تعریف دقیق آن را کوراتوفسکی ارائه داد، عبارت صوری $(a_i)_{i\in I}$ نیز صرفاً یک نمادگذاری برای معرفی واژه‌ی $I-$ تایی است. در . . . این مفهوم و حاصل‌ضرب دکارتی خانواده‌ی $\{A_i\}_{i\in I}$ را مجدداً به کمک مفهوم **تابع** تعریف می‌کنیم.

حال عمل دیگری را معرفی می‌کنیم که در فصل تابع خواهیم دید که به تعبیری **دوگان** مفهوم حاصل‌ضرب است.

12.4.2 تعریف

اجتماع مجزای مجموعه‌های A_1, A_2 مجموعه‌ای به نمایش‌های $A_1 \uplus A_2, A_1$ ò A_2، یا $A_1 \oplus A_2$ و با تعریف زیر است.

$$A_1 \uplus A_2 = \left(A_1 \times \{1\}\right) \cup \left(A_2 \times \{2\}\right)$$

توجه می‌کنیم که هر عضو $A_i^* = A_i \times \{i\}$ به صورت (x,i) است، که در آن $x \in A_i$.
همان‌طور که گفتیم، خواهیم دید که اجتماع مجزا به تعبیری "دوگان" مفهوم حاصل‌ضرب است. در حال حاضر آن را می‌توانید با اجتماع مقایسه کنید.

13.4.2 بحث در کلاس

1- فرض کنید $A_1 = \{a,b,c\}$ و $A_2 = \{a,d\}$. مجموعه‌های $A_1 \uplus A_1$ و $A_1 \uplus A_2$ را مشخص و تعداد عضوهای آن‌ها را به ترتیب با تعداد عضوهای $A_1 \cup A_1$ و $A_1 \cup A_2$ مقایسه کنید.

2- تعریف اجتماع مجزا را به خانواده‌ی دلخواه $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ تعمیم دهید.

فصل 3

رابطه‌ی ترتیبی

بسیاری از مفاهیم مهم در **علوم ریاضی و کاربردهای** آن‌ها به کمک زیرمجموعه‌هایی خاص از حاصل‌ضرب دکارتی معرفی می‌شوند. در این فصل مطالعه‌ی این زیرمجموعه‌ها را آغاز و در فصل‌های بعدی پی می‌گیریم. توجه می‌کنیم که به مرور مطالب کتاب جدیدتر و جدی‌تر می‌شوند. از این رو لازم است دقت و وقت بیشتری صرف کنید.

1.3 رابطه

گرچه قصد ما مطالعه **تنها** برخی از زیرمجموعه‌های خاص حاصل‌ضرب دو مجموعه است، ولی ابتدا حالت کاملاً کلی آن را معرفی می‌کنیم و با برخی از مفاهیم مربوط به آن آشنا می‌شویم.

1.1.3 تعریف

هر زیرمجموعه‌ی دلخواه چون R از $A\times B$ را **رابطه‌ای دوتایی**، یا به طور ساده **رابطه**‌ای از A به B می‌نامیم.

این تعریف نشان می‌دهد که رابطه‌های بسیاری از مجموعه‌ای چون A به B وجود دارند. برای مثال، اگر A دارای 5 عضو و B دارای 7 عضو باشد، آنگاه تعداد رابطه‌های از A به B، یعنی تعداد زیرمجموعه های $A\times B$ برابر با 2^{35} است (**چرا؟**)، و بینهایت رابطه از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ وجود دارد! چند مثال آشنا را یادآوری می‌کنیم.

1- رابطه‌ی **تساوی** یا **همانی** از مجموعه‌ی دلخواه A به خودش، یعنی،

$$\{(x,y)\in A\times A\,|\,x=y\}$$

2- رابطه‌ی **کوچکتراز یا مساوی با** از $\mathbf{Z}$ به خودش، یعنی،

$$\{(m,n)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\,|\,m\le n\}$$

3- رابطه‌ی **بزرگتر از یا مساوی با** از $\mathbf{Z}$ به خودش، یعنی،

$$\{(m,n)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\,|\,m\ge n\}$$

4- رابطه‌ی **همنهشتی به پیمانه‌ی 5** از $\mathbf{Z}$ به خودش، یعنی،

$\{(m,$

5- رابطه‌ی **همنهشتی** از مجموعه‌ی مثلث‌ها به خودش.

6- یکی دو تا مثال دیگر شما بیاورید.

قبل از ادامه‌ی بحث، نمادگذاری مفید زیر را معرفی می‌کنیم.

2.1.3 نمادگذاری

با الگو قراردادن مثال‌های بالا، معمولاً به جای $(a,b)\in R$ می‌نویسیم aRb و می‌خوانیم **a با b در رابطه‌ی R است**، و اگر $(a,b)\notin R$، می‌نویسیم $a\not R b$.
همچنین اگر $R\subseteq A\times A$، می‌گوییم که R رابطه‌ای **روی** یا **در** A است.

نکته‌ی دیگری که لازم است بگوییم این است که دو رابطه‌ی R_1 و R_2 را تنها وقتی با هم

مقایسه می‌کنیم که هر دو زیرمجموعه‌ی یک $A\times B$ باشند.

3.1.3 بحث در کلاس

فرض کنید $A=\{2,5,3\}$، $B=\{3,6\}$ و $R=\{(a,b)\in A\times B \mid a\mid b\}$ که در آن $a\mid b$ یعنی b مضرب طبیعی a است.

(الف) یکی از عضوهای R جفت $(2,6)$ است. همه‌ی عضوهای R را مشخص کنید.

(ب) رابطه‌ی دیگری از A به B بنویسید.

(پ) آیا $R_1=\{(2,3),(2,6)\}$، $R_2=\varnothing$ و $R_3=A\times B$ نیز رابطه‌هایی از A به B هستند؟

دو رابطه‌ی خاص زیر بسیار به کار می روند:

4.1.3 تعریف

(الف) رابطه‌ی

$$\Delta_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$$

را رابطه‌ی **همانی** یا **تساوی** در A می‌نامیم ، زیرا

$$x=y \Leftrightarrow (x,y)\in\Delta_A$$

(ب) $\nabla_A=A\times A$ (نماد ∇ را **نابلا** بخوانید.)

انواع رابطه

همان‌طور که متوجه شدیم، تعریف رابطه از A به B بسیار کلی است و هر زیرمجموعه‌ای از $A\times B$ را در بر می‌گیرد. برخی از رابطه‌ها دارای ویژگی‌هایی هستند که آن‌ها را در این یا آن مبحث از ریاضیات و کاربردها مفیدتر می‌سازد. در این بخش و بخش‌های دیگر چند نمونه ویژه را که در درس‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، معرفی می‌کنیم.

از بین ویژگی‌های بسیاری که در ارتباط با مفهوم رابطه در A مطرح می‌شوند به موارد زیر اشاره می‌کنیم، که ترکیبی از آن‌ها رابطه‌هایی خاص را در A معرفی می‌کنند.

5.1.3 تعریف

رابطه‌ی R در A:

(الف) **انعکاسی** یا بازتابی است اگر

$$\forall x \in A, xRx$$

(ب) **تقارنی** یا متقارن است اگر برای $x, y \in A$

$$xRy \Rightarrow yRx$$

(پ) **پادتقارنی** یا پادمتقارن است اگر برای $x, y \in A$،

$$(xRy) \& (yRx) \Rightarrow x = y$$

(ت) **متعدی** یا ترایا است اگر برای $x, y, z \in A$،

$$(xRy) \& (yRz) \Rightarrow xRz$$

(ث) **خطی** یا زنجیری است اگر برای هر $x, y, \in A$،

$$(xRy) \vee (yRx)$$

مثال‌های بسیاری از رابطه‌ی روی A می‌توانید ارائه دهید که دارای برخی از ویژگی‌های بالا باشند و برخی ویژگی‌ها را نداشته باشند. به مرور با تعدادی از آن‌ها آشنا می‌شویم.

6.1.3 بحث در کلاس

فرض کنید $A = \{a, b, c\}$.

1- کوچکترین رابطه‌ی انعکاسی روی A را بنویسید.

2- فرض کنید $S = \{(a,a), (a,b), (b,c)\}$. کمترین تعداد عضو را به S بیفزایید که رابطه‌ای **تقارنی** چون R روی A به‌دست آید.

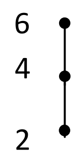
3- در سؤال **2** به‌جای تقارنی، **متعدی** بنویسید و به‌آن پاسخ دهید.

