فیزیک مدرن

(بخش دوم)

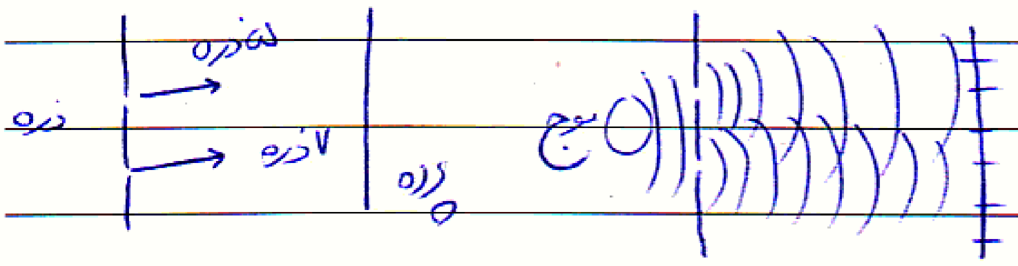
استاد لاله موسوی

تهیه و تنظیم :

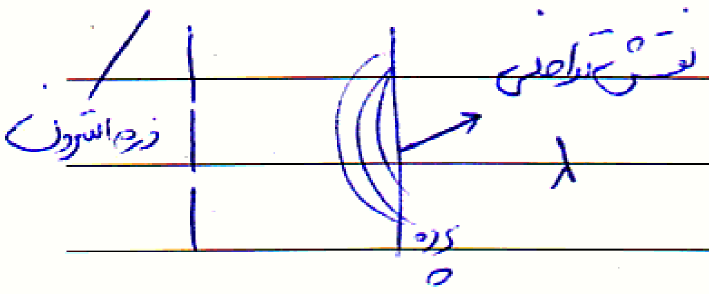
Telegram Channel: @JozveBartarOfficial

فصل ۴) خواص موج‌گونه ذرات

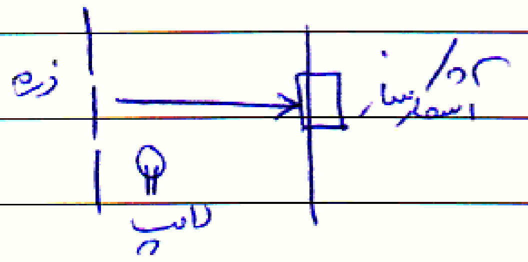
در کلاسیک :



در مکانیک کوانتم :



نقش تداخلی که به وسیله‌ی نور (لامپ) از بین می‌رود.



اصل عدم قطعیت برای امواج کلاسیک :

$y = y_1 \sin k_1 x \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k_1}$

$y = y_1 \sin k_1 x + y_2 \sin k_2 x \longrightarrow$ (دو موج را با هم جمع)

در فیزیک کلاسیک : $\boxed{\Delta x \cdot \Delta k \sim 1}$ از فیزیک کلاسیک است.

Δk خطا در اندازه‌گیری k

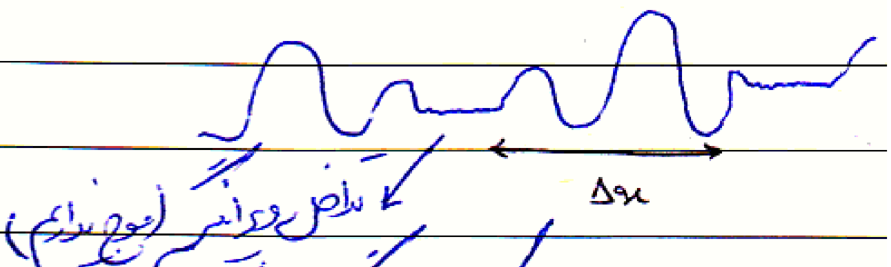
Δ خطا

اگر بتوانیم یکی را با دقت اندازه بگیریم، یکی دیگر را نمی‌توانیم اندازه بگیریم :

$\Delta x \rightarrow \infty$

$\Delta k \sim \frac{1}{\infty} \rightarrow \Delta k = 0$

$\boxed{\Delta \omega \cdot \Delta t \sim 1}$ انرژی و زمان



مثال ۱) در جریان یک اندازه‌گیری که طول موج ... ده طول موج در مسافت 200 cm شمرده می‌شوند.
حداقل عدم قطعیت در طول موج را که ممکن است از این قیاس به دست آید برآورد کنید؟

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$ $\quad$ $k = \frac{2\pi}{\lambda} \longrightarrow dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$

یعنی با اضافه کردن بسته موج ها در فضا

$\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda$ $\quad$ $\Delta x \cdot \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta\lambda \sim 1 \Longrightarrow \Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{2\pi \Delta x}$

$\lambda = 20\, cm$ $\quad$ $\Delta\lambda \sim \frac{(20)^2}{2\pi(200)} \longrightarrow \Delta\lambda \sim 0/3\, cm$

$\Delta x = 200\, cm$ $\quad$ $\pi \to 3/14$

روابط عدم قطعیت هایزنبرگ :

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$ $\quad$ ثابت پلانک h ؛ تکانه $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $\quad$ $p = \hbar k \Rightarrow k = \frac{p}{\hbar}$

$\frac{h}{2\pi} = \hbar$

p اندازه حرکت خطی (تکانه خطی) $\quad$ $\Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar} \Rightarrow \Delta x \cdot \frac{\Delta p}{\hbar} \sim 1 \Rightarrow$

$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$

$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$

$\Delta \omega \cdot \Delta t \sim 1$

$E = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega \Rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$

$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$ $\quad$ $\frac{\Delta E}{\hbar} \cdot \Delta t \sim 1 \Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$

مثال) الکترونی با سرعت $3/6\times10^{6}\, m/s$ در جهت x حرکت می‌کند. می‌توانیم سرعت آن را با دقت ۰/۰۱٪ اندازه بگیریم.

