✓ جلسه اول

● مروری مختصر بر ارتعاشات :

تکرار حرکت دینامیکی = Vibrations

1 اجباری (forced vib) external excitation

آزاد (free vib) (پاسخ به IC / شرایط اولیه) Initial condition

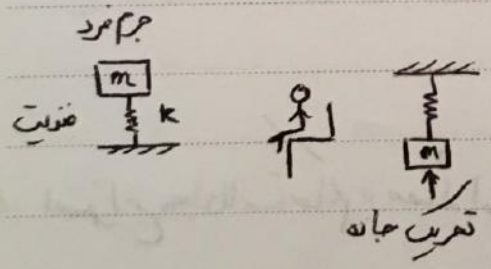
free vib به دلیل حضور استهلاک بعد از مدتی پاسخ از بین می‌رود، مگر شرایط ایده آل

بعلت میرایی (میرایی = Damping)

forced vib پاسخ به تحریک خارجی (external excitation)

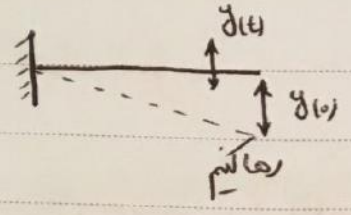
مدل سازی

- سازه ارتعاشی
  - جرم — mass
  - فنریت — stiffness
  - میرایی — dumping



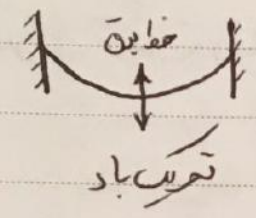
مثلاً ستون فقرات برای راننده : فنریت

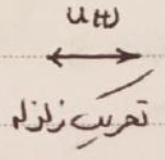
مثال برای آزاد :



ضربه زدن به خط کش

مثال برای external excitation :



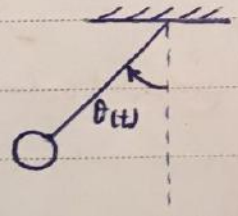


عبور خودرو و یا عابر از روی پل

میله های حفاری

۲ ارتعاشات — خطی (Linear) : نوسانات کوچک باشد

غیرخطی (Non Linear) : نوسانات بزرگ باشد



$\theta(t) < 5.6^\circ$ ← Linear

$\theta(t)$: Large ← Non Linear

استخراج معادلات حاکم بر مسأله ارتعاشی ← دیاگرام آزاد (F.B.D دینامیک)

↕ ↔

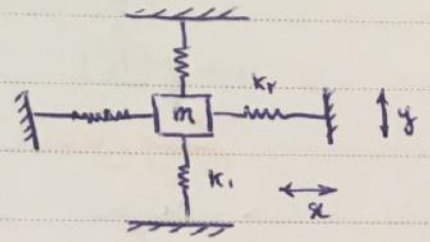
ماتریسی : برای چند درجه آزادی با حرکت فقط خطی

لاگرانژ : برای چند درجه آزادی با حرکت ترکیبی خطی - دورانی

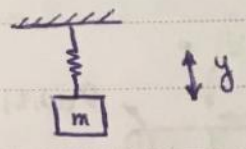
↔

درجه آزادی :

به تعداد درجات مستقلی که جهت توصیف دینامیک یک مسئله نیاز است.

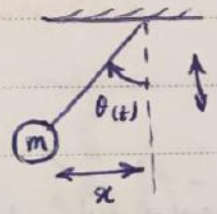


2 Dof



SDof (single degree of freedom)

در مدل سازی تا بتوانیم سعی بر ساده سازی مهندسی داریم.

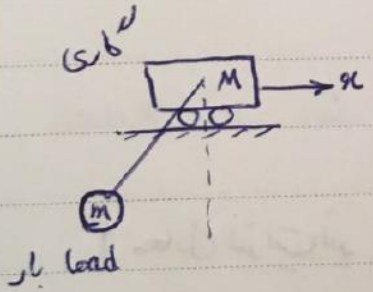


SDof

$$\begin{cases} x = l \sin\theta \\ y = l \cos\theta \end{cases}$$

y و x هر دو به θ وابسته اند!

