درون یابی و تقریب چندجمله ای

محاسبات عددی پیشرفته

درون یابی با چندجمله ای ها

-قضیه تقریب Weierstrass: فرض کنید f در [a,b] تعریف شده و پیوسته باشد.
برای هر $\epsilon>0$، یک چند جمله ای P(x) وجود دارد که:

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \quad \text{for all } x \text{ in } [a, b]$$

درون یابی لاگرانژ

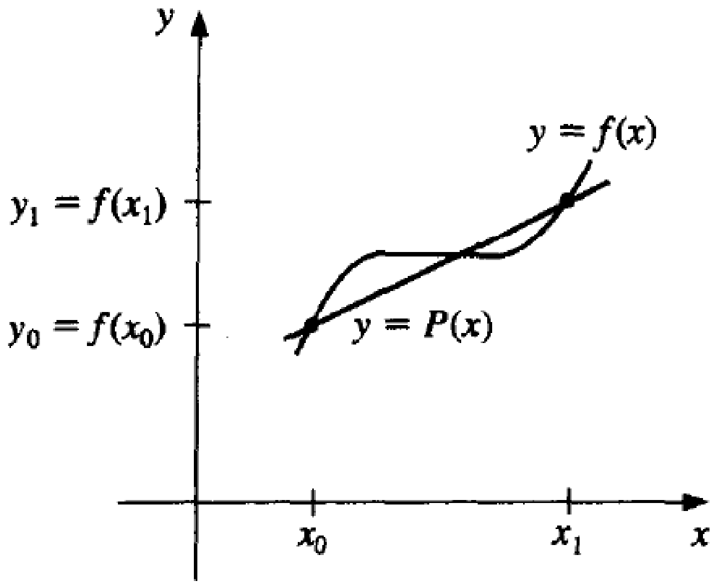
- چندجمله ای درجه اول که از نقاط (x_o,y_o) و (x_1,y_1) عبور می کند:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

$$L_0(x_0) = 1,\ L_0(x_1) = 0,\ L_1(x_0) = 0, \quad \text{and} \quad L_1(x_1) = 1$$

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

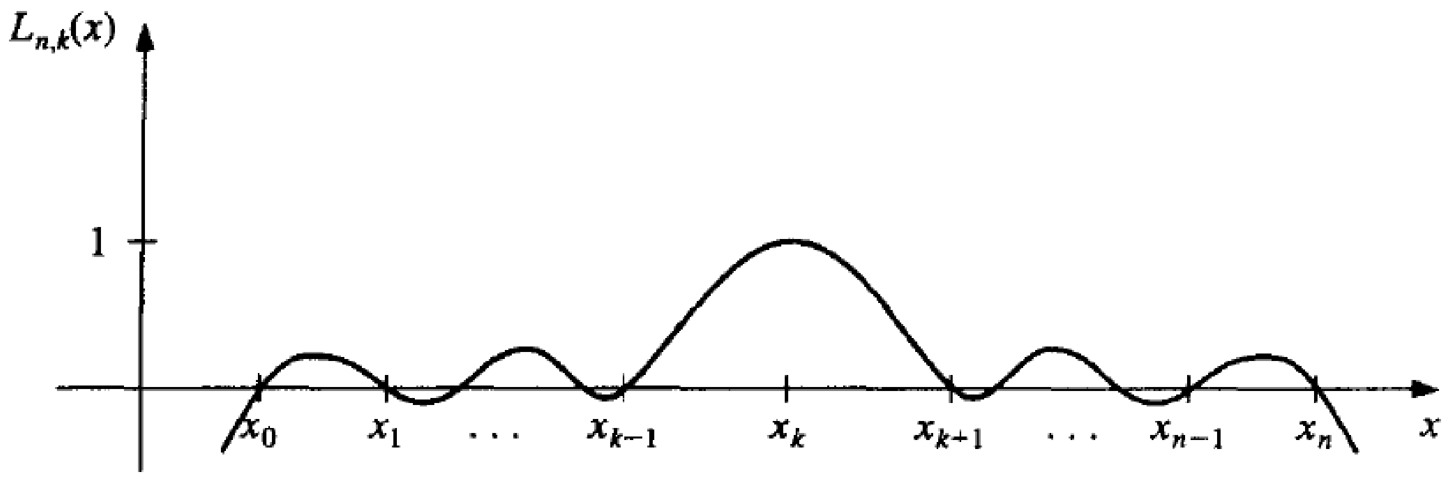


درون یابی لاگرانژ

-حال برای n+1 نقطه $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$

$$L_{n,k}(x_i) = 0 \text{ when } i \neq k \text{ and } L_{n,k}(x_k) = 1 \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$