الف) با چه دقتی می‌توانیم به طور همزمان مکان آن را هم تعیین کنیم؟ $(\hbar = 1/05\times10^{-34}$ ژ.ث$)$

ب) در مورد حرکت آن در جهت y چه می‌توانیم بگوییم؟

$V = 3/6\times10^{6}\, m/s$

جرم الکترون $m = 9/11\times10^{-31}\, kg$

$$P_x = mV_x = 9{,}11\times10^{-31}\times 3{,}6\times10^{6} = 3{,}3\times10^{-24}\ \mathrm{kgm/s}$$

$$\Delta P_x = \%1\, P_x = 3{,}3\times10^{-26}\ \mathrm{kgm/s}$$

$$\Delta x\cdot\Delta P_x \sim \hbar \Rightarrow \Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta P_x} \qquad \Delta x \sim \frac{1{,}05\times10^{-34}}{3{,}3\times10^{-26}} = 3{,}2\ \mathrm{nm}$$

ب) چون در جهت x حرکت می کند پس در جهت y مولفه ای ندارد دیگر $V_y=0$ و $\Delta P_y = 0 \Rightarrow \Delta y = \infty$

$P_y = mV_y = 0$

$$\Downarrow$$

$$\Delta y\cdot\Delta P_y \sim \hbar \Rightarrow \Delta y \sim \frac{\hbar}{0} \Rightarrow \Delta y = \infty$$

پس در مورد حرکت آن هیچ اطلاعی نداریم.

$\Delta x = \infty \qquad \Delta x = L \qquad P$ میانگین

$\Delta P_x = 0 \qquad \Delta P_x \sim \frac{\hbar}{L} \qquad \langle P\rangle = 0$

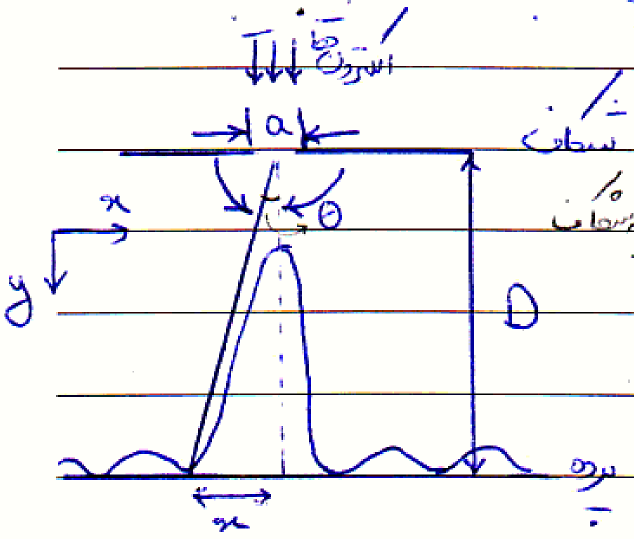
$\Delta x\cdot\Delta P_x \sim \hbar \Rightarrow \Delta P_x \sim \frac{\hbar}{\infty} = 0$

$$\boxed{\sigma_A = \sqrt{(A^2)_{\text{میانگین}} - (A_{\text{میانگین}})^2}} \qquad \Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2\rangle - (\langle P\rangle)^2} \Rightarrow$$

اول به توان ۲ بعد میانگین — اول میانگین بعد به توان ۲

$$\boxed{\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2\rangle}}$$

مثال) باریکه ای از الکترون های تک انرژی با تکانه ی p که در جهت y حرکت می کنند از شکافی به پهنای a می گذرند. عدم قطعیت در مولفه ی x تکانه ی یکی از الکترون ها را پس از عبور از شکاف بیابید.



شکاف — قبل از ورود به شکاف $P_x = 0 \Rightarrow \Delta P_x = 0 \Rightarrow \Delta x = \infty$

بعد از ورود به شکاف $\Delta x = a \qquad \Delta P_x \sim \frac{\hbar}{a}$

$$\Delta P_y = \hbar k \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad P_y = \hbar k$$

$$\sin\theta \sim \mathrm{tg}\,\theta = \frac{P_x}{P_y} = \frac{\hbar/a}{\hbar k} = \frac{1}{ak} = \frac{\lambda}{2\pi a}$$

چون θ از اول کوچک است

$$a\sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi} \longrightarrow \text{برای اولین کمینه روی پرده}$$

مثال) در واپاشی بتازا الکترون‌ها از هسته‌ی اتم خارج می‌شوند. فرض می‌کنیم الکترون‌ها برای مدتی در هسته بدام افتاده‌اند و گاهی یکی از آن‌ها هنگام گریز دور از ما با دستگاه مشاهده می‌شود. قطر هسته را تقریباً $1\times10^{-14}\,m$ بگیرید و با استفاده از اصل عدم قطعیت گستره‌ی انرژی جنبشی این الکترون‌ها را برآورد کنید؟