2 Dof



trolly

مدل جرثقیل سقفی

(MDof)
multi

درجه آزادی

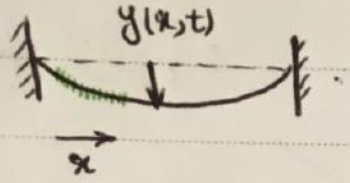
SDof

MDof یا 2Dof

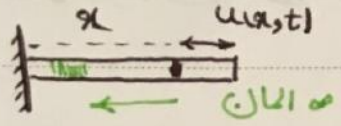
continuos (پیوسته ، ∞ درجه آزادی)

معادله حاکم : موج

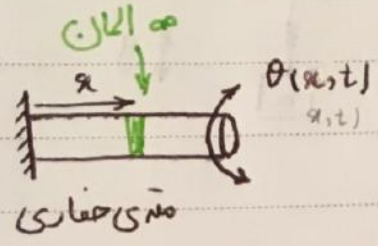
مثال : Continuos



ارتعاش عرضی ← string



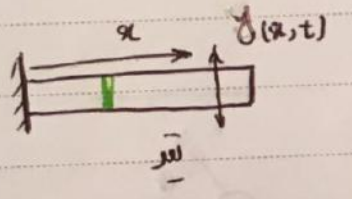
ارتعاش طولی ← rod / bar



ارتعاش پیچشی ← shaft

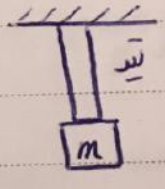
زیرا

بی نهایت درجه آزادی هم ی این ها بی نهایت المان داریم ! ← بعضی ها نشان می دهند این موضوع را

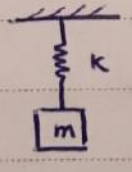


ارتعاش عرضی ← beam

■ مدل پرورژ تیر به سقف :



کامل تر / پیوسته / دقیق تر

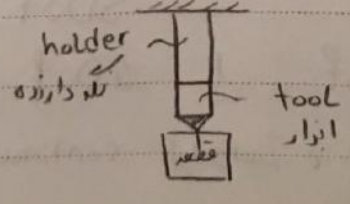


ساده سازی مهندسی

(معادل فنریت تیر)

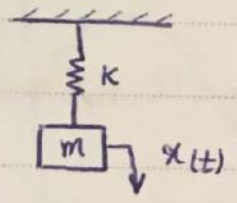
طول ↗ ارتعاش ↗ انعطاف پذیری ↗

مثال : CNC



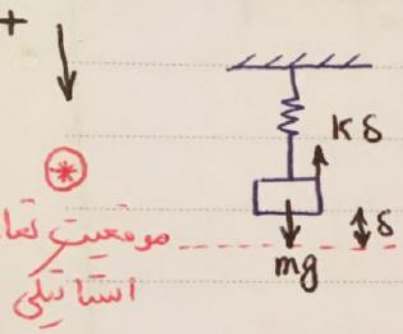
جلسه دوم

ارتعاشات آزاد SDof بدون میرایی :



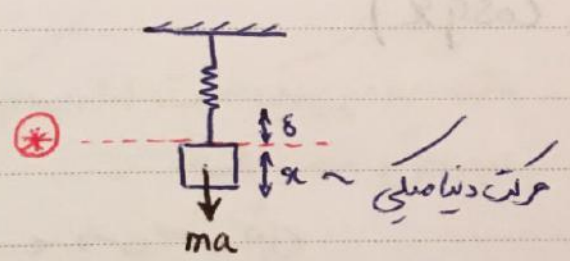
I.C آزاد به $\begin{cases} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{cases} \longrightarrow x(t) = ?$

معادله حاکم :



$\Sigma F_x = 0$

$+mg - K\delta = 0$ (۱) (Static Eq)



