

« انتقال حرارت جابجایی »

مرجع اصلی : Convection heat transfer by Adrian Bejan
(برای بهر علت داشتن آمانیزاسیون که در کتاب های دیگر وجود ندارد)

تعدادین 10٪

پروژه 15٪ سے گزارش + ارائه (جویشن، تقریر، انتقال حرارت مانور و...))

پایان ترم 75٪

سر فصل ها:

- 1- مبانی اولیه و اصول سے معادلات پیوستگی، بقای مومنتوم و انرژی و قانون دوم ترمودینامیک
 - 2- جریان لایه مرزی آرام سے بررسی لایه مرزی در جریان های خارجی با روش مشابه و انتگرالی
 - 3- جریان داخلی سے بررسی لایه مرزی در جریان های داخلی Duct Flow
 - 4- انتقال حرارت جابجایی آزاد سے انتقال حرارت جابجایی طبیعی بدون عوامل خارجی
 - انتقال حرارت آزاد بر اثر اختلاف رانسیته و جاذبه به وجود می آید. اثر جاذبه وجود ندارد
 - 6- حالت گذار سے بررسی انتقال حرارت در جریان بین آرام و آشفتگی
 - 7- انتقال حرارت در جریان آشفتگی سے بررسی انتقال حرارت در جریان آشفتگی
 - 8- جریان آشفتگی داخلی
 - 9- جریان آزاد سے جریان به صورت جفت
 - 10- انتقال حرارت با تغییر فاز سے بررسی جویشن و تقطیر
- جویشن در دو حالت 1- جریان و 2- جویشن داخل کتری وجود دارد

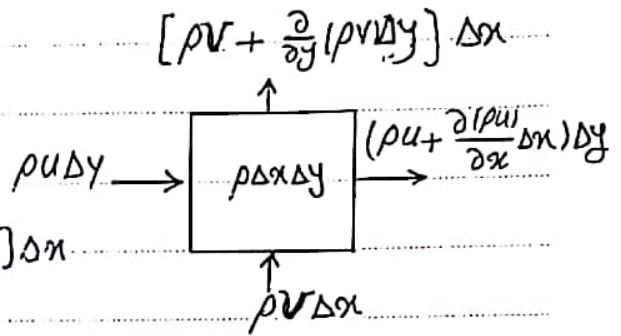
قانون بقای جرم

$$\frac{\partial M_{c.v.}}{\partial t} = \sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out}$$

$$\dot{m}_{in} = \rho u \Delta y + \rho v \Delta x$$

$$\dot{m}_{out} = \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y + \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x$$

$$M_{c.v.} = \rho \Delta x \Delta y$$



با جاگذاری خواهیم داشت:

$$\frac{\partial (\rho \Delta x \Delta y)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

$$\div \Delta x \Delta y \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

در حالت سه بعدی نیز می توان نوشت

با ساده کردن می توان نوشت:

$$\underbrace{\rho}_{(\rho \cdot \nabla)} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\phi \sin \phi) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

بقای جرم برای کره نازک در استوانه کروی

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

بقای جرم برای کره نازک در استوانه

تبدیل اشیاء معادله می توان در مختصات کروی را استوانه ای

قانون بقای جرم

فرم خنثی بقای $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

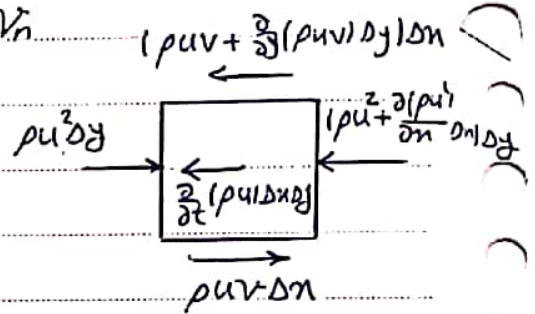
مسئله تراکم ناپذیر $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

قانون بقای مومنتوم

$$\frac{\partial}{\partial t} (M V_n)_{c.v} = \sum F_n + \sum_{inlet} \dot{m} v_n - \sum_{outlet} \dot{m} v_n$$

در جهت n

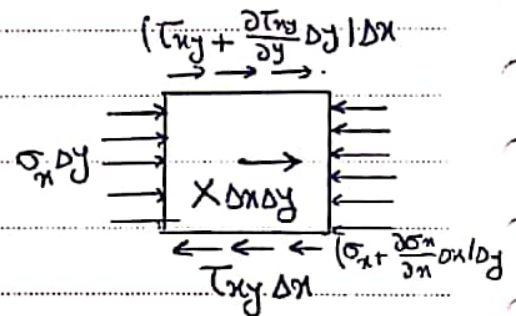
با جانمایی در رابطه داریم:



$$-\frac{\partial}{\partial t} (\rho u \Delta x \Delta y) + \rho u^2 \Delta y - \left[\rho u^2 + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) \Delta x \right] \Delta y$$

$$+ \rho u v \Delta x - \left[\rho u v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) \Delta y \right] \Delta x$$

$$+ \sigma_x \Delta y - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y - \tau_{xy} \Delta x$$



$$+ \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x + X \Delta x \Delta y = 0$$

X میدان نیروی حجمی

نیروهای حجمی مانند گرانش و الکترومغناطیس هستند. جریان در موانع میدان مغناطیس

انتقال حرارت به سبب هدایت و رسانندگی و انتقال فشار آن به سبب ویسکوزیته

حال با تقسیم بر $\Delta x \Delta y$ و باراشن $\Delta y \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ میتوان نوشت:

$$\rho \frac{Du}{Dt} + u \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X$$

با ساده سازی داریم :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g_x$$
 نیروی حجمی در جهت x
 معادله ناور

طبق روابط استوکس می توان نوشت :

با فرض نیوتنی بودن مایع

$$\sigma_x = p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

در مایع غیر نیوتنی

$$\tau_{xy} = 2K \cdot \epsilon_{xy}^n$$

- $n < 1$ pseudoplastic
- $n = 1$ نیوتنی
- $n > 1$ مایع قابل انقباض

حال با جایگزینی ضرایب استوکس در معادله ناور خواهیم داشت :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x$$

در حالت غنی قابل تراکم پذیر بودن جریان، ثابت مذکور μ داریم :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g_x$$

در حالت سه بعدی در جهت x نیز داریم :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

این روابط را به صورت برداری نیز می توان نوشت:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad | \quad \text{اسیال تراکم ناپذیر، نوین}$$

تبدیل (2) اثبات رابطه ی بقای مومنتوم در مختصات استوانه ای

معادلات بقای انرژی

① rate of energy accumulation in the C.V.

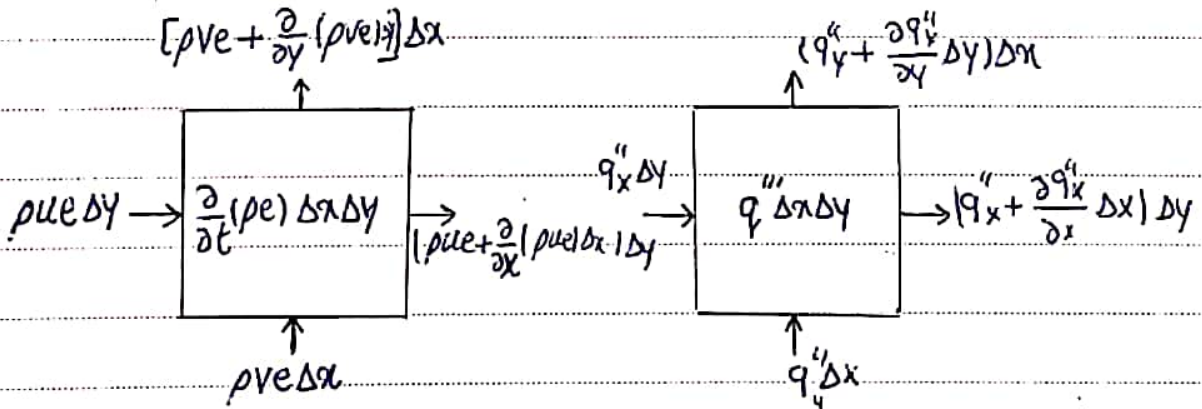
طبق قانون اول ترمودینامیک در دایره:

$$\frac{\partial E}{\partial t} \text{ cv.} = \sum m_e \text{ in} - \sum m_e \text{ out} + \dot{E}_{\text{gen}} + \dot{q} - \dot{W}_{\text{net work}} \quad (5)$$

② net transfer of energy by fluid flow

rate of internal energy generation

③ net heat transfer by conduction



$$\frac{\partial (E_{\text{cv.}})}{\partial t} = \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

نرخ تغییرات انرژی حجم کنترل

$$\sum m_e \text{ net} = \rho u e \Delta y - \left(\rho u e + \frac{\partial (\rho u e)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y + \rho v e \Delta x - \left(\rho v e + \frac{\partial (\rho v e)}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$

نرخ خالص انرژی جری از طریق

$$\dot{q}_{\text{cond}} = q''_x \Delta y - \left(q''_x + \frac{\partial q''_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y + q''_y \Delta x - \left(q''_y + \frac{\partial q''_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$

نرخ خالص گرمایی جری

نرخ انرژی تولیدی $\dot{E}_{gen} = q''' \Delta x \Delta y$

نرخ کار تولیدی $\dot{W}_{cv,1} = (\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} - \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x}) \Delta x \Delta y$
تغیض های مکانیکی

نرخ کار تولیدی $\dot{W}_{cv,2} = (u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - v \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}) \Delta x \Delta y$
جرم آن

با جانمایی و تقسیم بر $\Delta x \Delta y$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho e u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho e v) = - \frac{\partial}{\partial x} q''_x - \frac{\partial}{\partial y} q''_y + q''' + \dots$$

$$\sigma_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right)$$

با جانمایی تنش ها به صورت $\sigma_x = -p + \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, $\sigma_y = -p + \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \right)$, $\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
و حذف جملات باقی بجز داریم:

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) = q''' - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} q''_x - \frac{\partial}{\partial y} q''_y}_{\nabla \cdot q''} - \underbrace{p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\nabla \cdot V} + \underbrace{\mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]}_{\Phi}$$

در حالت کلی در سوال معادله های انرژی را به صورت زیر نوشت:

$$\rho \frac{De}{Dt} = q''' - \nabla \cdot q'' - p \nabla \cdot V + \mu \Phi \quad \text{تابع استرینگ}$$

حمله ی انرژی را در سوال به انتالیی ربط داد

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

برای زمانی هلیت نیز طبق قانون فوری داریم :

$$q'' = -k \nabla T$$

$$\rho \frac{dh}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi - \frac{P}{\rho} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$$

در حالت کلی برای انتالی و اندرزی روابط زیر برقرار است :

$$du = Tds - Pdv, \quad dh = Tds + vdp, \quad ds = \frac{1}{T} du + \frac{P}{T} dv$$

برای حالت خاص مانند آب داریم :

$$du = C_v dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - P \right] dv$$

$$dh = C_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp$$

$$ds = \left(\frac{C_v}{T} \right) dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dv = \left(\frac{C_p}{T} \right) dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$$

برای گاز ایده آل داریم :

$$du = C_v dT, \quad dh = C_p dT, \quad ds = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}$$

برای سیال تراکم ناپذیر نیز داریم :

$$du = C dT, \quad dh = C dT + v dp, \quad ds = C \frac{dT}{T}$$

با تعریف ضریب تراکم پذیری داریم :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

$$dh = C_p dT + \left[\frac{1}{\rho} - T \left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial T} \right)_p \right] dp = C_p dT + \left[\frac{1}{\rho} - T \left(-\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right) \right] dp$$

$$\Rightarrow dh = C_p dT + \left[\frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho} \beta \right] dp$$

با جایگزینی در معادله خواهیم داشت :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} + (1 - T\beta) \frac{DP}{Dt} = q''' + \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi$$

و با ساده سازی معادله ای بجای انرژی بر حسب دما بدست می آید.

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi$$

در سیال گاز ایده آل با $\beta = \frac{1}{T}$ و اگر تراکم ثابت باشد $\beta = 0$ است.

Ideal gas :
$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi$$

Incompressible liquid :
$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \mu \Phi$$

در سیال غیر وِسکوز که خواص آن تابع دما نباشد معادله به صورت زیر در می آید.

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T$$

در اینجا Φ تابع استریمک وِسکوز است و در حالت سردی به صورت زیر است.

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2$$

در اینجا وجود انتقال حرارت و تابع استریمک وِسکوز باعث تولید انرژی درونی می شود.

$$S_{gen}''' = \frac{k}{T^2} (\nabla T)^2 + \frac{\mu}{T} \Phi$$

از آنجا که تابع استریمک همواره مثبت است بنابراین همواره تولید انرژی درونی خواهد داشت.

خواهیم داشت.

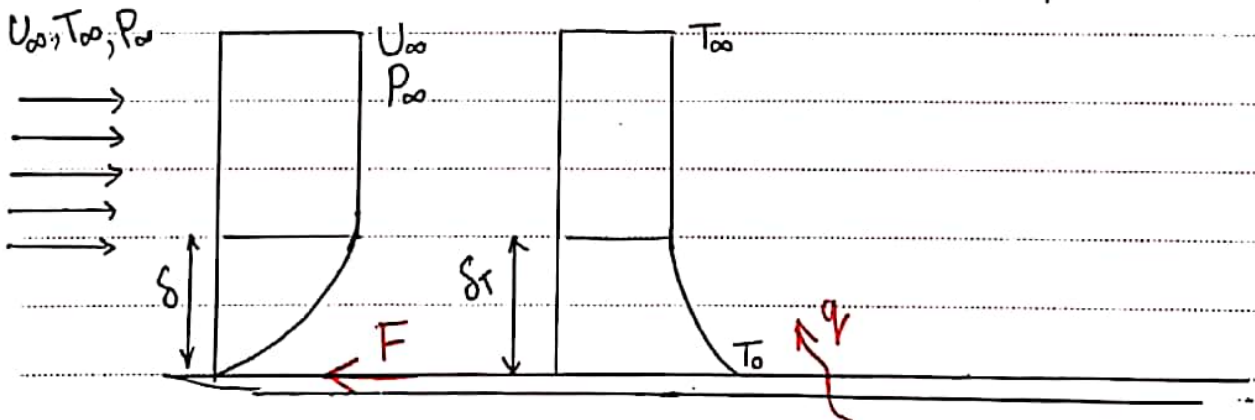
← لایه‌ی مذری جریان آرام داخلی

اولین ایده‌ی لایه‌ی مذری توسط آقای برانسل مطرح شد وی 30-40 سال طول کشید تا مرسوم شود.

هنر آقای برانسل توصیه‌ی کندیم این تئوری در هر مسئله‌ای مناسب نیست و چند نکته دارد.

- 1- این تئوری کامل نیست.
- 2- جایی که لایه‌ی همیشه ماقه است.
- 3- از نمودن تئوری بهتر است.
- 4- همیشه باید در قبال بقیه تئوری‌ها ارائه کرد.
- 5- اگر آن زمان تئوری مورد استفاده نثر دلیل ندارد بعداً اثبات شود.
- 6- هر تئوری باید سعی شود اثبات شود.

فرض کنیم یک جریان یکنواخت با دما و سرعت و فشار ثابت و یکنواخت بودن پیچیده حرکت کند.



$$F = \int_0^L \tau w dx$$

عمق

$$q = \int_0^L q'' w dx$$

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}, \quad q'' = h(T_0 - T_\infty) = -K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$$

$$\Rightarrow h = \frac{-K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}}{T_0 - T_\infty}$$

← در اینجا K ضریب انتقال حرارت سیال است. و این توزیع دما مربوط به سیال است.

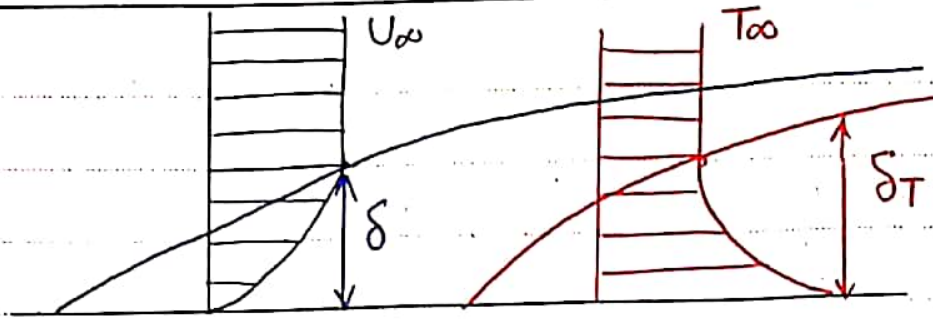
برای یافتن توزیع دما و توزیع سرعت معادلات لایری مندی را باید حل کنیم که به صورت زیر هست:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \mu \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{array} \right.$$

No-slip $u = 0$

Impermeability $v = 0$

wall T



$x \sim L$ (ترم اینرسی) $y \sim \delta$ (ترم فشاری) $u \sim U_\infty$ (ترم های ویسکوز) مرتبه تقریبی عبارتها :
 order of magnitude

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$\rightarrow U_\infty \frac{U_\infty}{L} \quad v \frac{U_\infty}{\delta} \quad \frac{\rho}{\rho L} \quad \nu \frac{U_\infty}{L^2} \quad \nu \frac{U_\infty}{\delta^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$\frac{U_\infty}{L} \quad \frac{v}{\delta} \rightarrow v \sim \frac{\delta}{L} U_\infty$

پس برای ترم های اینرسی داریم :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U_\infty^2}{L}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} \sim v \frac{U_\infty}{\delta} \sim \frac{\delta}{L} \times \frac{U_\infty^2}{\delta} \sim \frac{U_\infty^2}{L}$$

همه ترم از یک مرتبه هستند

برای ترم های ویسکوز داریم :

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \frac{U_\infty}{\delta^2} \quad \frac{\delta^2}{L^2} \ll 1$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \nu \frac{U_\infty}{L^2}$$

$\rightarrow \nu \frac{U_\infty}{L^2} \ll \nu \frac{U_\infty}{\delta^2}$
 صفت تقارن دارد

پسین توکم و سلسلوز $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را حذف کنیم و خواهیم داشت:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

برای توکم فشار هم بر توان اثبات کرد فشار فقط تابع x است:

$$dp = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$$

موسنقم راستی x : $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \sim \nu \frac{U_\infty}{\delta^2}$ اصطکاک \sim فشار: δ ضخیم

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2}$$

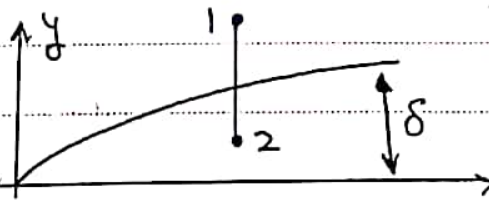
$$\frac{\partial P}{\partial y} \sim \mu \frac{v}{\delta^2} = \mu \frac{U_\infty}{\delta L}$$

موسنقم راستی y :

از طرفین توانیم چون $\delta^2 \ll \delta L$ پس خواهیم داشت:

$$\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \gg \mu \frac{U_\infty}{\delta L} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \gg \frac{\partial P}{\partial y}$$

پس بر توان لغت در راستای y تغییر فشار نداریم



$$P_2 = P_1 = P_\infty$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP_\infty}{dx}$$

با همین استدلال می‌توان استنتاج کرد تمام ترم‌های موجود در معادلات زیر در ریمینده مرتبه کوچکتر

هستند پس از آنها صرف نظر کرده و معادلات زیر را می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\delta^2}{L^2} \ll 1 \Rightarrow \frac{T_{\infty}}{L^2} \ll \frac{T_{\infty}}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

پس در کل سه معادله سه متغیره داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \frac{\partial u}{\partial x} + Re \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

از طرفی τ در برآیند اینگونه نوشت:

$$\tau \sim \mu \frac{U_{\infty}}{\delta}$$

و از برابر قرار دادن عدد اینرسی و اعداد چسبندگی داریم (برای چسبندگی کمتر نیز $\frac{dP_{\infty}}{dx} = 0$ است.)

$$\text{inertia} \sim \text{friction} \Rightarrow \frac{U_\infty^2}{L} \cdot \nu \frac{U_\infty}{\delta} \sim \nu \frac{U_\infty}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow \delta \sim \left(\frac{\nu L}{U_\infty} \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\delta}{L} \sim Re_L^{-1/2}$$

⇐ این حل برای زمانی درست است که $\frac{\delta}{L} \ll 1$ باشد یعنی $\frac{1}{\sqrt{Re_L}} \ll 1$

برای τ نیز داریم :

$$\tau \sim \mu \frac{U_\infty}{L} Re_L^{1/2} \sim \rho U_\infty^2 Re_L^{1/2}$$

$$\Rightarrow C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \Rightarrow C_f \sim Re_L^{-1/2} \quad (\text{ضریب اصطکاک پوسته})$$

⇐ برای یافتن ضریب انتقال لایه‌ای حرارتی نیز داریم :

$$h \sim \frac{k \cdot \frac{\Delta T}{\delta_T}}{\Delta T} \sim \frac{k}{\delta_T} \Rightarrow \text{بدین ترتیب } \delta_T \text{ را می‌توانیم}$$

از معادله انرژی نیز داریم :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$u \frac{\Delta T}{L} \quad v \frac{\Delta T}{\delta_T} \quad \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

حالت اول : لایه‌ی حرارتی ضخیم‌تر از لایه‌ی مندی سرعت باشد. $(\delta_T \gg \delta)$

در سطح لایه‌ی مندی و در لایه‌ی مندی حرارتی داریم $u \sim U_\infty$

$$\text{از معادله انرژی داریم : } \nu \sim U_\infty \frac{\delta}{L} \Rightarrow \nu \frac{\Delta T}{\delta_T} \sim U_\infty \frac{\delta}{L} \frac{\Delta T}{\delta_T} \sim U_\infty \frac{\Delta T}{L} \frac{\delta}{\delta_T}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\partial T}{\partial y}}}{u \frac{\partial T}{\partial x}} = \frac{U_{\infty} \frac{\Delta T}{L} \frac{\delta}{\delta_T}}{U_{\infty} \frac{\Delta T}{L}} \sim \frac{\delta}{\delta_T} \ll 1 \Rightarrow \text{« ترم لول جاب جایی »}$$

پس از $\sqrt{\frac{\partial T}{\partial y}}$ صرف نظر شود. ترمه هدایت ترمه جاب جایی

$$U_{\infty} \frac{\Delta T}{L} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \Rightarrow \frac{\delta_T^2}{L^2} \sim \frac{\alpha}{U_{\infty} L} \sim \frac{1}{Pe}$$

$$Pe = \frac{U_{\infty} L}{\alpha} = \frac{U_{\infty} L}{\nu} \frac{\nu}{\alpha} = Re Pr$$

Pe عدد پکله است که حاصل ضرب عدد پرنستل و رینولدز است.

$$\frac{\delta_T}{\delta} \sim \frac{Pr^{-1/2} Re^{-1/2}}{Re^{-1/2}} \sim Pr^{-1/2} \gg 1$$

پس می توان نوشت:

در نتیجه این شرط زمانی درست است که $Pr \ll 1$ باشد برای مدل در فنزات مناب

این شرط دیده می شود.

$$h \sim \frac{k}{\delta_T} \sim \frac{k}{L} Pr^{1/2} Re^{1/2}$$

عدد ناسلت هم اینگونه خواهد بود:

$$Nu = \frac{hL}{k} \sim Pr^{1/2} Re^{1/2}$$

حالت دوم: لایه مندی سرعت ضخیم تر از لایه مندی حرارتی $(\delta \gg \delta_T)$

در این صورت رتبه مرتبه سرعت با U_{∞} یکی نخواهد بود. و از تناسب داریم:

$$\frac{u}{U_{\infty}} \sim \frac{\delta_T}{\delta} \Rightarrow u \sim \frac{\delta_T}{\delta} U_{\infty}$$

$$u \frac{\Delta T}{L} \sim v \frac{\Delta T}{\delta_T} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

از پیوستگی $\frac{u}{L} \sim \frac{\delta_T}{\delta} \cdot \frac{u_\infty}{L} \sim \frac{v}{\delta_T} \Rightarrow v \sim \frac{\delta_T^2}{\delta} \cdot \frac{u_\infty}{L}$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} u \frac{\Delta T}{L} &\sim \frac{\delta_T}{\delta} u_\infty \frac{\Delta T}{L} \\ v \frac{\Delta T}{\delta_T} &\sim \frac{\delta_T^2}{\delta} \frac{u_\infty}{L} \frac{\Delta T}{\delta_T} \end{aligned} \right\} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

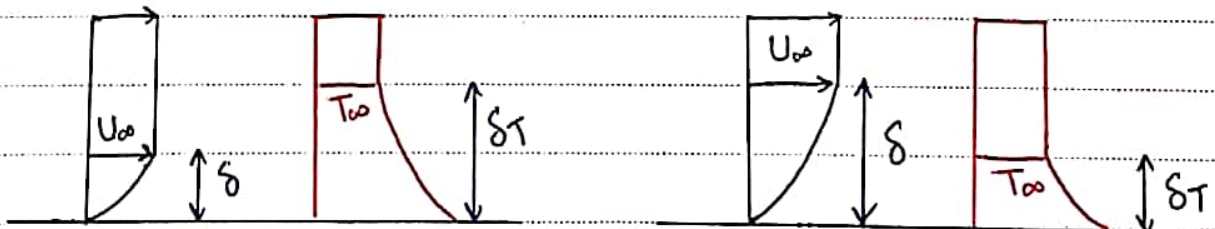
از مقایسه‌ی مرتبه‌ی ترم‌های جانبی و هدایت خواهیم داشت:

$$\frac{\delta_T}{\delta} u_\infty \frac{\Delta T}{L} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \Rightarrow \delta_T^3 \sim \frac{\alpha L \delta}{u_\infty} \sim \frac{\alpha L}{u_\infty} \left(\frac{v L}{u_\infty} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_T^3}{L^3} \sim \frac{\alpha L}{L^3 u_\infty} \frac{v^{1/2} L^{1/2}}{u_\infty^{1/2}} \sim \frac{\alpha}{v} \frac{v^{3/2}}{L^2 u_\infty^2} \frac{u_\infty^{1/2}}{L^{1/2}} \sim \alpha \left(\frac{v}{u_\infty L} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_T^3}{L^3} \sim \left(\frac{\alpha}{v} \right) \left(\frac{v}{u_\infty L} \right)^{3/2} \rightarrow \frac{\delta_T^3}{L^3} \sim \frac{1}{Pr} \left(\frac{1}{Re_L} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_T}{L} \sim Pr^{-1/3} Re^{-1/2}$$



$\delta \ll \delta_T$

$\delta \gg \delta_T$

$$\frac{\delta_T}{L} \sim Pr^{-1/3} Re^{-1/2} = Re^{-1/2}$$

حالت اول

$$\frac{\delta_T}{L} \sim Pr^{-1/3} Re^{-1/2}$$

حالت دوم

برای یافتن h ننیز داریم:

$$h \sim \frac{k \frac{\Delta T}{\Delta y}}{\Delta T} \sim \frac{k / \delta_T \Delta T}{\Delta T}$$

$$\Rightarrow h \sim k \times L^{-1} \cdot Pr^{1/3} Re^{1/2}$$

برای عدد ناسلت ننیز داریم:

$$Nu = \frac{hL}{k} \sim Pr^{1/3} Re^{1/2}$$

برای این حالت ننیز شدت زیر دمج دارد:

$$\frac{\delta_T}{\delta} \ll 1 \Rightarrow \frac{Pr^{-1/3} Re^{-1/2}}{Re^{-1/2}} \ll 1 \Rightarrow Pr^{-1/3} \ll 1 \Rightarrow Pr^{1/3} \gg 1$$

$\delta \ll \delta_T$	$\delta \gg \delta_T$
$\frac{\delta_T}{L} \sim Pr^{-1/2} Re^{-1/2}$	$\frac{\delta_T}{L} \sim Pr^{-1/3} Re^{-1/2}$
$h \sim \frac{k}{L} Pr^{1/2} Re^{1/2}$	$h \sim \frac{k}{L} Pr^{1/3} Re^{1/2}$
$Nu \sim Pr^{1/2} Re^{1/2}$	$Nu \sim Pr^{1/3} Re^{1/2}$
$Pr^{1/2} \ll 1$	$Pr^{1/3} \gg 1$

تدایج لایه آشفته از این فرض

1- $\frac{L}{\delta} \sim Re_L^{1/2} \leftarrow$ تفسیر Re_L فقط یک نسبت هذنی است.

2- فرضیات لایه مرکزی در نزدیکی ابتدای صحنه (leading edge) درست نیست

زیرا در اینجا $\delta \sim \alpha$ در برابری.

روش اشتراکی
در اشتراک:

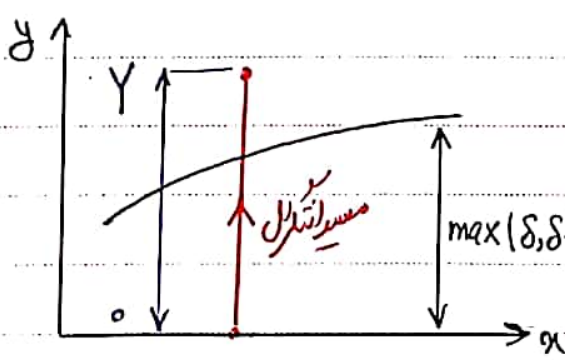
$$\tau = C_1 \rho U_\infty^2 Re_L^{-1/2}$$

$$h = C_2 \frac{k}{L} Pr^{1/2} Re_L^{-1/2} \quad Pr \ll 1$$

$$h = C_3 \frac{k}{L} Pr^{1/2} Re_L^{-1/2} \quad Pr \gg 1$$

$$\tau_{0-L} = \frac{1}{L} \int_0^L \tau dx \quad , \quad h_{0-L} = \frac{1}{L} \int_0^L h dx$$

این روش توسط Pohlhausen و von Karman و همکاران Prandtl ارائه گردید.



بوابه بدست آمدن τ و h گر لایه حرکت ر

گر لایه در $y=0$ و $\frac{\partial u, \tau}{\partial y} \Big|_{y=0}$ لازم است

و کل تغییرات در لایه منفی نیاز نیست بنا بر این فرض کنیم

از معادلات مویستوم و انرژی از $y=0$ تا $y=Y$ $(Y > \max(\delta, \delta_T))$ اشتراک بگیریم.

I) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \xrightarrow{xu} u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ معادله پیوستگی

II) $u \frac{du}{dx} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{dP_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

I+II $\frac{\partial}{\partial x} u^2$
 $u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{dP_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
 $\frac{\partial}{\partial y} (uv)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \frac{-1}{\rho} \frac{dP_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

I $T \frac{\partial u}{\partial x} + T \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ حال با ضرب دو معادله پیوستگی داریم

II $u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

I+II $T \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$
 $\frac{\partial}{\partial x} (Tu) + \frac{\partial}{\partial y} (Tv) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

پس دو معادله دینامیک به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) = \frac{-1}{\rho} \frac{dP_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} (Tu) + \frac{\partial}{\partial y} (Tv) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{cases}$$

حال از این دو رابطه بر حسب y از $y=0$ تا $y=\delta$ انتگرال میگیریم

$$\int_0^Y \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dy + \overline{u_y} v_y - v_y \overline{u} = -\frac{1}{\rho} Y \frac{\partial p_0}{\partial x} + v \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_Y - v \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0$$

$$\int_0^Y \frac{\partial}{\partial x} (uT) dy + v_y \overline{T_y} - v_y \overline{T} = \alpha \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_Y - \alpha \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0$$

روی دیواره $u=0, v=0$ در ضلع بالای منی $\overline{u} = 0$ ها صفر هستند

یعنی $u_y = u_\infty, T_y = T_\infty$ و $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_Y = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_Y = 0$

برای ماسپی v_y تراز برشته داریم:

انتگرال $\int dy$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\int_0^Y \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^Y \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^Y u dy + v_y - v_0 = 0$$

$$\rightarrow v_y = -\frac{d}{dx} \int_0^Y u dy$$

← پس در ماسپی با لایه توانیم ساده کنیم

$$u_\infty v_y = -u_\infty \frac{d}{dx} \int_0^Y u dy \Rightarrow \text{جزء}$$

$$\Rightarrow u_\infty v_y = -u_\infty \int_0^Y u dy + \frac{du_\infty}{dx} \int_0^Y u dy$$

حال با $\frac{d}{dx}$ در رابطه بدست آمده داریم:

$$\int_0^Y \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dy - u_\infty \int_0^Y u dy + \frac{du_\infty}{dx} \int_0^Y u dy = -\frac{1}{\rho} Y \frac{dp_0}{dx} - v \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_Y = 0$$

باید یک سازی عملیات داریم :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\gamma} u (U_{\infty} - u) dy = \frac{1}{\rho} \gamma \frac{dP_{\infty}}{dx} + \frac{dU_{\infty}}{dx} \int_0^{\gamma} u dy + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\gamma} u (T_{\infty} - T) dy = \frac{dT_{\infty}}{dx} \int_0^{\gamma} u dy + \alpha \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$$

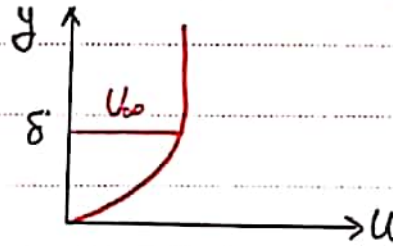
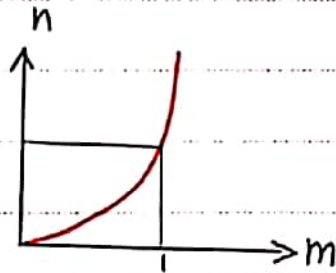
همین ترتیب داریم.

این دو معادله در روابط انتقالی لایه مرزی هستند که برای یک نقطه تعریف نمی شوند بلکه برای یک

نوار با ضخامت dx و ارتفاع γ می باشد.

حال برای حل این معادلات یک فرضیه برای دما و سرعت فرض می کنیم.

فرض جریان آرام بر روی صفحه صاف (ثابت U_{∞} و P_{∞})



$$u = \begin{cases} U_{\infty} m(n) & 0 \leq n \leq 1 \\ U_{\infty} & 1 \leq n \end{cases}$$

با تغییر $m(n)$ در رابطه انتقالی (موسسه) در توان نوشت :

$$\delta \frac{d\delta}{dx} \left[\int_0^1 m(1-m) dn \right] = \frac{\nu}{U_{\infty}} \left(\frac{dm}{dn} \right)_{n=0}$$

به همین ترتیب می توان برای ضخامت لایه مرزی δ ، ضریب اصطکاک پوستی $C_{f,m}$ را به دست

زیرلبهت آمده

$$\frac{\delta}{x} = a_1 Re_x^{-1/2}, \quad C_{Fx} = \frac{\tau}{1/2 \rho U_\infty^2} = a_2 Re_x^{-1/2}$$

که a_1 و a_2 به نسبت زیر لبهت می آیند.

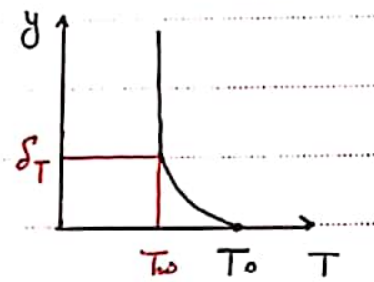
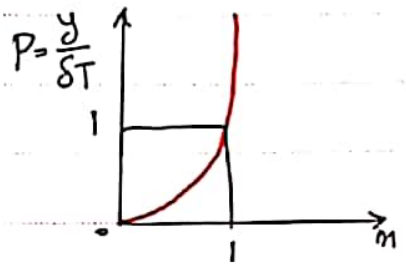
$$a_1 = \left[\frac{2 (dm/dn)_{n=0}}{m(1-m) dn} \right]^{1/2}$$

$$a_2 = \left[2 \left(\frac{dm}{dn} \right)_{n=0} \int_0^1 m(1-m) dn \right]^{1/2}$$

توجه نمائید روابط لبهت آمده برای δ و C_{Fx}

بیان نیز Scaling فقط در یک مقیاس ثابت a_1 و a_2 تفاوت دارند.

بر همین نسبت می توان به توجه به اینکه $\frac{dT_\infty}{dx} = 0$ است. یک توزیع دما به صورت زیر تعریف نمود.



$$\left. \begin{aligned} \frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} = m(p) \quad & \text{for } P \gg 0 \\ T = T_\infty \quad & \text{for } P \ll 0 \end{aligned} \right\}$$

با توجه به نتایج آسانیز Scaling در توان نوشت $\Delta = \frac{\delta_T}{\delta}$ که به نوعی تابعی

از عدد پراشل می باشد. برای حالت $\delta_T < \delta$ (برای سیالات با P_r بالا) با جایگزینی در رابطه

$$P_r = \frac{2 (dm/dp)_{P=0}}{(a_1 \Delta)^2} \left[\int_0^1 m(P\Delta) [1 - m(p)] dp \right]^{-1}$$

انتگرالی دما در توان نوشت:

الروض کنیم توزیع سرعت خطی باشد یعنی $m = P$ رابطه زیر لبهت را بدید:

$$\Delta = \frac{\delta_T}{\delta} = P_r^{-1/3}$$

و با توزیع دمای $m = (\frac{P}{2})(3 - P)^2$ در توان گفت:

$$h = 0.331 \frac{k}{x} P_r^{1/3} Re^{1/2}, \quad Nu = 0.331 P_r^{1/3} Re^{1/2}$$

اختلاف $C_{f,x}$ و Nu برای توزیع سرعت‌ها و دماهای فرضی با مقادیر Exact زیر است:

توزیع سرعت $m(n)$ توزیع دما $m(p)$	$\frac{\delta}{x} Re_x^{1/2}$	$C_{f,x} Re$	$Nu \sim Re_x^{-1/2} Pr^{-1/3}$ ($Pr > 1$)	
			توزیع دمای یکنواخت	شماره پراکنش یکنواخت
توزیع خطی $m=n$	3.46	0.577	0.289	0.369
$m = (\frac{n}{2})(3-n^2)$	4.64	0.646	0.331	0.417
$m = \sin(\frac{n\pi}{2})$	4.8	0.654	0.337	0.424
حل دقیق (تسایری)	4.92	0.664	0.332	0.453

در حالت $Pr \ll 1$ برای فلزات مذاب که $\Delta \gg 1$ در با بدنه رابطی Pr بسیار است زیر است:

$$Pr = \frac{2(dm/dp)_{p=0}}{(a_1 \Delta)^2} \left[\underbrace{\int_0^{1/\Delta} m(p\Delta) [1-m(p)] dp}_I + \underbrace{\int_{1/\Delta}^1 [1-m(p)] dp}_II \right]^{-1}$$

$I \ll II$

از آنجا که I مرتباً در برابر II صرف نظر کرد زیرا $\frac{1}{\Delta}$ در این نزدیک صفر است و δ بسیار بزرگ است

حال با فرض توزیع خطی داریم:

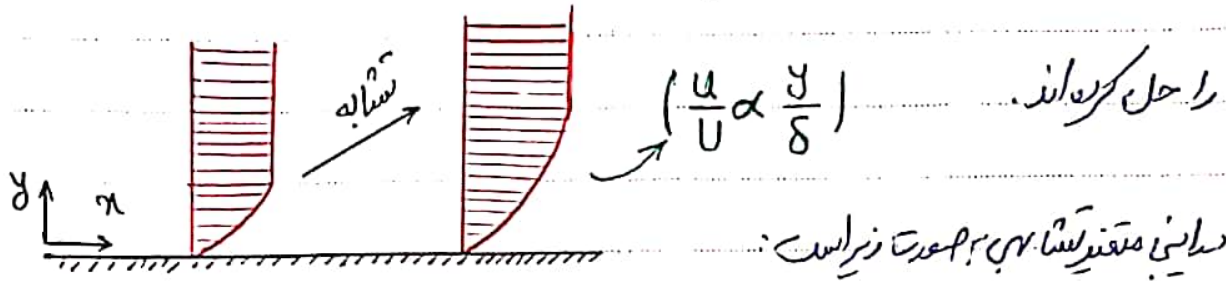
$$u = \begin{cases} U_{\infty} m & 0 < y < \delta \\ U_{\infty} & \delta < y < \delta_T \end{cases} \quad \Delta \gg 1$$

$$m=p \rightarrow \Delta = \frac{\delta_T}{\delta} = (3Pr)^{1/2}, \quad \frac{\delta_T}{x} = 2 Pr^{-1/2} Re_x^{-1/2}, \quad h = \frac{1}{2} \frac{k}{x} Pr^{1/2} Re_x^{1/2}$$

$$Nu = \frac{1}{2} Pr^{1/2} Re_x^{1/2}$$

حل تشابهی معادلات لایه مرزی Similarity Solution

آقای Blasius با حل تشابهی معادلات لایه مرزی و Pohlhausen معادله انرژی



$$\text{متغیر تشابهی: } \eta = \frac{y}{x} Re_x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{u}{U_\infty} = f'(\eta) = \frac{df}{d\eta}$$

$$\eta = \frac{y}{\delta}, \quad \delta \sim x Re_x^{-1/2}$$

برای همی ثابت $P_{\infty} = cte$ است داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & u=v=0 @ y=0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & u \rightarrow U_\infty @ y \rightarrow \infty \end{cases}$$

با تعریف تابع جریان داریم:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

با این تعریف معادله پیوستگی حذف می‌شود زیرا این تابع جریان، معادله پیوستگی را

رضایت می‌دهد و اینگونه یک معادله حذف شده و u و v تبدیل به یک متغیر ψ می‌شوند.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 & y=0 \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 & x=0 \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U_\infty & @ y \rightarrow \infty \end{cases}$$

با جایگزین ψ خواهیم داشت:

فرض کنیم $\psi = (U_\infty \gamma x)^{1/2} f(\eta)$ خواهیم داشت:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (U_\infty \gamma x)^{1/2} f'(\eta) \frac{Re_x^{1/2}}{x} = f'(\eta) U_\infty$$

$$\Rightarrow \frac{u}{U_\infty} = f'(\eta)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ or } \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty \gamma x)^{1/2} f(\eta) = -\frac{1}{2} U_\infty^{1/2} \gamma^{1/2} x^{-1/2} f(\eta) - (U_\infty \gamma x)^{1/2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{2} U_\infty^{1/2} \gamma^{1/2} x^{-1/2} f(\eta) - (U_\infty \gamma x)^{1/2} f'(\eta) \left(-\frac{1}{2} \frac{\gamma}{x}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{U_\infty \gamma}{x}\right)^{1/2} (\eta f' - f)$$

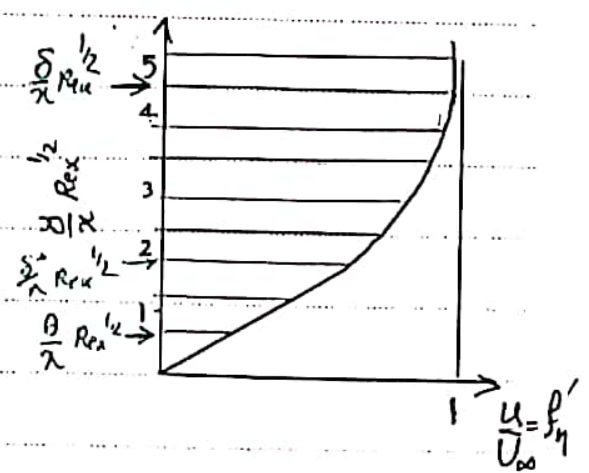
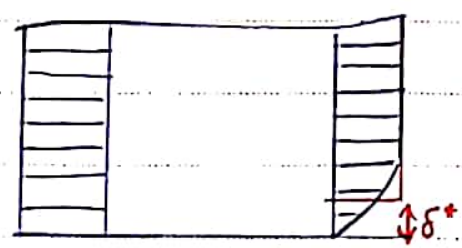
اگر در این معادله نسبت η را با η بزنیم، ψ فرد شده و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2f''' + ff'' = 0 \\ f = f' = 0 @ \eta = 0 \\ f' \rightarrow 1 @ \eta \rightarrow \infty \end{cases}$$

با استفاده از روش shooting این مسئله عددی حل می شود و در $\eta = 4.92$ خواهیم داشت

$$\delta = 4.92 \times Re_x^{-1/2} \quad \text{که وقتی } \frac{u}{U_\infty} = 0.99 \text{ خواهد بود}$$

تقریباً وقتی $\frac{u}{U_\infty} = 0.99$ $\delta^* = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U_\infty}) dy$



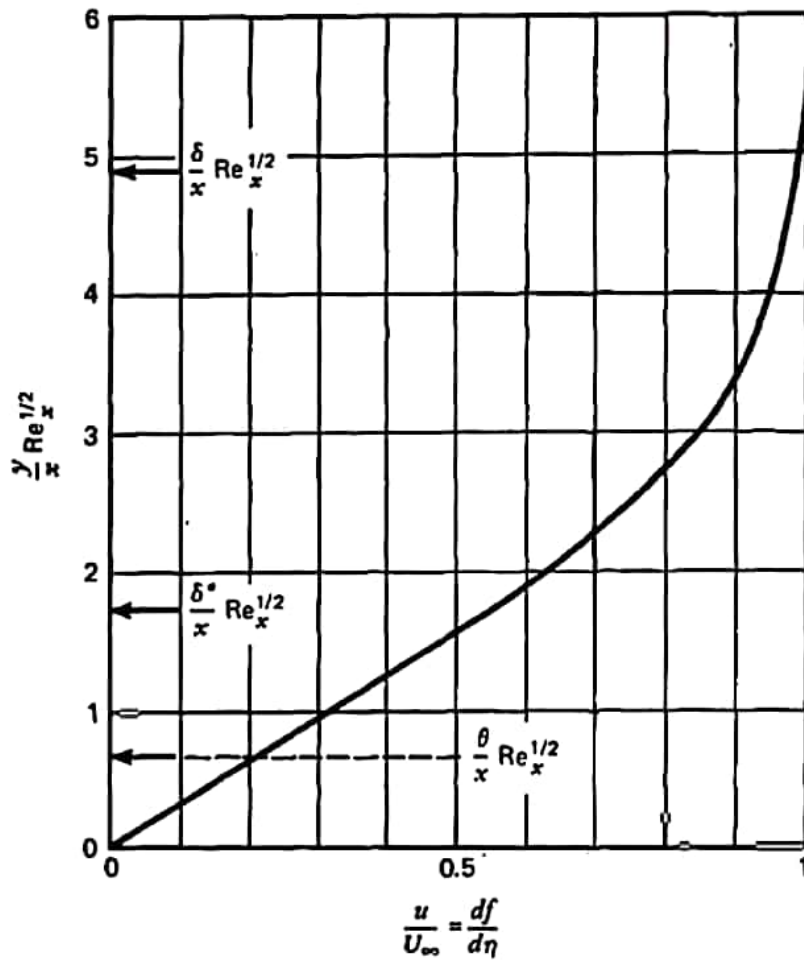


Figure 2.6 Similarity velocity profile for laminar boundary layer flow on a plate aligned with a free stream.

که در اینجای این صورت خواهد بود.

$$\frac{\delta^*}{x} = 1.73 \text{Re}_x^{-1/2}$$

← برای محاسبه ضرایب اصطکاک نیز خواهیم داشت:

$$C_{f,x} = \frac{H\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = -2f''(0) \cdot \text{Re}_x^{-1/2}$$

$$f''(0) = 0.322$$

$$\Rightarrow C_{f,x} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2} \Rightarrow C_{f,x}(0-x) = \frac{T_w - T_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 2C_{f,x} = 1.328 \text{Re}_x^{-1/2}$$

← حال در مثال ضمنی مت لایه می‌توانیم از این تقریب کرد.

$$\theta U_\infty^2 = \int_0^\infty U_\infty^2 dy - \int_0^\infty u^2 dy - U_\infty \int_0^\infty (U_\infty - u) dy$$

← در اینجای این مقدار به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\theta}{x} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$$

برای حل معادله انرژی نیز داریم:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}, \quad @ \eta=0 \quad \theta=0, \quad @ \eta \rightarrow \infty \quad \theta=1$$

با استفاده از معادله انرژی $\theta'' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0$

در حالتیکه $Pr=1$, $\theta = f'$ فرض شود حل تناسب توزیع دما در سطح نگی خواهد بود.

با استفاده از جداسازی متغیرها خواهیم داشت:

$$\theta'' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0 \Rightarrow \frac{\theta''}{\theta'} = -\frac{Pr}{2} f$$

$$\Rightarrow \int_0^\eta \frac{\theta''}{\theta'} = -\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f d\beta \Rightarrow \ln \theta' \Big|_0^\eta = -\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f(\beta) d\beta$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(\eta)}{\theta'(0)} = \int_0^\eta \exp\left[-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f(\beta) d\beta\right] d\eta -$$

لازمه β متغیرهای میانی هستند.
(Dummy variable)

$$\Rightarrow \theta(\eta) = \theta'(0) \int_0^\eta \exp\left[-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f(\beta) d\beta\right] d\eta$$

در اینجا $\theta(0) = \theta'(0)$ است، از شرط صوری $\theta \rightarrow 1$ در توان استفاده کرد.

$$\eta \rightarrow \infty \Rightarrow \theta \rightarrow 1 \Rightarrow \theta'(0) = \left[\int_0^\infty \exp\left[-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f(\beta) d\beta\right] d\eta \right]^{-1} = 0.332 Pr^{1/3}$$

دبا استفاده از $\theta(0) = \theta'(0)$ فوهم داشت:

$$h = \frac{-k \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}}{T_s - T_\infty} = -\frac{k(T_s - T_\infty)}{T_s - T_\infty} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$= k \theta'(0) \frac{Re_x^{1/2}}{\alpha} \Rightarrow h = \frac{k}{\alpha} Re_x^{1/2} \theta'(0) \Rightarrow Nu = 0.352 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

حال برای حالت $Pr < 0.5$ در فزوات مذاب نیردی توان برای حالت حدی $Pr \rightarrow 0$ حالت توزیع

سویت را بدین صورت فرض کرد.

$$\frac{U}{U_\infty} = f' = 1 \rightarrow \theta'' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\theta'}{\theta'} \right) = -\frac{Pr}{2} f' \rightarrow \frac{d(\theta')}{d\eta} = -\frac{Pr}{2}$$

ولتاژ در توان نشان داد

$$\theta(\eta) = \exp\left(-\frac{\eta}{2} Pr^{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow h = \frac{k}{\alpha} Re_x^{1/2} \theta'(0) \Rightarrow Nu = \frac{h\alpha}{k} = \theta'(0) Re_x^{1/2} = 0.564 Pr^{1/2}$$

$$\theta'(0) = \left(\frac{Pr}{\pi}\right)^{1/2} = 0.564 Pr^{1/2}$$

برای محاسبه نرخ انتقال حرارت برای یک صفحه به طول x می توان نوشت :

$$q''_{0-x} = \frac{1}{x} \int_0^x q'' dx$$

باتوجه به اینکه $h = \frac{q''}{T_s - T_\infty}$ و $NU = \frac{hx}{k}$ و جابجایی در روابط داریم :

$$NU_{0-x} = \frac{q''_{0-x}}{T_s - T_\infty} \cdot \frac{x}{k} = \frac{h_{0-x} x}{k} \Rightarrow NU_{0-x} = \begin{cases} 0.664 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} & (Pr > 0.5) \\ 1.128 Re_x^{1/2} Pr^{1/4} & (Pr < 0.5) \end{cases}$$

تقریب 2 : 1.1 ، 2.3 ، 2.7 ، 2.20 ، و در این معادلات 2.56 ، 2.60 ، 2.65

رابطه تجربی Churchill & Ozoe برای محدوده وسیع از Pr و Re_x است

$$Re_x \leq 5 \times 10^5 \quad \leftarrow \text{شرایط} \quad Pe_x = Re_x Pr > 100$$

باتوجه به تقریب لایه مرزی در حل بدلیزکی

$$\Rightarrow NU = \frac{0.928 Pr^{1/3} Re^{1/2}}{[1 + (0.0207 Pr^{2/3})]^{1/4}}$$

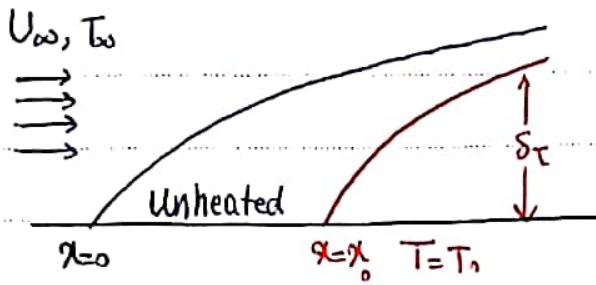
و تساوی $\frac{\nu}{U_\infty} \sim Re_x^{-1/2}$ حول وقت

نتیجه بهتری خواهد داد $\uparrow Re_x^{1/2}$ لایه مرزی نازکتر می شود. فرغند این صورت

نتایج می نتواند نشان داده است $\frac{\nu}{U_\infty} = 0.86 Re_x^{-1/2}$ یعنی دو ضرایب لایه مرزی مقدار ν باید ضریب ν

که یک مقدار محدود است ، در صورتیکه اگر $Re_x \rightarrow \infty$ مقدار وقتی $\nu \rightarrow 0$ خواهد بود. بنابراین

نتیجه می گیریم که حل تساوی و فرضیه لایه مرزی برای وقتی حول مناسب خواهد بود $\uparrow Re_x^{1/2}$ زیرا با ν



تعداد حالت های برای انتقال حرارت به صفحه

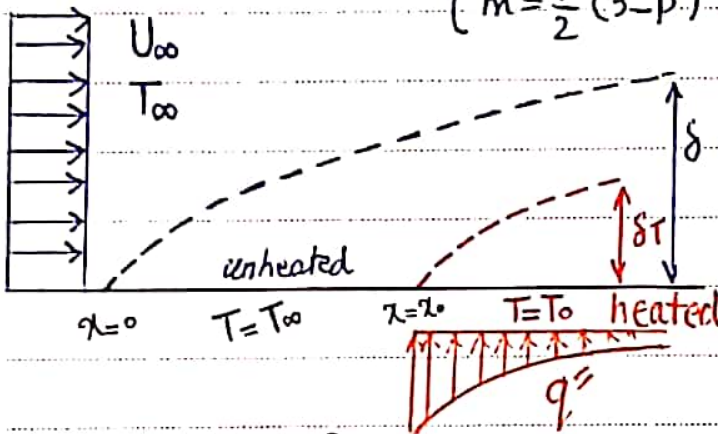
طول لولید بدون حرارت را به Unheated starting length میگویند

اگر $x_0 > x_c$ بدون حرارت را به $T=T_0$ در این صورت $T=T_0$ است و با استفاده از

روش انتگرال و معادله انرژی درونی

$$\begin{cases} m = \frac{n}{2} (3-n)^2 & \text{توزیع سرعت} \\ m = \frac{p}{2} (3-p)^2 & \text{توزیع دما} \end{cases}$$

نمی توان نوشت:



$$\Delta^3 + 4\Delta^2 \frac{d\Delta}{dx} = \frac{0.929}{Pr}$$

با حل این معادله خواهیم داشت:

$$\Delta^3 = \frac{0.929}{Pr} + Cx^{-3/4} \quad @ x=x_0 \quad \Delta=0$$

$$\Rightarrow \Delta=0 = \frac{0.929}{Pr} + Cx_0^{-3/4} \Rightarrow C = -\frac{0.929}{Pr} x_0^{3/4}$$

$$\Rightarrow \Delta^3 = \frac{0.929}{Pr} - \frac{0.929}{Pr} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4} = \frac{0.929}{Pr} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]$$

اگر $x_0 = 0$ باشد رابطه به صورت زیر در می آید:

$$\Delta = 0.976 Pr^{-1/3}$$

برای یافتن Nu می توانیم:

$$h = \frac{-K \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0}}{T_0 - T_\infty} = \frac{-K (T_\infty - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y}}{(T_0 - T_\infty)}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = \frac{P}{2} (3 - P^2) \rightarrow \left. \frac{\partial \theta}{\partial P} \right|_{P=0} = \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} P^2 \right]_{P=0} = \frac{3}{2}$$

$$P = \frac{y}{\delta t} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\delta t}$$

$$\Rightarrow h = \frac{-k(T_\infty - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}}{(T_\infty - T_0)} = k \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\delta t} = \frac{3k}{2\delta t}$$

$$\Delta = \frac{\delta t}{\delta} = \frac{0.976}{Pr^{1/3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3} \Rightarrow \delta t = \Delta \delta, \quad \delta = 4.64 x Re_x^{-1/2}$$

با جایگزینی در اینها، نهایتاً خواهیم رسید به:

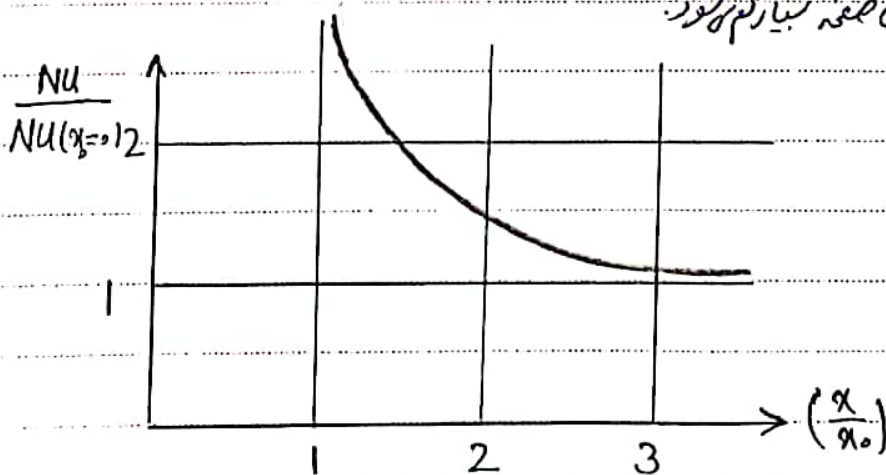
$$h = \frac{3k}{2\delta t} = 1.5 k \frac{Pr^{1/3}}{0.976 \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}} \cdot \frac{1}{4.64 x Re_x^{-1/2}}$$

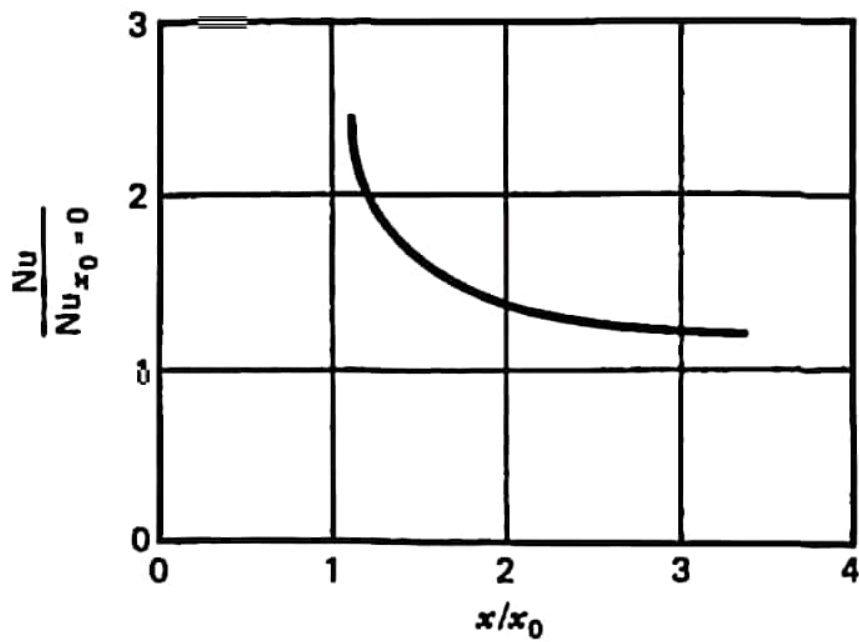
$$\Rightarrow Nu = \frac{hx}{k} = 0.331 Pr^{1/3} \cdot Re_x^{1/2} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3}$$

$$\text{if } x_0 = 0 \rightarrow Nu(x_0 = 0) = 0.331 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{Nu}{Nu(x_0 = 0)} = \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3} \rightarrow \text{if } \frac{x}{x_0} > 3 \rightarrow \frac{Nu}{Nu(x_0 = 0)} \rightarrow 1$$

یعنی در $x > 3x_0$ اثرات ابتدایی صافه بسیار کم می شود.



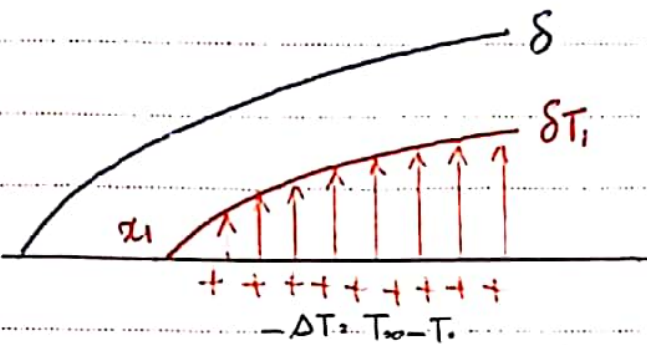


(b)

Figure 2.8 Boundary layer with unheated starting length.