فمتومتر

$\hbar c = 197\ MeV.fm$

$1\,fm = 10^{-15}\,m$

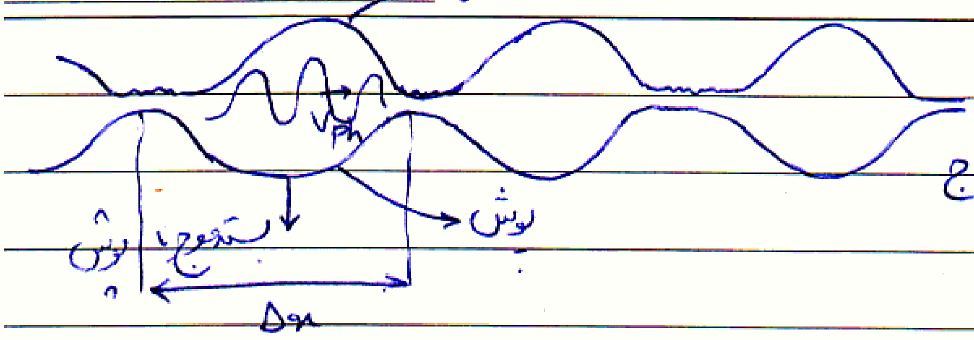
$E_0 = 0/511\ MeV \qquad \Delta x = 1\times10^{-14}\,m = 10\,fm$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar \Rightarrow \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar c}{c\Delta x} \qquad \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \Rightarrow c\Delta p_x \sim \frac{\hbar c}{\Delta x}$$

$$c\Delta p_x \sim \frac{197}{10} = 19/7\ MeV \qquad K = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} - E_0$$

$$K = \sqrt{(19/7)^2 + (0/511)^2} - (0/511) = 19\ MeV \qquad c\Delta p_x = cp_x$$

Subject: سرعت گروه یا پوش یا بسته موج



سرعت فاز: سرعت تک تک امواج

داخل بسته موج V_{ph}

V_{gr} : سرعت بسته موج

برای اینکه موج سینوسی نسبت به زمان ثابت باشد: $y = A\cos(kx - \omega t)$

دامنه موج

$y = A\cos kx$ → سینوسی ثابت

بسته‌های موج:

$$\begin{cases} y_1 = A\cos k_1 x \\ y_2 = A\cos k_2 x \end{cases}$$

$\Delta k = k_2 - k_1$

$k_2 = \Delta k + k_1$

تداخل

$$y = y_1 + y_2 = A\cos k_1 x + A\cos k_2 x$$

$$y = A(\cos k_1 x + \cos k_2 x)$$

$$y = 2A\left(\cos\frac{(k_1+k_2)}{2}x \cdot \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x\right)$$

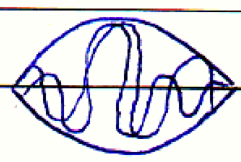
$$y = 2A\left(\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2}\right)x\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad y = A\cos(kx - \omega t)$$

موج سینوسی: $$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

$$V_{\text{گروه}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \qquad \frac{\Delta k}{2}\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)$$

$$V_1 = \frac{\omega_1}{k_1} \qquad V_2 = \frac{\omega_2}{k_2} \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$



تمرینات ۲، ۵، ۶، ۷، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۲، ۳۱، ۳۲، ۳۳

Subject:
Year. Month. Date.

دوبروی $p=\frac{h}{\lambda}$

انرژی $\boxed{E=\hbar\omega}$ $\boxed{\text{تکانه } p=\hbar k}$

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\omega}{dE}\times\frac{dE}{dp}\times\frac{dp}{dk}=\frac{1}{\hbar}\times\frac{dE}{dp}\times\hbar=\frac{dE}{dp}$$

$$\boxed{v_g=\frac{dE}{dp}}$$

$$E=\hbar\omega\longrightarrow\frac{dE}{d\omega}=\hbar\qquad p=\hbar k\Longrightarrow\frac{dp}{dk}=\hbar$$

$$E=\frac{p^2}{2m}\longrightarrow\frac{dE}{dp}=\frac{2p}{2m}=\frac{p}{m}\qquad E=\frac{p^2}{2m}\Rightarrow dE=\frac{2p\,dp}{2m}=\frac{p}{m}dp$$

سرعت گروه $v_g=\frac{dE}{dp}=\frac{p}{m}=\frac{mv}{m}=v$ سرعت ذره

فصل ۵

معادله شرودینگر

در مرزها تابع موج پیوستگی دارد.

* ویژگی‌ها:

۱- در معادله‌ی شرودینگر، اصل پایستگی انرژی باید صادق باشد. (منظور از انرژی، انرژی مکانیکی است.) نسبیت

$E=K+U$

انرژی مکانیکی، انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل

۲- این معادله باید با فرض دوبروی سازگار باشد.

$$p=\frac{h}{\lambda}\Longrightarrow\lambda=\frac{h}{p}$$

$$p=\hbar k\xrightarrow[\text{موج دوبروی ذره آزاد}]{\text{انرژی جنبشی مربوط}}E=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

$U=0$ $\boxed{E=K}$

انرژی جنبشی $K=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ عدد موج

۳- باید خوش رفتار باشد یعنی تابع موج در مرزها پیوسته باشد.

بیان تابع موج

$$\psi(x,t)=A\sin(kx-\omega t)$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\qquad\omega=2\pi\nu$$

Subject:

Year. Month. Date.

K انرژی جنبشی k عدد موج

$$t=0 \rightarrow \psi(x,0)=\psi(x)=A\sin kx$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=Ak\cos kx \qquad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=-Ak^2\sin kx=-k^2(A\sin kx)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-k^2\psi(x)=-\frac{2mK}{\hbar^2}\psi(x)$$

انرژی جنبشی $K=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \Rightarrow k^2=\frac{2mK}{\hbar^2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=K\psi(x)=(E-U)\psi(x)$$

$$E=K+U \Rightarrow K=E-U$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U\psi(x)=E\psi(x)}$$

فرم روشن معادله شرودینگر

معادله ی موج ، معادله ای یک بعدی مستقل از زمان شرودینگر

است چون فقط برحسب x است.