همان‌طور که گفتیم، با در نظر گرفتن ترکیبی از ویژگی‌های بالا، رابطه‌هایی خاص معرفی می‌شوند. در این کتاب به ویژه به سه تا از این رابطه‌های خاص و مهم می‌پردازیم که حتماً لازم است همه‌ی دانشجویان رشته‌های علوم ریاضی (آمار، ریاضی، علوم کامپیوتر، و ...) با آن‌ها آشنا شوند.

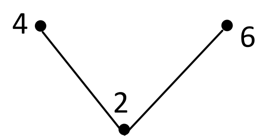
2.3 رابطه‌ی ترتیبی

با ترتیب اعداد آشنا هستیم. در زندگی روزمره نیز اغلب پدیده‌های علمی و غیر علمی را با هم مقایسه می‌کنیم. دراین بخش مفهوم ترتیب اعداد را به مجموعه‌های دیگر تعمیم می‌دهیم و این مفهوم را به صورت مجرد مطالعه می‌کنیم. بسیاری از مطالب این بخش ممکن است برایتان تازگی داشته باشند، **بیشتر دقت کنید**.

با ترتیب اعداد از همان کودکی آشنا شده‌ایم و می‌دانیم که مثلاً $2 \leq 4$ و $2 \leq 6$ این مفهوم آنقدر عمیق در ذهنمان قرار گرفته است که به فکرمان خطور نمی‌کندکه اعداد 2، 4، 6 را بتوانیم جز به صورت صعودی



بچینیم! در حالی که ممکن است لازم باشد آن‌ها را مثلاً به این دلیل که $2|4$، $2|6$ ولی $4 \nmid 6$ و $6 \nmid 4$ به صورت زیر بچینیم:



مفهوم ترتیب عددی آنقدر عمیق در ذهنمان قرار گرفته است که اگر با بازی فوتبال آشنا نباشیم، ممکن است افراد تیم را با توجه به اندازه‌ی (عددی) سن، اندازه‌ی (عددی) قد، یا اندازه‌ی (عددی) وزن آن‌ها در زمین بچینیم! در حالی که اغلب لازم است اشیاء را نه لزوماً برحسب ویژگی **عددی** که به هر دلیل دیگری آن‌ها را به اصطلاح **مرتب** کنیم. در این بخش قصد داریم مفهوم ترتیب معمولی اعداد را به مجموعه‌های دلخواه تعمیم دهیم و آن را به صورت

مجرد مطالعه کنیم. همان‌طور که گفتیم، بسیاری از مطالب این بخش ممکن است برایتان تازگی داشته باشد: ***بیشتر دقت کنید.***

با کمی دقت به $\leq$ در اعداد، مشاهده می‌کنیم که دارای ویژگی‌های انعکاسی $(x \leq x)$، پادتقارنی $(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$ و تعدی $(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ است. از این رو، تعمیم و مجرد سازی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

1.2.3 تعریف

رابطه‌ی R در مجموعه‌ی P، یعنی $R \subseteq P \times P$، را **رابطه‌ی ترتیبی جزئی** (که ما آن را به اختصار، رابطه ترتیبی) می‌گوییم اگر **انعکاسی**، **پاد تقارنی**، و **متعدی** باشد.

2.2.3 بحث در کلاس

حال درک خود را از تعریف بالا تقویت کنید.

1- توجه می‌کنیم که رابطه‌ی کوچکتری معمولی اعداد، یعنی $<$، ترتیبی نیست! کدام ویژگی از سه ویژگی انعکاسی، پاد تقارنی، و متعدی را ندارد؟ چطور استدلال می‌کنید که پاد تقارنی است؟ (نکته‌ای فنی در آن است! از استاد درس کمک بگیرید).

2- به آسانی می‌توانید نشان دهید که رابطه‌ی بخشپذیری

$$mRn \Leftrightarrow m|n$$

در $\mathbf{N}$ ترتیبی است. در $\mathbf{Z}$ **چطور؟**

3- فرض کنید $P = \{$شیراز, اصفهان, گرگان$\}$. رابطه‌ی زیر در P ترتیبی است:

$R=\{$(گرگان,اصفهان), (شیراز, شیراز), (اصفهان,اصفهان), (گرگان,گرگان)$\}$

که در نمادگذاری **2.1.3** داریم:

گرگان R گرگان، اصفهان R اصفهان، شیراز R شیراز، گرگان R اصفهان

شما در P یک رابطه‌ی ترتیبی دیگر بنویسید.

3.2.3 نمادگذاری

همان‌طور که با الگو قراردادن رابطه‌ی ترتیبی معمولی اعداد یعنی $\leq$ ، واژه‌ی **رابطه‌ی ترتیبی** را برای هر رابطه‌ای در مجموعه‌ی دلخواه P که دارای ویژگی‌های **انعکاسی**، **پاد تقارنی**، و **متعدی** باشد به کار بردیم، ریاضی‌دانان معمولاً رابطه‌های ترتیبی دلخواه روی P را نیز با نماد آشنای $\leq$ به جای R نمایش می‌دهند، حتی اگر P مجموعه‌ای از اعداد و $\leq$ رابطه‌ی ترتیبی معمولی اعداد نباشد. حتی با توجه به نمادگذاری **2.1.3** که قرار شد به جای $(x,y)\in\leq$ بنویسیم $x\leq y$، برای خواندن عبارت $x\leq y$ از همان واژه‌های عددی استفاده می‌کنیم و می‌خوانیم x **کوچکتر از یا مساوی با y است**!! برای مثال، با توجه به بند 3 بحث در کلاس بالا، می‌نویسیم **گرگان** $\leq$ **اصفهان** و می‌خوانیم **اصفهان کوچکتر از یا مساوی با گرگان است**!! این قراردادها ممکن است در اوایل کار قدری اشتباه برانگیز باشند، ولی به مرور به آن‌ها عادت می‌کنید.

نکته‌ی دیگری که لازم است مطرح کنیم این است که رابطه‌ی ترتیبی اعداد دارای ویژگی خطی یا زنجیری مذکور در بند (ث) تعریف **5.1.3** است، زیرا برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $x\leq y$ یا $y\leq x$. ولی بسیاری از رابطه‌های ترتیبی (برای مثال، بخشپذیری در اعداد طبیعی یا زیرمجموعه بودن) در این شرط صدق نمی‌کنند. تعریف زیر را ببینید.

4.2.3 تعریف

فرض کنیم $\leq$ رابطه‌ای ترتیبی دلخواه روی P است و $x,y\in P$. اگر دست کم یکی از دو حالت $x\leq y$ یا $y\leq x$ رخ دهد، می‌گوییم که x و y (نسبت به $\leq$) **قابل مقایسه‌اند**، اگر هیچ یک از این دو حالت رخ ندهد، گاهی می‌نویسیم $x\|y$.

برای مثال، اگر رابطه‌ی بخشپذیری را در $\mathbf{N}$ در نظر بگیریم، آنگاه 2 و 6 و همچنین 12 و 4 قابل مقایسه اند (**چرا؟**) در حالی که . . . و . . . قابل مقایسه نیستند! همچنین توجه می‌کنیم که اگر رابطه‌ی ترتیبی معمولی را روی $\mathbf{N}$ در نظر بگیریم، آنگاه هر دو عدد طبیعی دلخواه m و n قابل مقایسه‌اند!

5.2.3 تعریف

اگر $\le$ رابطه‌ای ترتیبی در P باشد، گاهی می‌گوییم که P به رابطه‌ی ترتیبی $\le$ مجهز شده است، یا زوج $(P,\le)$ **مجموعه‌ای مرتب** است. در این صورت P را **مجموعه‌ی زمینه‌ی** آن می‌نامیم. اگر $\le$ **خطی** نیز باشد، می‌گوییم که $(P,\le)$ **زنجیر** است.

برای مثال $(\mathbf{N},\le)$زنجیر است در حالی که مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{N},|)$ چنین نیست (در اینجا از نماد متداول بخشپذیری، یعنی $|$، به جای $\le$ استفاده کرده‌ایم تا اشتباه برانگیز نباشد.)

بدیهی است که یک مجموعه چون P ممکن است تحت رابطه‌های ترتیبی متعددی **مجموعه‌ای مرتب** باشد (این طور نیست؟) اگر امکان اشتباه نباشد، مثلاً در بحثی صرفاً یک رابطه‌ی ترتیبی $\le$ روی P مد نظر باشد، به جای اینکه بگوییم **جفت** $(P,\le)$ **مجموعه‌ای مرتب است**، رابطه‌ی ترتیبی $\le$ را به طور صریح ذکر نمی‌کنیم و صرفاً می‌گوییم که $\boldsymbol{P}$ **مجموعه‌ای مرتب است**!