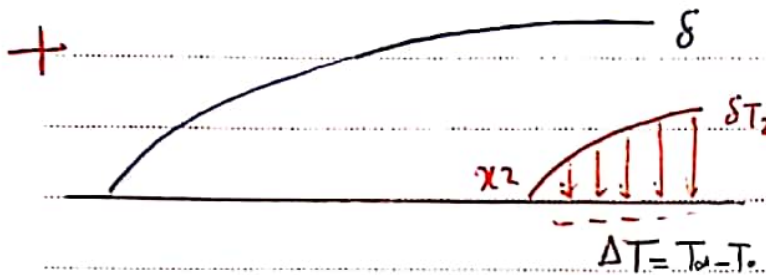
$$Nu = \frac{hx}{k} = 0.332Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3} \quad (2.116)$$

صفحه تخت یا توزیع دمای درخواره



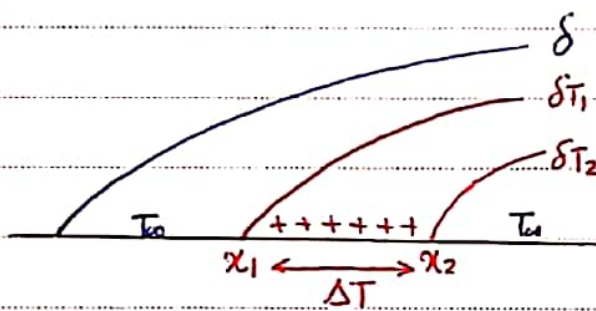
فقط اگر $\Delta T = T_\infty - T_s$ برای

فاصله $x_1 < x < x_2$ اعمال شود



$$q'' = 0.331 \frac{k}{x} Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \left\{ \frac{\Delta T}{\left[1 - \left(\frac{x_2}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}} \right\}$$

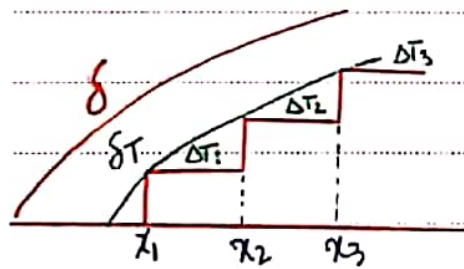
$x_1 < x < x_2$



$$q'' = 0.331 \frac{k}{x} Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \left\{ \frac{-\Delta T}{\left[1 - \left(\frac{x_2}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}} \right\}$$

$$+ \frac{\Delta T}{\left[1 - \left(\frac{x_1}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}} \right\} < 0 \quad x > x_2$$

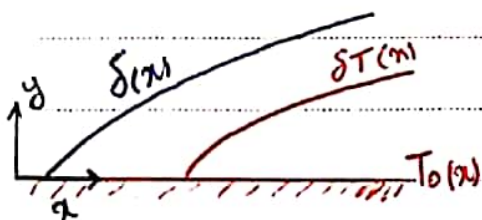
چون $x_1 < x_2$ پس $q''_{x_1} < q''_{x_2}$ برابر



حال برای یک توزیع دمای درای N به step و نواحی نوشتن

$$q'' = 0.331 \frac{k}{x} Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta T_i}{\left[1 - \left(\frac{x_i}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}}$$

و با سبب دادن $\Delta T \rightarrow 0$ برای یک توزیع دمای درای smooth و نواحی رابطه انتقال حرارت بر این صورت خواهد بود:

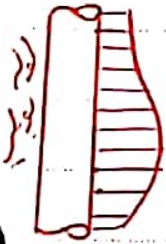


$$q''_x = 0.331 \frac{k}{x} Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \int_0^x \frac{dT_s}{d\xi} \frac{d\xi}{\left[1 - \left(\xi/x\right)^{3/4}\right]^{1/3}}$$

فدائس حرارتی تکینوات

در مسائل هندسی بیشتر فدائس حرارتی به‌صورت مستحضر است که نهایتاً باید به‌صورت $T_0(x)$ تعیین شود

مثلاً اهمیت آن در اوجیت شدن لوله‌های بدلیه، ذوب شدن قلب راکتور و غیره می‌باشد.
برای حالت $q'' = cte$ با استفاده از روش اشتراک داریم:



$$Nu = \frac{q''}{T_0(x) - T_\infty} \frac{x}{k} = 0.453 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (0.5 < Pr < 10)$$

حال برای فدائس حرارتی تکینوات داریم:

$$T_0(x) - T_\infty = \frac{0.623}{k} Pr^{-1/3} Re_x^{-1/2} \int_{\xi=0}^x \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{3/4} \right] q''(\xi) d\xi \quad (Pr > 0.5)$$

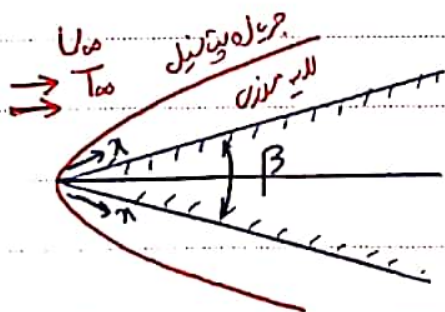
روابط بالا برای $Pr \geq 1$ و $Re_x < 5 \times 10^5$ صادق است.

$$T_{film} = \frac{1}{2} (T_0 + T_\infty)$$

← دمای Film: برای دمای فیلم داریم.

از تغییرات دما $(T_0 - T_\infty)$ نسبت به $T_0(x)$ و $T_\infty(x)$ کم باید خواص در دمای T_{film} می‌گیریم.

اثر تغییرات فشار $\frac{dP}{dx} \neq 0$ در جریان بوی گونه و جریان سکون این حالت



ریده در نزد

در این حالت از اصل جریان بوی گونه داریم:

$$U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$$

$$U_\infty = Cx^m$$

$$m = \frac{\beta}{2\pi - \beta}$$

حالت های مختلف به صورت زیر است:

$\beta = \pi$ $m = 1$ Stagnation Flow جریان نقطه ای

$\beta = \frac{\pi}{2}$ $m = \frac{1}{3}$ $\frac{dP}{dx} < 0$ نازل

$\beta = 0$ $m = 0$ $\frac{dP}{dx} = 0$ صفحه تخت

$\beta = -0.14$ $m = -0.0654$ $\frac{dP}{dx} > 0$ درینوزر

$\beta = -0.199$ $m = -0.0904$ separation جابه

← حال با چنانچه ازین جریان به نازل در معادله لایه مرزی خواصیم راست :

$$u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dy} = \frac{m}{x} U_{\infty}^2 + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} = Cx^m \cdot C_m x^{m-1} = \frac{m}{x} U_{\infty}^2$$

Foikner و Skan حل مشابه را برای معادله ی موستقیم با یک پارامتر m درست آوردند.

$$\begin{cases} 2f''' + (m+1)ff'' + 2m[1-(f')^2] = 0 & \eta = y \left(\frac{U_{\infty}}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad U_{\infty} = Cx^m \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \end{cases}$$

درین جا عدد رینولدز به این صورت می آید:

$$Re_x = \frac{U_{\infty} x}{\nu} = \frac{Cx^{m+1}}{\nu}$$

با حل عددی معادله به دست آمده ، ضریب اصطکاک پرست به این صورت بدست می آید

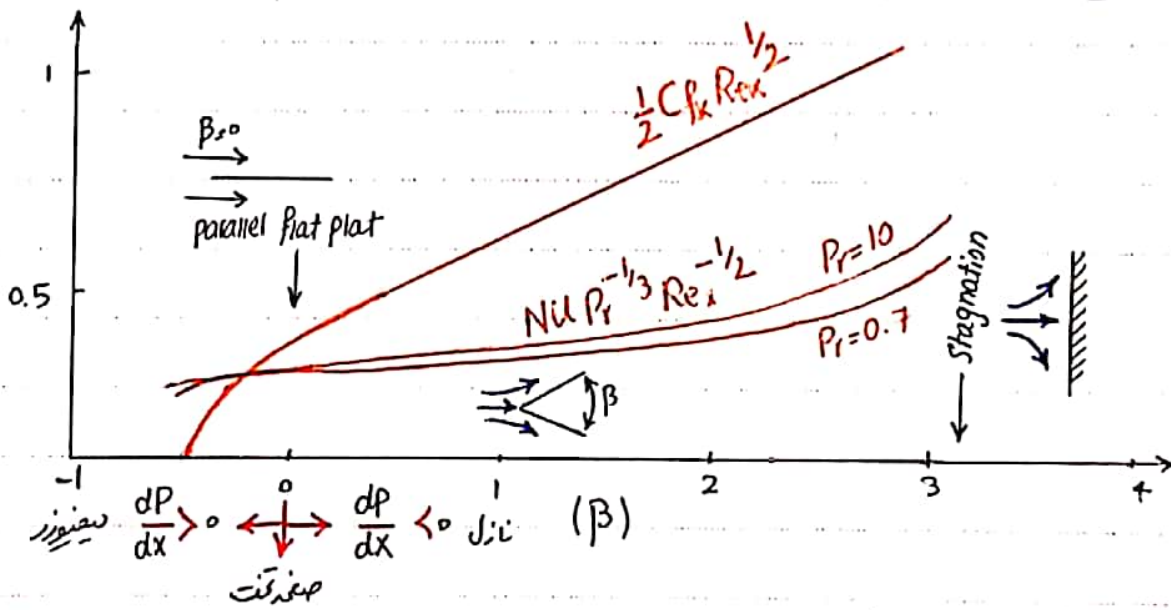
$$C_{f,x} = 2 f''(0) Re_x^{-1/2}$$

برای توزیع دما نیز داریم :

با حل تساوی برابری کوه با دمای T_0 و دمای T_∞ جریان آزاد توزیع دما به این صورت است :

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} \rightarrow \theta'' + \frac{Pr}{2} (m+1) f \theta' = 0 \quad \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta(\infty) = 1 \end{cases}$$

برای ضرایب معلوم است $Nu \sim Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$ عمدتاً زاویه β متغیر دارد.



پس در توان گفت Nu در یک زاویه خاص با طولی مقادیر مختلف Pr ثابت است.

$$\frac{Nu}{Re_x^{1/2} Pr^{1/3}} \sim \text{ثابت} \Rightarrow Nu \sim Re_x^{1/2} \rightarrow \frac{hx}{k} \sim Re_x^{1/2} \Rightarrow h \sim x^{-1} Re_x^{1/2}$$

$$\Rightarrow h \sim x^{-1} U_\infty^{1/2} \alpha^{1/2} \sim x^{-1} C^{1/2} \alpha^{m/2} \alpha^{1/2} \Rightarrow h \sim x^{\frac{(m-1)}{2}}$$

← اگر $m=0$ باشد ضریب تحت خواهد بود و داریم $h \sim x^{-1/2}$

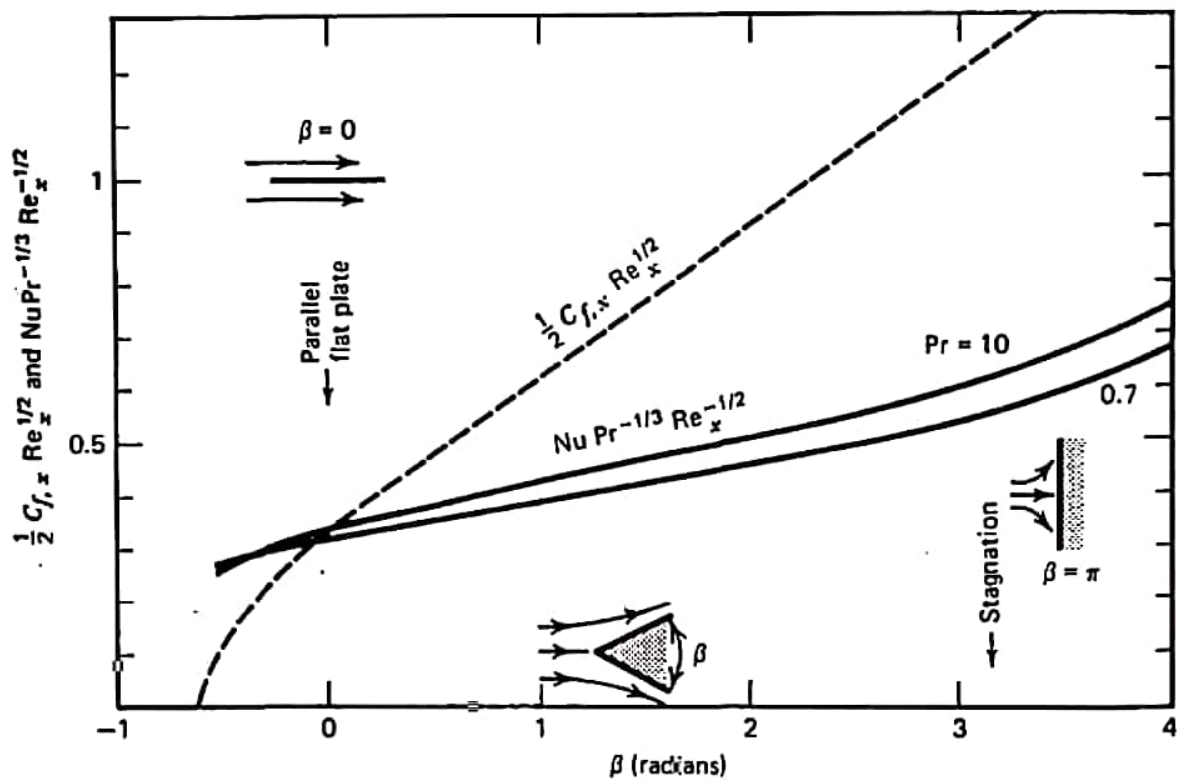


Figure 2.10 Local heat transfer and friction results for laminar boundary layer flow over an isothermal wedge-shaped body.

Subject: _____
Date: _____

← برای نقطه مکون میزداریم $m=1$ ، $\beta=\pi$ در این صورت: ثابت $h \sim U_\infty = Cx$ خواهد بود.

← برای h نسبتی مقدار متوسط h میزداریم

$$h_{\text{avg}} = \frac{h}{1 + \frac{m-1}{2}} = \frac{2}{1+m} h_x$$

حالت دیگری میزداریم که دوباره متخلخل بود و blowing $v_0 > 0$ و suction $v_0 < 0$ داشته باشیم حال اگر

$NU_{\text{blowing}} < NU_{v=0} < NU_{\text{suction}}$ $v_0 \sim x^{\frac{m-1}{2}}$ باید، حل مناسب وجود دارد

آنگاه v_0 از حدی بزرگتر شود جریان صورت میگیرد. v_0 بزرگتر NU بزرگتر میسریم

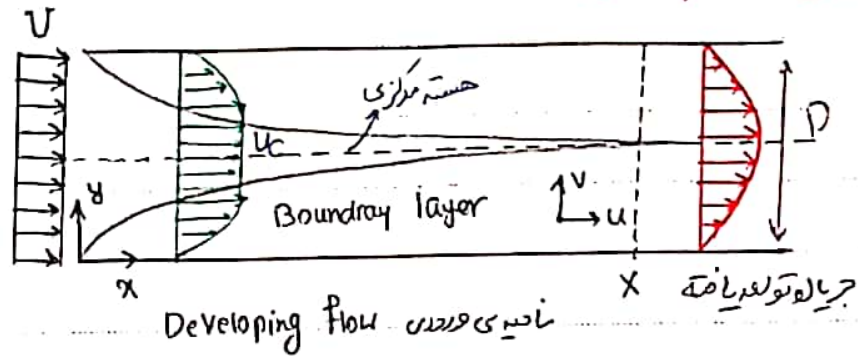
← در حالتی $\theta = f'$ ، $Pr=1$ فرض شود داریم: $\theta'' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0$ ، $\theta(1) = \frac{T_s - T_\infty}{T_\infty - T_0}$

B.C. $\left\{ \begin{array}{l} \theta=0 \text{ @ } \eta=0 \\ \theta \rightarrow 1 \text{ as } \eta \rightarrow \infty \end{array} \right.$ در این صورت باطل است، توزیع دما و توزیع سرعت یکی خواهد بود.

$$\theta'' + \frac{Pr}{2} f \theta' = 0 \rightarrow \int \frac{\theta''}{\theta'} = -\frac{Pr}{2} \int f \Rightarrow \ln \theta' \Big|_0^1 = -\frac{Pr}{2} \int_0^1 f(\beta) d\beta$$

$$\Rightarrow \theta'(1) = \left\{ \int_0^1 \exp \left[-\frac{Pr}{2} \int_0^r f(\beta) d\beta \right] dr \right\}^{-1}$$

← جریان آرام داخلی



مماسی X ناحیه ورودی $\delta = \frac{D}{2}$ جریان توسعه یافته $\delta = 4.92 \text{Re}_x^{-1/2}$

$$\Rightarrow \frac{D/2}{X} = 4.92 \frac{v^{1/2}}{U^{1/2} X^{1/2}} \Rightarrow \frac{D^{1/2} D^{1/2}}{X^{1/2}} = 2 \times 4.92 \frac{v^{1/2}}{U^{1/2}} \Rightarrow \frac{D^{1/2}}{X^{1/2}} = 9.84 \frac{1}{\left(\frac{UD}{v}\right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{X} = 96.8256 \frac{1}{\text{Re}_D} \Rightarrow \frac{X/D}{\text{Re}_D} = \frac{1}{96.8256} \approx 0.01$$

حاله اگر بخواهیم بر سرعت دقیق محاسبه کنیم خواهیم داشت: $U_c = U_{\text{max}}$ سرعت هسته مرکزی

$$U_{\infty} = U_c, Y = \delta(x), U_c \frac{dU_c}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -U_c \frac{dU_c}{dx}$$

$$\rightarrow \text{رابطه استریم فنکشن} \frac{d}{dx} \int_0^Y u(U_{\infty} - u) dy = \frac{1}{\rho} Y \frac{dP_0}{dx} + \frac{dU_{\infty}}{dx} \int_0^Y u dy + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} u(U_c - u) dy \right] + \frac{dU_c}{dx} \int_0^{\delta} (U_c - u) dy = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0$$

با فرض توزیع سرعت لایه مرزی داریم: $\frac{u}{U_c} = 2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2$

$$\text{بقی جرم: } \int_0^{\delta} \rho u dy + \int_{\delta}^{D/2} \rho U_c dy = \rho U \frac{D}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} \rho \delta U_c + \rho U_c \frac{D}{2} - \rho U_c \delta = \rho U \frac{D}{2}$$

$$\text{if } \delta = \frac{D}{2} \text{ (fully developed)} \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{D}{2} U_c + U_c \frac{D}{2} - U_c \frac{D}{2} = U \frac{D}{2} \Rightarrow U_c = \frac{3}{2} U$$

پس درصورت کاملاً توسعه یافته داریم:

$$u = \frac{3}{2} U \left[2 \left(\frac{y}{\delta} \right) - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]$$

با جایگزینی در رابطه اشتراک می‌سازیم و داریم:

$$\frac{x/D}{Re_D} = \frac{3}{40} \left(9 \frac{U_c}{U} - 2 - 7 \frac{U}{U_c} - 16 \ln \frac{U_c}{U} \right) \rightarrow \frac{x/D}{Re_D} = 0.026$$

$$\Rightarrow \frac{\delta(x)}{D/2} = 3 \left[1 - \frac{U}{U_c(x)} \right]$$

این رابطه نشان می‌دهد در رابطه x و Re_D از مرتبه اول است.

$$\frac{x}{D} = 0.026 Re_D$$

برای محاسبه $C_{f,x}$ هم داریم:

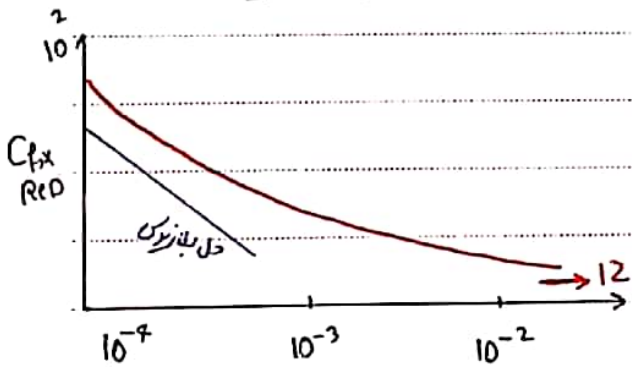
$$C_{f,x} = \frac{\tau_{wall}(x)}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad \tau_{wall} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = U_c \frac{\partial}{\partial y} \left[2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] = \frac{2U_c}{\delta} \Rightarrow C_{f,x} = \frac{\mu U_c \times \frac{2}{\delta}}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

$$\Rightarrow C_{f,x} = \frac{4 \nu U_c}{U^2 D/3 \left[1 - \frac{U}{U_c} \right]} = \frac{\rho}{3} \frac{U_c}{U} \frac{1}{\frac{U D}{\nu}} \left(1 - \frac{U}{U_c} \right)^{-1} \Rightarrow C_{f,x} = \frac{8}{3} \frac{U_c}{U} \left(1 - \frac{U}{U_c} \right)^{-1}$$

درصورت توسعه یافته $U_c = \frac{3}{2} U$ داریم:

$$C_{f,x} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \right)^{-1} \Rightarrow C_{f,x} = 12$$



مردان نشان داد برای لوله هم $C_{f,x} Re_D$ بر حسب

$\frac{x}{D} / Re_D$ همین تغییراتی خواهد داشت، درصورت

توسعه یافته $C_{f,x} = 16$ خواهد بود در دستت می‌بینی

از طریق روابط تجربی نشان داده می‌شود که درصورت توسعه یافته داریم:

$$C_{f,x} = 16$$

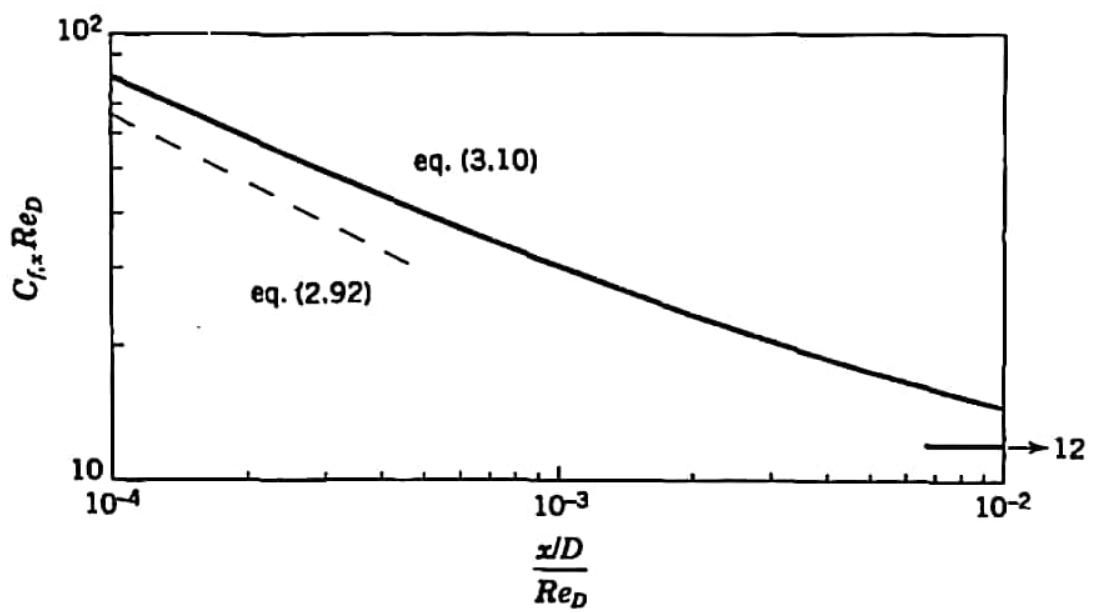


Figure 3.2 Local skin friction coefficient in the entrance region of a parallel-plates duct.

← جریان توسعه یافته در کانال →

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad x \sim L, y \sim D, u \sim U$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \nu \sim \frac{D}{L} U \quad \text{از برینکلی}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \frac{L}{D} \rightarrow \infty \begin{cases} v \approx 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{در ناحیه توسعه یافته داریم}$$

از معادله موازی در راستای y داریم $\frac{dp}{dy} = 0$ پس $P = P(x)$ و از موازی در راستای x داریم:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = \text{const} \begin{cases} P = P(x) \\ u = u(y) \end{cases} \rightarrow u = \frac{3}{2} U \left[1 - \left(\frac{y}{D/2} \right)^2 \right] \quad u = 0 \text{ @ } y = \pm \frac{D}{2}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{3}{2} \mu U \left(\frac{-2}{D/4} \right) = \frac{12 \mu U}{D^2}, \quad U = \frac{D^2}{12 \mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right)$$

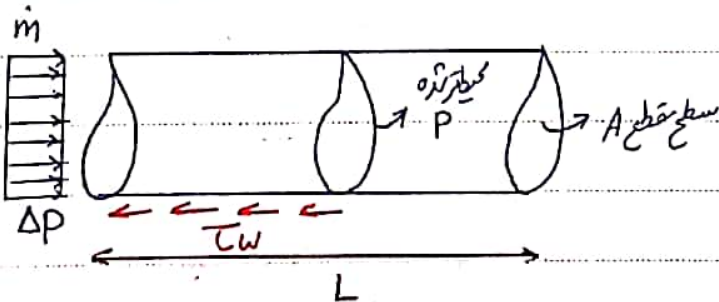
$$\frac{dP}{dx} = \mu \nabla^2 u \quad \text{پس در کل برابر یک کانال با مقطع دایره داریم}$$

که از حل آله برابری در توان نوشت:

Poiseuille - Hagen $u = 2U \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$

$$U = \frac{r_0^2}{8 \mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

← قطر هیدرولیکی معادل تلفت فشار →



$$\Delta P A = \tau_w \frac{PL}{\text{مساحت جانبی}}$$

با تعریف $f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2}$ داریم:

$$A \Delta P = \frac{1}{2} f \rho U^2 PL \Rightarrow \Delta P = f \frac{PL}{A} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) = f \frac{L}{(A/\rho)} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right)$$

$$r_h = \frac{A}{P}, \quad D_h = \frac{4A}{P} = 4r_p$$

با تعریف شعاع قطر هیدرولیکی داریم:

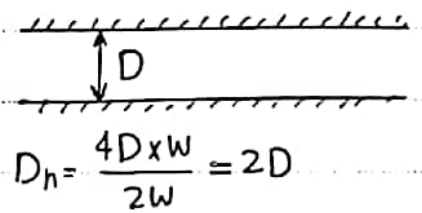
برای لوله داریم: $D_h = D$, $r_h = \frac{D}{4}$ و طبق این تعاریف ΔP به این صورت خواهد بود:

$$\Delta P = f \frac{4L}{D_h} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right)$$

← برای دو صفحه موازی ∞ داریم:

$$U = \frac{D^2}{12\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right) \Rightarrow \left| \frac{\Delta P}{L} \right| = \frac{12\mu U}{D^2} = \frac{12\mu U}{(D_h)^2} = \frac{4f}{D_h} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right)$$

$$\Rightarrow f = \frac{24}{\frac{UD_h}{\nu}} = \frac{24}{Re_{D_h}}$$

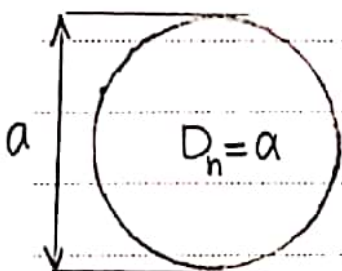


$$U = \frac{r_0^2}{8\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right) \rightarrow \left| \frac{\Delta P}{L} \right| = \frac{8\mu U}{D^2/4} = \frac{4f}{D_h} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right)$$

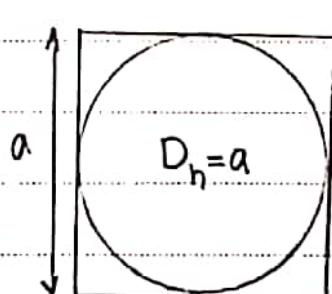
برای لوله می‌توانیم داریم:

$$\Rightarrow f = \frac{16}{\frac{UD_h}{\nu}} = \frac{16}{Re_{D_h}} \quad Re < 2000$$

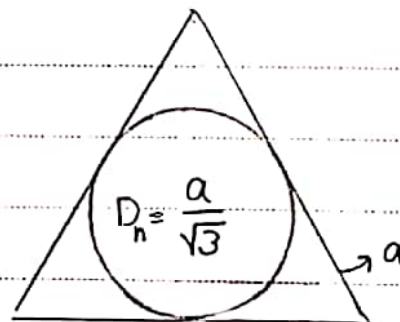
در کل از بلائن نبردهای فشاری و ویسکوز داریم: $\frac{\Delta P/L}{\mu U^2} \sim f Re_D \rightarrow$ درجه بیازاری می‌تواند از سطح مقطع جریان است.



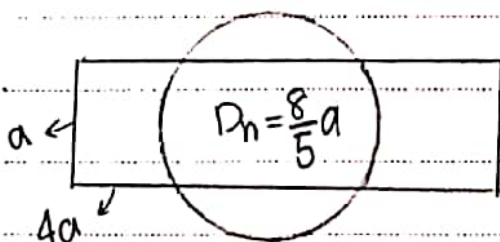
Circle



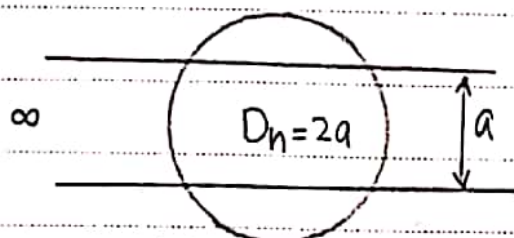
Square



Equilateral triangle



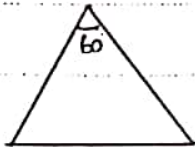
Rectangular



Infinite parallel plates

$$Nu = hD_h / k$$

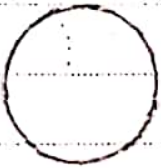
Cross-section geometry	$f Re_{D_h}$	$B = \frac{\pi D_h^2}{4 A_{duct}}$	Uniform q''	Uniform T_o
------------------------	--------------	------------------------------------	---------------	---------------



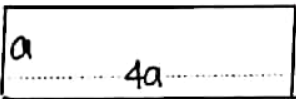
13.3	0.605	3	2.35
------	-------	---	------



14.2	0.785	3.63	2.89
------	-------	------	------



16	1	4.364	3.66
----	---	-------	------



18.3	1.26	5.35	4.65
------	------	------	------

24	1.57	8.235	7.54
----	------	-------	------

One side insulated

24	1.57	5.385	4.86
----	------	-------	------

B یا احتراقی همدیگر است که نزدیک بولان برابر در انتقال می دهد، متوجهی $f Re_{D_h}$ نیز از صورت 20 است

$$B \uparrow \Rightarrow f Re_{D_h} \uparrow$$

جرمیل دو بعدی 2D در یک مقطع مستطیلی به ابعاد $a \times b$

$$u_0 \text{ در مرکز} \quad u(x, y, z) = u_0 \left[1 - \left(\frac{y}{a/2} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{z}{b/2} \right)^2 \right]$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dp}{dx} dy dz = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dy dz \quad \text{با استفاده از رابطه داریم:} \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \mu \nabla^2 u$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_0 \left[1 - \frac{z^2}{(b/2)^2} \right] \left[-\frac{8}{a^2} \right] + u_0 \left[1 - \frac{y^2}{(a/2)^2} \right] \left[-\frac{8}{b^2} \right]$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = -8u_0 \left[\frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{z^2}{(b/2)^2} \right) + \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{y^2}{(a/2)^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow ab \frac{dp}{dx} = -8\mu u_0 \left[\frac{1}{a^2} \left(ab - \frac{4}{b^2} a \times \frac{1}{3} \times \frac{2b^3}{8} \right) + \frac{1}{b^2} \left(ab - \frac{4}{a^2} b \times \frac{1}{3} \times \frac{2a^3}{8} \right) \right]$$

$$\Rightarrow ab \frac{dp}{dx} = -8\mu u_0 \left(\frac{2}{3} \frac{b}{a} + \frac{2}{3} \frac{a}{b} \right) \Rightarrow ab \frac{dp}{dx} = -\frac{16}{3} \mu u_0 \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)$$

$$abu_0 = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} u dz dy \Rightarrow u_0 = \frac{9}{4} U \quad \text{با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:}$$

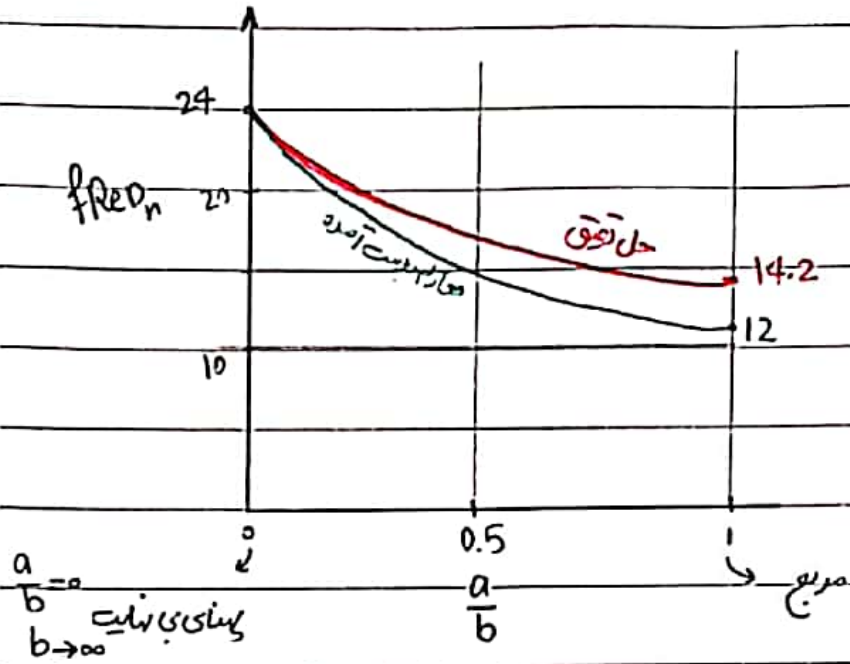
$$D_h^2 \frac{4A}{\rho} = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{برای قطر هیدرولیکی استفاده می‌کنیم:}$$

$$ab \frac{dp}{dx} = ab \frac{\Delta P}{L} = -\frac{16}{3} \mu \left(\frac{9}{4} U \right) \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = -\frac{16}{3ab} \mu \left(\frac{9}{4} U \right) \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) = \frac{4f}{D_h} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = f \frac{4}{D_h} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) \Rightarrow f = \frac{D_h^2}{ab} \frac{3\mu U}{ab} \left(\frac{b^2 + a^2}{ab} \right) \frac{1}{2} \rho U^2$$

$$\Rightarrow f = \frac{a^2 + b^2}{ab} \frac{24}{Re D_h}$$

حد اکثر خطای رابطه ی بیست آمده



5. با حل تقوی در حدود 15٪ است

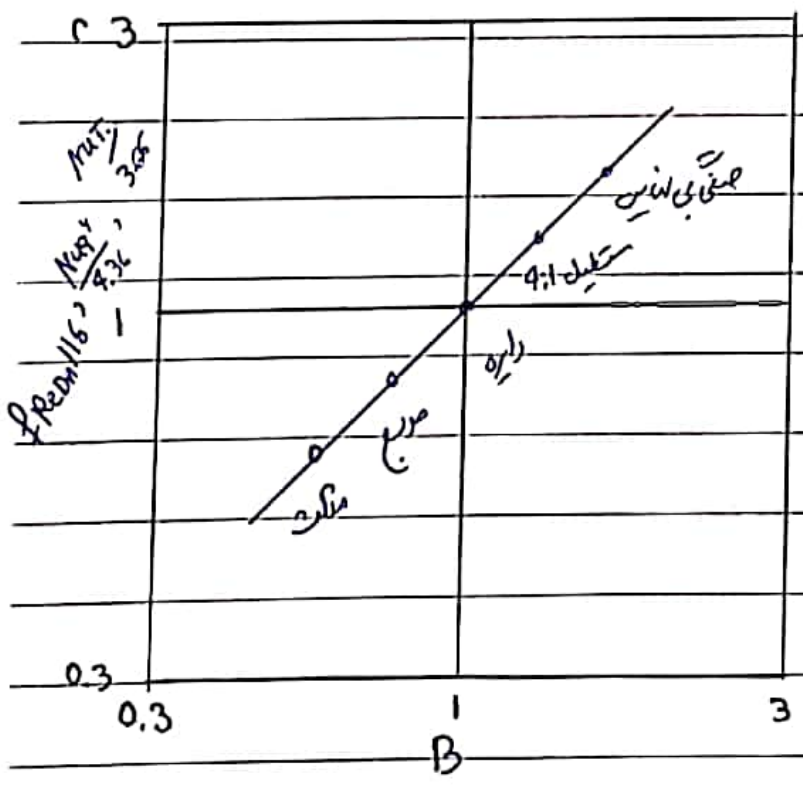
10

نکته: مقادیر $f_{Red_n} / 116$ ، $NU_9'' / 4.36$ و $NU_7 / 3.56$ برای اشکال مختلف

از ضلع، مربع، دایره تا محیط بی نهایت بر حسب پارامتر B صعود و هستند و

15

رابطه ی اُتاریقی دارند



20

25

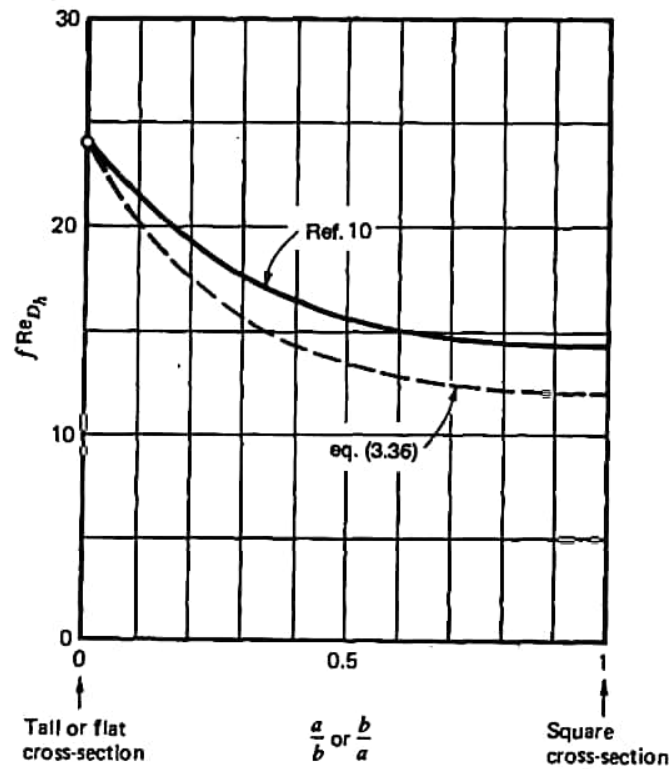


Figure 3.6 Friction factor for fully developed flow in a duct with rectangular cross section.