احتمال و بهنجارش:

چگالی احتمال $p(x)=|\psi(x)|^2$

احتمال $=\int p(x)\,dx=\int|\psi(x)|^2\,dx$ $\psi(x)=A\sin kx$

شرط بهنجارش $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,dx=1}$

همیشه $-\infty$ تا $+\infty$ نیست اگر در مورد ذره آزاد باشد همین $-\infty$ تا $+\infty$ است چون ذره هر جایی می‌تواند حرکت کند.

مقدار میانگین $\langle x\rangle=\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,x\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx}$

اگر عبارت مورد نظر x نباشد ⟸ خارج کسر ادا می‌شود

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, x\, dx$$

با هم برابرند

$$\langle f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx$$

ذره آزاد در یک بعد :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U\psi(x) = E\psi(x)$$

ذره‌ی آزاد تحت تأثیر هیچ پتانسیلی نیست.

ذره‌ی مقید تحت تأثیر پتانسیل است

پس پتانسیل یعنی تحت تأثیر نیروهای خارجی است

$U=0$ برای ذره آزاد

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - E\psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \overbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}^{k^2}\psi(x) = 0$$

آزاد $E>0$

$E=0$

$E<0$

هسته

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$E = \cancel{U}_{0} + K \Rightarrow E = K$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0}$$

معادله موج

$$\psi_1(x) = A\sin(kx)$$

$$\psi_2(x) = B\cos(kx)$$

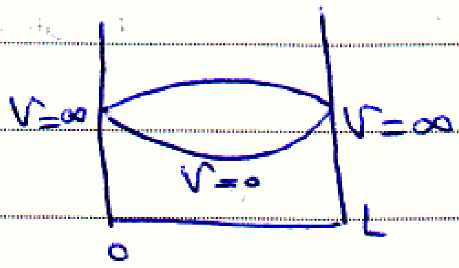
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U\psi(x) = E\psi(x) \Longrightarrow \psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) =$$

$U=0 \quad E>0$

$$A\sin kx + B\cos kx$$

ذره در جعبه ۱ بعدی :

$$U(x)=\begin{cases}0 & 0<x<L\\ \infty & x>L,\ x<0\end{cases}$$



$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi(x)=E\psi(x)\Rightarrow\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=E\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0\Longrightarrow K^2=\frac{2mE}{\hbar^2}\Longrightarrow E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\begin{cases}\psi_1(x)=A\sin Kx\longrightarrow x=0\Longrightarrow\psi(0)=0\\ \psi_2(x)=B\cos Kx\longrightarrow x=0\Longrightarrow\psi(0)=B\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

$$\psi(x)=A\sin Kx\xrightarrow[\psi(L)=0]{x=L}\sin KL=0=\sin n\pi\quad(n=1,2,\dots)$$

$$KL=n\pi\Longrightarrow K=\frac{n\pi}{L}$$

$$\int_0^L|\psi(x)|^2dx=1\Longrightarrow A^2\int_0^L\sin^2Kx\,dx=1$$

$$\frac{A^2}{2}\int_0^L(1-\cos 2Kx)\,dx=1\longrightarrow A^2\Big(L-\frac{1}{2K}\sin 2KL-0\Big)=1\qquad K=\frac{n\pi}{L}$$

$$\frac{A^2}{2}L=1\longrightarrow A^2=\frac{2}{L}\Longrightarrow A=\sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\Longrightarrow E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\qquad\qquad \psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$n=1,2,3,\dots$

$$n=1 \longrightarrow E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = E_0$$ انرژی حالت پایه

$$n=2 \longrightarrow E_2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 4E_0$$

$$n=3 \longrightarrow E_3 = 9E_0$$ حالت‌های برانگیخته

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \sin\frac{\pi}{L}x$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \sin\frac{2\pi}{L}x$$

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\ \sin\frac{3\pi}{L}x$$

احتمال حضور ذره در اولین حالت برانگیخته در بازه‌ی $(0<x<L/2)$

$$\int_0^{L/2} |\psi_2(x)|^2 dx = \int_0^{L/2} \frac{2}{L}\sin^2\frac{2\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\times\frac{1}{2}\int_0^{L/2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{L}\right)dx =$$

مثال) الکترونی در یک ناحیه‌ی ۱ بعدی به طول $1\times10^{-10}\ m$ به دام افتاده است.

الف) برای برانگیختن الکترون از حالت پایه به نخستین حالت برانگیخته چقدر انرژی باید به آن بدهیم؟

ب) در حالت پایه، احتمال یافتن الکترون در ناحیه‌ی $x=/9\times10^{-10}\ m$ تا $x=/11\times10^{-10}\ m$ چیست؟

ج) در نخستین حالت برانگیخته، احتمال یافتن الکترون بین $x=0$ و $x=/25\times10^{-10}\ m$ چقدر است؟

$L = 1\times10^{-10}\ m$

$n=1$

$n=2$

الف) $\begin{cases} E_1 = E_0 \\ E_2 = 4E_0 \end{cases} \Rightarrow E_2 - E_1 = 4E_0 - E_0$

$E_0 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 37\,eV$

$\Delta E = 3E_0$

$\Delta E_{1,2} = 3\times37$

$m = 9{,}11\times10^{-31}\ kg$

$\Delta E_{12} = 111\,eV$

$\hbar = 1{,}05\times10^{-34}\ J.s$

ب) $P = \int_{x=0/09\times10^{-10}}^{x=0/11\times10^{-10}} |\psi_1(x)|^2\,dx = \dfrac{2}{L}\int_{0/09\times10^{-10}}^{0/11\times10^{-10}} \sin^2\dfrac{\pi}{L}x\,dx = 0/38\ \%$

ج) $P = \int_{x=0}^{x=0/25\times10^{-10}} |\psi_2(x)|^2\,dx = \dfrac{2}{L}\int_0^{0/25\times10^{-10}} \sin^2\dfrac{2\pi}{L}x\,dx = 0/25\ \%$

مثال) نشان دهید که مقدار میانگین x در مسائل ذره در جعبه بدون توجه به حالتهای کوانتومی عبارت است از: $L/2$.