(Dynamic Eq)

$\Sigma F_x = m\ddot{x}$

$+mg - K(x - \delta) = m\ddot{x}$ (۲)

subs. (۱) @ (۲) $\rightarrow$ $m\ddot{x} + Kx = 0$ $\longrightarrow$ ادامه در صفحه‌ی بعد

معادله ارتعاش آزاد m_K sys. :

$$ay'' + by' + cy = 0 \longrightarrow aD^2 + bD + c = 0$$

$$D_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حالات :

(۱) $D_{1,2} = P_1 , P_2$

$$y(x) = C_1 e^{P_1 x} + C_2 e^{P_2 x}$$

حالت خاص (۱) ←

$$D_{1,2} = P_1 = P_2 = P$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{Px}$$

(۲) $D_{1,2} = P \pm qj$

$$y(x) = e^{Px} (C_1 \sin qx + C_2 \cos qx)$$

ادامه‌ی صفحه قبل ←

$$mD^2 + K = 0$$

$$D_{1,2} = \pm\sqrt{-K/m} = \pm j\sqrt{K/m}$$

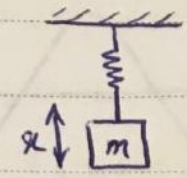
پاسخ آزاد $x(t) = C_1 \sin W_n t + C_2 \cos W_n t$

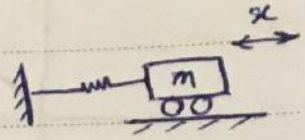
فرکانس طبیعی سیستم $W_n = \sqrt{K/m}$

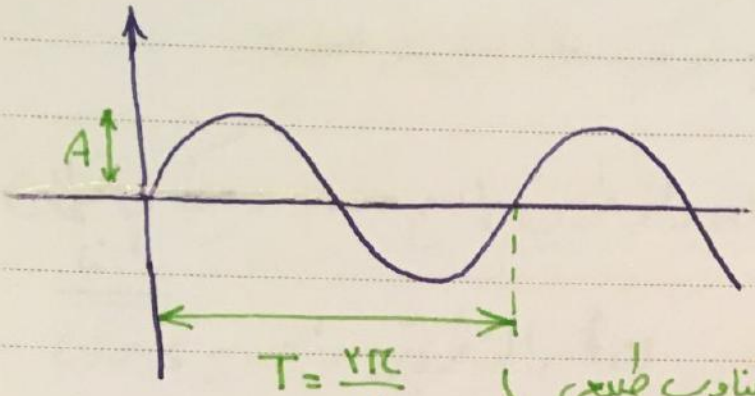
نکته : فرکانس طبیعی تابعی از جرم و فنریت سازه است.

W_n : naturar frequency

$x(t) = A \sin \omega_n t$





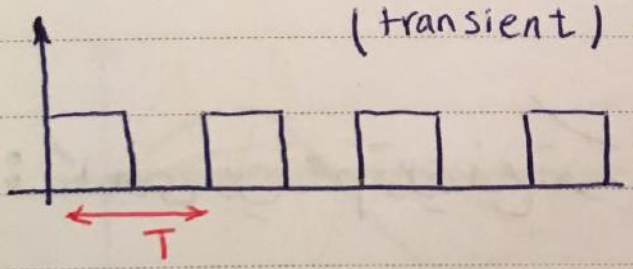


$T = \frac{2\pi}{\omega_n}$ (دوره تناوب طبیعی)

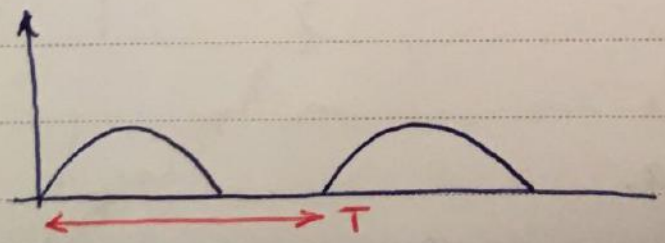
ارتعاشات اجباری :

پاسخ به تحریک خارجی است.