3.4 HEAT TRANSFER TO FULLY DEVELOPED DUCT FLOW 111

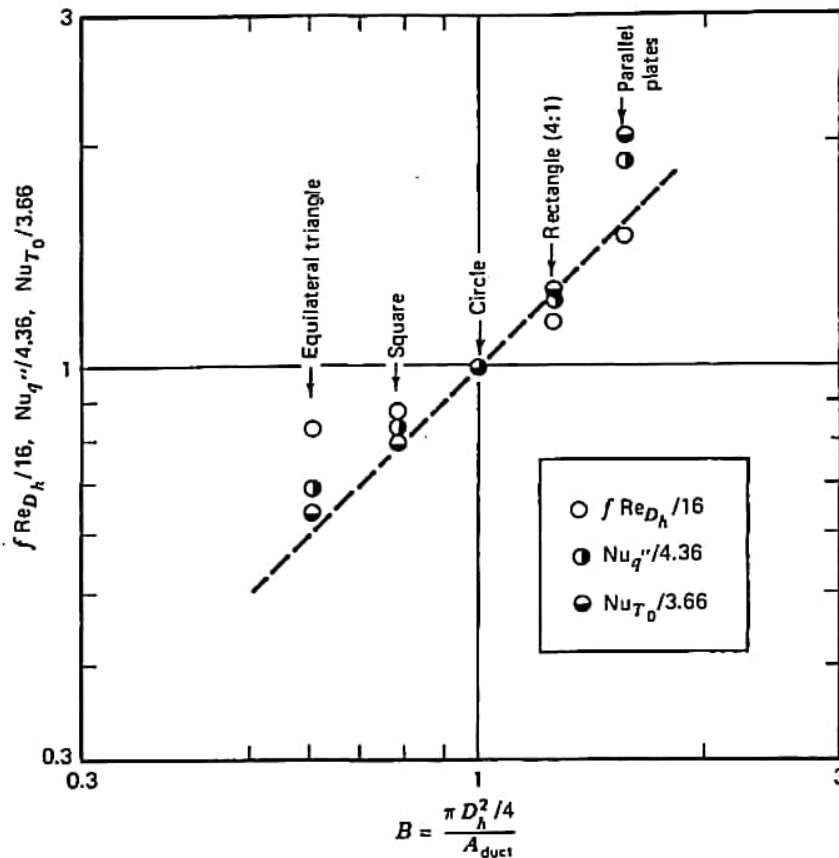
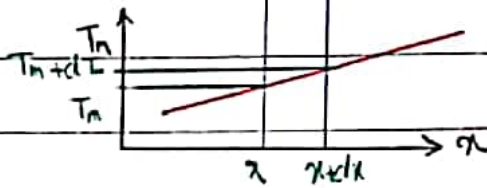
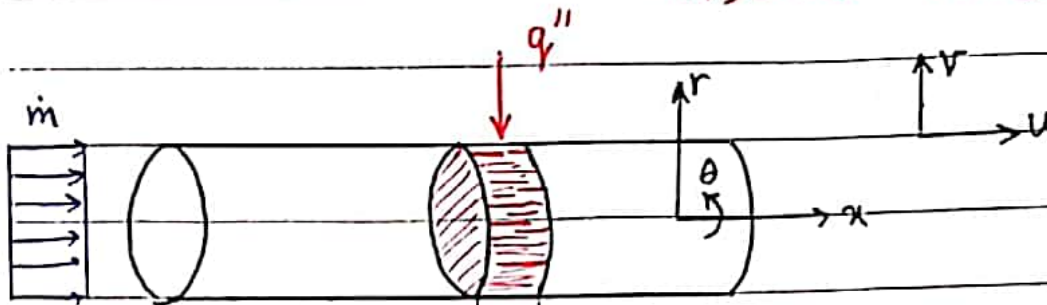


Figure 3.7 Cross-sectional shape number B , and fully developed friction and heat transfer in straight ducts.

انتقال حرارت توسط رساننده در کانال ها و لوله ها



تغییرات دما در طول لوله و تغییرات دما در طول لوله

$$q'' (2\pi r_0 dx) = \dot{m} (h_{x+dx} - h_x)$$

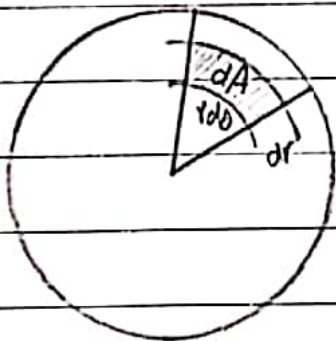
$$dh = c_p dT_m \leftarrow \text{سایکل تراکم کننده}$$

$$dh = c_p dT_m \leftarrow \text{گاز ایده آل}$$

$$q'' \times 2\pi r_0 dx = \rho \pi r_0^2 U (c_p dT_m) \rightarrow \frac{dT_m}{dx} = \frac{2 q''}{r_0 \rho c_p U}$$

$$q'' \times 2\pi r_0 dx = d \iint_A \rho u c_p T dA$$

$$\Rightarrow dT_m = \frac{2}{r_0 \rho c_p U} d \iint_A \rho u c_p T dA \Rightarrow T_m = \frac{1}{\pi r_0^2 U} \iint_A u T r d\theta dr$$



در اصل T_m متوسط دما بر مبنای قانون لایبونیچ است

$$h = \frac{q''}{T_0 - T_m} = \frac{K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{r=r_0}}{T_0 - T_m}$$

این تعریف بر مبنای دمای مرجع است ولی در جایی که T_m از انتفا (میانگین) است

توزیع دمای توسعه یافته

$$\frac{1}{\alpha} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

درجه اول توسعه یافته را هم در داخل لوله در سمت x در سمت θ تغییرات نذاریم و u و v مع r است

$$u(r) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

از تانگنسی اولیه scaling داریم

$$\frac{dT_m}{dx} \sim \frac{q''}{\rho c_p U} \rightarrow \frac{dT}{dx} \sim \frac{q''}{\rho c_p U}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \sim \frac{\Delta T}{D^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \frac{1}{x} \frac{q''}{\rho c_p U} \sim \left(\frac{q''}{\rho c_p U} \right) \left(\frac{q''}{\rho c_p U} \right)$$

$$\frac{u}{\alpha} \left(\frac{q''}{\rho c_p U} \right) \sim \frac{\Delta T}{D^2} + \frac{1}{x} \frac{q''}{\rho c_p U}$$

با جایگزینی خواهم داشت

بجز $\frac{D^2}{\Delta T}$ و تقریب $h = \frac{q''}{\Delta T}$ داریم

$$\alpha \frac{k D^2 U}{\rho c_p \Delta T} \frac{q''}{\rho c_p U} \sim 1 + \frac{D^2}{\Delta T} \frac{1}{x} \left(\frac{q''}{\rho c_p U} \right) = \frac{D^2}{\Delta T} \left(\frac{q''}{\Delta T \rho c_p U} \right) \left(\frac{q''}{\rho c_p U} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{q'' D}{\Delta T k} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{UD} \right)^2 = \left(\frac{hD}{k} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{UD} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{1}{Pe} \right)^2$$

$$Nu = \frac{hD}{k} \sim 1 \quad \text{if } Pe \gg 1 \rightarrow \text{تقریباً یکسان}$$

$$\Rightarrow u(r) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$$

فرضیات: توسعه یافته هیدرو دینامیکی \rightarrow $u(12)$ در هر α تغییر کند

$$u(12) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{بدین کجی حرارت و دانه لایه و براب اولی برسد}$$

$$\frac{\Delta T}{D^2} \sim \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

5 توسعه یافته حرارتی یعنی این فرضیه بدان خاصه حرارتی و دردی هاتق نسبت زیر این خاصه

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \sim \frac{\Delta T}{\delta_T^2}$$

و برای $D \ll \delta_T$ میل X_T در این فصل بدست خواهد آمد

در خاصه توسعه یافته $T = T(x, r)$ خاصه این است که $(x, X_T) \rightarrow \alpha$ هم $u(12)$ هم T توسعه یافته اند

10

در این خاصه داریم:

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_m} = \phi\left(\frac{r}{r_0}\right) \rightarrow \text{تبعی از این نیستند}$$

$$Nu \sim O(1) \Rightarrow Nu = \frac{hD}{k} = \frac{D}{k} \frac{q''}{T_0 - T_m} \rightarrow \frac{D \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_0}}{T_0 - T_m} \sim 1$$

15 بنابراین تغییرات $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r,r_0}$ بر حسب α سیم همان تغییرات $T_0(x) - T_m(x)$ می باشد

$$\frac{\partial T / \partial (r/r_0)}{T_0(x) - T_m(x)} = f_1\left(\frac{r}{r_0}\right) = O(1) \rightarrow \int dr \quad T(x, r/r_0) = (T_0 - T_m) f_1\left(\frac{r}{r_0}\right) + f_2(x)$$

مستاجر رابط $\frac{T_0 - T}{T_0 - T_m} = \phi\left(\frac{r}{r_0}\right)$ است که از آن داریم

$$T(x, r) = T_0(x) + (T_m - T_0) \phi\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

20

حالت فلوکس حرارتی ثابت (ثابت = q'')

$$T(x, r) = T_m(x) - \frac{q''}{h} \phi\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

تغییرات T_m نسبت به x

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT_m}{dx} \quad \text{فصل اول درسیات}$$

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2 q''}{r_0 \rho c_p u}$$

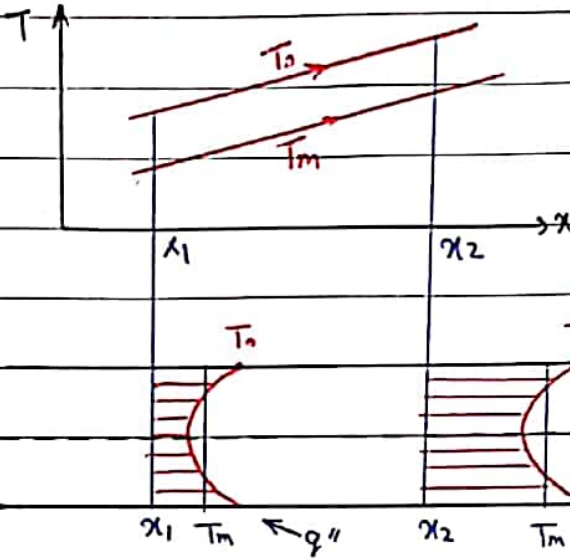
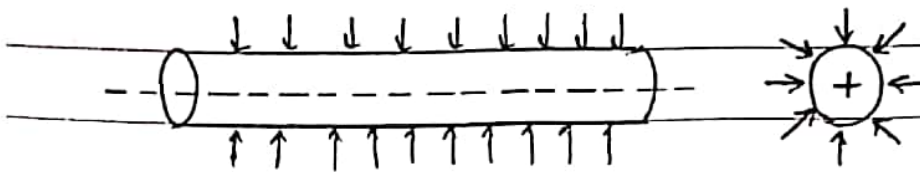
$$Nu = \frac{hD}{k} \sim 1 \rightarrow \frac{q'' D / k}{T_0 - T_m} \sim 1 \rightarrow \frac{dT_0}{dx} = \frac{dT_m}{dx} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2 q''}{r_0 \rho c_p u} = \text{ثابت}$$

25 در این حالت T_m نسبت به x تغییرات

$$\frac{dT_0}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{dT}{dx} = \frac{2 q''}{r_0 \rho c_p u} = \text{ثابت}$$

تغییرات بر حسب x برای T_0, T_m, T ثابت است و به هم برابرند

برگشت



همانطور که مشاهده می‌کنیم در هر حالت

سازگاری حرارت در طول لوله

هم T_0 و هم T_m افزایش می‌یابند

و این افزایش به صورت خطی است

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$T(x, r) = T_0(x) - \frac{q''}{h} \phi\left(\frac{r}{r_*}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2 U r_*^2 (1 - r_{*x}^2) \cdot 2 q''}{r_* \rho c_p U} = -q'' \frac{d^2 \phi}{h dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{q'' d\phi}{h dr_*} r_*^2$$

$$\Rightarrow \frac{2 h D}{K} (1 - r_*^2) = \frac{d^2 \phi}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d\phi}{dr_*}$$

$$U = 2U(1 - (r/r_*)^2) \Rightarrow \dot{u} = \frac{U}{U} = 2(1 - r_*^2)$$

$$\Rightarrow -NU \dot{u} = -2NU(1 - r_*^2) = \frac{d^2 \phi}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d\phi}{dr_*} = \frac{1}{r_*} \frac{d}{dr_*} \left(r_* \frac{d\phi}{dr_*} \right)$$

$$r_* = 0 \rightarrow \phi' = 0$$

شرایط منتهی نیز به این صورت هست:

$$2NU(r_*^2 - r_*^3) = \frac{d}{dr_*} \left(r_* \frac{d\phi}{dr_*} \right)$$

حال با دو بار اشتقاق داریم

$$\rightarrow -2NU \left(\frac{r_*^2}{4} - \frac{r_*^4}{16} \right) + C_1 = r_* \frac{d\phi}{dr_*} \rightarrow C_1 = 0$$

برای $r_* = 0$ ϕ' برابر 0 است

$$\Rightarrow \phi = C_2 - 2NU \left(\frac{r_*^2}{4} - \frac{r_*^4}{16} \right)$$

پس

B.C $T = T_0$ $r^* = 1$ $\rightarrow \phi = 0 \rightarrow C_2 = 2NU \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3}{8} NU$

$\phi = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} = NU \left(\frac{3}{8} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{8} \right) \rightarrow T(r, x) = T_0 - (T_0 - T_m) NU \left(\frac{3}{8} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{8} \right)$

$T_0 - T_m = \frac{1}{\pi r_0^2 U} \int_0^{2\pi} \int_0^r (T_0 - T) u \cdot r dr d\theta$: با استفاده از تعریف T_m داریم:

$= 4 \int_0^1 (T_0 - T) (1 - r^2) r dr = 4 \int_0^1 (T_0 - T_m) NU \left(\frac{3}{8} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{8} \right) (1 - r^2) r dr$

$1 = 4NU \int_0^1 \left(\frac{3}{8} r - \frac{r^3}{2} + \frac{r^5}{8} - \frac{3}{8} r^3 + \frac{r^5}{2} - \frac{r^7}{8} \right) dr$ 10

$1 = 4NU \left[\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4 \times 2} r^4 + \frac{1}{6 \times 8} r^6 - \frac{3}{8 \times 4} r^4 + \frac{1}{2 \times 6} r^6 - \frac{1}{8 \times 8} r^8 \right]_0^1 = \frac{11}{48} NU$

$\rightarrow NU = \frac{48}{11} = 4.364$

مانند قبل در مثال قبلی از $\frac{dT}{dx}$ استفاده نمود. 15

مقطع عرضی $\rightarrow NU = \frac{h D_n}{k} \rightarrow$ چون 3-2 $\rightarrow \frac{u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} = \nabla^2 T \rightarrow \frac{dT_m}{dx} = \frac{q''}{\rho C_p A U}$

فلسه جریته بر حسب α ثابت است ولی در محاسبه مقطع تغییر کند.

(مای دیواره یکنواخت) $(T_0 = \text{ثابت})$

$q'' = h [T_0 - T_m(x)] \rightarrow \frac{dT_m}{dx} = \frac{2}{r_0} \frac{h}{\rho C_p U} [T_0 - T_m(x)]$

$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2}{r_0} \frac{q''}{\rho C_p U} \rightarrow \int_{T_i}^{T} dT_m(x) = \int_{x_1}^x \frac{2h}{r_0 \rho C_p U} dx$ B.C $\begin{cases} T = T_i \\ x = x_1 \end{cases}$ 25

$$\ln(T_0 - T_m(x_i)) - \ln(T_0 - T_i) = \frac{-2}{r_0 \rho c_p U} (x - x_i) \rightarrow \frac{T_0 - T_m}{T_0 - T_i} = \exp\left[\frac{-2}{r_0 \rho c_p U} (x - x_i)\right]$$

$$\frac{T_0 - T_m(x)}{T_0 - T_i} = \exp\left[\frac{-Nu\alpha}{r_0^2 U} (x - x_i)\right] \rightarrow x \uparrow, T_m \uparrow \Rightarrow (T_0 - T_m) \downarrow$$

$$-2h \quad - \frac{h}{r_0} \quad - \frac{hd}{k} \alpha \quad - Nu\alpha$$

$$r_0 \rho c_p U \quad r_0^2 \frac{k}{\alpha} U \quad r_0^2 U \quad r_0^2 U$$

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_m} = \phi\left(\frac{r}{r_0}\right) \Rightarrow T_0 - T = (T_0 - T_m)\phi\left(\frac{r}{r_0}\right) \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \phi\left(\frac{r}{r_0}\right) \frac{dT_m}{dx}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = (T_0 - T_m) \frac{d\phi}{dr} \Rightarrow -\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = (T_0 - T_m) \frac{d^2 \phi}{dr^2}$$

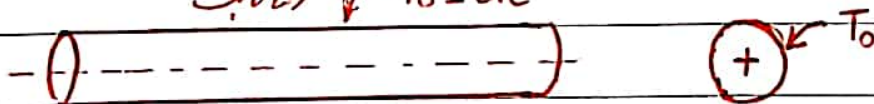
$$Ur_0 \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\hookrightarrow \frac{2U(1-r_*^2)}{\alpha} \phi(r_*) \frac{dT_m}{dx} = (T_0 - T_m) \frac{d^2 \phi(r_*)}{dr_*^2} + \frac{(T_0 - T_m)}{r_*} \frac{d\phi(r_*)}{dr_*}$$

$$U(r) = 2U\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \Rightarrow U(r) = 2U(1 - r_*^2)$$

$$2NU\phi = \frac{d^2 \phi}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d\phi}{dr_*}, \text{ B.C. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi}{dr_*} = 0, @ r_* = 0 \\ \phi = 0, @ r_* = 1 \end{array} \right.$$

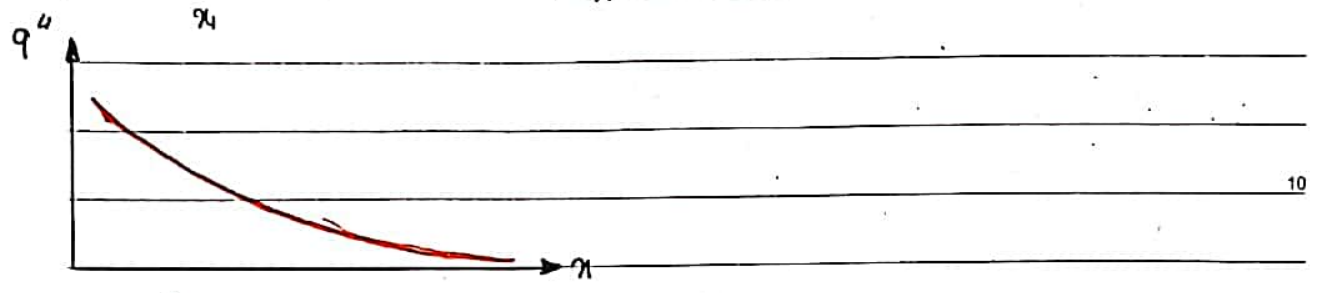
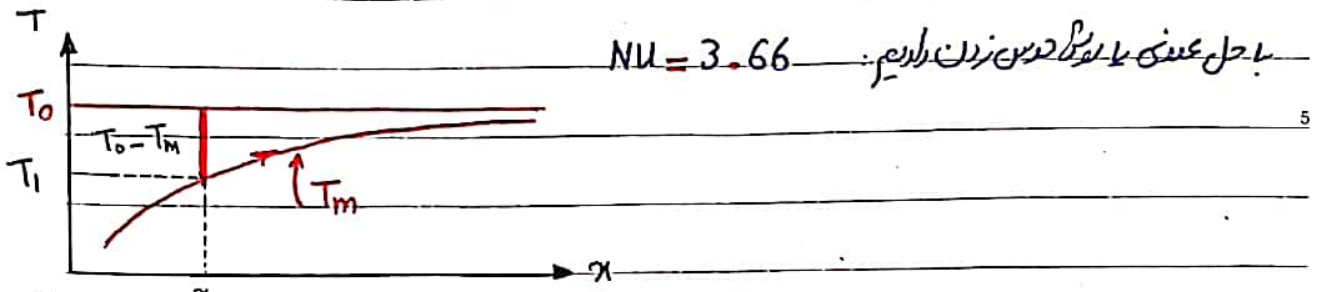
توضیح: $T_0 = cte$



معادله دیفرانسیل قبل است ولی بر روی ϕ در سمت چپ مرتبه اول است

$$h = \frac{q''}{T_0 - T_m} = \frac{k \frac{\partial T}{\partial r} |_{r=r_0}}{T_0 - T_m} \Rightarrow -\frac{\partial T}{\partial r} = (T_0 - T_m) \frac{d\phi}{dr}$$

$$h = \frac{-K(T_o - T_m) \frac{d\phi}{dr} \cdot \frac{2r}{2r}}{(T_o - T_m)} = \frac{-K \frac{d\phi}{dr} |_{r=1}}{D} \rightarrow Nu = -2 \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{r=1}$$



$Pe \gg 1$

$Nu = hD_n / K$

Cross Section	$f Re D_n$			Isothermal wall	
	Fully Developed	Fully Developed	Slug flow	Fully Developed	Slug flow
Square	14.167	3.614	7.083	2.980	4.926
Hexagon	15.065	4.021	7.533	3.353	5.380
Octagon	15.381	4.027	7.690	3.467	5.526
Circle	16	4.364	7.962	3.666	5.769

$Pr \rightarrow \infty$

جیل slug جانیے لستے سرعت در آن یکنواخت دیر $u=U$

$u=U$, like the velocity distribution of a solid slug

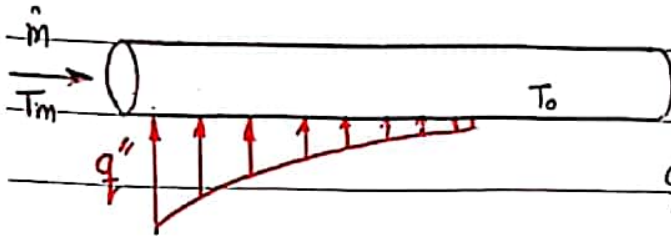
Subject:

Year:

Month:

Date:

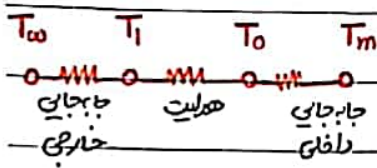
NOTE BOOK



1) اگر در هدايت حرارتی لوله صرف نظر نمود

$$q'' = \underbrace{h_e}_{\text{تأثير ثابت}} [\underbrace{T_{aw}}_{\text{تأثير ثابت}} - T_o(x)]$$

52) اگر صرف نظر نمود یعنی مقاومت هدايت حرارتی قابل صرف نظر نبود

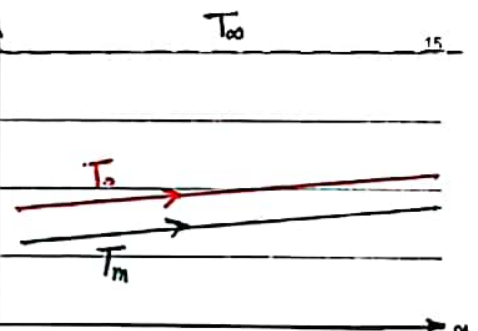
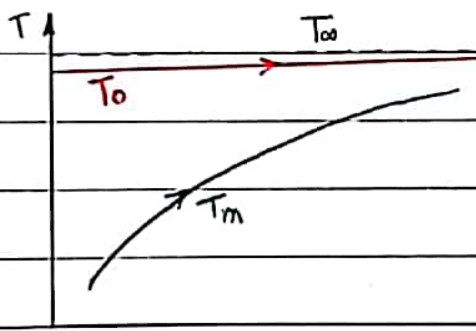
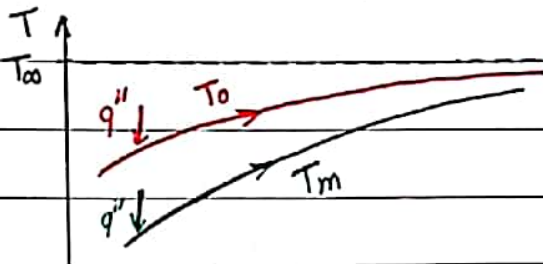


$$\frac{l}{2\pi r_o h_{eff}} = \frac{l}{2\pi r_w h_e} + \frac{\ln(r_w/r_o)}{2\pi k}$$

$$h_{eff} = \left[\frac{r_o}{k} \ln\left(\frac{r_w}{r_o}\right) + \frac{r_o}{r_w h_e} \right]^{-1}$$

k_w : هدايت حرارتی لوله
 r_w : شعاع خارجی لوله

10



Isothermal wall limit

Uniform heat flux limit 20

$$h_e \gg \frac{k_w}{r_o}$$

$$h_e \ll \frac{k_w}{r_o}$$

مقاومت جانبی خیلی کم

مقاومت جانبی بیرون خیلی زیاد

$$T_o = T_{aw} = \text{تأثير ثابت}$$

$$q'' = \text{تأثير ثابت}$$

$$\hat{Nu} = \frac{q'' D}{T_{\infty} - T_m} K$$

بین T_{∞} و T_m می توانیم \hat{Nu} را تعریف کنیم:

برای داخل لوله $\rightarrow \hat{Nu} = \frac{q'' D}{T_o - T_m} K$

با استفاده از تعریف عدد بیوت (Biot NO) برای سیستم (lumped) با توزیع دمای یکنواخت

$$Bi = \frac{h_e r_o}{K} = \frac{h_e}{K/r_o} \quad (T_i = T_o)$$

با استفاده از قوانین مقاومت حرارتی داریم:

$$\frac{1}{\hat{h}D} = \frac{1}{h_e D} + \frac{1}{h_m D} \quad \times 2K \quad \rightarrow \quad \frac{2K}{\hat{h}D} = \frac{2K}{2r_o h_e} + \frac{2K}{h_m D}$$

$$\rightarrow \frac{2}{\hat{Nu}} = \frac{1}{Bi} + \frac{2}{Nu}$$

توزیع دمای بیلابند توسعه یافته حرارتی به صورت زیر فرض می کنیم:

$$\theta(r_*) = \frac{T_{\infty} - T}{T_{\infty} - T_m(x)}$$

با جایگذاری در معادله انرژی داریم:

$$-2\hat{Nu}(1-r_*^2)\theta = \frac{d^2\theta}{dr_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{d\theta}{dr_*}$$

شرایط مرزیه نیز به این صورت است:

$$\frac{d\theta}{dr_*} = 0 \quad @ \quad r_* = 0 \quad \& \quad \frac{d\theta}{dr_*} = -Bi\theta \quad @ \quad r_* = 1$$