$\langle x\rangle = \int_0^L |\psi_n(x)|^2\,x\,dx \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\dfrac{n\pi}{L}x$

$\langle x\rangle = \dfrac{2}{L}\int_0^L\left(\sin^2\dfrac{n\pi}{L}x\right)x\,dx = \dfrac{1}{L}\int_0^L\left(1-\cos2\dfrac{n\pi}{L}x\right)x\,dx$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos2x}{2} \qquad \langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\int_0^L\left[x\,dx - x\cos\dfrac{2n\pi}{L}x\,dx\right]$

$\langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\left[\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^L - \int_0^L x\cos\dfrac{2n\pi}{L}x\,dx\right]$

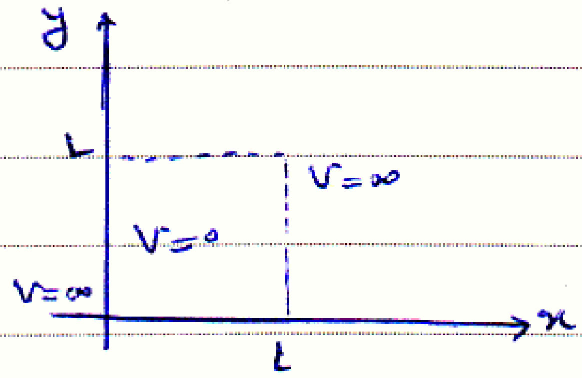
$\langle x\rangle = \dfrac{1}{L}\dfrac{L^2}{2} - \int_0^L x\cos\dfrac{2n\pi}{L}x\,dx = \dfrac{L}{2}$

با توجه به مراحل صفر می‌شود

$$\int_0^L x\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx \quad \begin{cases} x=u \longrightarrow dx=du \\ \cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx=dv \Rightarrow \frac{1}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{L}x=v \end{cases}$$

$$=\frac{xL}{2n\pi}\cancel{\sin\frac{n\pi L}{x}}\Big|_0^L-\underline{\frac{L}{2n\pi}\int\sin\frac{2n\pi}{L}x\,dx}-\cos\frac{2n\pi}{L}x\Big|_0^L=0$$

ذره در جعبه‌ی دو بعدی :



$$u(x,y)=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq L\ ,\ 0\leq y\leq L\\ \infty & \text{در جاهای دیگر}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi(x=0)=\psi(x=L)=0\\ \psi(y=0)=\psi(y=L)=0\end{cases}$$ شرایط مرزی

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r)-\cancel{V}^{\,u}\psi(r)=E\psi \qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\overset{f(x)g(y)}{\psi(x,y)}-\underbrace{\cancel{V}^{\,u}(x,y)\psi(x,y)}_{0}=E\psi(x,y)$$

$$\psi(x,y)=f(x)g(y) \quad , \quad E=E_x+E_y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\cdot g(y)+\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\cdot f(x)\right]=E\,f(x)g(y)$$

فرض تقسیم پذیر f(x)g(y)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\right]=E_x+E_y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2f(x)}{dx^2}=E_x f(x) \quad , \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2g(y)}{dy^2}=g(y)E(y)$$

$$f(x)=A_1\sin k_1x+B_1\cos k_1x \longrightarrow f(x)=A_1\sin k_1x$$

$$g(y)=A_2\sin k_2y+B_2\cos k_2y \longrightarrow g(y)=A_2\sin k_2y$$

$$f(x=L)=0 \longrightarrow A_1\sin k_1L=0 \longrightarrow \sin n_x\pi \qquad k_1L=n_x\pi$$

$$k_1L=n_x\pi \longrightarrow k_1=n_x\frac{\pi}{L}$$

$$f(x)=A_1\sin\frac{n_x\pi x}{L} \xrightarrow{A_1=\sqrt{\frac{2}{L}}} f(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_x\pi x}{L}$$

$$g(y)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_y\pi y}{L} \qquad \psi(x,y)=f(x)g(y)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\cdot\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_y\pi y}{L}$$

$$\psi(x,y)=\frac{2}{L}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L}$$

$$E_x=\frac{n_x^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,,\quad E_y=\frac{n_y^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \Longrightarrow E=E_x+E_y$$

$$\boxed{E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_x^2+n_y^2) \qquad n_x,n_y=1,2,3,\dots}$$

$$\boxed{\psi(x,y)=\frac{2}{L}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L}}$$

$$n_x=1,\ n_y=1 \longrightarrow \begin{cases}\psi(x,y)=\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\\[2mm] E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(1+1)=\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}\end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} n_x=1,\ n_y=2 & \psi_{1,2}(x,y)=\frac{2}{L}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi y}{L}\,,\quad E=\frac{5\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\\[2mm] n_x=2,\ n_y=1 & \psi_{2,1}(x,y)=\frac{2}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}\,,\quad E=\frac{5\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\end{array}$$

حالت واگن

* حالت واگن (تبهگن): به حالتی گفته می‌شود که به ازای یک مقدار انرژی چند تابع موج وجود داشته باشد.