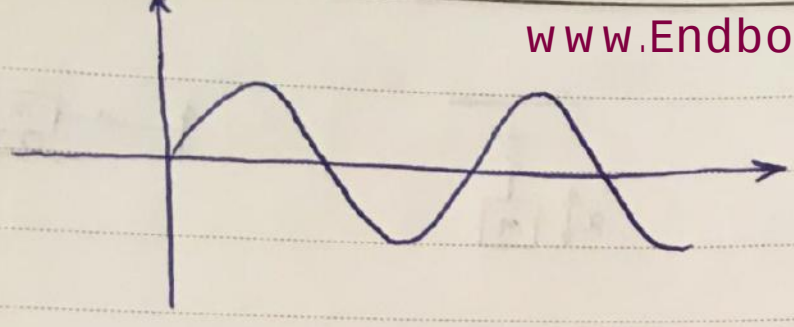
- پریودیک : یعنی دوره تناوب داشته باشد.
- هارمونیک : هارمونیک، پریودیک هست اما برعکس نیست یعنی همان sin و cos
- گذرا (transient)



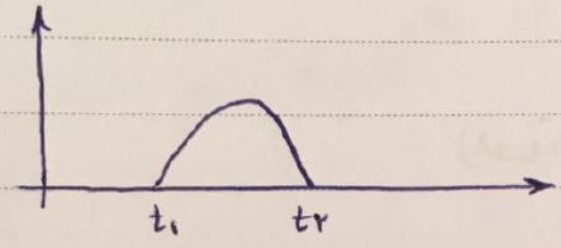
پریودیک

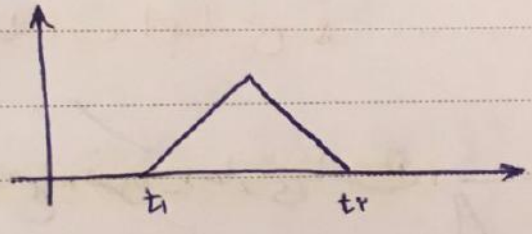


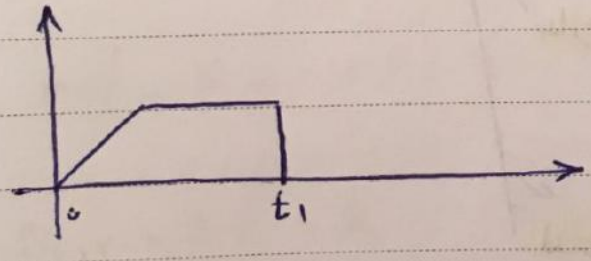
هارمونیک



گذرا







مهم: کاربردی ترین و مهم ترین نوع تحریک هارمونیک است. یعنی:

$$f(t) = f_0 \sin \omega t$$

دامنه‌ی تحریک — Excitation amplitude

فرکانس تحریک — Exc Freq.

پاسخ سازه به تحریک با همان فرکانس تحریک نوسان می‌کند.

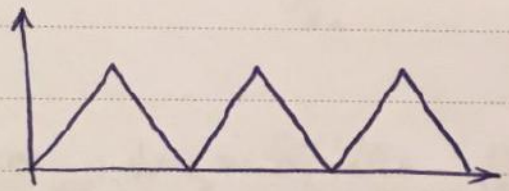
Subject:
Year. Month. Date. ( )

علت این که کاربردی ترین و مهم ترین تحریک هارمونیک است:

① یافتن پاسخ به تحریک هارمونیک از سایر تحریک ها آسان تر است.