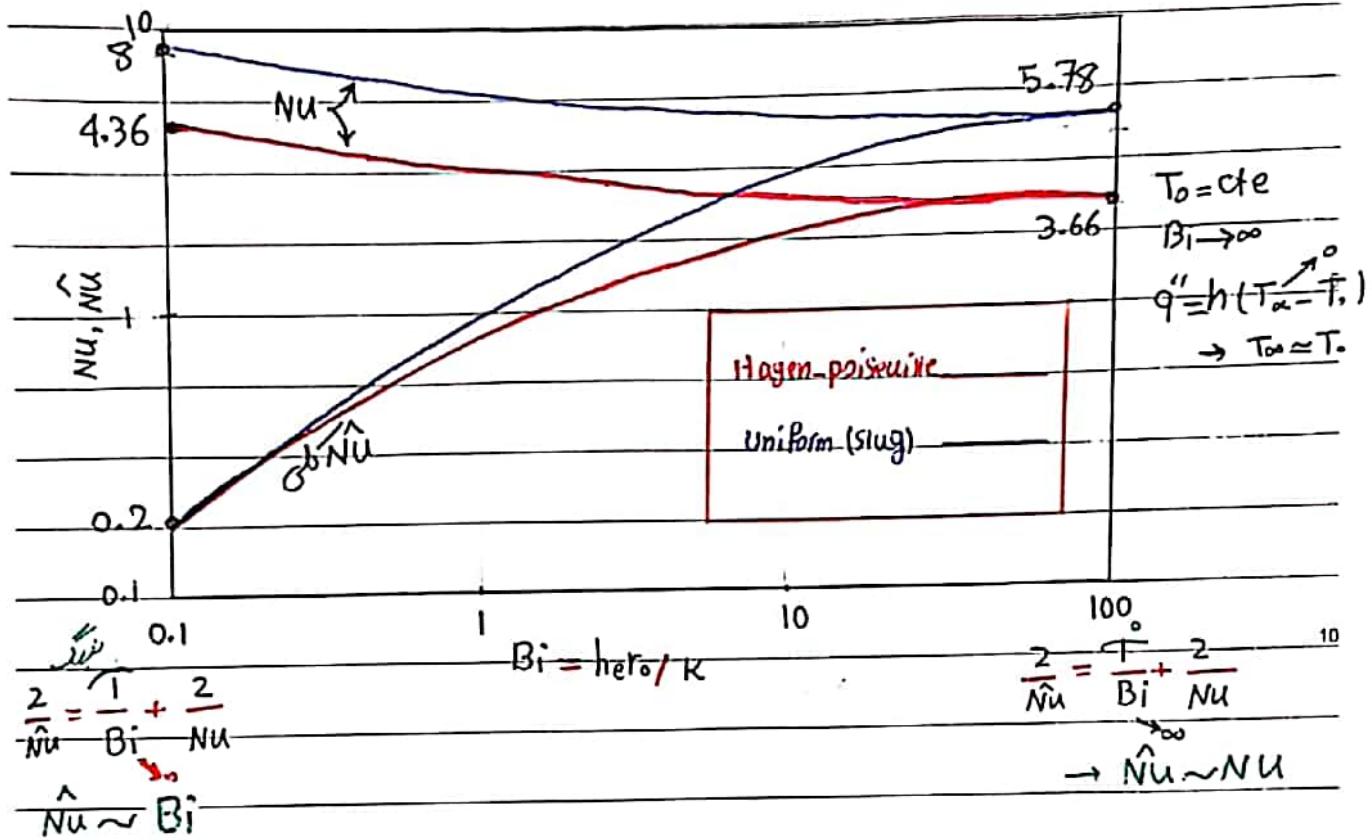
شرایط مرزیه بیلابند به این صورت است:

$$q'' = -K \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = h_e (T_{\infty} - T_o) \quad @ \quad r = r_o$$

همچنین از تعریف \hat{Nu} می توان نوشت:

$$\hat{Nu} = \frac{q'' D}{T_{\infty} - T_m} K = \frac{K \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \cdot \frac{2r_o}{D}}{T_{\infty} - T_m} K$$

$$= \frac{-2(T_{\infty} - T_m) \frac{d\theta}{dr_*} \Big|_{r_* = 1}}{T_{\infty} - T_m} = 2 \frac{d\theta}{dr_*} \Big|_{r_* = 1} \rightarrow \frac{\hat{Nu}}{2} = - \frac{d\theta}{dr_*} @ r_* = 1$$



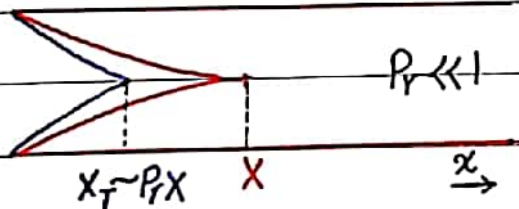
انتقال حرارت جریان در حال توسعه (Developing Flow)

15

در مسافت های قبلی $\max(X, X_T) < \alpha$ در جریانی توسعه یافته (مستقر و دینامیک و لاریج) بود ولی

در این مسافت $X_T < \alpha$ و $Pr \ll 1$

20



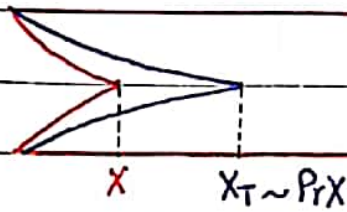
در حالت $Pr \ll 1$ ، δ_T سریع تر از δ رشد می کند: $\delta_T(x) \sim \alpha Pr^{-1/2} Re_x^{-1/2}$

در جریان در حال توسعه حرارتی $X_T \sim \alpha$ ، $\delta_T \sim D_h$ در این حالت

25

$$X_T Pr^{-1/2} Re_x^{-1/2} \sim D_h \Rightarrow \left(\frac{X_T}{D_h} \cdot \frac{X_T}{D_h} \right)^{1/2} \sim \frac{U X_T Pr}{\nu}$$

$$\frac{X_T / D_h}{\frac{UD_h}{\nu}} = \left(\frac{X_T / D_h}{Re_{D_h}} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 1 \Rightarrow \text{مراجع: } \frac{X_T / D_h}{Re_{D_h}} \sim 0.1$$



$Pr \gg 1$

برخلاف جریان خارجی، در اینجا به جریان داخلی اشاره می‌کند

است و روابط به دست آمده در صورت حالت

$$\left(\frac{X / D_h}{Re_{D_h}} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 1 \rightarrow \frac{X_T}{X} \sim Pr$$

$Pr \ll 1$ ، $Pr \gg 1$ صادق است

در نتیجه برای هر دو حالت داریم:

$$Nu = \frac{h D_h}{k} \sim \frac{q'' D_h}{\Delta T k} \sim \frac{D_h}{\delta_T} \sim \left(\frac{\alpha / D_h}{Re_{D_h} Pr} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow Nu = f \left[\frac{\alpha / D_h}{Re_{D_h} Pr} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \alpha \ll X_T$$

برای حالت (developing) در صورتیکه $X_T > \alpha > X$ توزیع سرعت تکین نیست $Pr \rightarrow 0$

با $Re_D \gg 1$ تناقض دارد پس برای حالت در حال توسعه مانند یک صلب با آن هدایت داریم است

برای حالت تک لوله با سیال انزوتروپ احاطه شده است با حل معادلات داریم:

$$\theta = \frac{\hat{Nu}^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{J_0(\sqrt{\hat{Nu}})}{J_1(\sqrt{\hat{Nu}})} \rightarrow \hat{Nu}^{\frac{1}{2}} = J_1(\sqrt{\hat{Nu}}) = Bi J_0(\sqrt{\hat{Nu}})$$

$$\Rightarrow \lim_{Bi \rightarrow 0} \hat{Nu} = 2Bi, \quad \lim_{Bi \rightarrow \infty} \hat{Nu} = 5.783$$

برای حالت (developing) در صورتیکه $x_T > x > x_0$ توزیع سرعت تکمیل یافته است $Pe \gg 1$ است و تغییر ندارد. (Slug Flow) دلی برای حالت در حال توسعه مانند یک بدنه صلب با تماس حرارتی از آن طرف است. برای حالتیکه یک لوله با لوله ای دیگر در تماس است (شکل 3-11) با عرض دانه 3-82 و با لوله ای جزئی 3-83 تا 3-85 دارم:

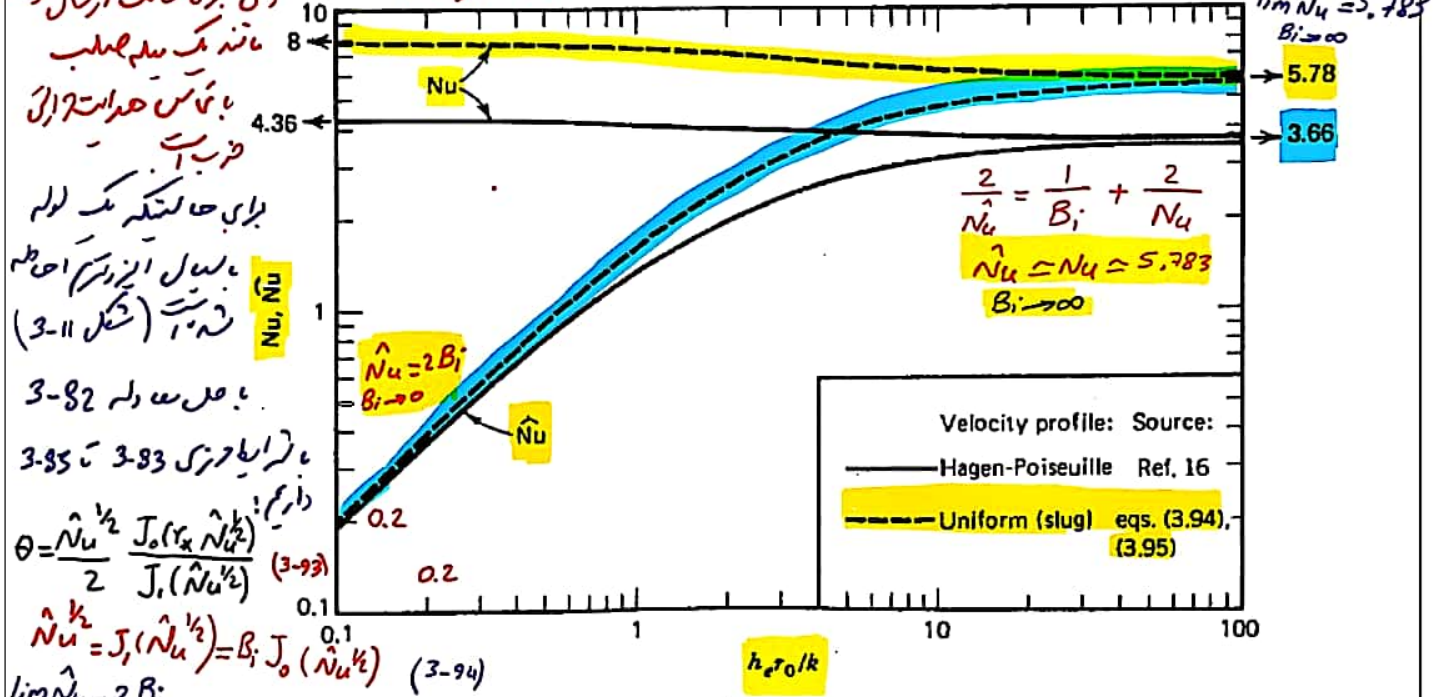


Figure 3.12 Nusselt number for thermally developed flow in a round tube surrounded by an isothermal fluid.

حالت در حال توسعه یافتن حرارتی (Thermally Developing) با جریان هگن بومیل

حالت $\langle \alpha \langle x_T, Pr \rangle \rangle$ با توزیع سریت توسعه یافته و درجه حرارت در حال توسعه یافتن معادله انرژی

با شرایط مرزی زیر باید حل شود:

$$\frac{1}{2} (1 - r_*^2) \frac{\partial \theta_*}{\partial x_*} = \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \theta_*}{\partial r_*}$$

این مسئله توسط Graetz اولین بار حل شد (مسئله Graetz)

با تغییرهای بعدی

$$\theta_* = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}, \quad r_* = \frac{r}{r_0}, \quad x_* = \frac{x/D}{Re \cdot Pr}$$

در میانه دیواره تکین یافت $\Rightarrow \theta_* = 0 @ r_* = 1$

شرط مرزی تقارن $\Rightarrow \frac{\partial \theta_*}{\partial r_*} = 0 @ r_* = 1$

در دیواره $\Rightarrow \theta_* = 1 @ r_* = 0$

معادله انرژی خطی در حالت توسعه یافته و از نوع Sturm-Liouville است و حل آن به دست سری میسر می آید.

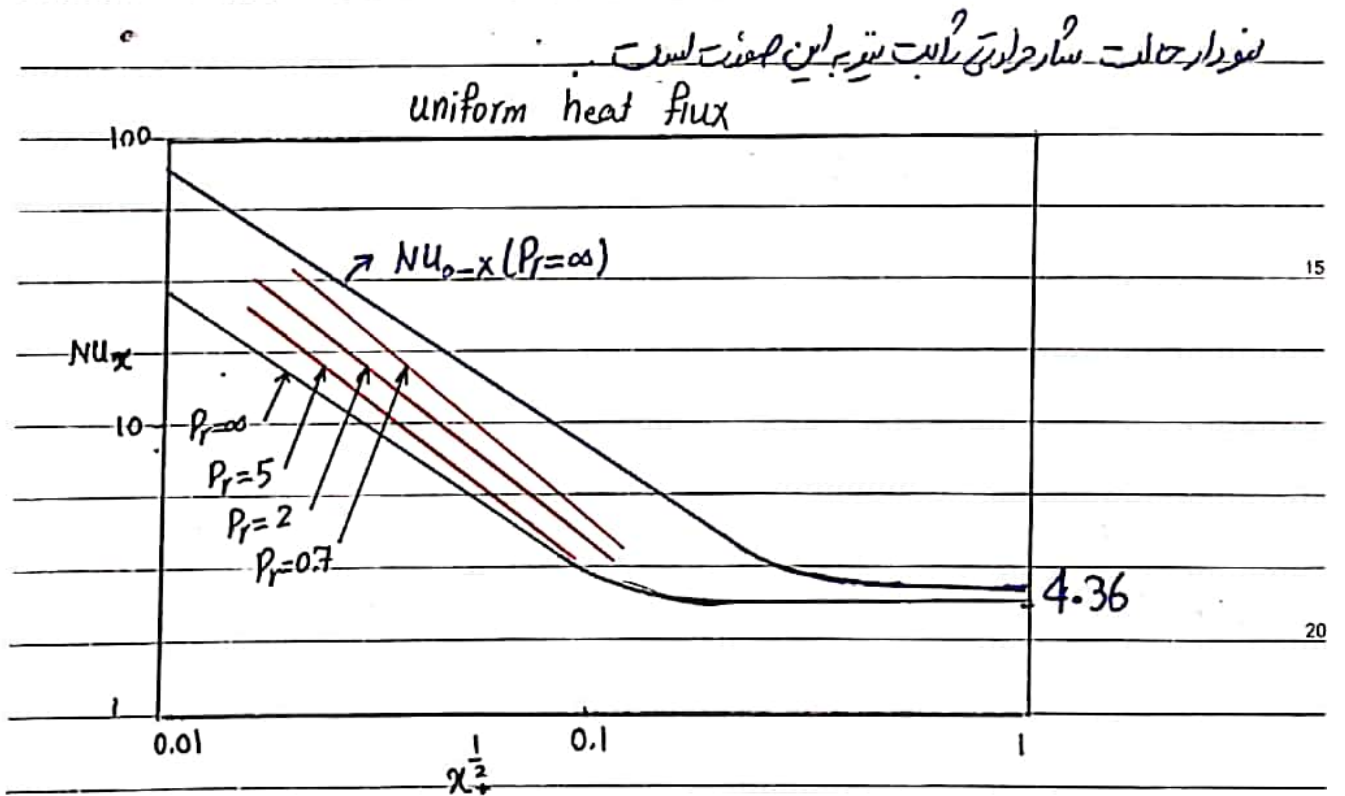
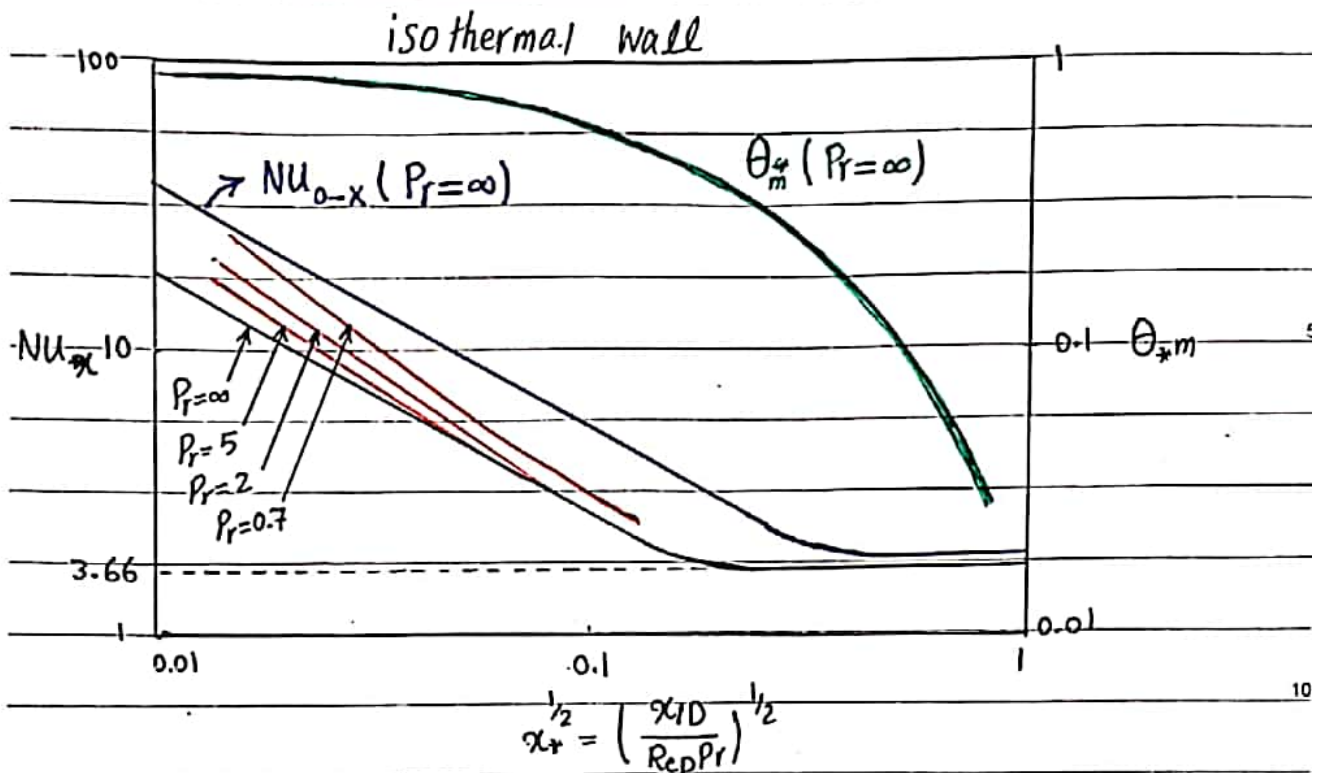
$$\theta_* = R(r_*) E(x_*) \begin{cases} R'' + \frac{1}{r_*} R' + \lambda^2 (1 - r_*^2) R = 0 \\ E' + 2\lambda E = 0 \rightarrow E = C \exp(-2\lambda^2 x_*) \end{cases}$$

R_n : eigen function $\Rightarrow \theta_* = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n(r_*) \exp(-2\lambda_n^2 x_*)$
 λ_n : eigen value

$$\theta_{*m} = \frac{T_m - T_0}{T_w - T_0} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp(-2\lambda_n^2 x_*)$$

$$Nu_x = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \exp(-2\lambda_n^2 x_*)}{2 \sum_{n=0}^{\infty} G_n (\lambda_n^2)^{-1} \exp(-2\lambda_n^2 x_*)} \Rightarrow Nu = \frac{1}{4x_*} \ln \left(\frac{1}{\theta_{*m}} \right)$$

n	λ_n	G_n
0	2.704	0.7488
1	6.679	0.5438
2	10.673	0.4629
3	14.671	0.4154
4	18.671	0.3829
5	22.67	0.3587



حل معادله برای دمای یکسان

$$Nu_{x=0-x} = \begin{cases} 1.077 x_+^{-1/3} - 0.7 & ; x_+ < 0.01 \\ (3.657 + 6.879 x_+^{-0.988}) \exp(-57.2 x_+) & ; x_+ > 0.01 \end{cases}$$

$$Nu_x = \begin{cases} 1.615 x_+^{-1/3} - 0.7 & ; x_+ < 0.005 \\ 1.61 x_+^{-1/3} - 0.2 & ; 0.005 < x_+ < 0.03 \\ 3.657 + 0.0499/x_+ & ; x_+ > 0.03 \end{cases}$$

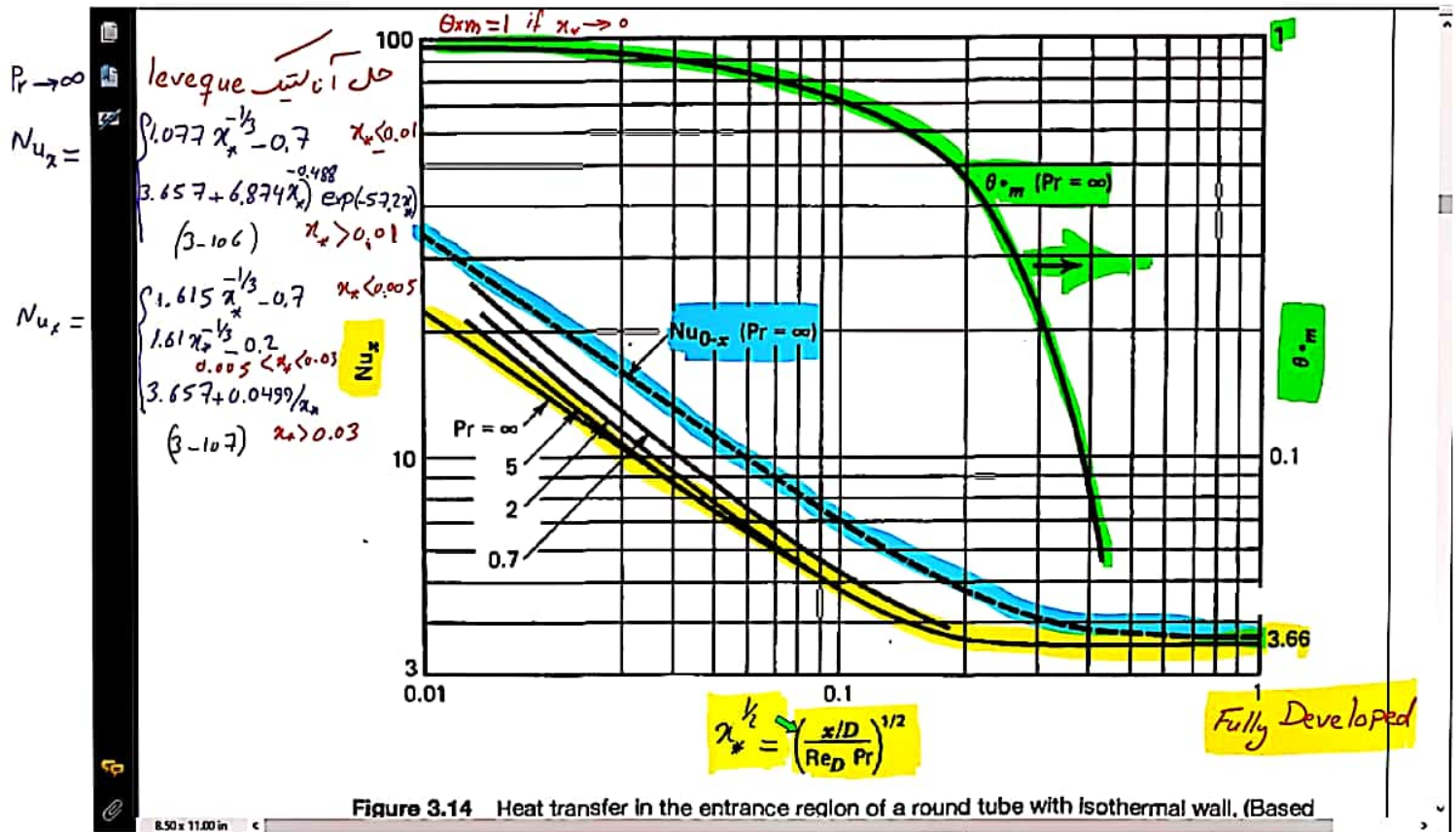
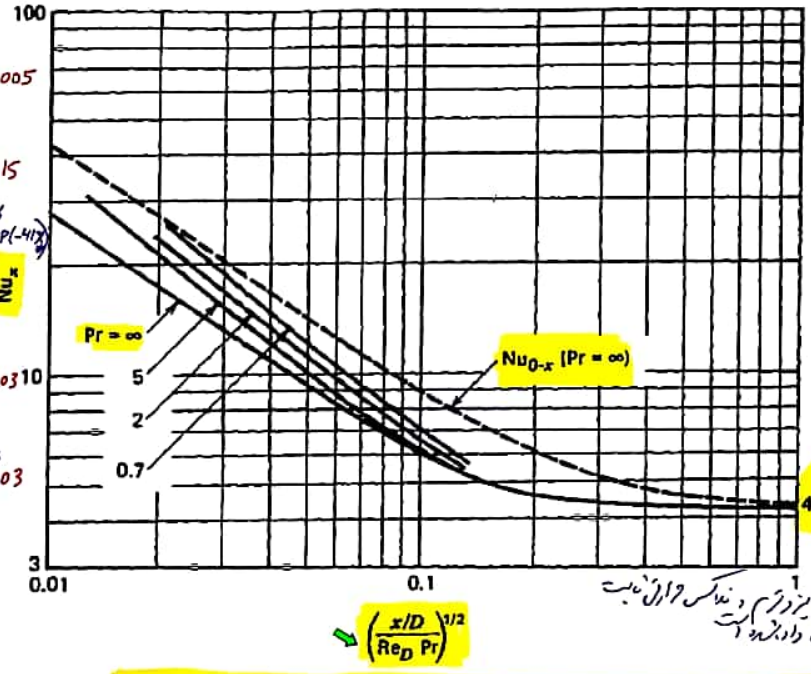


Figure 3.14 Heat transfer in the entrance region of a round tube with isothermal wall. (Based

$Nu_x =$
 $1.302 x^{-1/2}$ $x \leq 0.0005$
 $1.302 x^{-1/2} - 0.5$
 $0.0005 < x \leq 0.0015$
 $4.364 + 8.68 (10 x)^{3-0.556} \exp(-41x)$ $x > 0.001$
 Nu_x
 $1.953 x^{1/3}$ $x < 0.0310$
 $4.364 + 0.0722/x$ $x > 0.03$
 Nu_{0-x}



لوله در حالت توسعه یافته $q'' = \text{const}$
 $Pr \rightarrow \infty$
 در حالت توسعه یافته

حالت توسعه یافته

* شبیه همین حالت برای جریان در لوله در حالت توسعه یافته یعنی در محدوده ای که در آنجا $3 < x/D < 10$ و $0.7 < Pr < 10$ وجود دارد که در شکل 3-15 نشان داده شده است

Figure 3.15 Heat transfer in the entrance region of a round tube with uniform heat flux. (Based on data from Refs. 10 and 21.)

حل کلی برای شرایط ثابت

$$\text{NU}_{0-x} = \begin{cases} 1.953 \alpha_*^{1/3} & \alpha_* < 0.03 \\ 4.364 + 0.0722 / \alpha_* & \alpha_* > 0.03 \end{cases}$$

$$\text{NU}_x = \begin{cases} 1.302 \alpha_*^{-1/2} - 1 & \alpha_* < 0.0005 \\ 1.302 \alpha_*^{-1/2} - 0.5 & 0.0005 < \alpha_* < 0.0015 \\ 4.364 + 8.68 (10 \alpha_*^{-0.506}) \exp(-91 \alpha_*) & \alpha_* > 0.0015 \end{cases}$$

Thermally and Hydraulically Developing Flow

حل کلی برای رولر با رانندگی ثابت در محدوده $0.1 < Pr < 100$

$$\text{NU}_x = 7.55 + \frac{0.024 \alpha_*^{-1.14} (0.0179 Pr^{0.17} \alpha_*^{-0.64})}{(1 + 0.0358 Pr^{0.17} \alpha_*^{-0.64})^2}$$

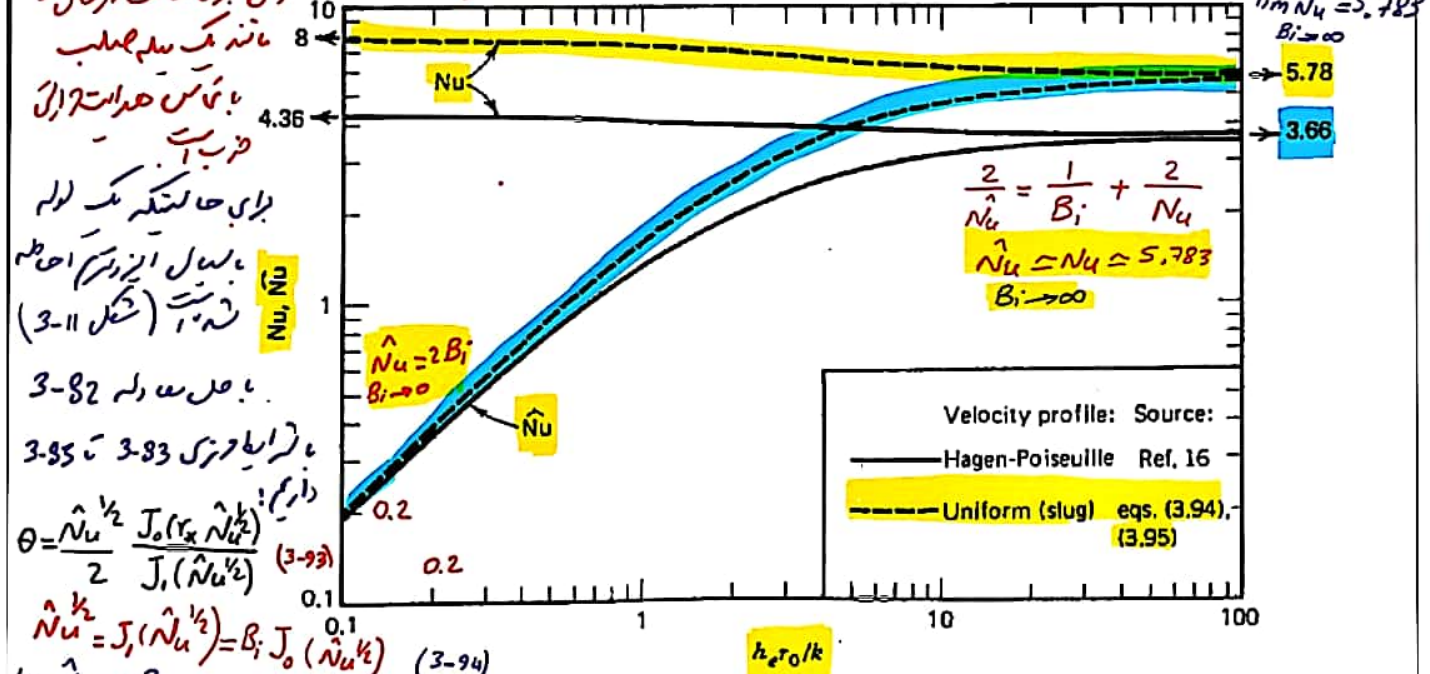
$$\text{NU}_{0-x} = 7.55 + \frac{0.024 \alpha_*^{-1.14}}{1 + 0.0358 Pr^{0.17} \alpha_*^{-0.64}}$$

برای حالت سار و ثابت نیز حل کلی توسط Churchill and DZoe

به صورت زیر آورده شده است

$$\text{NU}_x = 4.364 \left| 1 + (Gz/29.6)^2 \right|^{1.6} = \left[1 + \left(\frac{Gz/19.04}{[1 + (Pr/0.0207)^{2/3}]^{1/2} [1 + (Gz/29.6)^2]^{1/3}} \right)^{3/2} \right]^{1/3}$$

برای حالت (developing) در صورتیکه $X_f > x > X$ توزیع سرعت بلند افت $Pe_D > 10$ متغیر دارد.
 (Slug Flow)
 دس برای حالت در حال توسعه
 مانند یک پدیده
 با تپس حرارتی
 برای حالتیکه یک لوله
 با طول این در تمام احاطه
 شده است (شکل 3-11)
 با طول $3-82$
 با $3-83$ تا $3-85$
 داریم:



$$\theta = \frac{\hat{Nu}^{1/2}}{2} \frac{J_0(r_x \hat{Nu}^{1/2})}{J_1(\hat{Nu}^{1/2})} \quad (3-93)$$

$$\hat{Nu}^{1/2} = J_1(\hat{Nu}^{1/2}) = Bi J_0(\hat{Nu}^{1/2}) \quad (3-94)$$

$$\lim_{Bi \rightarrow 0} \hat{Nu} = 2 Bi$$

$$\lim_{Bi \rightarrow \infty} \hat{Nu} = 5.783$$

Figure 3.12 Nusselt number for thermally developed flow in a round tube surrounded by an isothermal fluid.