حالت واگنی فقط برای سیستم‌های متقارن است. ←

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{L^2}+\frac{n_y^2}{L'^2}\right)$$

مثال) انرژی حالت پایه یک ذره در یک چاه یک بعدی نامتناهی ۴,۴ eV است. اگر پهنای چاه ۲ برابر شود انرژی حالت پایه چه تغییری می‌شود؟

$$E=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$n=1\longrightarrow E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$L'\longrightarrow 2L \qquad E'=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m(2L)^2}=\frac{1}{4}E_1$$

مثال) ذره‌ای در یک جعبه دو بعدی به طول L و پهنای 2L محدود است. مقادیر انرژی عبارت است:

$$E=\overset{K}{\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}\left(n_x^2+\frac{n_y^2}{4}\right)$$

۲ تا از پایین‌ترین ترازهای واگن را بیابید؟

حالت نامتقارن است باید nها را طوری انتخاب کنیم سیستم متقارن شود.

$$\psi(x,y)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{2}{L'}}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L'}$$

$$\psi(x,y)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{n_y\pi y}{2L}$$

$$\begin{cases} n_x=1,\ n_y=4 \longrightarrow 1+4=5K & E=5E_0 \\ n_x=2,\ n_y=2 \longrightarrow 4+1=5K & E=5E_0 \end{cases}$$

فصل ۵ - نوسانگر هماهنگ ساده (یک بعدی)

$$F = -Kx \longrightarrow U = -\int F\,dx = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi$$

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2} \qquad \frac{d\psi(x)}{dx} = -2Aaxe^{-ax^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -2Aae^{-ax^2} + (-2Aax)(-2ax)e^{-ax^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -2Aae^{-ax^2} + 4Aa^2x^2e^{-ax^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2a + 4a^2x^2)\cancel{Ae^{-ax^2}} + \frac{1}{2}kx^2\cancel{Ae^{-ax^2}} = E\cancel{Ae^{-ax^2}} \Rightarrow \frac{\hbar^2 a}{m} - \frac{2\hbar^2a^2x^2}{m} + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

$$\frac{\hbar^2 a}{m} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}k - \frac{2\hbar^2a^2}{m}\right)}_{0}x^2 = E + 0\times x^2$$

$$E = \frac{\hbar^2 a}{m} \qquad \frac{1}{2}k - \frac{2\hbar^2a^2}{m} = 0$$

$$E = \frac{\hbar^2}{m}\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} \qquad \frac{1}{2}k = \frac{2\hbar^2a^2}{m} \longrightarrow a^2 = \frac{mk}{4\hbar^2}$$

$$E = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$ انرژی پایه نوسانگر

$$a = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, \ldots, \ldots)$$

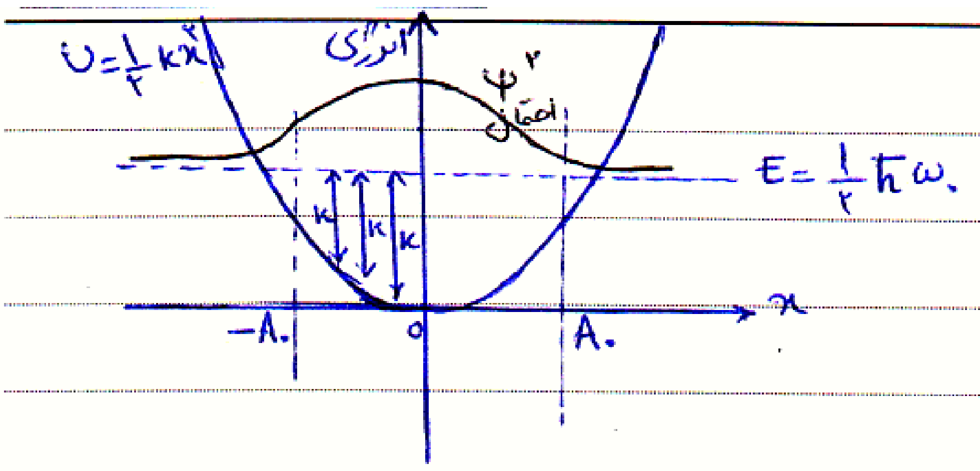
دقت برای نوسانگر ساده کوانتومی $n=0$ وجود دارد.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2} \qquad \boxed{a = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$\int |\psi(x)|^۲ dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^۲ dx = 1 \Rightarrow A^۲ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-۲a x^۲} dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^۲} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad *$$

$$A^۲ \sqrt{\frac{\pi}{۲a}} = 1 \Rightarrow A^۲ = \sqrt{\frac{۲a}{\pi}} \Rightarrow A = \left(\frac{۲a}{\pi}\right)^{1/۴}$$

$$a = \frac{\sqrt{mk}}{۲\hbar} \Rightarrow A = \left(\frac{\cancel{۴}\sqrt{mk}}{\cancel{۴}\hbar\pi}\right)^{1/۴}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0^۲ = \frac{k}{m} \qquad A = \left(\frac{\sqrt{mk}}{\pi\hbar}\right)^{1/۴} = \left(\frac{\sqrt{m^۲\omega_0^۲}}{\pi\hbar}\right)^{1/۴} = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/۴}$$

$$k = m\omega_0^۲$$

$$A = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/۴}$$

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/۴} e^{-\frac{\sqrt{mk}}{۲\hbar}x^۲}$$

$$\psi(x,t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t) = \left(A' e^{ikx} + B' e^{-ikx}\right) e^{-i\omega t}$$

$$\psi(x,t) = A' e^{i(kx-\omega t)} + B' e^{-i(kx+\omega t)}$$

ورودی

$\xrightarrow{A'}$ $\qquad$ $\xrightarrow{A'}$ $\qquad$ $\xleftarrow{}$ B' $\qquad$ $\xrightarrow{C'}$