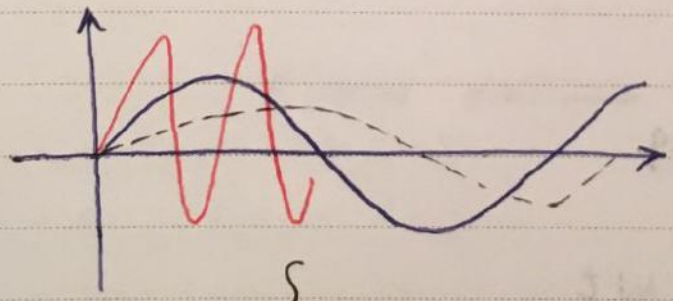
② پاسخ به تحریک دلخواه پریودیک را به آسانی و از طریق پاسخ به هارمونیک می توان یافت چرا که هر تحریک دلخواه پریودیک $f(t)$ را از طریق بسط فوریه می توان به صورت مجموعه‌ای از هارمونیک ها نوشت.

$$f(t)_{\text{پریودیک}} = a_0 + \sum a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$



پریودیک

می شود



مجموعه ای از هارمونیک ها می شود

پریودیک!

مجموعه‌ای از هارمونیک ها

Subject:
Year. Month. Date. ( )

▲ فرکانس : تعداد نوسانات در یک ثانیه مثلاً اگر سازه‌ای در 5 ثانیه، ۱۰ نوسان کرد.

5 s ۱۰ نوسان

1 s $\nu_n = f_n = ۲$ Hz

$\omega_n = ۲\pi f_n = ۴\pi \simeq ۱۲$ rad/s

حال برگردیم : ارتعاش اجباری سیستم m-k

* $m\ddot{x} + kx = f \sin \omega t$ معادله دیفرانسیل غیرهمگن

پاسخ کل $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

x_h: پاسخ همگن یعنی ارتعاشات آزاد — homogenous solution

x_p: پاسخ خصوصی ویژه ارتعاشات اجباری — particular sol.

to find x_p : from Diff. Eq.

$x_p = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

sub @ *

$-m\omega^۲(A \sin \omega t + B \cos \omega t) + k(A \sin \omega t + B \cos \omega t) \overset{\text{مقدار}}{=}$

$= F_0 \sin \omega t$

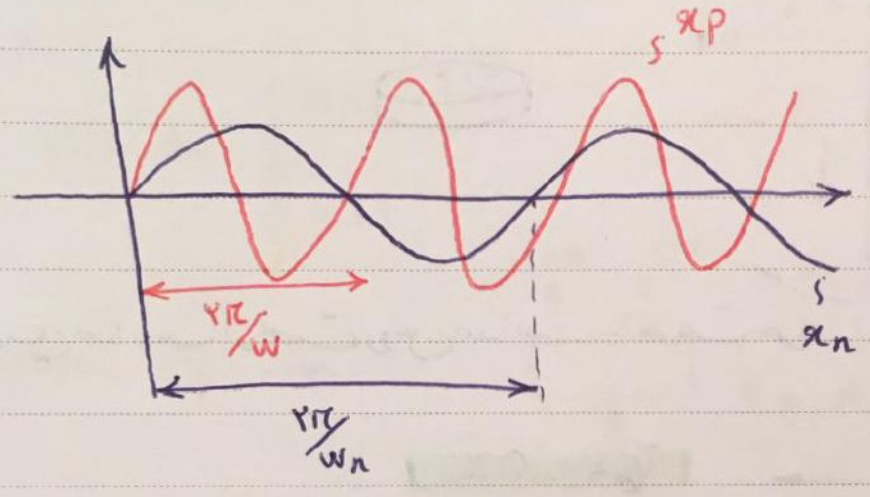
$\rightarrow B = 0 \quad A = \dfrac{F_0}{k - m\omega^۲}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با فرکانس W_n نوسان می‌کند. با فرکانس W نوسان می‌کند

$$x(t) = \underbrace{C_1 \sin W_n t + C_2 \cos W_n t}_{x_h} + \underbrace{\frac{F_0}{k - mw^2} \sin wt}_{x_p}$$

C_1 , C_2 are found by I.C.