6.2.3 بحث در کلاس

1- یک رابطه‌ی ترتیبی خطی علاوه بر $\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}$ و یک رابطه‌ی غیر خطی روی $P=\{a,b,c\}$ مثال بزنید.

2- آیا رابطه‌ی ترتیبی شمولی $\subseteq$ در مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}(\{a,b\})$ خطی است؟ در $P=\{\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ چطور؟

3- زیرمجموعه‌ای نامتناهی از مجموعه‌ی توانی $\mathcal{P}(\mathbf{N})$مثال بزنید که تحت رابطه‌ی شمولی $\subseteq$ زنجیر باشد.

در زیر چند واژه‌ی مربوط به مجموعه‌ی مرتب $(P,\le)$ را که مورد استفاده قرار خواهند گرفت، معرفی می‌کنیم. ابتدا، با الگو قراردادن رابطه‌ی ترتیبی معمولی اعداد، نمادگذاری متداول $x<y$ را می‌توان برای تاکید بر این که $x\le y$ **ولی** $x\ne y$ به کار برد.

7.2.3 تعریف

می‌گوییم که y **پوشش** یا تالی x است، یا x مقدم بر y است و می‌نویسیم$x \longrightarrow\!\!< y$

اگر $x < y$ ولی هیچ عضوی چون $z \in P$ به طور سره بین x و y وجود نداشته باشد؛ یعنی، عضو z با ویژگی $x < z < y$ وجود نداشته باشد.

توجه کنید که وقتی $x \prec y$ ، آنگاه از $x \leq y \leq z$ نتیجه می‌گیریم که x=z یا y=z .

همان‌طور که گفتیم و دیدیم، تعریف برخی از واژه ها سریع درک نمی‌شوند. تبحر خود را در زیر افزایش دهید.

8.2.3 بحث در کلاس

1- اگر $\leq$ رابطه‌ی ترتیبی معمولی روی $\mathbb{N}$ باشد، روشن است که، برای مثال، 5 تالی 4 است ولی 8 تالی 4 نیست (**چرا؟**) و البته عدد 1 تالی هیچ عدد طبیعی نیست.

2- حال رابطه‌ی بخشپذیری را روی $\mathbb{N}$ در نظر بگیرید. در این صورت، 5 تنها یک مقدم دارد، آن کدام است؟ در واقع، عدد 1 تنها مقدم هر عدد اول است. عدد 12 دارای دو مقدم است، آن ها را بیابید. همچنین، سه تالی برای 12 بنویسید. عدد 12 چند تالی دارد؟

3- زنجیری مثال بزنید که هر عضو آن دارای پوشش باشد.

4- زنجیری مثال بزنید که هر عضو آن هم دارای پوشش و هم دارای مقدم باشد.

5- زنجیری مثال بزنید که هیچ عضو آن تالی نداشته باشد.

در بند **1** بالا دیدیم که یک عضو ممکن است بیش از یک پوشش یا بیش از یک مقدم داشته باشد. قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که این پدیده در زنجیرها رخ نمی‌دهد.

9.2.3 قضیه

اگر $(P,\leq)$ زنجیر باشد، آنگاه پوشش (و مقدم) هر عضو (البته در صورت وجود) منحصر به فرد (یعنی یکتا) است.

اثبات

روش ساده‌ی اثبات این حکم را به کرات به کار خواهید برد.

فرض می‌کنیم که عضو $a \in P$ دارای دو پوشش چون $b, c \in P$ باشد. یعنی $a \prec b$ و $a \prec c$. چون P زنجیر است، داریم $b \leq c$ یا $c \leq b$. اگر $b \leq c$، خواهیم داشت $a < b \leq c$ و در نتیجه $b=c$ (جمله بعد از تعریف **7.2.3** را ببینید). به همین نحو، از $c \leq b$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $b=c$.

پس پوشش هر عضو (البته در صورت وجود) یکتاست. (**جالب بود، نبود؟!**) به عنوان تمرین، یکتایی مقدم هر عضو را در زنجیرها (البته در صورت وجود) ثابت کنید.

10.2.3 نمودار ترتیبی

گاهی عضوهای مجموعه‌ی مرتب P را می توانیم با انجام مراحل زیر به صورت تصویری در صفحه نشان دهیم (بچینیم) که بسیار مفید واقع می‌شود. (اگر مراحل زیر کاملاً گویا نبود، در عمل متوجه آن‌ها خواهید شد.)

1- هر عضو $x \in P$ را با دایره‌ای کوچک (تو خالی یا تو پر) نشان می‌دهیم.

2- اگر y پوشش x باشد، یعنی $x \prec y$، و تنها در این صورت، پاره خطی از دایره‌ی x به دایره‌ی y رسم می‌کنیم. (دایره‌ی x را پائین‌تر از دایره‌ی y رسم می‌کنیم.)

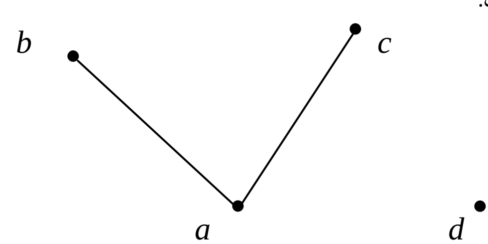
3- هر عضو باید دست کم بالاتر از یک عضو در سطح زیرین خود باشد، یا سطح زیرین برای آن وجود نداشته باشد.

11.2.3 بحث در کلاس

فرض کنید $P = \{a, b, c, d\}$. نمودار ترتیبی رابطه‌ی

$$R_1 = \{(a,a)(b,b),(c,c)(d,d)(a,b),(a,c)\}$$

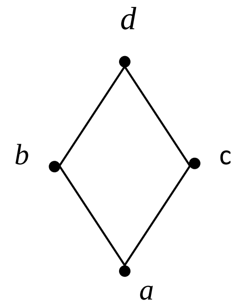
به صورت زیر است:



1- نمودار ترتیبی رابطه‌ی زیر را رسم کنید.

$$R_2 = \{(a.a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(a,c),(a,d)\}$$

2- مجموعه‌ی زوج های مرتب مربوط به نمودار ترتیبی زیر را بنویسید.



3- فرض کنید $X = \{a,b\}$. نمودار ترتیبی $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ را رسم کنید.

3.3 عضوهای ویژه در مجموعه‌های مرتب

برخی از عضوها در مجموعه های مرتب به دلایلی خاص هستند. برای مثال

1.3.3 تعریف

فرض کنیم $(P,\leq)$ مجموعه ای مرتب (جزئی) است. در این صورت،

(الف) عضو $a \in P$ را **بزرگ‌ترین** عضو P (نسبت به $\leq$) می‌گوییم اگر از هر عضو دیگر P بزرگتر باشد؛ یعنی،

$$(\forall x \in P) \qquad x \leq a$$

(ب) عضو $b \in P$ را **کوچک‌ترین** عضو P (نسبت به $\leq$) می‌گوییم اگر از هر عضو دیگر P کوچکتر باشد؛ یعنی،

$$(\forall x \in P) \quad b \leq x$$

درک این تعریف نسبت به تعریف بعدی آسان است، زیرا واژه ها همان معنی لغوی خود را دارند. این نکته نیز لازم به ذکر است که بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو در یک مجموعه‌ی مرتب ممکن است وجود نداشته باشد، ولی در صورت وجود، هر یک از آن‌ها **منحصر به فرد** است. اگر نتوانستید این واقعیت را به روش قضیه‌ی **9.2.3** اثبات کنید، اثبات جالب آن را در قضیه‌ی 3.2.3 ببینید. با توجه به یکتایی مذکور، معمولاً بزرگ‌ترین عضو $(P,\leq)$ را با **1** یا T و کوچک‌ترین عضو آن را با 0 یا $\perp$ نمایش می‌دهیم (البته در صورت وجود).