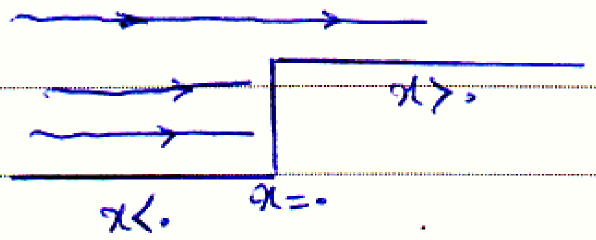
بازتاب $B' \longleftarrow$

$$\text{توان بازتاب} = \left|\frac{B'}{A'}\right|^۲$$

$$\text{توان بزتاب} = \left|\frac{C'}{A'}\right|^۲ \longleftarrow$$

پله‌ها و سدها :

پله $E>U_0$



$$\begin{cases} x<0 \quad \psi_1(x) = \underbrace{Ae^{ik_1x}}_{\text{ورودی}} + \underbrace{Be^{-ik_1x}}_{\text{بازتابی}} \\ x>0 \quad \psi_2(x) = \underbrace{Ce^{ik_2x}}_{\text{عبوری}} + De^{-ik_2x} \end{cases}$$

$D=0 \Leftarrow$ چون مانعی وجود ندارد که بخواهد بازتاب شود.

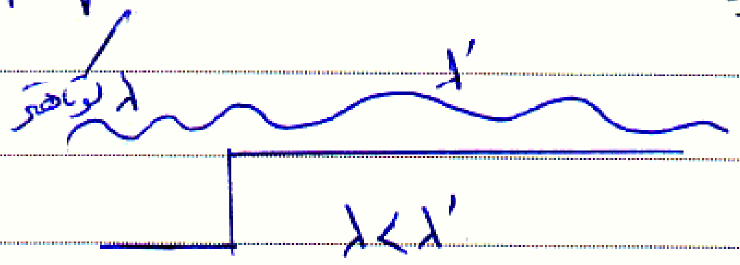
$$K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad , \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$$

$$\text{توان بازتاب} = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \qquad \text{توان عبور} = \left|\frac{C}{A}\right|^2$$

$$K = \frac{P^2}{2m} \longrightarrow P = \sqrt{2mK}$$

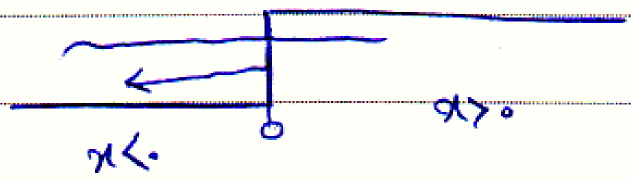
چون موج‌های کوتاه‌تر انرژی بیشتری دارند.

$$P = \frac{h}{\lambda}$$



پله $E<U_0$

از نظر کلاسیک عبور نمی‌کند اما از نظر کوانتوم عبور می‌کند.
کلاسیک می‌گوید هیچ عبور نمی‌کند ولی کوانتوم می‌گوید یک ذره عبور می‌کند.



$$\begin{cases} x<0 \quad \psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\ x>0 \quad \psi_2(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \end{cases} \qquad C=0$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$

چون توانش مثبت است. (e^{k_2x}) در حالیکه وقتی موج به پله می‌رسد نزول پیدا می‌کند در حالیکه Ce^{k_2x} یک تابع صعودی است.

فرض کنیم در ناحیه‌ای Δx احتمال به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه‌اش می‌رسد.

$$e^{-2k_2\Delta x} = e^{-1}$$

$$2k_2\Delta x = 1 \Longrightarrow \Delta x = \frac{1}{2k_2}$$

میزان نفوذ در این سد $\Delta x = \dfrac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-E)}}$

اگر قرار باشد ذره در ناحیه $x>0$ وارد شود باید انرژی حداقل $U_0 - E$ باشد

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \Longrightarrow \Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$$

$$\Delta E = U_0 - E + K \qquad \Delta t \sim \frac{\hbar}{U_0 - E + K}$$

سرعت حرکت ذره $V = \sqrt{\dfrac{2K}{m}}$

میانگین $\Delta x = \dfrac{1}{2} v \Delta t = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2K}{m}} \times \dfrac{\hbar}{U_0 - E + K}$

$$K \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \quad , \quad K \to \infty \Rightarrow \Delta x \to 0$$

$$\Delta x_{max} = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0-E)}} \qquad \Delta x = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-E)}}$$

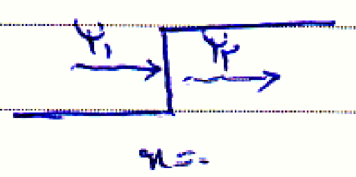
شرایط مرزی: خود تابع موج و مشتقش در مرز باید پیوسته باشد.