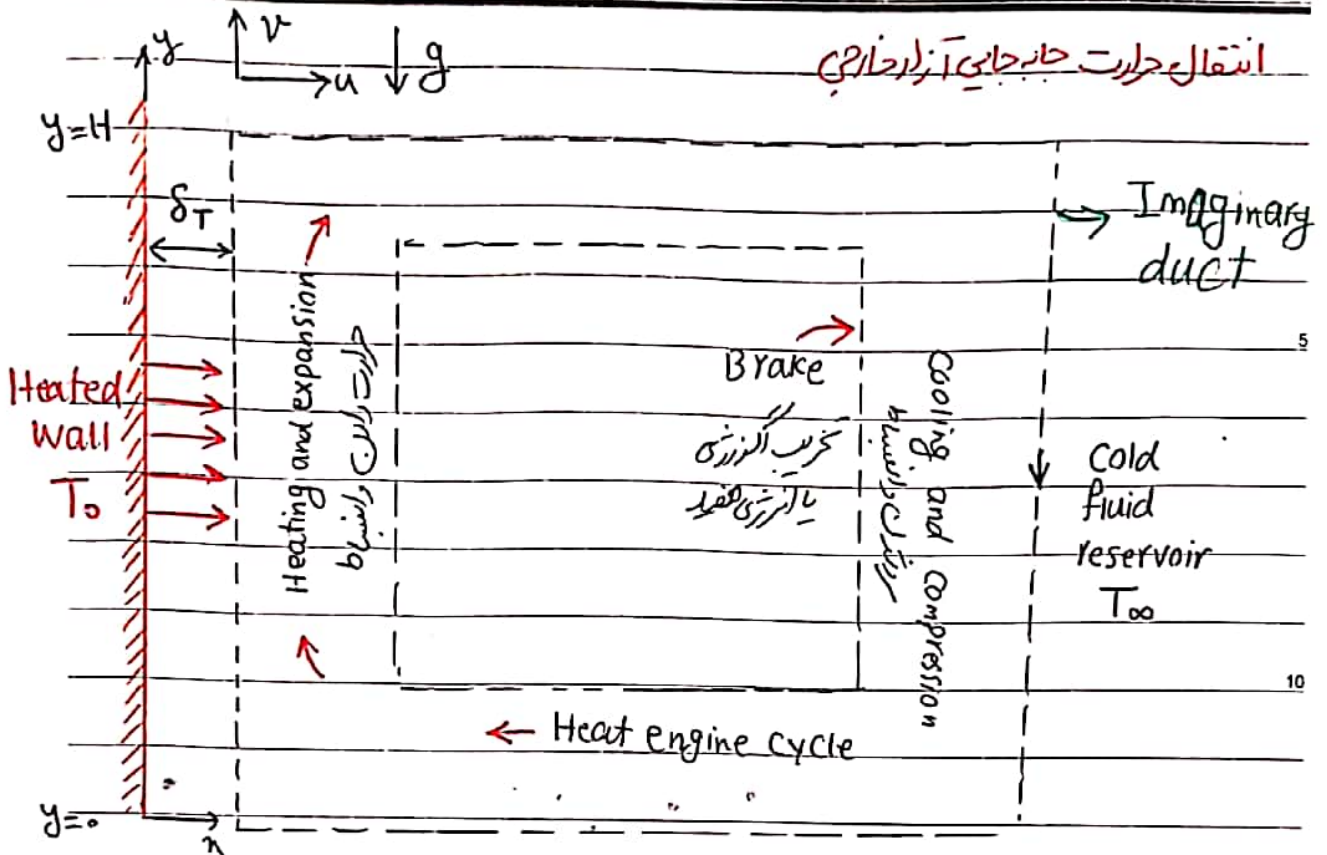
Subject:

Year:

Month:

Date:

NOTE BOOK



چرخه انتقال حرارت جنبه‌های آن را در یک دیواره‌ای که حرارت را در خود دارد، مانند چرخه‌ای که در موتور است

که در ابتدا به سیال نوسان داده می‌شود تا منبسط شود پس دوباره آن را تراکم می‌کنند و منقبض می‌شود و در این میان

انرژی مفید آن در اثر تخریب الکتریکی از بین می‌رود

معادلات لایه‌های مرزی بسیار زیاد است به همین دلیل برای حل آن به روش عددی نیاز داریم: $\delta_T \ll H, \delta_v \ll H, \delta_p \ll H, \delta_T \sim x$

$$Q = (H \times W) h_0 H (T_0 - T_\infty)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

معادلات لایه‌های مرزی بسیار زیاد است

$$\frac{dp_\infty}{dy} = -\rho_\infty g \quad \text{فشار هیدروستاتیک} \rightarrow \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\rho_\infty - \rho) g + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$P = \rho RT \rightarrow \rho = \frac{P_\infty / R}{T}, \quad \rho_\infty = \frac{P_\infty / R}{T_\infty}$$

برای گاز ایده آل می‌توانیم:

$$\Rightarrow \rho - \rho_\infty = \frac{P_\infty}{RT} \left(1 - \frac{T_\infty}{T} \right) \rightarrow \rho - \rho_\infty = \rho \left(1 - \frac{T_\infty}{T} \right) \rightarrow 1 - \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\text{if } T - T_\infty \ll T_\infty \rightarrow \rho \approx \rho_\infty \left[1 - \frac{1}{T_\infty} (T - T_\infty) + \dots \right] \rightarrow \rho \approx \rho_\infty \left[1 - \frac{1}{T_\infty} (T - T_\infty) \right]$$

$$\Rightarrow \text{برای گاز ایده آل} \quad \rho_\infty - \rho \approx \frac{\rho_\infty}{T_\infty} (T - T_\infty)$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \rightarrow \beta \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \rightarrow \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T}$$

با تعریف β می‌توانیم:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta (T - T_\infty) g$$

با جایگزینی در معادله‌ی موینتوم داریم:

این معادله را معادله‌ی موینتوم با تقویت \rightarrow Boussinesq می‌نامند.

20 شرایط اولیه: $T = T_\infty$ باشد منجر به $u = v = 0$ خواهد بود در نتیجه در لبه‌ی ورودی به حل می‌توانیم رسید.

$$\text{B.C.} \begin{cases} u = v = 0, T = T_\infty @ x = 0 \\ \nu = 0, T = T_\infty \text{ as } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

برای حل جدیدین روش داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{u}{\delta T} \sim \frac{v}{H}$$

← آنالیز ابعادی

$$\Delta T = T - T_\infty \sim T_0 - T_\infty \rightarrow u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g\beta(T - T_\infty)$$

$$\frac{uv}{\delta T} \sim \frac{uv}{\delta T} \sim \frac{v^2}{H} \quad \frac{v^2}{\delta T^2} \quad g\beta\Delta T$$

از طریق رابره Scale نزدیکانده تقسیم کنیم خواصیم داشت:

$$\frac{uv/\delta T}{g\beta\Delta T} \sim \frac{v\delta T \cdot v/\delta T}{g\beta\Delta T} \sim \frac{\frac{\alpha^2 H^2}{\delta T^2} \cdot \frac{\delta T}{H} \cdot \frac{1}{\delta T}}{g\beta\Delta T \cdot \frac{\alpha v H^3}{\alpha v H^3}} \sim \frac{\frac{H^2}{\delta T^2}}{Ra_H Pr} \sim \left(\frac{H}{\delta T}\right)^4 Ra_H^{-1} Pr^{-1}$$

$$Ra_H = \frac{g\beta\Delta T H^3}{\alpha\nu}$$

$$\frac{v^2/\delta T^2}{g\beta\Delta T} \sim \frac{v\alpha H \cdot 1}{\delta T^2 \delta T} \sim \left(\frac{H}{\delta T}\right)^4 \sim \left(\frac{H}{\delta T}\right)^4 Ra_H^{-1}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

از معادله انرژی نزدیکانده تقسیم کنیم خواصیم داشت:

$$\frac{u\Delta T}{\delta T} \sim \frac{v\Delta T}{H} \sim \frac{\alpha\Delta T}{\delta T^2} \Rightarrow \frac{v\Delta T}{H} \sim \frac{\alpha\Delta T}{\delta T^2} \Rightarrow v \sim \frac{\alpha H}{\delta T^2}$$

حال دو حالت در نظر گرفت: حالت اول $Pr \gg 1$ در این حالت از ترم انرژی در توان اول صرف نظر کرد.

$$\frac{v^2/\delta T^2}{g\beta\Delta T} \sim \frac{v\alpha H \cdot 1}{\delta T^2 \delta T} \sim \left(\frac{H}{\delta T}\right)^4 Ra_H^{-1} Pr^{-1} \sim 1$$

$$\Rightarrow \delta T \sim H Ra_H^{-1/4}, \quad v \sim \frac{\alpha H}{\delta T^2} \Rightarrow v \sim \frac{\alpha H}{H Ra_H^{-1/2}} \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/2}$$

$$h \sim \frac{k}{\delta T} \sim \frac{k}{H Ra_H^{-1/4}} \Rightarrow Nu = \frac{hH}{k} \sim Ra_H^{1/4}$$

تکوناً در این حالت که توسط لایه مرزی درازتر و بر اثر دو شکلیت به یکدیگر پیوسته و در حقیقت لایه مرزی

است در آن لایه مرزی وجود ندارد پس داریم: $\delta \sim H Ra_H^{-1/4} Pr^{1/2}$

$$\nu \frac{\nu}{H} \sim \frac{\nu \nu}{\delta^2} \Rightarrow \delta^2 \sim \frac{\nu H}{\frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/2}} \Rightarrow \delta^2 \sim \frac{Pr H^2}{Ra_H^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \delta \sim H Ra_H^{-1/4} Pr^{1/2} \Rightarrow \frac{\delta}{\delta_T} \sim Pr^{1/2} > 1 \Rightarrow \delta > \delta_T$$

حالت دوم $Pr \ll 1$ در این حالت لایه مرزی در تمام طول کانال وجود دارد

$$\delta \sim H Ra_H^{-1/4} Pr^{1/2} \Rightarrow \left(\frac{H}{\delta_T}\right)^4 Ra_H^{-1} Pr^{-1} \sim 1 \Rightarrow \delta_T^4 \sim H^4 Ra_H^{-1} Pr^{-1}$$

$$\Rightarrow \delta_T \sim H (Ra_H Pr)^{-1/4} \Rightarrow \delta_T \sim H Bo_H^{-1/4} \quad Bo_H = \frac{Ra_H Pr}{H}$$

$$\nu \sim \frac{\alpha H}{\delta_T^2} \Rightarrow \nu \sim \frac{\alpha H}{H^2 (Ra_H Pr)^{-1/2}} \Rightarrow \nu \sim \frac{\alpha}{H} (Ra_H Pr)^{1/2} \Rightarrow h \sim \frac{k}{\delta_T}$$

$$\Rightarrow h \sim \frac{k}{H (Ra_H Pr)^{-1/2}} \Rightarrow Nu \sim (Ra_H Pr)^{1/4}$$

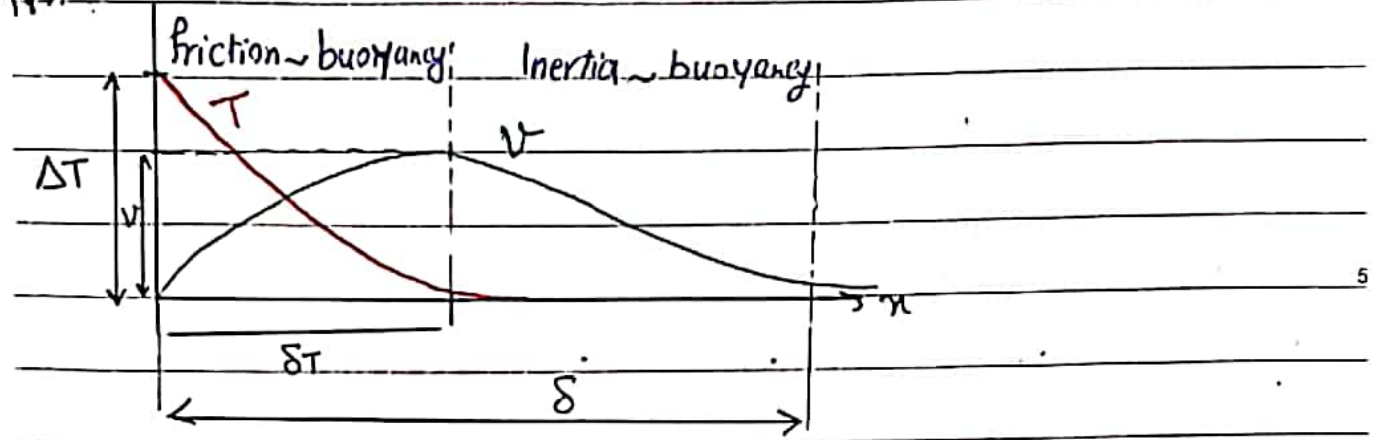
$$\delta_v \rightarrow \text{در این حالت} \Rightarrow \nu \frac{\nu}{\delta_v^2} \sim g \beta \Delta T \Rightarrow \nu \frac{\alpha}{H} (Ra_H Pr)^{1/2} \sim g \beta \Delta T$$

$$\delta_v \sim H Ra_H^{-1/4} Pr^{1/4} \Rightarrow \delta_v \sim H Ra_H^{-1/4} Pr^{1/4} \Rightarrow \delta_v \sim H Gr_H^{1/4} \Rightarrow \frac{\delta_v}{\delta_T} \sim Pr^{1/2} \ll 1$$

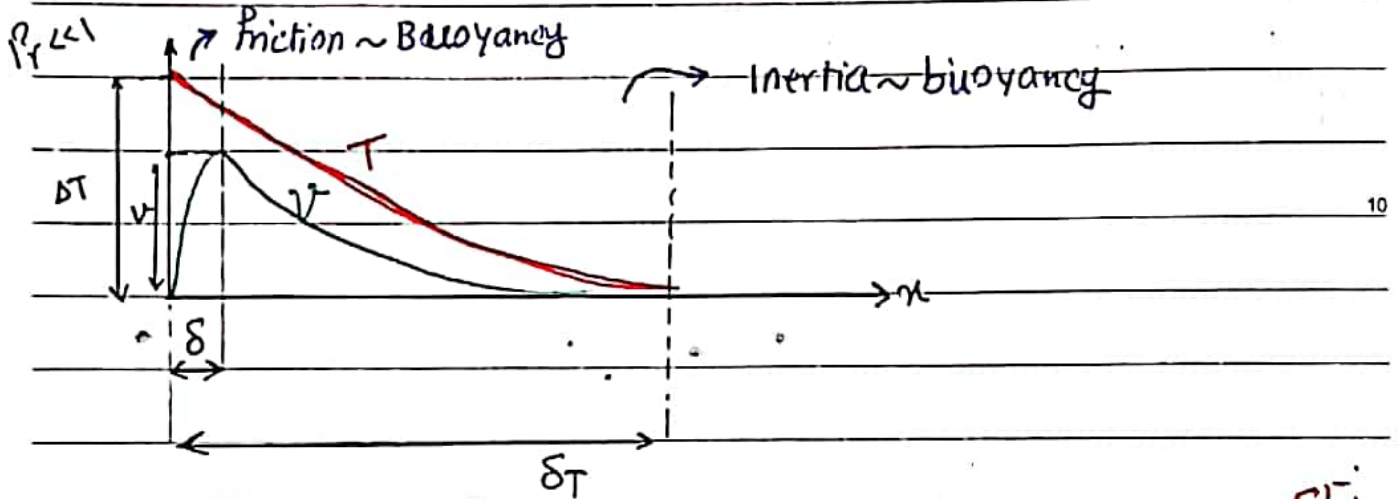
$Bo_H = Ra_H Pr$ عدد بوسینیسکو

$Gr = Ra / Pr$ عدد گراسوف

$Pr \gg 1$



$Pr \ll 1$



(Pr) Prandtl Number Range	(δ_T) Thermal boundary Layer Thickness	wall jet velocity profile			Nusselt Number 15 $NU = \frac{hH}{k}$
		δ_v	Distance from wall to velocity peak	velocity Scale	
$Pr \ll 1$	$H Ra_H^{-1/4}$	$H Ra_H^{-1/4} Pr^{1/2}$	$H Ra_H^{-1/4}$	$\propto \frac{1}{H} Ra_H^{1/2}$	$Ra_H^{1/4}$
$Pr \gg 1$	$H Bo_H^{-1/4}$	$H Ra_H^{-1/4} Pr^{1/4} = H Gr_H^{1/4}$	$H Bo_H^{-1/4}$	$\propto \frac{1}{H} (Pr Ra_H)^{1/2}$	$(Ra_H Pr)^{1/4}$ 20

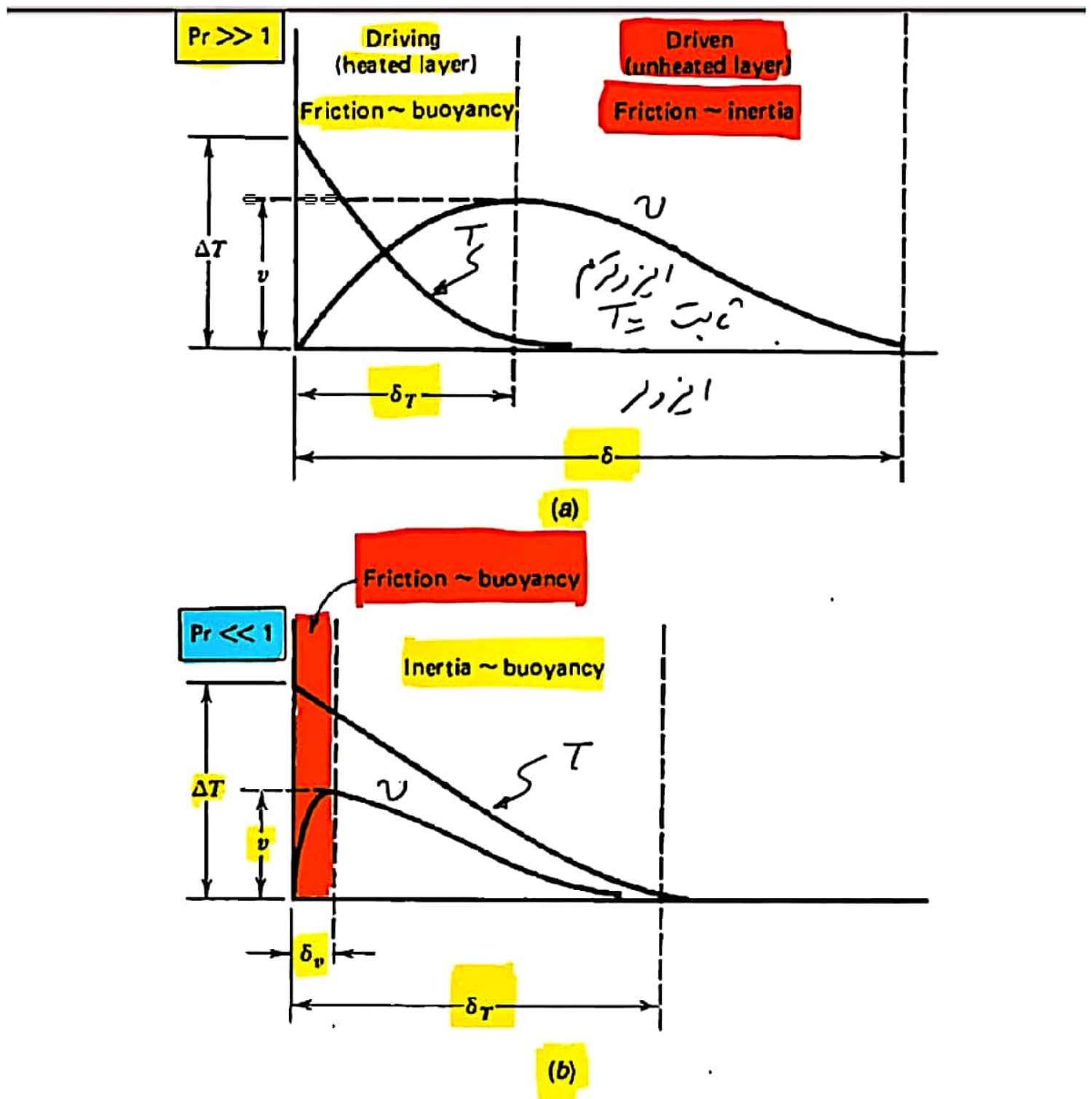


Figure 4.2 Two length scales of the boundary layer flow along a heated vertical wall.

حل انتگرالی → استقامت‌های پویستکی را در ν ضرب کرده و با مونتوم جمع کنیم

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u\nu) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu^2) - \nu \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + g\beta(T - T_\infty)$$

با انتگرال گیری داریم

$$\int_0^x \frac{\partial(u\nu)}{\partial x} dx + \int_0^x \frac{\partial \nu^2}{\partial y} dx = \nu \int_0^x \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} dx + \int_0^x g\beta(T - T_\infty) dx$$

$$u\nu \Big|_0^x + \frac{d}{dy} \int_0^x \nu^2 dy = \nu \frac{\partial \nu}{\partial x} \Big|_0^x + g\beta \int_0^x (T - T_\infty) dx \rightarrow \frac{d}{dy} \int_0^x \nu^2 dx$$

$$\frac{d}{dy} \int_0^x \nu^2 dy = \nu \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial \nu}{\partial x} \Big|_0 \right) + g\beta \int_0^x (T - T_\infty) dx$$

$$\rightarrow \frac{d}{dy} \int_0^x \nu^2 dy = \nu \left(\frac{d\nu}{dx} \Big|_{x=0} + g\beta \int_0^x (T - T_\infty) dx \right)$$

با معادله انرژی نیز داریم:

$$I) u \frac{\partial (T - T_\infty)}{\partial x} + \nu \frac{\partial (T - T_\infty)}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [u(T - T_\infty)] + \frac{\partial}{\partial y} [\nu(T - T_\infty)] = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$II) (T - T_\infty) \frac{\partial u}{\partial x} + (T - T_\infty) \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0$$

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial x} [u(T - T_\infty)] dx + \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} [\nu(T - T_\infty)] dx = \alpha \int_0^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$

$$\Rightarrow u(T - T_\infty) \Big|_0^x + \frac{d}{dy} \int_0^x (T - T_\infty) \nu dx = \alpha \left[\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_0 \right]$$

$$\rightarrow \frac{d}{dy} \int_0^x (T - T_\infty) \nu dx = -\alpha \left[\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \right]$$

از length scale جبهه 1، 4، 3-4 برابری تعیین توزیع سرعت ν و توزیع دما T استفسار کنیم

و ضرایب $Pr > 1$ و $Pr < 1$ را در نظر بگیریم
مکاتب

حالت (Pr > 1)

$$\begin{cases} T - T_{\infty} = \Delta T e^{-\frac{x}{\delta_T}} \\ v = V_{\infty} e^{-\frac{x}{\delta}} \left(1 - e^{-\frac{x}{\delta_T}}\right) \end{cases} \quad \Delta T = T_0 - T_{\infty}$$

5 با جابجایی در معادلات انرژی و انرژی درجه

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{v \delta^2 q^2}{2(2+q)(1+q)} \right] = \frac{v \delta q}{\delta} + g \beta \frac{\Delta T}{q} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dy} \left[\frac{v \delta}{(1+q)(1+2q)} \right] = \frac{d}{\delta} \\ q(Pr) = \frac{\delta}{\delta_T} \end{array} \right.$$

10 در این 2 معادله درجه اول داریم معادله سوم از معادله مومنتوم نزدیک به صفر است (معمولاً که ندره این معادله)

ناچیز است استفاده از $0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g \beta (T_0 - T_{\infty})$ → معادله درجه دوم و دیگر

باتوجه به جدول در این $\delta \sim y^{1/4}$ و $v \sim y^{1/2}$ پس در توان نوشت:

$$Pr = \frac{5}{6} q^2 \frac{q+1/2}{q+2} \rightarrow Nu = \frac{q''}{T_0 - T_{\infty}} \cdot y = \left[\frac{3}{8} \frac{q''}{(q+1)(q+1/2)(q+2)} \right]^{1/4} Ray^{1/4}$$

در حالت حدی که $(Pr \rightarrow \infty)$

$$Pr = \frac{5}{6} q^2 \frac{q+1/2}{q+2} \rightarrow Pr = \frac{5}{6} q^2 \rightarrow q = \left(\frac{6}{5} Pr\right)^{1/2} \rightarrow Nu = 0.783 Ray^{1/4} \left(\frac{\delta_T}{\delta} \cdot \frac{6}{5} Pr \right)^{1/2}$$

حالت (Pr < 1)

$$v = V_{\infty} e^{-\frac{x}{\delta_T}} \left(1 - e^{-\frac{x}{\delta_T}}\right)$$

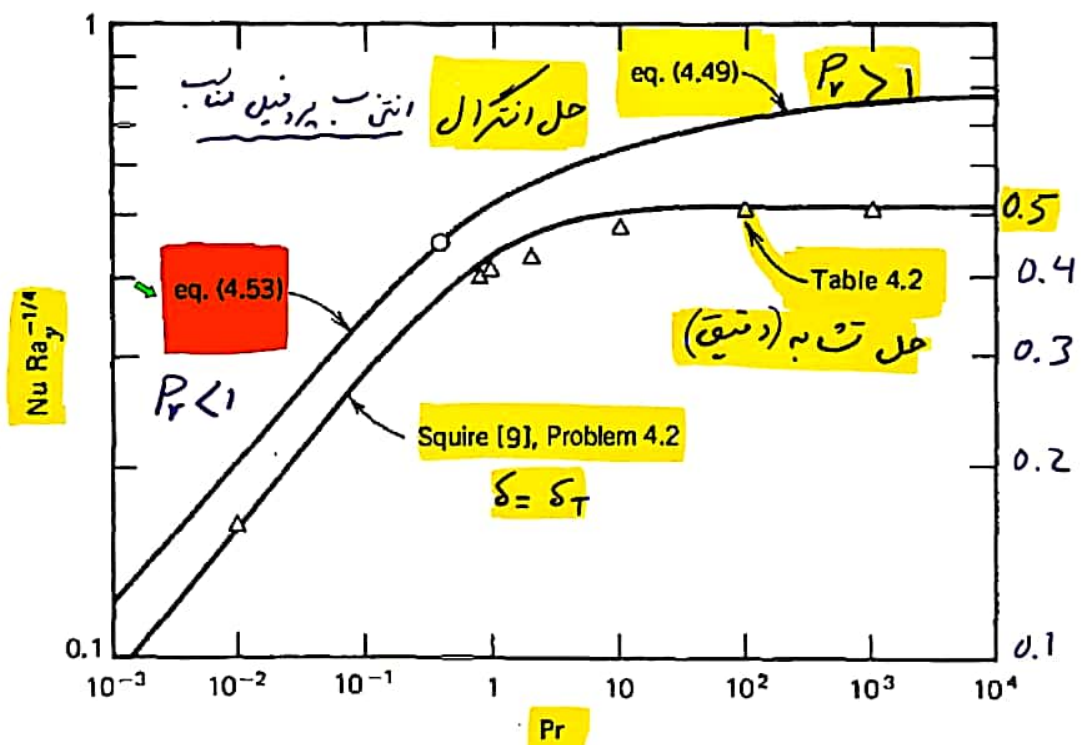
با جابجایی در معادلات:

$$Pr = \frac{5}{3} \left(\frac{q_1}{1+q_1} \right)^2 \quad q_1 = \frac{\delta_T}{\delta} \quad Nu = \frac{q''}{T_0 - T_{\infty}} \cdot y = \left(\frac{3}{8} \right)^{1/4} \frac{q_1}{2q_1+1} Ray^{1/4}$$

25 در حالت حدی که $Pr \rightarrow \infty$ نیز داریم:

$$Pr = \frac{5}{3} \left(\frac{q_1}{1+q_1} \right)^2 \rightarrow q_1 = \left(\frac{3}{5} Pr \right)^{1/2} \rightarrow Nu = 0.682 (Pr Ray)^{1/4}$$

با این Scaling مطابقت دارد.



حالت ایزدگریم
 دماک همگن است $T_0 = T_0$

Figure 4.4 Local Nusselt number for laminar natural convection on a vertical wall; Integral versus similarity results.

$$\eta = \frac{x}{\delta_T} \rightarrow \eta = \frac{x}{y \text{Ray}^{-\frac{1}{4}}} = \frac{x}{y} \text{Ray}^{\frac{1}{4}} \quad \text{Similarity Solution}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + g/\beta (T - T_\infty) \end{array} \right.$$

$$\theta = \theta(\eta, Pr) = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad \text{if } \psi = \alpha \text{Ray}^{\frac{1}{4}} F(\eta, Pr)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha \text{Ray}^{\frac{1}{4}} \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \alpha \text{Ray}^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\text{Ray}^{\frac{1}{4}}}{y} \right) \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

$$v = \frac{\alpha}{y} \text{Ray}^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{\partial F}{\partial \eta} \right] = \frac{\alpha}{y} \text{Ray}^{\frac{1}{2}} G(\eta, Pr)$$

$$G(\eta, Pr) = -\frac{\partial F}{\partial \eta}$$

$$\Rightarrow G(\eta, Pr) = \frac{v}{\alpha \text{Ray}^{\frac{1}{2}} / y} \Rightarrow G(\eta, Pr) = O(1)$$

با جابجایی در معادلات انرژی و مومنتوم داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} F\theta' = \theta'' \end{array} \right.$$

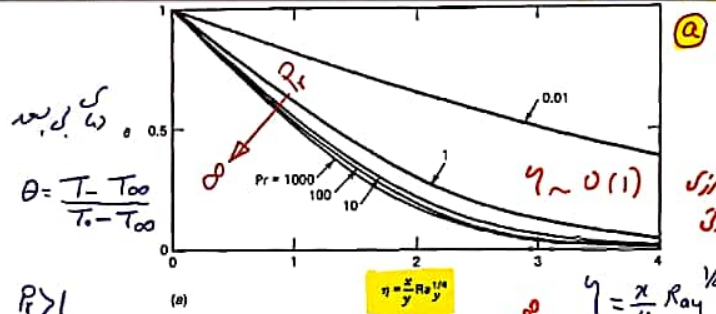
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Pr} \left(\frac{1}{2} F'^2 - \frac{3}{4} FF'' \right) = -F'' + \theta \end{array} \right.$$

$$@ x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u=0 \rightarrow F=0 \\ v=0 \rightarrow F'=0 \\ T=T_0 \rightarrow \theta=1 \end{array} \right. , \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} v=0 \rightarrow F'=0 \\ T=T_\infty \rightarrow \theta=0 \end{array} \right.$$

سابع حدتے ہ

(b)

جدول 4.2 حدتے ہ



$Nu = \frac{hy}{k} = -\frac{\theta'}{\theta} \Big|_{\eta=0} Ra^{1/4}$
 $\theta'_{\eta=0} = f(Pr)$
 $Nu = 0.503 Ra^{1/4}$ for $Pr \rightarrow \infty$
 $Nu = 0.6 (Ra Pr)^{1/4}$ for $Pr \rightarrow 0$
 $h_{x=H} \sim h_{y=H}^{-1/4}$ (بترتیب - اسب سے بہتر)
 $h_{x=H} = 4/3 h_{y=H}$
 $Nu_{x=H} = 4/3 Nu_{y=H}$
 $Nu = 0.671 Ra^{1/4}$ for $Pr \rightarrow \infty$ (4.65)
 $Nu = 0.8 (Ra Pr)^{1/4}$ for $Pr \rightarrow 0$ (4.66)

Pr	0.01	1	10	100	1000
$Nu Ra^{-1/4}$	0.162	0.402	0.465	0.49	0.499

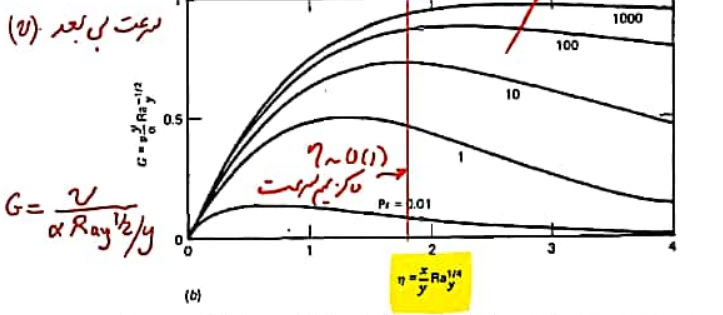


Figure 4.5 Similarity solution for laminar natural convection boundary layer flow: (a) temperature profiles; (b) vertical velocity profiles. These drawings are based on the correct scales of the δ -thick layer in a $Pr > 1$ fluid.