2.3.3 بحث در کلاس

1- کوچک‌ترین عضو در $(\mathbf{N},\leq)$ و در $(\mathbf{N},|)$ کدام‌اند؟ آیا بزرگ‌ترین عضو دارند؟

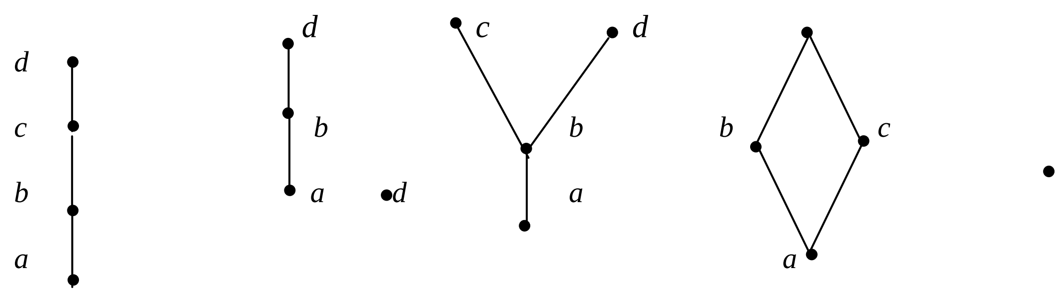
2- کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو در $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ کدام‌اند؟

3- بزرگ‌ترین و (کوچک‌ترین) عضو مجموعه‌های مرتب زیر را (در صورت وجود) مشخص کنید:

$$(\mathbf{N}\cup\{\infty\},\leq) \quad ، \quad ((5,7],\leq) \quad ، \quad ([5,7),\leq)$$

$(\{2,3,4,12\},|)$ که در آن $a|b$ یعنی b مضرب طبیعی a است.

4- در نمودارهای ترتیبی زیر، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو را (در صورت وجود) مشخص کنید.



(پ) (ب) (ت) (الف)

3.3.3 قضیه

بزرگ‌ترین (و کوچک‌ترین) عضو $(P,\leq)$، البته در صورت وجود، منحصر به فرد (یکتا) هستند.

اثبات

البته واژه‌ها به خودی خود یکتایی را القا می‌کنند، ولی قرار شد هیچ حکمی را با اصرار یا قسم خوردن بر کسی تحمیل نکنیم!

برای اثبات یکتایی بزرگ‌ترین عضو، مشابه اثبات قضیه **9.1.3**، فرض می‌کنیم که هر دو عضو $a,b\in P$ بزرگ‌ترین عضو باشند. حال چون. . . ، برای هر عضو P، از جمله b، داریم $b\leq a$. از طرفی به گونه‌ی مشابه، . . . ، پس $a\leq b$. حال از $b\leq a$ و $a\leq b$ و پاد تقارنی بودن رابطه‌های ترتیبی، نتیجه می‌گیریم که . . . و حکم اثبات می‌شود! **جالب بود؟!** حال یکتایی کوچک‌ترین عضو را اثبات کنید.

درک تعریف زیر نیاز به **دقت بیشتری** دارد.

4.3.3 تعریف

فرض کنیم $(P,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب است. در این صورت،

(الف) عضو $a\in P$ را یک **عضو ماکسیمال** (یا بیشین) می‌گوییم اگر از هیچ عضو دیگر P کوچک‌تر نباشد؛ یعنی، $x\in P$ وجود نداشته باشد به طوری که $a\langle x$. به زبان گزاره‌ها،

$$a\leq x\Rightarrow a=x$$

(ب) عضو $b\in P$ را یک **عضو مینیمال** (کمین) می‌گوییم اگر هیچ عضو دیگر P از آن کوچک‌تر نباشد؛ یعنی $x\in P$ وجود نداشته باشد به طوری که $x<a$. به زبان گزاره‌ها،

$$x\leq a\Rightarrow x=a$$

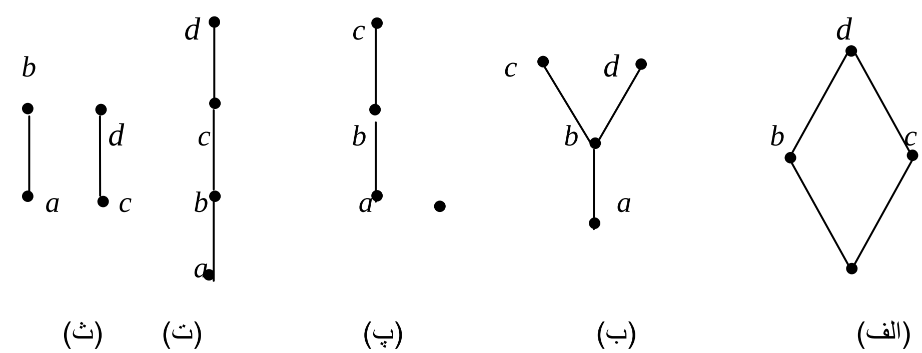
معمولاً نخستین باری که تعریف عضوهای **ماکسیمال** و **مینیمال** را می‌بینیم دچار اشتباه می‌شویم و تصور می‌کنیم که همان مفاهیم بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین هستند. دو موضوع باعث پدید آمدن این اشتباه می‌شود. یکی این که واژه‌های **بیشین** و **کمین** چندان تفاوتی با واژه‌های **بزرگ‌ترین** و **کوچک‌ترین** ندارند، و از این رو تا مدتی واژه های لاتین **ماکسیمال** و **مینیمال** را به کار می‌بریم. دوم اینکه هرگاه صحبت از ترتیب و رابطه‌ی ترتیبی می‌شود، در ذهن ما بلافاصله مجموعه‌های اعداد و رابطه‌ی معمولی $\leq$ مجسم می‌شود، که ویژگی زنجیر را داراست و در نتیجه هر عضوی که عضوی از آن بزرگ‌تر وجود نداشته باشد، خود از همه بزرگ‌تر است. قبلا نیز در مورد خاص بودن $\leq$ در اعداد **هشدار** دادیم.

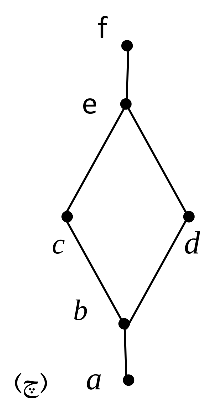
بحث زیر مفاهیم ماکسیمال و مینیمال را روشن‌تر می‌کند.

5.3.3 بحث در کلاس

درک این مفاهیم با نمودارها آسانتر است.

1- نمودارهای ترتیبی زیر را برای $P = \{a,b,c,d\}$ در نظر بگیرید.





عضوهای کوچک‌ترین، مینیمال، بزرگ‌ترین و ماکسیمال را در **(الف)**، **(ت)** و **(ج)** با دلیل مشخص کنید.

نمودار **(ب)** بزرگ‌ترین عضو ندارد ولی دارای دو عضو ماکسیمال است. آن‌ها را با دلیل مشخص کنید.

نمودار **(پ)** دارای بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو نیست (**چرا؟**) ولی یک عضو آن هم ماکسیمال است و هم مینیمال. آن را با دلیل مشخص کنید.

نمودار **(ت)** دارای دو عضو ماکسیمال و دو عضو مینیمال است. آن‌ها را با دلیل مشخص کنید. آیا در این نمودار بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو وجود دارد؟

متوجه شدیم که اگر عضوی ماکسیمال باشد، لزوماً بزرگ‌ترین عضو نیست، و اگر عضوی مینیمال باشد، لزوماً کوچک‌ترین عضو نیست. **عکس این احکام چطور؟**

6.3.3 قضیه

(الف) بزرگ‌ترین عضو $(P,\leq)$، در صورت وجود، یقیناً تنها عضو ماکسیمال آن است.

(ب) کوچک‌ترین عضو $(P,\leq)$، در صورت وجود، یقیناً تنها عضو مینیمال آن است.

اثبات

(الف) فرض کنیم a بزرگ‌ترین $(P,\leq)$ باشد. برای این که نشان دهیم a عضو ماکسیمال نیز هست، نشان می‌دهیم که گزاره‌ی "$a \leq x \Rightarrow a = x$" برای هر $x \in P$ درست است. پس فرض می‌کنیم $a \leq x$ درست است. چون . . . ، باید $x \leq a$. حال از $a \leq x$ و $x \leq a$ و . . . بودن رابطه‌های ترتیبی، نتیجه می‌گیریم که $a = x$. حکم **(ب)** را شما بعد از کلاس اثبات کنید.