درون یابی لاگرانژ

قضیه: اگر $x_0, x_1, \ldots, x_n$، n+1 نقطه متمایز باشند که مقدار تابع f در آن نقاط داده شده باشد، آنگاه یک چندجمله ای منحصر بفرد P(x) با درجه حداکثر n وجود دارد که:

$$f(x_k) = P(x_k), \quad \text{for each } k = 0, 1, \ldots, n$$

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x)$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}.$$

خطای تقریب لاگرانژ

قضیه: فرض کنید که $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نقاط متمایز در بازه [a,b] باشند و $f \in C^{n+1}[a,b]$ ، آنگاه برای هر x در [a,b] یک عدد ξ(x) در (a,b) وجود دارد که:

$$f(x) = P(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{\text{ترم خطا}}$$

درون یابی تکراری

تعریف: فرض کنید f **تابعی باشد که در** $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ **تعریف شده و** $m_1, m_2, \ldots, m_k$ k **عدد صحیح مجزا باشند که برای هر** i **داشته باشیم** $0 \le m_i \le n$ **چندجمله ای لاگرانژ که در** k **نقطه** $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}$ **با تابع** f(x) **مطابقت دارد به صورت** $P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}(x)$ **نمایش داده می شود.**

درون یابی تکراری

قضیه: فرض کنید f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_k$ تعریف شده باشد و x_i و x_j دو عدد متمایز در این سری باشند آنگاه چندجمله ای لاگرانژ مرتبه k که تابع f را در k+1 نقطه $x_0, x_1, \ldots, x_k$ درون یابی می کند:

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

روش نویل (Neville) برای درون یابی تکراری

$$Q_{i,j} = P_{i-j,i-j+1,\dots,i-1,i} \qquad 0 \le j \le i$$

$Q_{i,j}(x)$: چند جمله ای درجه j که از $j+1$ نقطه $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i$ استفاده می کند.

x_0	$P_0 = Q_{0,0}$				
x_1	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
x_2	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
x_3	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
x_4	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

روش تفاضلات منقسم

-روش نویل برای یک نقطه بود ولی با این روش می توان چند جمله ایها را بطور متوالی ایجاد کرد.

-اگر $p_n(x)$ چندجمله ای درجه n لاگرانژ باشد، از تفاضلات منقسم f نسبت به $x_0, x_1, \ldots, x_n$ می توان $p_n(x)$ را به شکل زیر نشان داد:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1);$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

روش تفاضلات منقسم

تفاضل منقسم مرتبه صفر تابع f نسبت به x_i:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

تفاضل منقسم مرتبه اول تابع f نسبت به x_i و x_{i+1}:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

تفاضل منقسم مرتبه دوم:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{x+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

-اگر تفاضل منقسم مرتبه k-1 به صورت زیر معلوم باشد:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}] \quad \text{and} \quad f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

آنگاه تفاضل مرتبه k:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

درون یابی تفاضل منقسم نیوتن

$$a_0 = f[x_0]$$

$$a_1 = f[x_0, x_1]$$

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$$

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

درون یابی تفاضل منقسم نیوتن

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \dfrac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \dfrac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \dfrac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

درون یابی تفاضل منقسم نیوتن

قضیه: فرض کنید $f \in C^n[a,b]$ و $x_0, x_1, \ldots, x_n$ اعداد متمایزی در [a,b] باشند.
آنگاه یک عدد ξ در (a,b) وجود دارد که:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

تفاضل منقسم پیشرو نیوتن

اگر $x_0, x_1, \ldots, x_n$ به فواصل مساوی از یکدیگر باشند:

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$x = x_0 + sh$$

$$\longrightarrow \quad x - x_i = (s - i)h$$

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_0 + sh) &= f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \cdots + s(s-1)(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\ &= \sum_{k=0}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \ldots, x_k]. \end{aligned}$$

ضریب بایونومیال:

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

تفاضل منقسم پیشرو نیوتن

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_i, \ldots, x_k]$$

– اگر از علامت تفاضل پیشرو استفاده شود:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h} \Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h} \left[\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h} \right] = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)$$

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \longrightarrow$$

$\boxed{\text{فرمول تفاضل پیشرو نیوتن}}$

تفاضل منقسم پسرو نیوتن

-اگر نقاط به صورت $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$ مرتب شوند:

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + f[x_n, \ldots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1).$$