مفهوم پیوستگی:

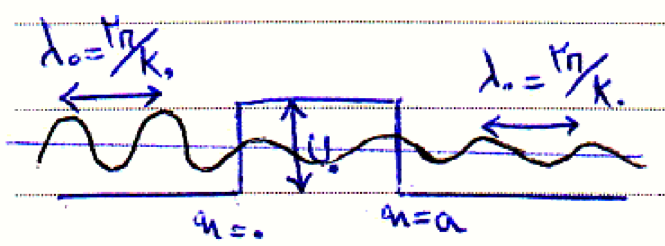
اگر موجی از سد گذشت باید بتواند از سد برگردد (از سد نرود)

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$$

$$\psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0)$$



سد انرژی پتانسیل:



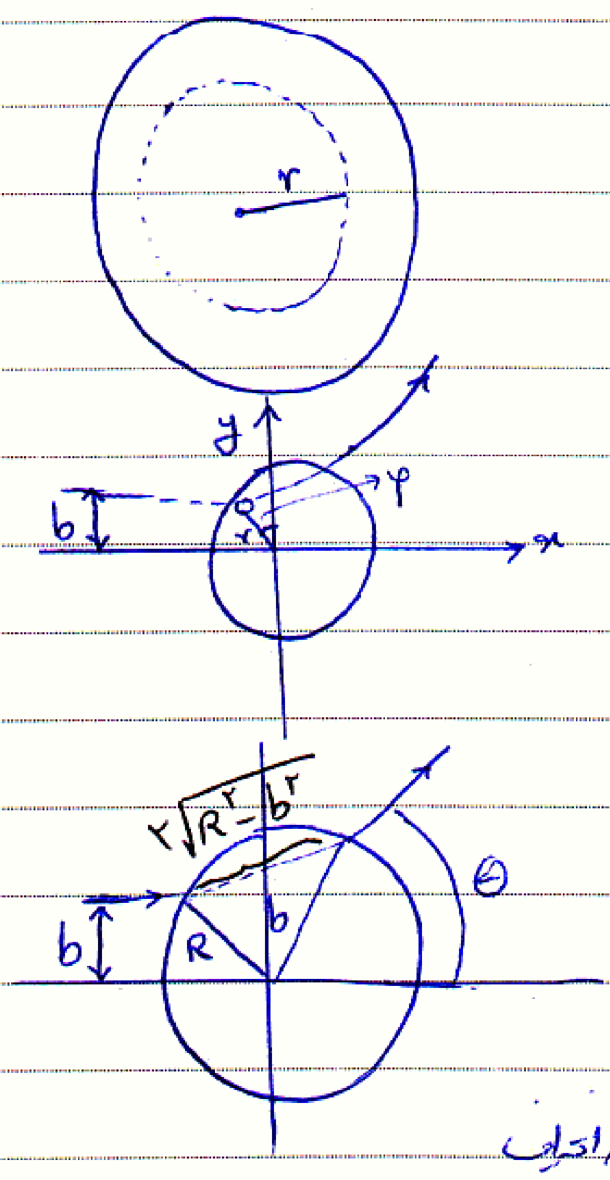
فصل ۵ : ۲ـ۴ـ۵ـ۷ـ۹ـ۱۶ـ۲۱ـ۲۵ـ۳۲

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ U_0 & 0\leq x\leq a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & x<0 \\ \psi_2(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} & 0\leq x\leq a \\ \psi_3(x) = Ee^{ik_1x} + \underset{0}{\cancel{Fe^{-ik_1x}}} & x>a \end{cases} \qquad E<U_0$$

فصل ۶ : مدل اتمی



$$F = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = kr$$

فقط توضیح مدل‌های اتمی خوانده شود.

$$\text{ضربه}\ \Delta P_y = \int F_y\,dt$$

$$F_y = F\cos\phi$$

$$F = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,r = kr \qquad q=2e \qquad \cos\phi = \frac{b}{r}$$

$$\Delta P_y \simeq \int 2kr_0\frac{b}{r}\,dt = \boxed{2kbt}$$

$$\text{زاویه انحراف}: \theta = \frac{2\cdot 2kb}{mv^2}\sqrt{R^2-b^2}$$

مدل اتمی تامسون :

در مدل اتمی تامسون فرض شد Z الکترون در داخل کره ای یکنواختی با بار مثبت Ze و شعاع R قرار گرفته اند و بارهای الکتریکی نوسان کرده امواج الکترومغناطیسی تابش می کنند که بسامد آن با بسامد این نوسان یکسان است.

بر اساس مدل تامسون انتظار داریم که تابش گسیل شده از اتم ها دارای این بسامد مشخص باشد اما تجربه نشان داد که چنین نیست. بسامدهای محاسبه شده همان بسامد تابش گسیل شده از اتم ها نیستند. جدی ترین نارسایی مدل تامسون در پراکندگی ذرات باردار از اتم ها نمایان می شود. آزمایش نشان داد که (توسط رادرفورد) پراکندگی اتم تامسون در زوایای بزرگ حدود 10^8 برابر از واقعیت کمتر است.

مدل اتمی رادرفورد - بوهر :

در این مدل بارهای مثبت را در هسته در نظر گرفتند و الکترون ها را متحرک در مدارهای اطراف هسته. در مدارهای پایا الکترون اطراف هسته می چرخد ولی تابش نمی کند فقط زمانیکه به آن مقداری انرژی داده شود و از یک تراز به تراز دیگر گسیل شود آنگاه تابش انجام می شود. این مدل فقط برای اتم های هیدروژن گونه موفق است (یعنی اتم هایی که در لایه ی آخرشان فقط یک الکترون دارد.)

+ تعریف نوترون

در سایه سار اندیشه ، بی هیچ چشم داشت زمینی

عهد بسته ایم آسمانی باشیم

در این محفل با ما همراه باشید

زمان :

همین حالا تا همیشه

مکان :

بچه های مهندسی برق الکترونیک و قدرت *88*

www.dez-bargh-88.blogfa.com