7.3.3 تعریف

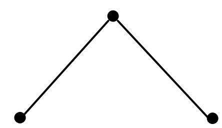
مجموعه‌ی مرتب $(P,\leq)$را **خوش‌ترتیب** می‌گوییم اگر هر زیر مجموعه‌ی ناتهی Q از P خود دارای کوچکترین عضو باشد. یعنی

$$\exists q \in Q, \forall x \in Q, q \leq x$$

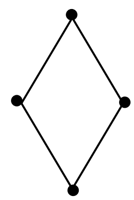
8.3.3 بحث در کلاس

1- روشن است که مجموعه‌ی مرتبی که ناتهی باشد و دارای کوچکترین عضو نباشد، یقیناً خوش‌ترتیب نیست. **چرا؟**

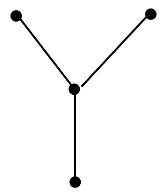
2- نمودارهای زیر معرف مجموعه‌های مرتب خوش‌ترتیب نیستند. **چرا؟**



(الف)



(ب)



(پ)

3- مجموعه‌ی مرتب $([0,1],\le)$ خوش ترتیب نیست. **چرا؟**

4- نشان دهید که $(\{2,4,6\},|)$، که در آن $a|b$ یعنی b مضرب طبیعی a است، خوش‌ترتیب نیست ولی $(\{2,4,8\},|)$ خوش‌ترتیب است.

5- آیا مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{N},\le)$ خوش‌ترتیب است؟ توجه می‌کنیم که اگر $Q\subseteq \mathbf{N}$ متناهی (و ناتهی باشد) آنگاه Q دارای کوچک‌ترین عضو است. زیرا اگر $a_1\in Q$ کوچک‌ترین نباشد، آنگاه $a_2\in Q$ وجود خواهد داشت که $a_2\langle a_1$ و اگر a_2 کوچک‌ترین نباشد، آنگاه $a_3\in Q$ وجود خواهد داشت که $a_3\langle a_2$. اگر این روند بدون وقفه ادامه یابد، زنجیر نامتناهی

$$\ldots < a_n < a_{n-1} < a_{n-2} < \ldots < a_2 < a_1$$

را در Q به‌دست می‌آوریم که متناقض متناهی بودن Q است! اگر Q نامتناهی باشد، **چطور؟**

با استفاده از قضیه‌ی زیر به‌راحتی می‌توانستید به سؤال‌های بندهای **2** و **4** بالا پاسخ دهید، ولی مخصوصاً آن را قبلاً مطرح نکردیم تا سلول‌های خاکستری شما فعال‌تر شوند!

9.3.3 قضیه

هر مجموعه‌ی خوش‌ترتیب $(P,\leq)$، زنجیر است (البته عکس آن درست نیست).

اثبات

بسیار ساده است. برای هر دو عضو $x, y \in P$، زیر مجموعه‌ی $Q=\{x,y\}$ از P را در نظر بگیرید و اثبات را کامل کنید.

این بخش را با معرفی مفاهیم مهم زیر، که در بسیاری از درس‌های علوم ریاضی به کار می‌روند، به پایان می‌بریم.

10.3.3 تعریف

فرض کنیم $(P,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب است و $Q \leq P$. در این صورت،

(الف) می‌گوییم که $u \in P$ (نه لزوماً $u \in Q$) یک **کران بالا** برای Q است اگر

$$(\forall x \in Q) x \leq u$$

(ب) می‌گوییم که $a \in P$ (نه لزوماً $a \in Q$) **سوپریمم** Q است اگر کوچک‌ترین *کران بالای* Q باشد؛ یعنی،

(یک) $a \in P$ یک کران بالای Q باشد، و

(دو) برای هر کران بالای Q چون $u \in P$، داشته باشیم $a \leq u$.

بعد از تمرین‌هایی که تاکنون انجام دادید، حال راحت‌تر می‌توانید مفاهیم مجرد را درک کنید.

11.3.3 بحث در کلاس

روشن است که Q ممکن است هیچ، تنها یک، یا بیش از یک کران بالا در P داشته باشد (در هر مورد مثالی بیاورید)، ولی یقیناً نمی‌تواند بیش از یک سوپریمم داشته باشد (البته اگر داشته

باشد!). این مطلب را به روش اثبات قضیه‌ی 3.3.3 اثبات کنید. از این رو، نمادگذاری زیر را معرفی می کنیم.

12.3.3 نمادگذاری

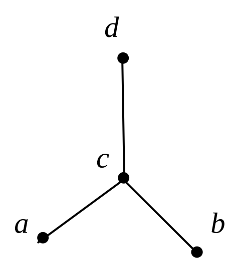
اگر سوپریمم Q در P وجود داشته باشد، می‌نویسیم

$$a = \sup_P Q = \mathrm{lub}_P\, Q = \vee_P Q$$

بحث زیر نشان می‌دهد که نوشتن اندیس P در نمادگذاری بالا گاهی مهم است. زیرا، سوپریمم Q در P_1 ممکن است با سوپریمم Q در P_2 متفاوت باشد. البته اگر در بحثی فقط سوپریمم در یک مجموعه‌ی مرتب P مورد نظر باشد، اندیس P را می‌توان حذف کرد.

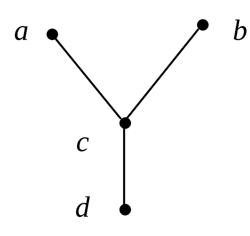
13.3.3 بحث در کلاس

1- نمودار ترتیبی زیر را در نظر بگیرید.



مجموعه‌ی کران‌های بالای $Q=\{a,b\}$ را در $P_1=\{a,b,c,d\}$ بنویسید و سپس $\sup_{P_1} Q$ را بیابید. حال مجموعه‌های کران‌های بالای Q را در $P_2=\{a,b,d\}$ بنویسید و سپس $\sup_{P_2} Q$ را بیابید.

2- توجه کنید که $\sup_P Q$ ممکن است وجود نداشته باشد. برای مثال در نمودار ترتیبی زیر، سوپریمم $\{a,b\}$ در $P=\{a,b,c,d\}$ وجود ندارد (**چرا؟**)



3- توجه کنید که $\sup_P Q$ ممکن است در خود Q باشد. برای مثال در بند **1**، سوپریمم $\{a,b\}$ را در $\{a,b,c,d\}$ بیابید.

4- روشن است که اگر Q دارای بزرگ‌ترین عضو باشد، سوپریمم Q همان بزرگ‌ترین عضو آن است. ولی نکته‌ی جالب در این است که حتی اگر Q بزرگ‌ترین عضو نداشته باشد، Q می تواند در P سوپریمم داشته باشد. مثال بیاورید.

5- با استفاده از مثال‌های بالا، مفهوم سوپریمم را با مفهوم عضو ماکسیمال مقایسه کنید.

6- رابطه‌ی ترتیبی بخشپذیری را در $\mathbf{N}$ درنظر بگیرید و $\bigvee_{\mathbf{N}}\{4,6\}$ را بیابید.

آشنا است، نیست؟!

اگر چه مفهوم سوپریمم ابتدا در مجموعه‌ی اعداد حقیقی با ترتیب معمولی مطرح شد، ولی ما مخصوصاً ابتدا مثال‌های کلی دیگر را مطرح کردیم تا نظر شما را به کلی‌تر بودن این مفهوم جلب کنیم. مثال‌های بسیاری از این مفهوم را در دروس ریاضی عمومی دیده اید. مثال‌های زیر را نیز ببینید.

14.3.3 بحث در کلاس

مجموعه مرتب معمولی اعداد حقیقی $(\mathbf{R},\le)$ را در نظر بگیرید.

1– ابتدا مجموعه‌های کران‌های بالای بازه‌های $(0,1)$ و $[0,1]$ را بنویسید و سپس $\sup_{\mathrm{R}}(0,1)$ و $\sup_{\mathrm{R}}[0,1]$ را بیابید.

2– مجموعه‌ی کران‌های بالای $\mathbf{N}$ در $\mathbf{R}$ کدام است؟ آیا $\sup_{\mathbf{R}}\mathbf{N}$ وجود دارد؟

حدس می‌زنیم که بتوانید دوگان مفاهیم بالا، یعنی **کران پایین، اینفیمم** (**بزرگترین کران پایین**)، به نمایش‌های $\inf_P Q = \mathrm{glb}_P Q = \bigwedge_P Q$ (البته در صورت وجود)، را خودتان تعریف کنید. مثال‌هایی از آن‌ها ارائه کنید. به عنوان تکلیف شب این کار را انجام دهید و نوشته‌های خود را به استاد حل تمرین درس تحویل دهید.