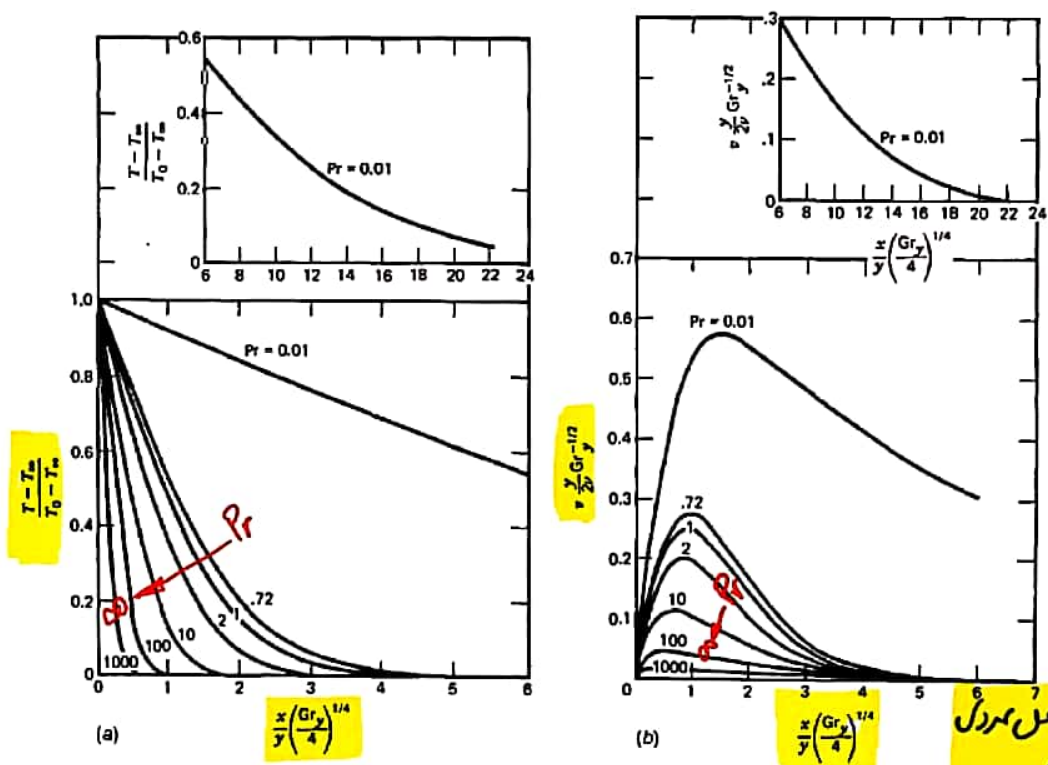
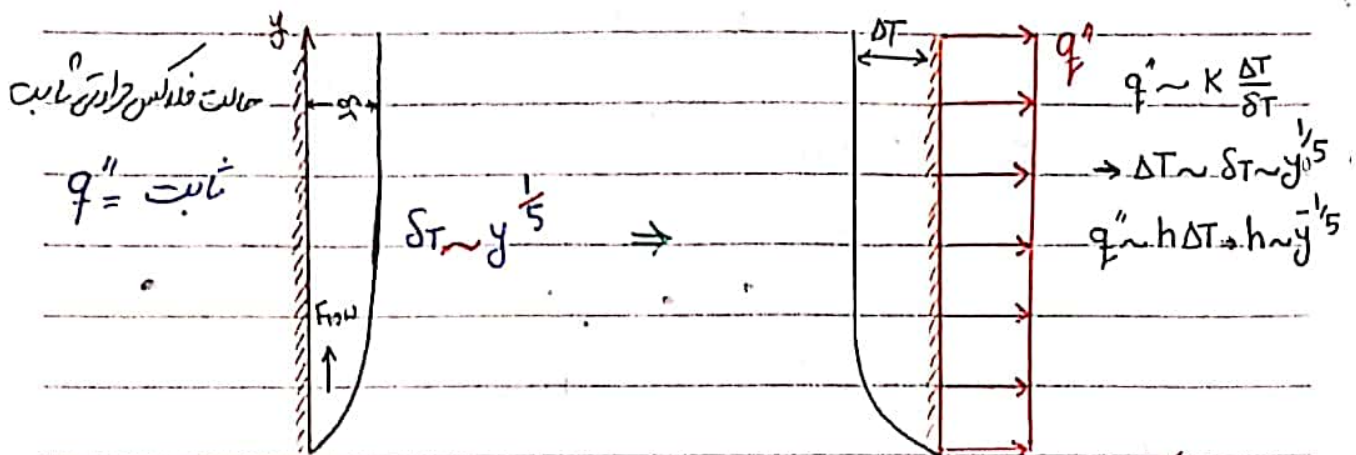
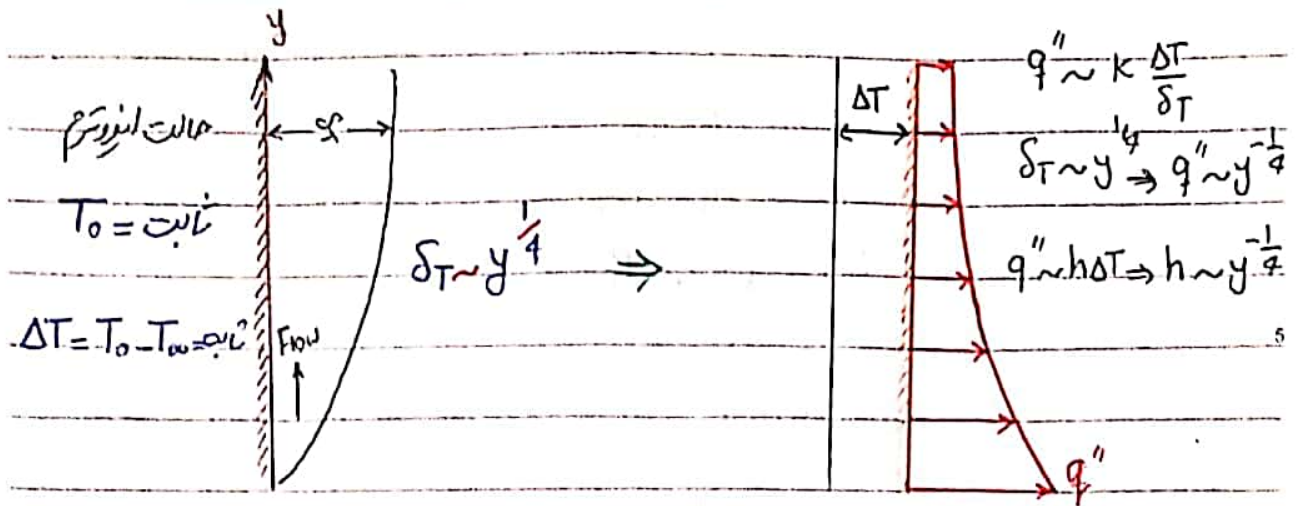


Figure 4.6 Examples of incorrect scaling in laminar natural convection boundary layer flow: (a) temperature profiles; (b) velocity profiles. (From Ref. 10.)

ارائه نتایج می باشد حل مورد
استراخ



$q'' = \text{cte} \rightarrow q'' \sim k \frac{\Delta T}{\delta_T} \rightarrow \Delta T \sim \frac{q'' \delta_T}{k}$ حالت فداکس حرارتی ثابت

$\delta_T \sim H Ra_H^{-1/4} \Rightarrow \delta_T \sim H \left(\frac{g \beta q'' \delta_T H^3}{\nu \alpha} \right)^{-1/4}$ برای حالت $Pr \gg 1$

$\Rightarrow \delta_T^4 \sim H^4 \frac{\nu \alpha k}{g \beta q'' \delta_T H^3} \Rightarrow \delta_T^5 \sim H^5 \frac{\nu \alpha k}{g \beta q'' H^4} \Rightarrow \delta_T \sim H \left(\frac{1}{\frac{g \beta H^4 q''}{\nu \alpha k}} \right)^{1/5}$

$Ra_H = \frac{g \beta H^3 q''}{\alpha \nu k} \Rightarrow \delta_T \sim H Ra_H^{-1/5} \rightarrow \delta_T \sim y^{1/5}$

$\Delta T \sim \frac{q'' \delta_T}{k} \Rightarrow \Delta T \sim \frac{q''}{k} H Ra_H^{-1/5} \rightarrow \Delta T \sim y^{1/5}, Nu \sim \frac{q''}{T_0 - T_\infty} \frac{y}{k}$

$\Rightarrow Nu \frac{H}{\delta_T} \sim Ra_H^{1/5} \quad (Pr \gg 1, q'' = \text{cte})$

برای حالت $Pr < 1$ نیز به صورت مشابه داریم:

$$S_T \sim H (Ra_H Pr)^{-\frac{1}{4}} \rightarrow \begin{cases} S_T \sim H (Ra_H Pr)^{-\frac{1}{5}} \\ \Delta T \sim \frac{q''}{K} H (Ra_H Pr)^{-\frac{1}{5}} \\ Nu \sim (Ra_H Pr)^{\frac{1}{5}} \end{cases} \quad Pr < 1$$

5

برای رابطه Sparrow با آنالیز اشتراکال سبب Squire روابط زیر را پیشنهاد کرد.

(S = S_T)

$$Nu = \frac{2}{360^{\frac{1}{5}}} \left(\frac{Pr}{4/5 + Pr} \right)^{\frac{1}{5}} Ra_{xy}^{\frac{1}{5}} \quad 0.01 < Pr < 100$$

10

در دو حالت حدی نیز Gregg و Sparrow به نتایج زیر رسیدند:

$$Nu = \begin{cases} 0.616 Ra_{xy}^{\frac{1}{5}} & Pr \rightarrow \infty \\ 0.64 Ra_{xy}^{\frac{1}{5}} Pr^{\frac{1}{5}} & Pr \rightarrow 0 \end{cases}$$

15

نتایج با آنالیز scaling مطابقت دارد.

* حل تشریحی را می توان برای حالت های مختلف بر روی شکل (د) به دست

تواند. $T_0 - T_{\infty} = A + B y$ و $T_0 - T_{\infty} = A e^{my}$ ، $T_0 - T_{\infty} = A y^m$

25

$$T_{\infty}(y) = T_{\infty,0} + \frac{y}{H} (T_{\infty,1} - T_{\infty,0})$$

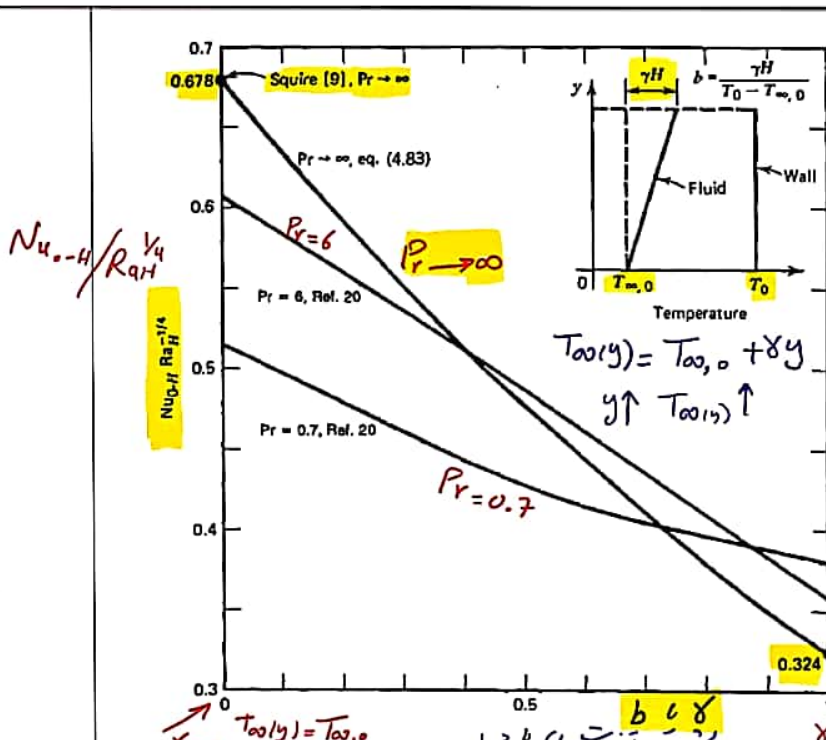


Figure 4.8 Effect of reservoir thermal stratification on the heat transfer from an isothermal vertical wall.

4.7
الترسيق
هوا
Stratification

$\Delta T \downarrow$ $y \uparrow$
 $\delta = \frac{T_0 - T_{\infty,0}}{H}$
 $\delta = 1 \rightarrow T_{\infty}(H) = T_0$

$$\delta_T = \delta$$

توزیع دما
توزیع سرعت

$$T - T_\infty = (T_0 - T_\infty) \left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^2 \quad (4.78)$$

$$v = V \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

where $\delta_T = \delta$ and, according to eq. (4.77), $T_0 - T_\infty(y) = T_0 - T_\infty - \gamma y$. In the dimensionless form required by numerical integration, the momentum and energy equations reduce to

$$\frac{1}{(105)\text{Pr}} \frac{d}{dy_*} (V^2 \delta_*^3) = -\frac{V_*}{\delta_*} + \frac{\delta_*}{3} (1 - by_*) \quad (4.79)$$

$$\frac{d}{dy_*} [V_* \delta_* (1 - by_*)] = \frac{60}{\delta_*} (1 - by_*) \quad (4.80)$$

with the nondimensional notation suggested by Table 4.1, and the definition of a new dimensionless stratification parameter (b):

$$y_* = \frac{y}{H}, \quad \delta_* = \frac{\delta}{H Ra_H^{-1/4}}, \quad V_* = \frac{V}{(a/H) Ra_H^{1/4}}, \quad Ra_H = \frac{\delta \beta H^4 (T_0 - T_\infty)}{\alpha \nu} \quad (4.81)$$

$$b = \frac{\gamma H}{T_0 - T_\infty} = 1 - \frac{\Delta T_{\text{max}}}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_0 - T_\infty(y)$$

Equations (4.79) and (4.80) can be integrated numerically from $y_* = 0$ to $y_* = 1$ to determine $\delta_*(y_*, b)$ and $V_*(y_*, b)$. The local heat flux is then

$$q'' = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{k(T_0 - T_\infty)}{H Ra_H^{1/4}} \frac{2}{\delta_*} (1 - by_*) \quad (4.82)$$

Integrating q'' over the wall height H yields q' and the overall Nusselt number

If $b=1$ $\frac{1}{4}$
 $Nu_{0-H} = 0.324 Ra_H$
 $Pr \rightarrow \infty$

$$Nu_{0-H} = \frac{q'}{k(T_0 - T_\infty)} = Ra_H^{1/4} \int_0^1 \frac{2}{\delta_*} (1 - by_*) dy_* \quad (4.83)$$

حل با استفاده از
روش انتگرال

شکل 4.8
 $\rightarrow Nu_{0-H} / Ra_H^{-1/4} = f(b)$
 $\hookrightarrow f(\delta)$

$$\Delta T = T_H - T_C$$

این حالت مانند هر دو
گرم داخل اتاق،
یک پنجره شیشه‌ای
و هر دو طرف سرد بودن
را نشان می‌دهد.

$$\omega = \frac{t/H k_w}{\frac{H Ra_H^{-1/4}}{Hk}} = \frac{t}{H} \frac{k}{k_w} Ra_H^{1/4}$$

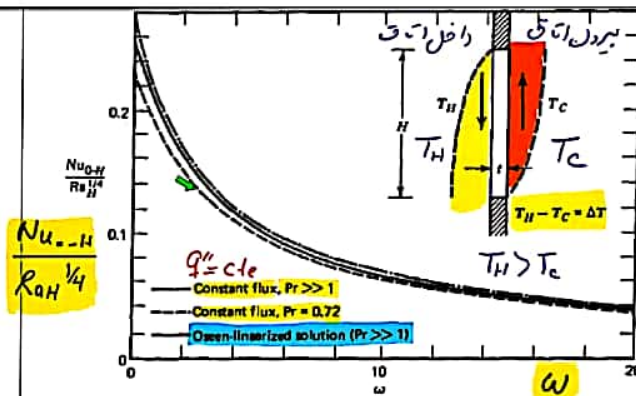


Figure 4.8 Heat transfer between two fluid reservoirs separated by a vertical wall with natural convection boundary layers on both sides. Note that both $Nu_{0,H}$ and Ra_H are based on the overall temperature difference $\Delta T = T_H - T_C$. (From Ref. 24.)

based on the Oseen-linearization method (Chapter 5) [24]. This approach consists of writing integral conservation equations analogous to eqs. (4.40) and (4.41) for both sides of the wall, with the additional complication that the wall temperature $T_w(y)$ is unknown. The additional equation necessary for determining T_w is the condition of heat flux continuity in the x direction, from one face of the wall to the other. In Fig. 4.9, both the overall Nusselt number and the Rayleigh number are based on the overall temperature difference imposed by the two fluid reservoirs. The heat transfer rate (hence, the ratio $Nu_{0,H}/Ra_H^{1/4}$) decreases as the wall thickness resistance parameter ω increases. The dimensionless wall number proposed in Ref. 24 is

$$\omega = \frac{t}{H} \frac{k}{k_w} Ra_H^{1/4} \quad \text{wall no.}$$

(4.85)

نسبت مقاومت هدایت حرارتی دیوار
به k_w مقاومت حرارتی دیوار
لازمی

4.8

زوج لایه حرارتی
Conjugate B.L.

دیواران با توریب
مقاومت حرارتی نسبت
دست و دست هادی
مساوی (سه دست)
آن حاصل می‌شود
که جواب است
حدی را در دست
با آن نیز حفظ
بسیار می‌دهد

$(\delta_T)_{NC} < (\delta_T)_{FC}$
 کنده کسین آزاد
 $(\delta_T)_{NC} > (\delta_T)_{FC}$
 کنده کسین اجباری
 $\frac{Ra_H^{1/4}}{Re_y^{1/2} Pr^{1/3}} > 0(1) \rightarrow$ جابجایی آزاد
 $\frac{Ra_H^{1/4}}{Re_y^{1/2} Pr^{1/3}} < 0(1) \rightarrow$ جابجایی اجباری
 علت تغییر زاویه بر روی
 انتساب غیر متساوی
 $\frac{Gr}{Re_y^2} = \left(\frac{Ra_y^{1/4}}{Re_y^{1/2} Pr^{1/3}} \right)^4 Pr^{1/3}$
 با دانستن این معادله

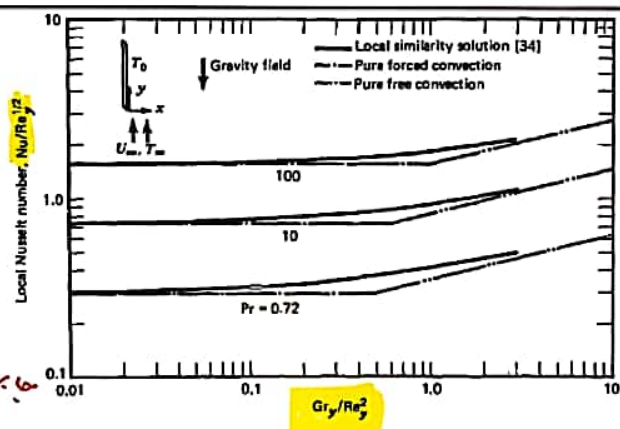


Figure 4.12 Heat transfer by natural and forced convection along a vertical wall. (After Ref. 34.)

forced phenomenon characterized (approximately) by the scales of pure natural convection, and conversely, under what conditions is it characterized by the scales of pure forced convection? In other words, what is the criterion for the transition from one convection mechanism to another?

If the mechanism is natural convection, the thermal distance between the heat-exchanging entities is of order

$$(\delta_T)_{NC} \sim y Ra_y^{-1/4} \quad (Pr > 1) \quad (4.96)$$

as reservoir fluid supplies the buoyant wall jet of thermal boundary layer thickness $(\delta_T)_{NC}$. On the other hand, if the mechanism is forced convection, the wall and the reservoir are separated by a thermal length of order (cf. Chapter 2)

$$(\delta_T)_{FC} \sim y Re_y^{-1/2} Pr^{-1/3} \quad (Pr > 1) \quad (4.97)$$

4.10
 حالت مخلوط
 انتقال حرارت جابجایی
 آزاد اجباری

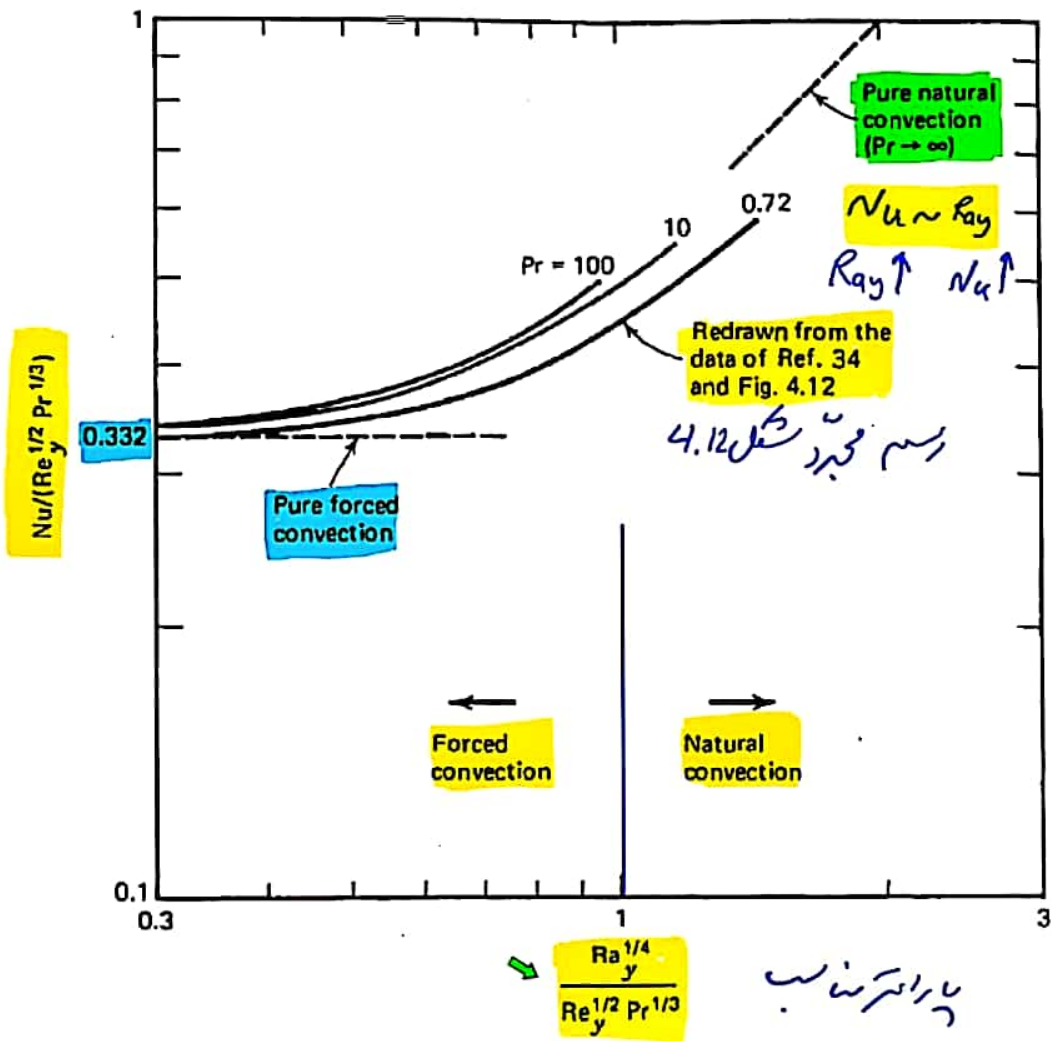


Figure 4.13 Correct transition between natural and forced convection on a vertical wall when $Pr \geq 1$.

فصل 7 جریان لایه مرزی توربولانس

کوتل پیش توپ Prantl, Boussinesq, Reynolds این لایه مرزی

5 این جریان در مولد زیر سیاه بود

1a جریان لایه مرزی توربولانس روی سطح صاف جریان جوشش آب

1b جریان دو لایه مرزی در آیفون آرازم

10

میزان و توزیع درج حرارت توربولانس Random و نامنظم است بر سنسورهای سرعت و دما

نوسان و نامنظمی بیشتر بود که اصطلاحاً Eddy گفته می شود. در این جریان نامنظم یک ساختار با Scale بزرگ

15 روبرو بود. (large scale structure). حالت موی و تیز بود که در مزرین لایه مرزی درج آزاردهنده بود

وجود دارد.

$$u = \bar{u} + u'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

معادلات Time-Averaged

$$v = \bar{v} + v'$$

$$T = \bar{T} + T'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

20

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \frac{1}{\text{Period}} \int_0^{\text{Period}} u \, d(\text{time}) \\ \int_0^{\text{Period}} u' \, d(\text{time}) = 0 \end{array} \right.$$

25

قوانین حساب

$$\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}$$

$$\overline{u u'} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = 0$$

$$\overline{uv} = \overline{u} \overline{v} + \overline{u'v'}$$

معین معادله ای اصلی نیست

$$\overline{u^2} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2}$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = 0$$

است که به جهت متوسط زمانه

درآورد است

معادله برینگی

$$\frac{1}{\text{Period}} \int_0^{\text{Period}} \left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right] dt = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

معادله پیوستگی

$$\frac{1}{\text{Period}} \int_0^{\text{Period}} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) \right] dt = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \overline{u}$$

با استفاده از قوانین باطلی توان به جهت زیر برآورد کرد:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\overline{uv}) = \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u} \overline{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{uw}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \overline{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{uw}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \overline{u} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'})$$

با استفاده از قانون برینگی

$$\Rightarrow \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \overline{u} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'})$$

داریم

به همین ترتیب برای جابجایی داریم

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \overline{v} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'})$$

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \overline{w} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'w'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'w'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'^2})$$

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = \alpha \nabla^2 \overline{T} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'T'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'T'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'T'})$$

در اینجا 5 معادله برای متغیرهای متوسط زمانی و در حالت فولد نیاز نیست آمد.

در نتیجه 5 معادله \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{p} , \bar{T} و 12 عدد مجهول از نوع $(\bar{u}\bar{v})$ $\frac{\partial}{\partial y}$ می باشد.

علاوه بر این 17 مجهول وجود دارد. بنابراین نیاز به Closure Problem می باشد.

نکته: برای حالت لایه مرزی و چون توسعه یافته در کانال مستقیم تعداد کمالات به طور قابل توجهی کم می شود.

در صورت بعد بررسی می شود.

معادلات لایه مرزی توربولانس

یک لایه مرزی با $\text{Re} \gg 1$ در نظر گرفته می شود. چون حقیقتاً توربولانس 3D است ولی برای سبب برقرار است:

1- $\frac{\partial}{\partial x}$ تمام متوسط های زمانی متغیرها به دلیل تقارن ρ می باشد.

2- متوسط متغیرها نسبت به x ، $\frac{\partial}{\partial x} (1)$ خیلی کوچکتر از مشتق نسبت به y است: $\frac{\partial}{\partial x} (u'v') \gg \frac{\partial}{\partial y} (u'v')$

در نتیجه طبق فرضیات لایه مرزی، معادله مونتگوم در جهت x و معادله انرژی به صورت زیر می آید:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'})$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'T'})$$

* ← 'ا' و 'ب' نوسانات سرعت هستند که توسط یک eddy مانند چیزی در حال دوران است

که روی جریان متوسط سوار است.

* ← توجه کنید که $\frac{d\bar{P}}{dx}$ به جایی $\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}$ بدل شده است. مدار مونتوم در جهت y است که

$$\bar{P} \text{ تابعی فقط از } x \text{ می باشد. } \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = 0 \right)$$

* از سه معادله ی پیوسته آمدن، میتوان معادلات توربولانس را به دست آورد. ساده تر حل کردنی در این

10

سه معادله 5 مجهول داریم که توسط دو معادله ی جدید می باشد: $\frac{\partial}{\partial y} (\mu \bar{v}')$ ، $\frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} T')$

* برای صرف نظر کردن از $\frac{\partial \bar{P}}{\partial y}$ میتوان اینگونه دلیل آورد

15

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = -\rho \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} \Rightarrow \bar{P} = P_e(x) - \rho \bar{v}'^2$$

تقریبات $\frac{\sqrt{\bar{v}'^2}}{\bar{U}}$ کمتر از 4٪ است در نتیجه تقریبات $\frac{\bar{v}'^2}{\bar{U}^2}$ کمتر از 0.2٪ است و در عمل صرف نظر کردن است پس:

$$\bar{P} = \bar{P}(x)$$

معادلات مونتوم در این سه را میتوان به دست زیر نیز نوشت: فاکتورهای از $\frac{\partial}{\partial y}$

20

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{d\bar{P}}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \bar{u} \bar{v}' \right)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{+1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho c_p \bar{v} \bar{T}' \right)$$

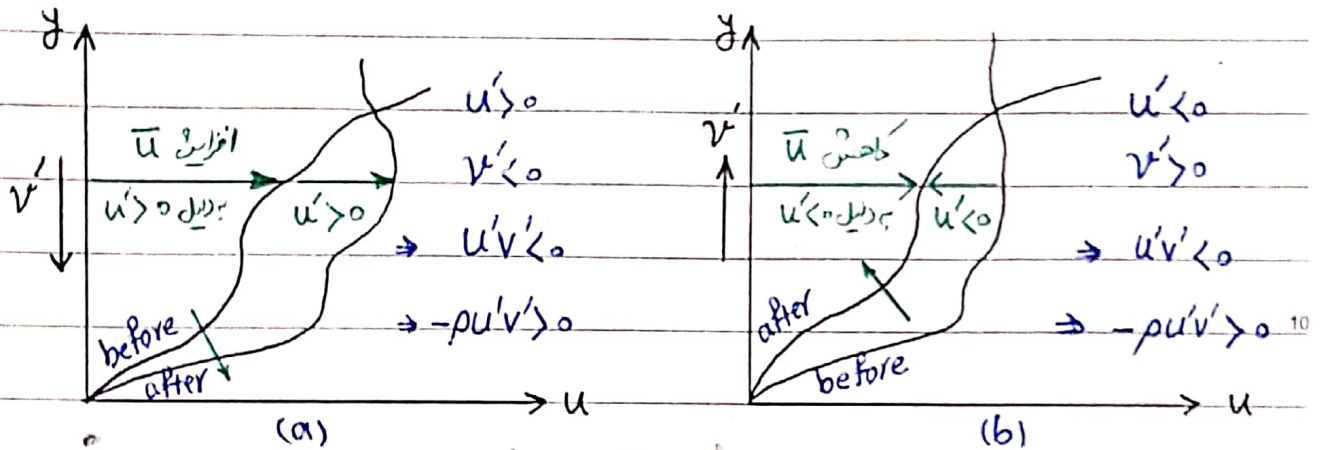
حال این دو معادله ایجاد شده جدید می توانیم مدل ها را توسعه بدهیم و اینها را ایجاد کنیم.