اگر فاصله نقاط مساوی باشد:

$$x = x_n + sh$$

$$x = x_i + (s + n - i)h$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_n + sh) \\ &= f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \cdots \\ &\quad + s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n f[x_n, \ldots, x_0]. \end{aligned}$$

تفاضل پسرو نیوتن

تعریف: اگر دنباله $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ داده شده باشد، تفاضل پسرو ∇p_n به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1}, \quad \text{for } n \geq 1$$

$$\nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n), \quad \text{for } k \geq 2$$

بنابراین:

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h}\nabla f(x_n), \quad f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n)$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k}\nabla^k f(x_n)$$

$$P_n(x) = f[x_n] + s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n)$$

تفاضل پسرو نیوتن

تعمیم ضریب بایونومیال:

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)\cdots(-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1)\cdots(s+k-1)}{k!}$$

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1\binom{-s}{1}\nabla f(x_n) + (-1)^2\binom{-s}{2}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + (-1)^n\binom{-s}{n}\nabla^n f(x_n)$$

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{-s}{k}\nabla^k f(x_n)$$

- در حالت کلی اگر نقطه درون یابی به نقاط ابتدایی نزدیک باشد از روش پیشرو و در غیر این صورت از روش پسرو استفاده می شود.

درون یابی هرمیت

-در این روش مقدار و مشتق چندجمله ای با مقدار و مشتق تابع برابر است.

تعریف: فرض کنید $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ، $n+1$ نقطه متمایز در $[a,b]$ باشند و m_i یک عدد صحیح غیرمنفی متناظر با x_i برای $i = 0, 1, \ldots, n$ باشد و $f \in C^m[a, b]$ که $m = \max_{0\le i\le n} m_i$. در اینصورت چند جمله ای مماسی P که f را تقریب می زند:

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k}, \quad \text{for each } i = 0, 1, \ldots, n \quad \text{and} \quad k = 0, 1, \ldots, m_i$$

حالتهای خاص:

$n=0, m_0 \quad \longrightarrow$ چندجمله ای مرتبه m_0 تیلور برای f در نقطه x_0

$m_i=0 \quad \text{for each } i \quad \longrightarrow$ چندجمله ای لاگرانژ مرتبه n

$m_i=1 \quad \text{for each } i \quad \longrightarrow$ چندجمله ای هرمیت

درون یابی هرمیت

قضیه: اگر $f \in C^1[a,b]$ و $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ متمایز باشند، در این صورت چندجمله ای یکتایی که با f و 'f در $x_0, \ldots, x_n$ مطابقت دارد چندجمله ای هرمیت است که حداکثر درجه آن 2n+1 است و داریم:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\hat{H}_{n,j}(x)$$

$$H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)]L^2_{n,j}(x) \qquad \hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x)$$

که $L_{n,j}(x)$ ضریب زام چندجمله ای لاگرانژ مرتبه n می باشد.

علاوه بر این اگر $f \in C^{2n+2}[a,b]$، آنگاه:

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x - x_0)^2 \ldots (x - x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$$

درون یابی هرمیت

-عیب روش هرمیت طاقت فرسایی محاسبه چندجمله ای لاگرانژ و مشتقات آن است.

- راه حل: استفاده از درون یابی تفاضل منقسم نیوتن برای چندجمله ای لاگرانژ جهت تولید تقریب هرمیت

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

دنباله جدید $z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}$ به صورت زیر تعریف و جدول تفاضلی ایجادمی شود:

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i, \quad \text{for each } i = 0, 1, \ldots, n$$

چون $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ نمی توان براساس فرمول تفاضل منقسم $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ تعریف کرد لذا:

$$f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i)$$

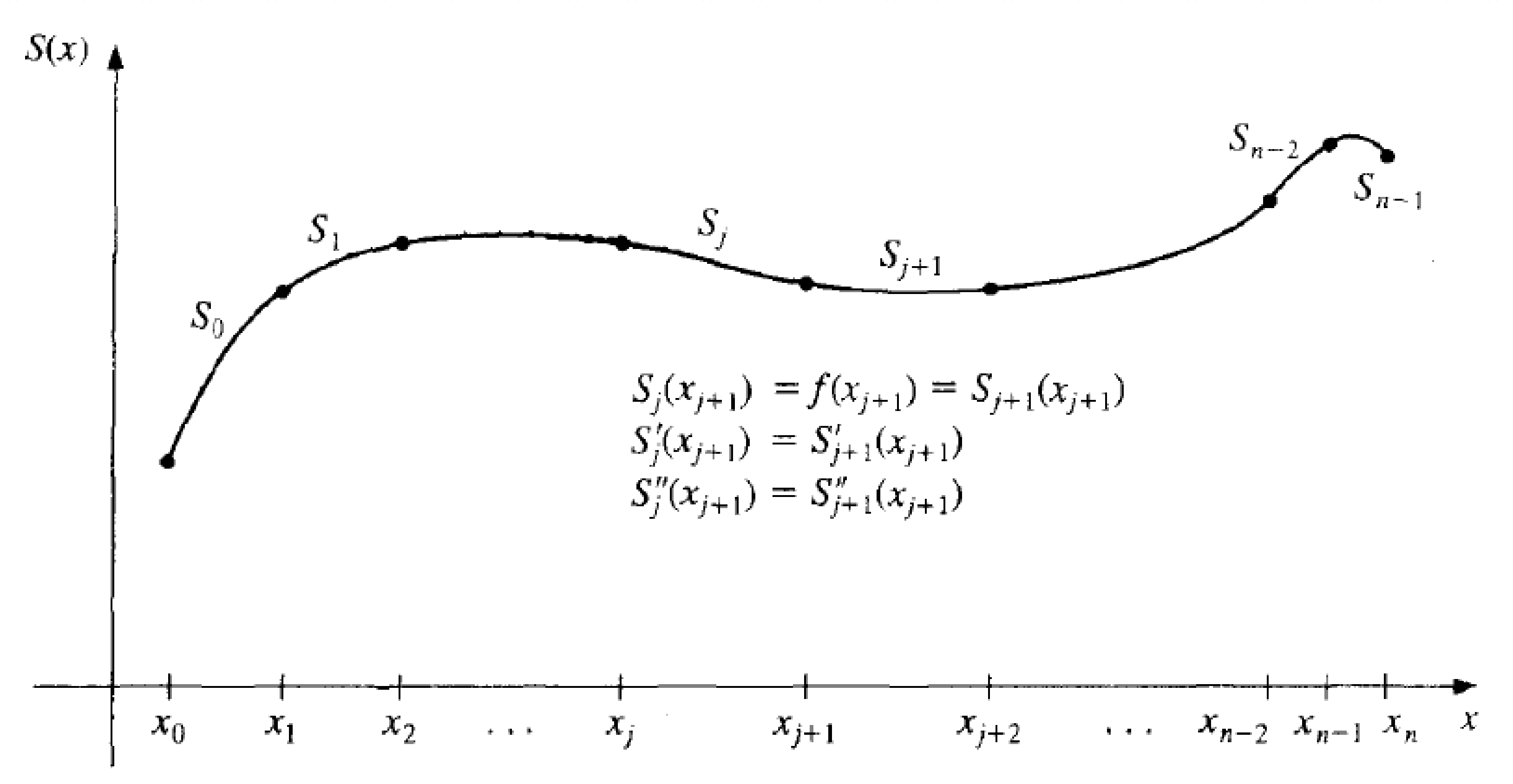
$$f'(x_0), f'(x_1), \ldots, f'(x_n) \longrightarrow f[z_0, z_1], f[z_2, z_3], \ldots, f[z_{2n}, z_{2n+1}]$$

درون یابی هرمیت

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)(x - z_1)\cdots(x - z_{k-1})$$

z	$f(z)$	First divided differences	Second divided differences
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

درون یابی نوارهای مکعبی



درون یابی نوارهای مکعبی

تعریف: اگر تابع f در بازه [a,b] تعریف شده باشد و دنباله نقاط به صورت $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ داده شده باشد، درون یابی نوار مکعبی S برای تابع f، تابعی است که در شرایط زیر صدق می کند:

a. $S(x)$ is a cubic polynomial, denoted $S_j(x)$, on the subinterval $[x_j, x_{j+1}]$ for each $j = 0, 1, \ldots, n-1$;

b. $S(x_j) = f(x_j)$ for each $j = 0, 1, \ldots, n$;

c. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ for each $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

d. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ for each $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

e. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ for each $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

f. One of the following sets of boundary conditions is satisfied:

(i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ **(free or natural boundary)**;

(ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ and $S'(x_n) = f'(x_n)$ **(clamped boundary)**.