15.3.3 بحث در کلاس

تلاش کنید به این سؤال سهل و ممتنع پاسخ دهید که: اگر $Q=\varnothing$ تهی باشد، آنگاه $\bigvee_P\varnothing$ و $\bigwedge_P\varnothing$ (در صورت وجود) چگونه عضوهایی از P هستند؟ البته، ابتدا باید مجموعه‌ی کران‌های بالا و مجموعه‌ی کران‌های پایین مجموعه‌ی تهی $\varnothing$ را مشخص کنید.

16.3.3 تعریف

مجموعه‌ی مرتب $(P,\leq)$ را که هر زیرمجموعه‌ی آن (تهی یا ناتهی) دارای **سوپریمم** و **اینفیمم** باشد، کامل می‌نامیم.

فصل 4

افزار و هم‌ارزی

همان‌طور که در فصل قبل دیدیم، مفهوم رابطه‌ی ترتیبی در واقع تعمیم و مجردسازی رابطه‌ی معمولی $\leq$ در اعداد است. در این فصل نوع دیگری از رابطه را مطرح می‌کنیم که تعمیم و **مجردسازی رابطه‌ی تساوی** است.

رابطه‌ی تساوی در واقع **یکی بودن**، **عین هم بودن**، **همان بودن** را تعبیر می‌کند. ولی بسیاری مواقع لازم است اشیای غیر یکسان را نیز به خاطر شباهت در برخی از ویژگی‌ها **یکسان در نظر بگیریم** و با این کار عضوهای یک مجموعه را **دسته بندی** کنیم. به عنوان نمونه، میوه فروش با وجودی که هر سیب با سیب دیگر متفاوت است، آن‌ها را یکسان در نظر

می‌گیرد و در یک جعبه قرار می‌دهد، گلابی‌ها را در جعبه‌ای دیگر، و ... حتی گاهی انواع سیب ها را برحسب رنگ یا محل پرورش آن‌ها یکسان در نظر می‌گیرد و آن‌ها را در جعبه‌های مجزا از هم دسته‌بندی می‌کند. شما نیز کتاب‌هایتان را در یک دسته قرار می‌دهید، لباس‌هایتان را در دسته‌ای دیگر، ... و حتی کتاب‌هایتان را بر حسب موضوع ، لباس‌هایتان را بر حسب رنگ، ...، یکسان در نظر می‌گیرید و دسته‌بندی می‌کنید.

ریاضی‌دانان نیز گاهی همه‌ی اعداد زوج یا همه‌ی اعداد مضرب پنج را یکسان در نظر می‌گیرند، یا مثلث‌ها را همنوع در نظر می‌گیرند.

رابطه‌ی هم‌ارزی همان یکسان در نظر گرفتن است!

همان‌طور که متوجه شدیم، **یکسان در نظر گرفتن** ارتباط نزدیکی با **دسته‌بندی** دارد.

از این رو، قبل از ارائه‌ی **تعریف دقیق** و **ریاضی‌گونه‌ی** مفهوم رابطه‌ی هم‌ارزی، مفهوم ریاضی

دسته‌بندی کردن اعضای یک مجموعه را معرفی می‌کنیم.

1.4 افراز و رابطه‌ی هم‌ارزی

همان‌طور که گفتیم، عضوهای یک مجموعه‌ی X را به گونه‌هایی متنوع می‌توان به خانه‌هایی دسته‌بندی کرد. دسته‌بندی‌ای را که هر خانه‌ی آن ناتهی و هر عضو X دقیقاً در یک خانه قرار گیرد، **افراز** می‌نامیم. با نمادهای ریاضی، تعریف زیر را داریم.

1.1.4 تعریف

مجموعه‌ی $\wp$ متشکل از زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی X را یک **افراز** X می‌گوییم اگر دارای ویژگی‌های زیر باشد:

(الف) هر عضو $\wp$ **ناتهی** باشد. یعنی،

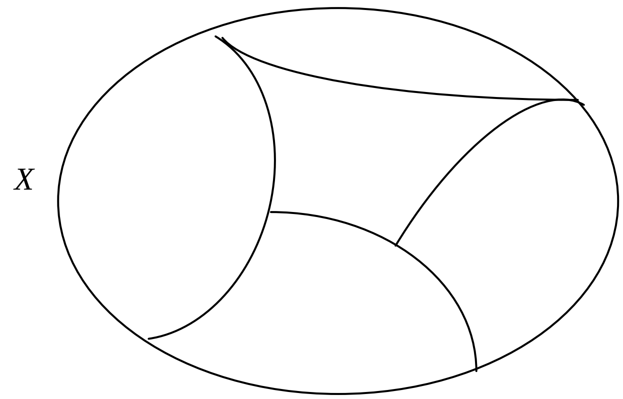
$$\forall C \in \wp \ , \quad C \neq \varnothing$$

(ب) عضوهای $\wp$ **دو به دو مجزا** باشند. یعنی،

$$??\forall C,D\in\wp, C\neq D\Rightarrow C\cap D=$$

(پ) $\bigcup\wp=X$. یعنی،

$$\forall x\in X,\exists C\in\wp, x\in C$$



افرازی از X

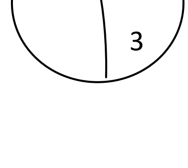
توجه می‌کنیم که اگر هر عضو $\wp$ را **خانه** بنامیم، آنگاه (پ) همراه با (ب) بیان می‌کند که هر عضو X **دقیقاً در یک خانه** است. نکته دیگری که لازم است مورد توجه قرار گیرد، این است که دو واژه‌ی **مجزا** و **متمایز** متفاوت هستند و گاهی مبتدیان این دو را یکسان می‌انگارند. در واقع مجزا یعنی $C\cap D=\varnothing$، در حالی که متمایز یعنی $C\neq D$. مثالی از دو مجموعه-ی متمایز بیاورید که مجزا نباشند.

2.1.4 بحث در کلاس

1- مجموعه‌ی $X=\{1,2\}$ را تنها به دو صورت متفاوت می‌توان افراز کرد. آن ها را مشخص کنید.

2- مجموعه‌ی سه عضوی $X=\{1,2,3\}$ را به پنج صورت می‌توان افراز کرد.

برای مثال،



$$\{\{1\},\{2\},\{3\}\} =$$

یک افراز X است. چهار افراز دیگر X را بنویسید.

3– تعداد افرازهای متفاوت یک مجموعه‌ی n عضوی X را عدد n-ام بِل (Bell) می نامند و با B_n نمایش می‌دهند. با دانستن تعداد افرازهای مجموعه‌های 1،2، . . .،n عضوی می‌توان تعداد افرازهای مجموعه‌ی $n+1$ عضوی را به صورت زیر پیدا کرد:

$$B_{n+1} = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

$$= 1+\binom{n}{1}B_1+\binom{n}{2}B_2+\ldots+\binom{n}{n}B_n$$

که در آن $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k!)}$.

برای مثال، چون $B_1=1$، $B_2=2$، پس $B_3=5$ به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$B_3 = 1+\binom{2}{1}B_1+\binom{2}{2}B_2$$

$$=1+2+2=5$$

حال، تعداد افرازهای یک مجموعه‌ی 4 عضوی را بیابید، برنامه‌ای کامپیوتری بنویسید که تعداد افرازهای هر مجموعه‌ی n عضوی را بیابد!

حال رابطه‌ی هم‌ارزی را به‌طور رسمی معرفی و سپس ارتباط دقیق آن را با افراز بیان می‌کنیم. با نگاهی دقیق‌تر به ویژگی‌های رابطه‌ی تساوی، تعریف مجرد زیر را می‌آوریم که تعمیمی از رابطه‌ی تساوی است.

3.1.4 تعریف

رابطه‌ی E روی مجموعه‌ی A را **رابطه‌ی هم‌ارزی** می‌گوییم اگر انعکاسی، تقارنی،

و متعدی باشد.

مشاهده می‌کنیم که به‌جای ویژگی **پادتقارنی** که برای رابطه‌ی ترتیبی قائل شدیم، ویژگی **تقارنی** را برای رابطه‌ی هم‌ارزی در نظر گرفتیم. حال با شرکت در بحث زیر، دریافت خود را از تعریف این مفهوم مجرد تقویت کنید.

4.1.4 بحث در کلاس

1- فرض کنید که $A=\{1,2\}$. روشن است که یکی از رابطه‌های هم‌ارزی روی A، رابطه‌ی تساوی $\Delta_A=\{(1,1),(2,2)\}$ است، که در آن ویژگی‌های تقارنی و تعدی به اصطلاح **به انتفای مقدم** برقرارند. تنها یک رابطه‌ی هم‌ارزی دیگر روی A وجود دارد. آن‌را مشخص کنید.