25

eddy shear stress: $\rho \epsilon_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} := -\rho \overline{u'v'}$ تعریف:

eddy heat flux: $\rho c_p \epsilon_H \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} := -\rho c_p \overline{v'T'}$

سوال اثبات کرد عبارت $\overline{u'v'}$ همواره منفی است پس eddy shear stress همواره مثبت است



با این دو تعریف کسب مومنتوم و کسب حرارت کلی به صورت زیر خواهد بود:

$T_{app} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = \rho (\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ تنش برشی ظاهری

$-q''_{app} = k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho c_p \overline{v'T'} = \rho c_p (\alpha + \epsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ فلکس حرارتی ظاهری

$\epsilon_M :=$ Momentum Eddy Diffusivity } پارامترهای تجربی
 $\epsilon_H :=$ Thermal Eddy Diffusivity

بجایگزینی این تعاریف در معادلات لایه مرزها داریم:

$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} [(\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}]$

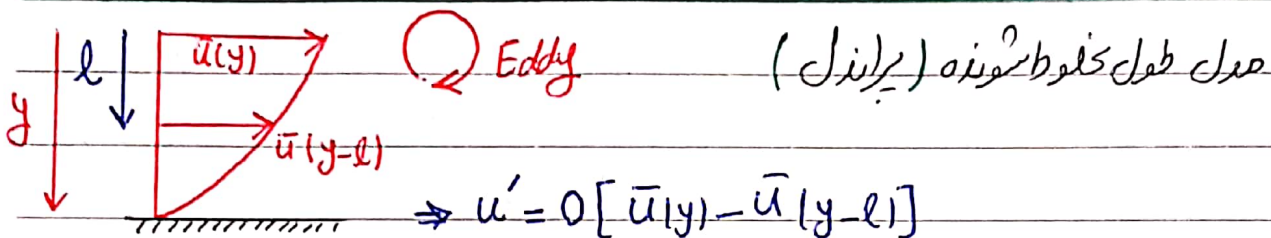
$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{T}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} [(\alpha + \epsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}]$

حال دوباره سه معادله در پنج مجهول به صورت $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{T}, \varepsilon_M, \varepsilon_H)$ داریم.

اطلاعات اجزائی مورد نیاز برای بستن مسأله (Closure Problem) - موضوع موازنه توربولانس است

5 هدف بررسی اطلاعات تجربی است تا معادلاتی (مدل‌هایی) برای ε_M و ε_H بدست آید.

ساده‌ترین و قدیمی‌ترین مدل توربولانس: مدل طول مخلوط‌شونده (Mixing length model) برانندل l



10 u' و v' مرتبه یکسانی دارند \leftarrow

$$0(u') = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad 0(v') = l \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$$

15 $\Rightarrow -\bar{u}'v' = l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 > 0 \rightarrow$ طبق تعریف $\varepsilon_M = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^2$

مقدار طول مخلوط‌شونده بسته به نوع جریان متفاوت است، در لایه مرز توربولانس، صوبالای l .

فاصله تا دیواره در برابر l را می‌توان ضریب (K) در y در نظر گرفت.

$$l = K y$$

20

ضریب K (Kappa) یک ضریب تجربی با مرتبه $O(1)$ است. یک مقدار مناسب $K=0.4$ (صوبالای مرز).

با استفاده از این رابطه با مولهای معادله برای ε_M می‌توان از معادلات پیوسته، مستقیماً استنتاج گرفت تا

$$\varepsilon_M = K^2 y^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^2$$

25 \bar{u} و \bar{v} بدست بیایند.

توزیع سرعت

در یک لایه نازک دیواره (Inner region) (داخل لایه میزنه تو دیواره) نردهای اندکی به

5 اندازه کافی کوچک می باشد تا بتوان از آنها صرف نظر کرد و این ترتیب تنش ظاهری τ_0 ثابت

نردهای اندکی

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} [(\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}] \quad \text{است (مقیسه پرازدل)}$$

مقدار منفی

$$\Rightarrow \frac{\tau_0}{\rho} = (\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = cte$$

10

توجه شود که تنش رینولدز $(\rho u'v')$ در $y=0$ صفر می شود و تنش ظاهری همان تنش برشی واقعی می باشد.

و از طرف $(\frac{\tau_0}{\rho})^{1/2}$ دلایل (بسیار) سرعت است. پس می توان با آن یک سرعت تعریف کرد:

سرعت اصطکاکي

$$u_* := \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

Friction velocity

15

و با استفاده از آن می توان مقیسه های بی بعد به صورت زیر تعریف نمود

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*}, \quad v^+ = \frac{\bar{v}}{u_*}, \quad x^+ = \frac{x u_*}{\nu}, \quad y^+ = \frac{y u_*}{\nu}$$

20

$$(\nu + \epsilon_M) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2 \Rightarrow (\nu + \epsilon_M) \frac{\partial (\frac{\bar{u}}{u_*})}{\partial (\frac{y u_*}{\nu})} = 1 \Rightarrow (1 + \frac{\epsilon_M}{\nu}) \frac{du^+}{dy^+} = 1$$

* توجه: u^+ فقط تابعی از y^+ است و اثر تغییرات x در سرعت اصطکاکي u_* در نظر گرفته شده است.

* یا توجه به نژادی لاد ϵ_M دوزیر لایه تعریف می شود.

25

- 1) $\nu \gg \epsilon_M$ or $\frac{\epsilon_M}{\nu} \ll 1$ (Viscous sublayer) زیر لایه ویسکوز
- 2) $\epsilon_M \gg \nu$ or $\frac{\epsilon_M}{\nu} \gg 1$ (Fully turbulent sublayer) زیر لایه کاملاً توربولان

این دو زیر لایه در صورت همپوشانی (y_{VSL}^+) که ϵ_M و ν در آن یک بزرگی را می‌یابند، همپوشانی دارند.

زیر لایه ویسکوز

در شرایط مرزی $u^+(0) = 0$ ، $\frac{\epsilon_M}{\nu} \ll 1 \Rightarrow (1 + \frac{\epsilon_M}{\nu}) \frac{du^+}{dy^+} = 1$

$\Rightarrow \frac{du^+}{dy^+} = 1 \Rightarrow u^+ = y^+ + C_1 \xrightarrow[C_1=0]{u^+(0)=0} u^+ = y^+$

زیر لایه کاملاً توربولان

$\frac{\epsilon_M}{\nu} \gg 1 \Rightarrow (1 + \frac{\epsilon_M}{\nu}) \frac{du^+}{dy^+} = 1 \Rightarrow \frac{\epsilon_M}{\nu} \frac{du^+}{dy^+} = 1$

با استفاده از مدل طول کلاسیک $\epsilon_M = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \Rightarrow \frac{K^2 y^2}{\nu} \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{du^+}{dy^+} = 1$

$\Rightarrow \frac{K^2 y^2 u^+}{\nu} \frac{d(u^+)}{dy^+} = 1$

$\Rightarrow K^2 (y^+)^2 \left(\frac{du^+}{dy^+} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{K} \frac{dy^+}{y^+} \rightarrow u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + C_1$

بر روی مرز مستقر y_{VSL}^+ طبق توزیع سرعت می‌توانیم $(u_{VSL}^+ = y_{VSL}^+)$

$\Rightarrow u^+ = y_{VSL}^+ = \frac{1}{K} \ln y_{VSL}^+ + C_1 \Rightarrow C_1 = y_{VSL}^+ - \frac{1}{K} \ln y_{VSL}^+$

$\Rightarrow u^+ = \frac{1}{K} \ln y^+ + y_{VSL}^+ - \frac{1}{K} \ln y_{VSL}^+$

برگشت

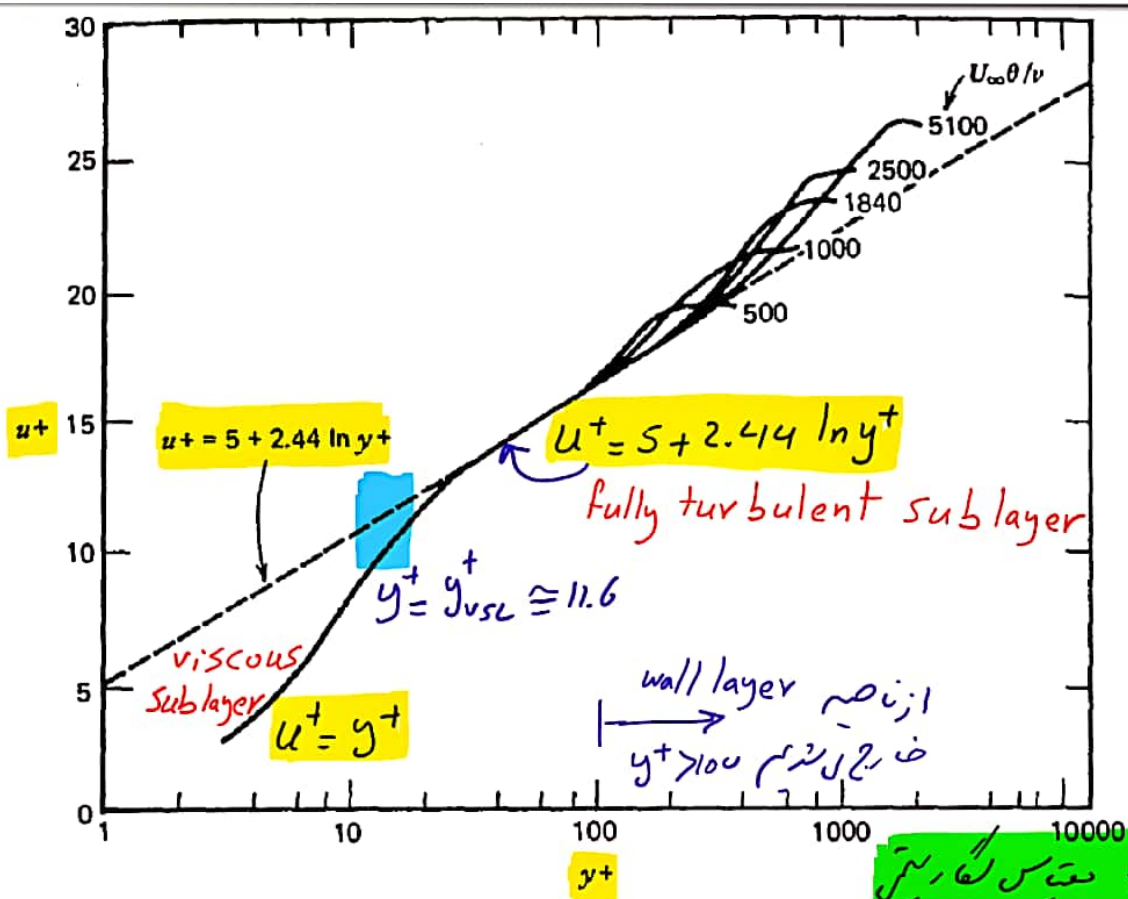


Figure 7.4 Example of $u^+(y^+)$ velocity measurements in turbulent boundary layer flow without longitudinal pressure gradient. Note the use of $A \approx 2.44$ and $B \approx 5$ to fit the data. (Reprinted with permission from L. P. Purtell et al., *Physics of Fluids*, Vol. 24, pp. 802-811, May 1981. Copyright © 1981 American Institute of Physics.)

$$K \approx 0.4$$

بالتویب بلین کا y_{VSL}^+ داریم:

$$y_{VSL}^+ \approx 11.6$$

$$\rightarrow u^+ = A \ln y^+ + B \quad \left\{ \begin{array}{l} A \approx 2.5 \\ B \approx 5.5 \end{array} \right.$$

ضرایب تجربی

5 این توزیع سرعت را Law of wall کوئڈے مقرر کریں $\frac{dp}{dx} \neq 0$ تیرہا ق است.

$u^+(y^+)$	Range	Reference
$u^+ = y^+$	$0 < y^+ < 11.6$	Prandtl and Taylor
$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	$11.6 < y^+$	Taylor
$u^+ = y^+$	$0 < y^+ < 5$	von Karman
$u^+ = 5 \ln y^+ - 3.05$	$5 < y^+ < 30$	
$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	$30 < y^+$	
$u^+ = 14.53 \tanh(y^+/14.53)$	$0 < y^+ < 27.5$	Rannie
$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$	$27.5 < y^+$	

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + [1 + 4K^2 y^+ [1 - \exp(-y^+/A^+)]^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (K=0.4 \quad A^+=26) \quad \text{All } y^+ \quad \text{van Priest } 15$$

$$u^+ = 2.5 \ln(1 + 0.4y^+) + 7.8 [1 - \exp(-y^+/11) - (y^+/11) \exp(-0.33y^+)] \quad \text{All } y^+ \quad \text{Reichardt}$$

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{1 + n^2 u^+ y^+ [1 - \exp(-n^2 u^+ y^+)]} \quad n=0.124 \quad 0 < y^+ < 26 \quad \text{Deissler } 20$$

$$u^+ = 2.78 \ln y^+ + 3.8$$

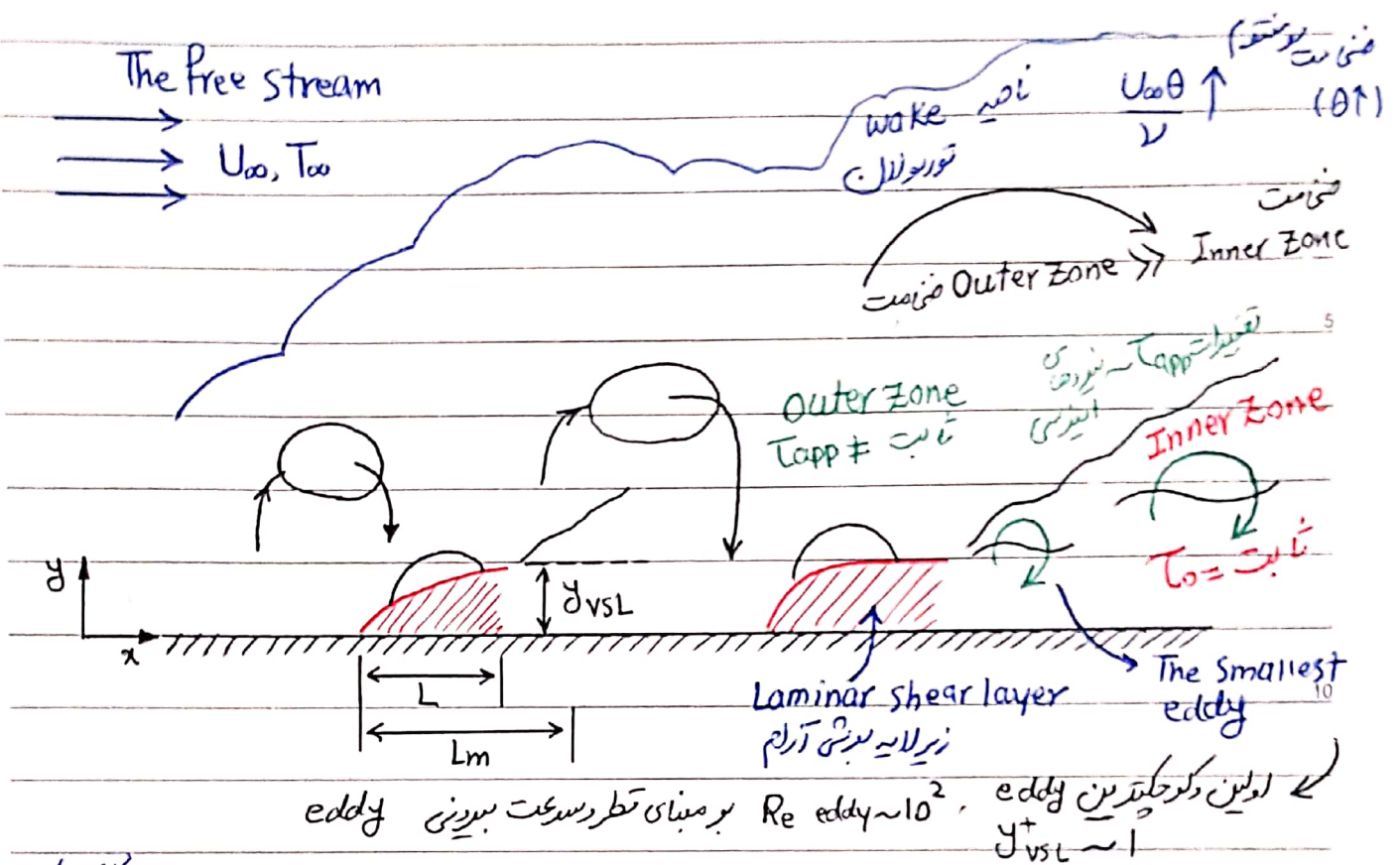
$$y^+ = u^+ A \left[\exp Bu^+ - 1 - Bu^+ + \frac{1}{2} (Bu^+)^2 - \frac{1}{6} (Bu^+)^3 + \frac{1}{24} (Bu^+)^4 \right] \quad \text{All } y^+ \quad \text{Spalding}$$

$$A = 0.1108$$

(last term in u^{+2} may be omitted)

$$B = 0.4$$

25



اگر تقویت با مستقیم زیاد به سمت بیرون حرکت نماید، بر لایه مستقیم طولی زیاد یک زیر لایه برشی مستقیم (مانند ضربه کما)

فرا به وجود آمده و شروع به رشد می نماید تا زمانی که در پیوند به میزان بحرانی $\frac{y_{VSL} U_\infty}{\nu} \sim 10^2$ برسد

$$y_{VSL}^+ = \frac{y_{VSL}}{\nu} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{y_{VSL} U_\infty}{\nu} \right)^{1/2} \rightarrow y_{VSL}^+ \sim (100)^{1/2} \sim 10$$

در حالت $y_{VSL}^+ \sim 10$ زیر لایه آرام به eddy ها کوچک تقسیم می شود.

با استفاده از LDA (Laser Doppler Anemometry) این توانایی به وجود آمده است که بتوان

زیر لایه آرام را تشخیص داد.

$$C_{f,x} = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

اصطلاحات دیواره در جریان لایه مرزی توربولانسی

نکته از موارد مورد نظر برای مهندسين، کاسه‌ي متوسط زمانى ندرى اصطلاح بروى ديواره است که با

استفاده از توزيع سرعت در جهت x با استفاده از معادله اندازه‌گيري لکه سرعت در شکل 7.4 بدست مي آيد.

توجه شود که τ_0 در متغیرهای u^+ ، y^+ برای نرماليزه کردن (ی بعد طول و به فضای $1 \rightarrow 0$ Map تحول)

بکاررفته است. الفرض شود که $f_n(y^+)$ مختص توزيع سرعت مناسب باشد که نمونه‌هاي از آن در جدول 10

جیب جدول 7.1 ارائه شده است. این توزيع سرعت $u^+ = f_1(y^+)$ حتی در ناحیه دیواره

دیواره (outer Region) $y^+ > 5$ wake هم به $curve\ fit$ مناسبی دریايد. بطوریکه در شکل

15 \bar{u} برابر u^+ گردد. $y = \delta$ ضریب لایه مرزی توربولانسی خواهد بود.

$$u^+_{y=\delta} = \frac{U_\infty}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = f_u \left[\frac{\delta}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \right] \rightarrow y^+_{\delta}$$

برای اینکه مقادیر مذکور نسبت آورده شود از معادله انتگرال مومنتوم با فرض $\frac{d\bar{p}}{dx} = 0$ استفاده می‌گردد.

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \bar{u} (U_\infty - \bar{u}) dy = \frac{\tau_0}{\rho}$$

در این رابطه برای بدست آوردن $\delta(x)$ ، $\tau_0(x)$ کافی است از توزيع سرعت توان $\frac{1}{7}$ پرايندل استفاده شود.

$$f_u = 8.7 (y^+)^{1/7} \rightarrow \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = 0.0225 \left(\frac{U_\infty \delta}{\nu} \right)^{-1/4}, \quad \delta/x = 0.37 \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-1/5}$$

$$\delta = 8\delta^* = \frac{72\theta}{7} \Rightarrow \frac{\tau_0}{\rho U_\infty^2} = \frac{1}{2} C_{f,x} = 0.0296 \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-1/5} \Rightarrow \frac{\tau_0 - x}{\rho U_\infty^2} = 0.037 \left(\frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-1/5}$$

برگسبنا

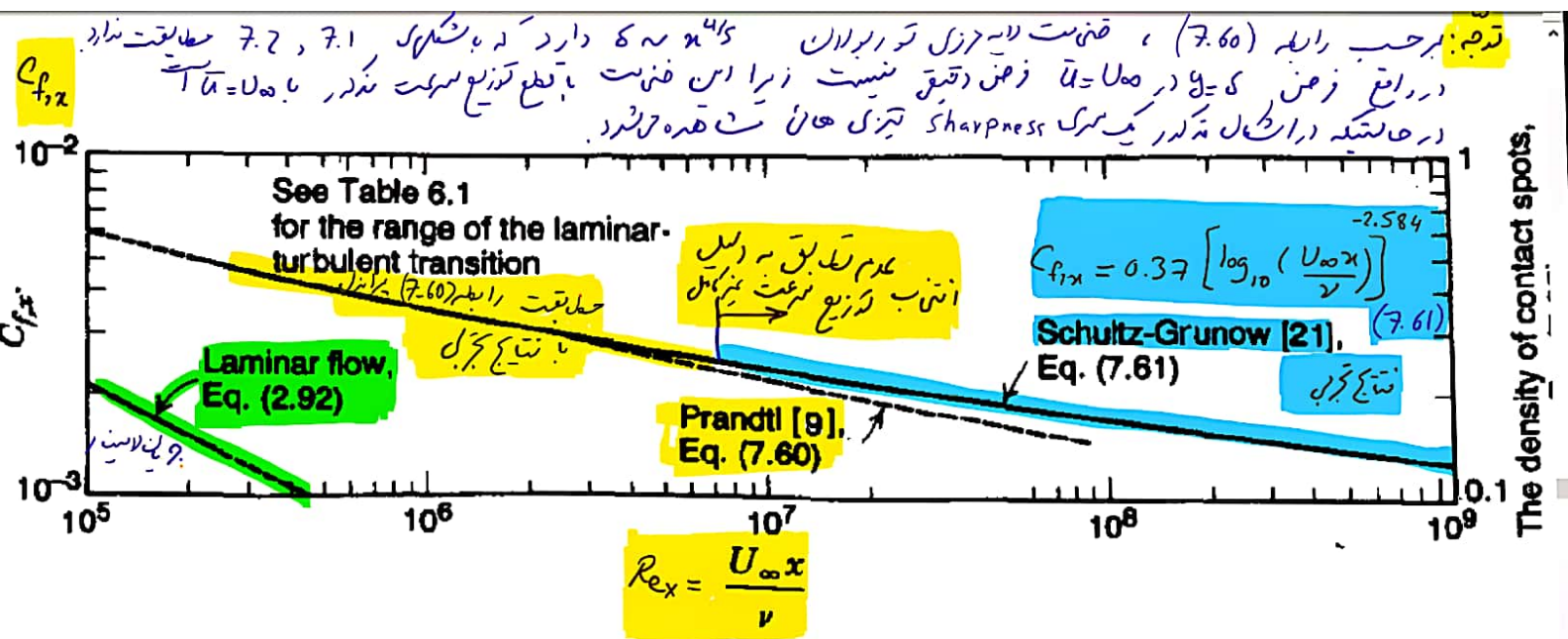


Figure 7.6 Local skin friction coefficient for turbulent boundary layer flow over a plane wa

$\frac{d\bar{P}}{dx} = 0$ صفر صاف

انتقال حرارت در جریان لایه مرزی توربولان

برای حل قسمت انتقال حرارت لایه مرزی توربولان از معادله انرژی (متوسط زمانی گرفته شود) استفاده میکنیم.

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{d}{dy} \left((\alpha + \epsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \Rightarrow (\alpha + \epsilon_H) \frac{d\bar{T}}{dy} = \left[(\alpha + \epsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right]_{y=0} \quad 5$$

نزدیک دیواره q''_{app} فلوکس حرارتی ظاهری ثابت بوده و به y بستگی نخواهد داشت. نزدیک دیواره قابل همزد نظر است.

$$\frac{-q''_0}{\rho c_p} = (\alpha + \epsilon_H) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \xrightarrow{\text{معمقات دیواره}} \frac{\rho c_p u_*}{-q''_0} \frac{\partial (\bar{T} - T_0)}{\partial y^+} = \frac{1}{\alpha_y^+ + \epsilon_{H1} \nu} \quad 10$$

بنابراین در بکال (ما را در محقات دیواره به این صورت تعریف کرد)

$$T^+(x^+, y^+) = (T - T_0) \frac{\rho c_p u_*}{q''_0}$$

با استفاده از تعریف عدد رینولدز توربولان داریم:

$$Pr_t = \frac{\epsilon_M}{\epsilon_H} \Rightarrow \frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr}, \quad \frac{\epsilon_H}{\nu} = \frac{\epsilon_M}{Pr_t} \cdot \frac{1}{\nu} \quad 15$$

$$T^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} (\epsilon_M / \nu)}$$

در نتیجه با اشتقاق گیری داریم:

با استفاده از روابط زیر لایه کاملاً توربولان ($\frac{\epsilon_M}{\nu} \gg 1$) داریم:

$$\frac{\epsilon_M}{\nu} = \frac{dy^+}{du^+} = Ky^+ \rightarrow \begin{cases} \text{if } y^+ \uparrow \rightarrow \frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} (\epsilon_M / \nu) = \frac{1}{Pr_t} \frac{\epsilon_M}{\nu} \\ \text{if } y^+ \downarrow \rightarrow \frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} (\epsilon_M / \nu) = \frac{1}{Pr} \end{cases} \quad 20$$

$$T^+ = \int_0^{y_{CSL}^+} \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr} + (\text{نظریه همزد نظر})} + \int_{y_{CSL}^+}^{y^+} \frac{dy^+}{\frac{1}{Pr_t} + \frac{1}{Pr_t} \frac{\epsilon_M}{\nu}}$$

در نتیجه اشتقاق به صورت دو قسمتی در نظر گرفته شود:

در اینجا y_{CSL}^+ مقدار مرزی است. CSL مخفف Conduction Sublayer میباشد. برای مقایسه کمتری.

مکانیزم همزد حرارت مولکولی بر یکدیگر انتقال حرارت توسط eddy ها غلبه می‌نماید.

$$T^+ = \begin{cases} Pr y^+ & y^+ < y_{CSL}^+ \\ Pr y_{CSL}^+ + \frac{Pr_t}{k} \ln \frac{y^+}{y_{CSL}^+} & y^+ > y_{CSL}^+ \end{cases}$$

5 طبق نتایج تجربی برای محدوده $(0.5 < Pr < 5)$ داریم: $Pr_t \approx 0.9$, $k \approx 0.41$, $y_{CSL}^+ \approx 13.2$

در نتیجه توزیع دمایی این سمت خواهد بود: $T^+ = 2.195 \ln y^+ + 13.2 Pr - 5.66$ ($y^+ > y_{CSL}^+$)

بنابراین در ناحیه کاملاً توربولان (زیر لایه توربولان) q''_{app} ثابت است و T^+ دارای توزیع مانند قانون دیولره

10

توزیع سرعت در باله غالب است این فرض که q''_{app} ثابت است در منطقه wake که صیران آن ثابت نیست

نتایج نسبتاً مناسبی بدست می‌دهد در نتیجه اگر $\bar{T} = T_\infty$ در $y = \delta$ جایگزین شود رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\rho C_p U_* \frac{T_0 - T_\infty}{q''_0} = Pr y_{CSL}^+ + \frac{Pr_t}{k} \ln \left(\frac{\delta U_* \nu}{y_{CSL}^+} \right)$$

15

در این رابطه ضریب انتقال حرارت $h = \frac{q''}{T_0 - T_\infty}$ ظاهر شده است ولی δ نامعلوم است که به جای توزیع

سرعت توان $\frac{1}{7}$ از قانون دیولره برای توزیع سرعت استفاده می‌کنیم. اگر $\frac{\delta U_*}{\nu}$ را این دو رابطه با

20

این حرف کنیم خواهیم داشت: $\frac{U_\infty}{U_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{\delta U_*}{\nu} + B$, $\frac{U_\infty}{U_*} = \left(\frac{2}{C_{f,x}} \right)^{1/2}$

$$\rho C_p U_* \frac{T_0 - T_\infty}{q''_0} = Pr y_{CSL}^+ + \frac{Pr_t}{k} \ln \left(\frac{\delta U_* \nu}{y_{CSL}^+} \right)$$

$$h = \frac{1}{2} C_{f,x}$$

25

St $\frac{\rho C_p U_\infty}{Pr_t + \left(\frac{1}{2} C_{f,x} \right)^{1/2} \left[Pr y_{CSL}^+ - B Pr_t - \left(\frac{Pr_t}{k} \right) \ln y_{CSL}^+ \right]}$
 عدد اسمانسون برکسبلا

صحت راست این رابطه با استفاده از مقادیر ثابت تجربی نظیر $B=5.1$ برقرار است زیرا که نمودار:

$$St_x = \frac{h}{\rho C_p U_{\infty}} = \frac{Nu_x}{Re_x} = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} \Rightarrow St_x = \frac{\frac{1}{2} C_{f,x}}{0.9 + (\frac{1}{2} C_{f,x})(13.2 Pr - 10.25)}$$

5. با توجه به اینکه $C_{f,x} \sim 0.15$ و $Pr \sim 0.55$ بنظر می آید که عدد از 0.11 بسیار در نتیجه $St_x \sim C_{f,x}$

البته ضریب تناسب به عدد پراختل بستگی خواهد داشت. رابطه تجربی زیر توسط Colburn برای $0.6 < Pr < 60$

رواقتی در دست است. $St_x Pr^{2/3} = \frac{1}{2} C_{f,x}$ رابطه است Colburn

10

روابطی که ارائه می شود ساده تر و تمیزی von Karman برای لایه مرزی سه ضلعی در بر می آید.

اگر فرض کنیم $Pr = 1$ باشد. معادل St_x با آن زمانه استیال به صورت زیر بدست می آید.

$$St_x = \frac{\frac{1}{2} C_{f,x}}{1 + 5 \left(\frac{1}{2} C_{f,x}\right)^{1/2} \left\{ Pr - 1 + \ln \left[1 + \frac{5}{8} (Pr - 1) \right] \right\}}$$

15

Colburn رابطه است $\rightarrow \frac{Nu_x}{Re_x Pr} Pr^{2/3} = \frac{1}{2} C_{f,x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Nu_x = \frac{1}{2} C_{f,x} \cdot Re_x Pr^{1/3} = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} & (Pr \gg 0.5) \\ \bar{Nu}_L = 0.037 Re_L^{4/5} \cdot Pr^{1/3} & (Pr \gg 0.5) \end{cases}$$

20

با وجودی که این روابط برای حالت انزوترم بدست آمده است ولی برای شرط مرزیه فلکس درازتر می تواند استفاده هم رفت.

5 قابل مقایسه در درجه طریقی \bar{Nu}_x برای حالت فلکس درازتر می تواند فقط از 41 انزوترم بدست است.