درون یابی نوارهای مکعبی

برای تعیین تقریب درون یابی، تعریف فوق به چندجمله ای مکعبی اعمال می شود:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j) \qquad h_j = x_{j+1} - x_j$$

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \longrightarrow c_j \ \surd$$

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \longrightarrow b_j \ \surd$$

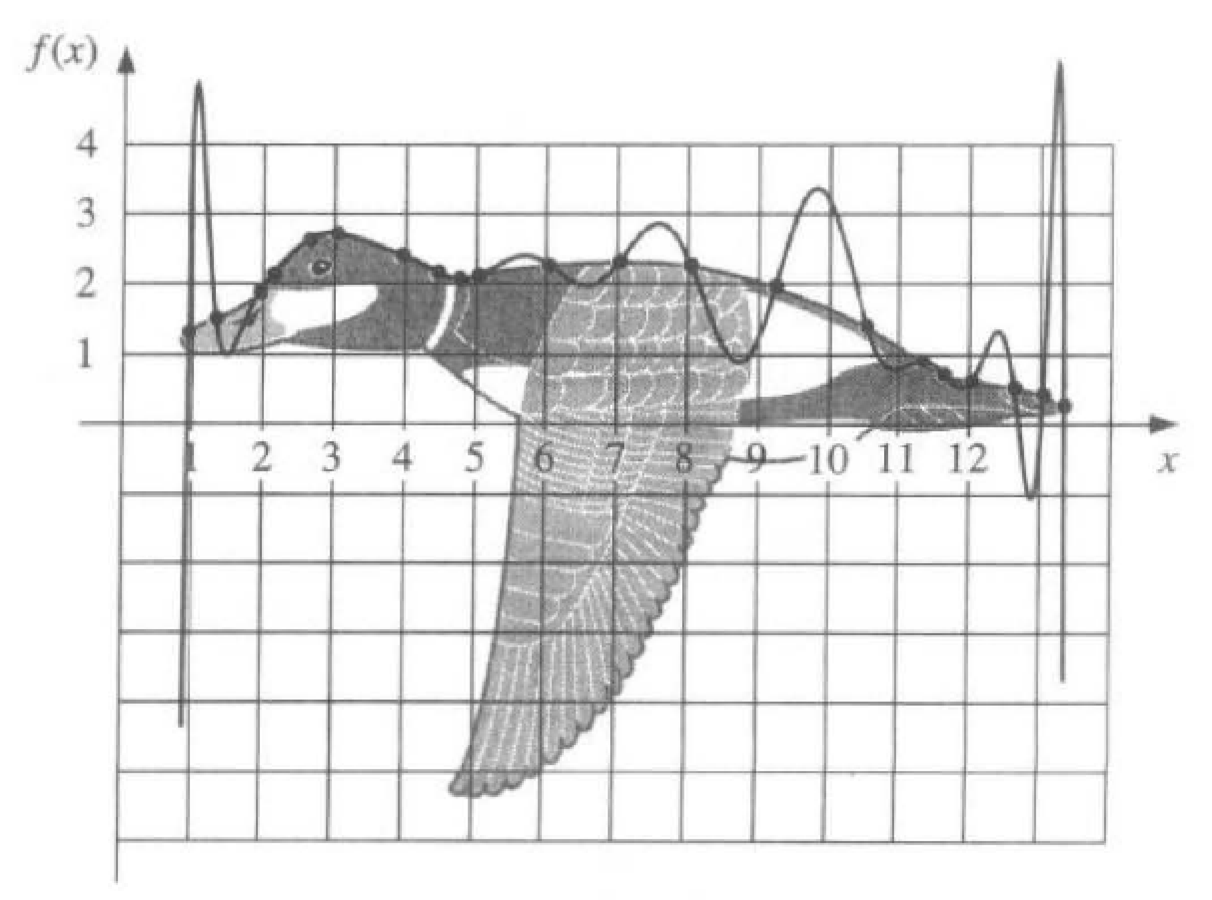
$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j \longrightarrow d_j \ \surd$$

درون یابی نوارهای مکعبی

قضیه:اگر f در $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ تعریف شده باشد، آنگاه f دارای یک درونیاب نواری طبیعی یکتا S در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ است که این درون یاب نواری شرط مرزی $S''(a) = 0$ و $S''(b) = 0$ را ارضا می کند.

قضیه:اگر f در $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ تعریف شده باشد و در a و b مشتق پذیر باشد، آنگاه f دارای یک درونیاب نواری تعیین شده یکتا S در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ است که این درون یاب نواری شرط مرزی $S'(a) = f'(a)$ و $S'(b) = f'(b)$ را ارضا می کند.

مثال برای روش لاگرانژ



مثال برای روش نوارمکعبی