2- نشان دهید که برای هر مجموعه‌ی دلخواه A رابطه‌های Δ_A و ∇_A رابطه‌هایی هم‌ارزی هستند. آیا رابطه‌ی $A\times A \supseteq \varnothing$ نیز هم‌ارزی است؟

3- فرض کنید $A\neq\varnothing$ و $\mathcal{E}$ مجموعه‌ی همه‌ی رابطه‌های هم‌ارزی روی A باشد. روشن است که $(\mathcal{E}, \subseteq)$ مجموعه‌ای مرتب است. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن را مشخص کنید.

4- آیا رابطه‌ی بخش‌پذیری روی **N** رابطه‌ای هم‌ارزی است؟ مراقب ویژگی تقارنی باشید

5- نشان دهید که رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی n، $\equiv_n$، در **Z** رابطه‌ای هم‌ارزی است. این رابطه‌ی هم‌ارزی، به ویژه در نظریه‌ی اعداد، بسیار مفید است.

5.1.4 نمادگذاری

همان‌طور که در مورد رابطه‌ی ترتیبی بیان شد، اگر نماد مشخصی، از قبیل =، $\equiv_n$، برای نمایش رابطه‌ی هم‌ارزی وجود نداشته باشد، معمولاً نماد $\sim$ (تیلدا) را به جای حرفی لاتین چون E به‌کار می‌بریم.

6.1.4 بحث در کلاس

1- آیا رابطه‌ی همنهشتی (تساوی) مثلث‌ها رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه‌ی مثلث‌ها است؟ رابطه‌ی تشابه مثلث‌ها **چطور؟**

2- آیا رابطه‌ی موازی بودن روی مجموعه‌ی خط‌ها هم‌ارزی است؟ عمود بودن **چطور؟**

3- فرض کنید $\wp$ افرازی از مجموعه‌ی A باشد. آیا عبارت **هم خانه بودن** در $\wp$ رابطه‌ای هم ارزی روی A است؟

به آسانی می‌توانیم احساس کنیم که هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی A، مجموعه‌ی A را به خانه‌های مجزا افراز می‌کند. ولی بحث را به‌صورت دقیق‌تر زیر با معرفی نمادهایی که به کرات استفاده می شوند، پی می‌گیریم.

7.1.4 تعریف

اگر □ رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A باشد و $x \in A$ ، آنگاه مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی اعضای A را که با x در رابطه‌ی □ هستند، **رده**، دسته، کلاس، یا **خانه‌ی** x نسبت به □ می‌نامیم و آن را با نمادهایی چون $[x]_{□}$ یا $\overline{x}_{□}$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ی همه‌ی رده‌های □ را با $A/□$ یا $\overline{A}_{□}$ نشان می‌دهیم و آن را **مجموعه‌ی خارج قسمت** A تحت □ می نامیم. پس

$$A/□ = \{[x]_{□} \mid x \in A\}$$

از آنجا که رده‌ی x تحت رابطه‌های هم‌ارزی متفاوت، ممکن است متفاوت باشد، اندیس □ را به‌کار بردیم. البته اگر در بحثی تنها یک رابطه‌ی هم‌ارزی □ مطرح باشد، می‌توان اندیس □ را حذف کرد و مثلاً به‌جای $[x]_{□}$ نماد $[x]$ را به‌کار برد.

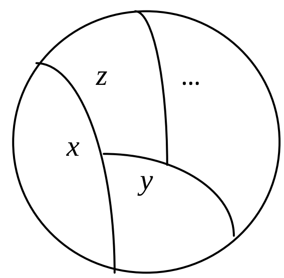
8.1.4 بحث در کلاس

1- دلیلی بیاورید که نشان دهد برای هر $x \in A$ ، $x \in [x]$.

2- ثابت کنید که اگر $[x]=[y]$ آنگاه $x \sim y$.

3- روشن است که اگر $=$ رابطه‌ی تساوی روی A باشد، آنگاه هر رده‌ی آن مجموعه‌ای تک عضوی است و لذا

$$A/_{=} = \{\{a\} | a \in A\} =$$

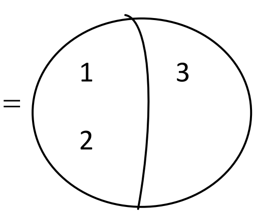


حال مجموعه‌ی خارج قسمتی A/∇_A را مشخص کنید.

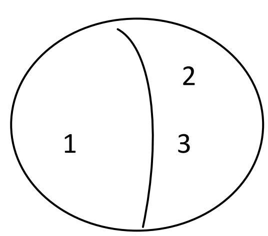
4- اگر رابطه‌ی هم‌ارزی $E=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ را روی

$A=\{1,2,3\}$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$A/E = \{\{1,2\},\{3\}\} =$$



رابطه‌ای هم‌ارزی‌ای بنویسید که A را به صورت زیر افراز کند.



5- رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی2، $\equiv_2$، را روی **Z** در نظر بگیرید. در این صورت

$$\begin{aligned}[0] &= \{m \in \mathbf{Z} \mid 0 \equiv_2 m\} \\ &= \{m \in \mathbf{Z} \mid 2 \mid m\} \\ &= \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 2k, k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1] &= \{m \in \mathbf{Z} \mid 1 \equiv_2 m\} \\ &= \{m \in \mathbf{Z} \mid 2 \mid m-1\} \\ &= \{m \in \mathbf{Z} \mid m-1 = 2k, k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{2k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2] &= \{m \in \mathbf{Z} \mid 2 \equiv_2 m\} \\ &= \{m \in \mathbf{Z} \mid 2 \mid m-2\} \\ &= \{m \in \mathbf{Z} \mid m-2 = 2l, l \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 2(l+1), l \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\} = [0]\end{aligned}$$

اگر این روند را با 3،4، . . . و 1-،2-، . . . ادامه دهیم، خواهیم دید که $Z/_{\equiv_2}$ تنها دو عضو دارد: $[0]$ و $[1]$. حدس بزنید که $Z/_{\equiv_n}$ دارای چند رده است و رده‌ی $[0]$ را نسبت به $\equiv_n$ بیابید.

بند **5** بالا را به کمک لم زیر راحت‌تر می‌توان انجام داد. اثبات این لم بسیارآسان است، ولی جزئیات آن‌را برای آموزش می‌آوریم.

9.1.4 لم

فرض کنیم $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است. در این صورت برای هر $x, y \in A$، داریم

$$[x]=[y] \Leftrightarrow x \sim y$$

اثبات

برای اثبات این حکم باید از ویژگی‌های انعکاسی، تقارنی، و تعدی استفاده کنیم (نه با قسم خوردن!). این حکم گزاره‌ای دو طرفه است:

1- $[x]=[y] \Rightarrow x \sim y$

2- $x \sim y \Rightarrow [x]=[y]$

که باید هر دو را اثبات کنیم.

1- اثبات ساده‌ی این حکم را احتمالاً توانستید در بند **2** بحث بالا ارائه دهید! اگر نتوانستید، شاید باید بیشتر تلاش کنید تا از داده‌ها به خوبی بهره بگیرید (زندگی نیز چنین است). فرض کنیم $[x]=[y]$. بنا بر انعکاسی بودن رابطه‌های هم‌ارزی، داریم $x \sim x$ و در نتیجه $x \in [x]$ و لذا $x \in [y]$، یعنی $x \sim y$.

2- اثبات این حکم قدری فنی‌تراست! فرض کنیم $x \sim y$. می‌خواهیم نشان دهیم که دو مجموعه‌ی $[x]$ و $[y]$ برابرند، یعنی $[x] \subseteq [y]$ و $[y] \subseteq [x]$. برای اثبات $[x] \subseteq [y]$، فرض می‌کنیم که $z \in [x]$. پس $z \sim x$. حال از $z \sim x$ و فرض $x \sim y$ و ویژگی تعدی رابطه‌های هم‌ارزی نتیجه می‌گیریم که $z \sim y$ و لذا $z \in [y]$. برای اثبات $[y] \subseteq [x]$، فرض می‌کنیم $z \in [y]$. پس $z \sim y$. از $z \sim y$ و فرض $x \sim y$ **چطور** نتیجه می‌گیرید که $z \sim x$ و لذا $z \in [x]$؟

قبل از تعریف **7.1.4**، احساس کردیم که هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی A، مجموعه‌ی A را افراز می‌کند و مثال‌ها نیز این احساس را تقویت کردند. قضیه‌ی زیر درستی این احساس را اثبات می کند.

10.1.4 قضیه

فرض کنیم $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است. در این صورت $A/_{\sim}$ افراز A است.

اثبات

باید درستی سه شرط تعریف **1.1.4** را نشان دهیم.

(الف) برای هر $x \in A$، $[x] \neq \emptyset$: قبلاً ثابت کرده‌ایم (کجا؟)

(پ) $\bigcup A/_{\sim} = A$: یعنی هر $x \in A$ در یک خانه است. عضو x در کدام خانه است؟

(ب) مجموعه‌های متعلق به $A/_{\sim}$ دو به دو مجزا هستند: اثبات این قسمت قدری فنی‌تر است. همان‌طور که در بند **(ب)** تعریف **1.1.4** آمد، باید ثابت کنیم که اگر $[x] \neq [y]$، آنگاه $[x] \cap [y] = \varnothing$. از نامساوی بودن $[x]$ و $[y]$ چه نتیجه می‌گیرید؟ درست است: دست کم یکی از دو حا لت زیر باید رخ دهد:

1- عضوی چون z در $[x]$ هست که در $[y]$ نیست. یعنی، $z \sim x$ ولی $z \nsim y$.

2- عضوی چون z' در $[y]$ هست که در $[x]$ نیست. یعنی، $z \sim x$ ولی $z \nsim x$.

برای اثبات تهی بودن $[x] \cap [y]$، فرض خلف $t \in [x] \cap [y]$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که هیچ یک از دو حالت **1** و **2** بالا رخ نمی‌دهد. لذا به تناقض می‌رسیم.
فرض خلف ایجاب می کند که $t \sim x$ و $t \sim y$ (چرا؟) حال اگر حالت **1** بالا رخ دهد، از $t \sim x$ و $z \sim x$ نتیجه می‌گیریم که $t \sim z$(چطور؟) و سپس از $t \sim z$ و $t \sim y$ نتیجه می‌گیریم که $z \sim y$(چرا؟) که متناقض با $z \nsim y$ است و لذا حالت **1** رخ نمی‌دهد. دقیقاً به همین روش حالت **2** را نقض می‌کنیم، و اثبات کامل می‌شود.

ممکن است بتوان اثبات را خلاصه‌تر نوشت، ولی آیا هیچ قسمتی از آن‌را می‌توان حذف کرد؟!

این قضیه نشان می‌دهد که هر رابطه‌ی هم‌ارزی روی A افرازی از A به‌دست می‌دهد. آیا عکس آن نیز درست است؟ یعنی آیا هر افراز A رابطه‌ای هم‌ارزی روی A به‌دست می‌دهد؟ قضیه‌ی زیر را ببینید!

11.1.4 قضیه

اگر $\wp$ افرازی از A باشد، آنگاه رابطه‌ی $\approx$ با تعریف زیر رابطه‌ای هم‌ارزی روی A است.

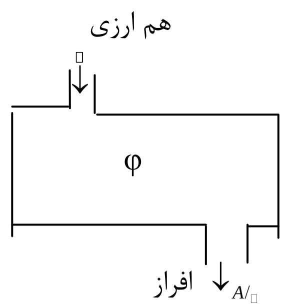
$$x \approx y \Leftrightarrow \exists C \in \wp, x, y \in C$$

اثبات

این قضیه دقیقاً همان بند **3** بحث در کلاس **6.1.4** است که اثباتی بدیهی داشت. مجدداً ثابت کنید که $\approx$ انعکاسی، تقارنی، و متعدی است.

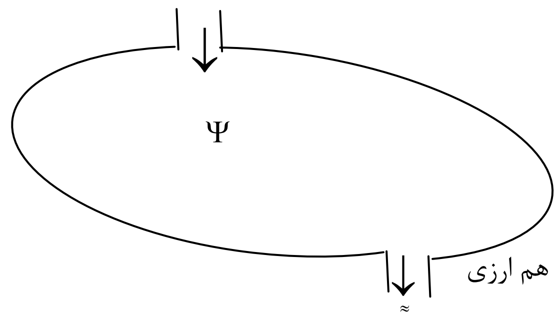
12.1.4 جمع‌بندی

در قضیه‌ی **10.1.4** دیدیم که دستگاهی وجود دارد که از هر رابطه‌ی هم‌ارزی یک افراز می‌سازد:

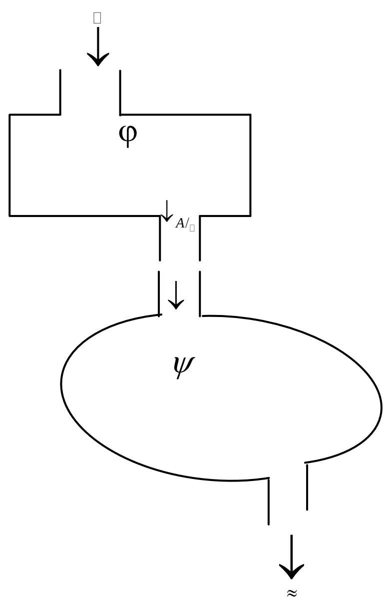


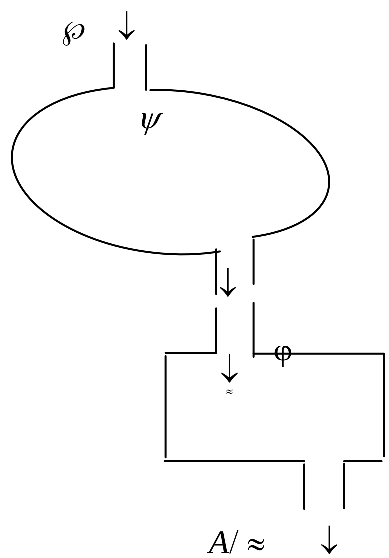
و قضیه‌ی **11.1.4** دستگاهی را مطرح می‌کند که از هر افراز رابطه‌ای هم‌ارزی می‌سازد:

افراز $\wp$



این دو دستگاه را به دو صورت زیر می‌توانیم به یکدیگر متصل کنیم:





دو سؤال زیر مطرح می‌شوند:

(الف) آیا $\approx$ همان □ است؟

(ب) آیا $A/\approx$ همان $\wp$ است؟

قضیه‌ی بسیار جالب زیر نشان می‌دهد که پاسخ به هر دو سؤال **مثبت** است !

13.1.4 قضیه

(الف) اگر $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی دلخواه روی A و $\approx$ رابطه‌ی هم‌ارزی حاصل از افراز $A/\sim$ باشد (قضیه‌ی **10.1.4**)، آنگاه $\sim=\approx$.

(ب) اگر $\wp$ افرازی دلخواه از A و $\approx$ رابطه‌ی هم‌ارزی حاصل از $\wp$ باشد (قضیه‌ی **11.1.4**)، آنگاه $A/_{\approx}=\wp$.

اثبات

(الف) بنابر تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی حاصل از افراز $A/\sim$،

$$x \approx y \Leftrightarrow \exists C \in A/\sim, x, y \in C$$

و با توجه به تعریف $A/\sim$،

$$C \in A/\sim \Leftrightarrow \exists a \in A, C = [a]_{\sim}$$

از طرف دیگر،

$$x, y \in [a] \Leftrightarrow x \sim y$$

از گزاره‌های اگر و تنها اگر بالا نتیجه می‌گیریم که

$$x \approx y \Leftrightarrow x \sim y$$

یعنی، $\sim=\approx$.

(ب) فرض کنیم $C \in \wp$. در نتیجه $C \neq \emptyset$. فرض کنیم $a \in C$. ادعا می‌کنیم که $C = [a]_{\approx}$. بنابر تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی $\approx$ حاصل از افراز $\wp$،

$$x \in [a] \Rightarrow x \approx a \Rightarrow \exists D \in \wp, x, a \in D$$

حال چون به ازای خانه‌های $C \neq D$ در $\wp$، $C \cap D = \emptyset$، پس $a \in C \cap D$ امکانپذیر نیست مگر این‌که $C = D$. در نتیجه،

$$x \in [a] \Rightarrow x \in C$$

برعکس، اگر $x \in C$ آن‌گاه از $x, a \in C$ داریم $x \in [a]$. بنابراین، $C = [a]_{\approx}$ و $\wp \subseteq A/\approx$. به علاوه، $A/\approx \subseteq \wp$ زیرا مشابه استدلال بالا اثبات می‌شود که هر رده $[a]_{\approx}$ در واقع خانه شامل a در افراز $\wp$ است.