اگر فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سازه برابر شود $\frac{\text{رزونانس}}{\text{تشدید}}$ داریم دامنه ∞

$$K - mw^2 = 0 \longrightarrow w = \sqrt{K/m} = W_0$$

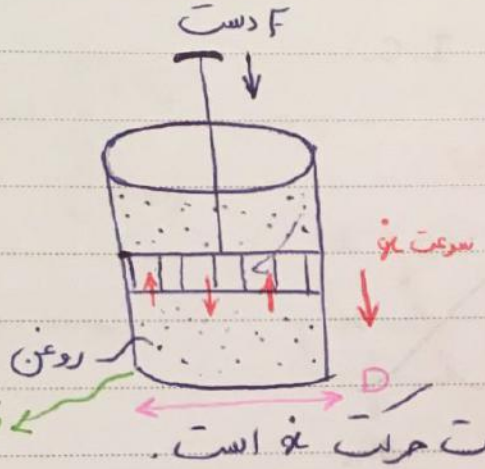
Subject:
Year. Month. Date. ( )

✓ جلسه سوم

عوامل کندکننده‌ی حرکت

ارتعاشات SDof با میرایی :

میرایی Damping :



نیروی مقاومت از سمت روغن متناسب با سرعت حرکت $\dot{x}$ است.

$$F_d \sim \dot{x} \longrightarrow \boxed{F_d = -c\dot{x}}$$

مقاوم میرایی — Resistance

ضریب میرایی — Damping coeff

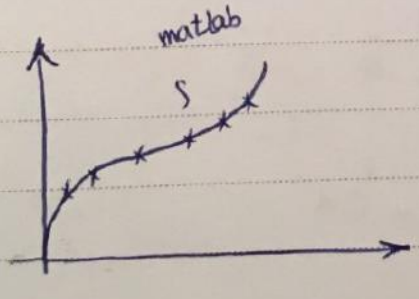
$$c = c(\overset{\text{لزجت}}{\mu}, D, \varepsilon, d, \dots)$$

← میرایی بستگی دارد به

نیروی اینرسی : $m\ddot{x}$

نیروی میرایی : $c\dot{x}$

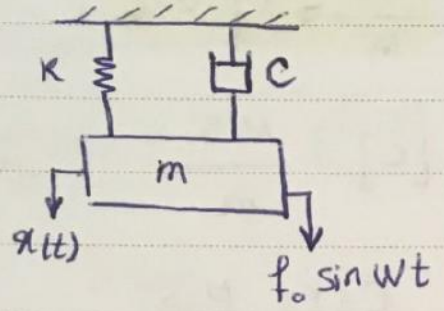
نیروی فنریت : Kx



در برخی مسائل میرایی غیرخطی داریم :

مثلاً
$$F_d = -c\dot{x} - c^*\dot{x}^3$$
$$= -c\dot{x}^2 - c'\sqrt{\dot{x}}$$

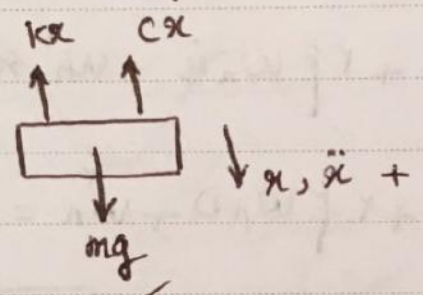
Subject:
Year. Month. Date. ( )



ارتعاشات آزاد : $f_0 = 0$

vib. to $\begin{cases} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{cases}$

Dynamic Eq. →



(اما mg در معادله استاتیک با $K\delta$ حذف شده است.)

$\sum F_x = m\ddot{x} \longrightarrow -Kx - C\dot{x} = m\ddot{x}$

معادله حاکم sys $m - K - C$: $m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$

جرم فنر دمپر

Diff حل معادله → $x_h(t) = \checkmark$

فرم مودال (کاربردی تر) → $\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ ①

ω_n^2

C_{crit} بدست آید؟

⊛ چرا Δ را مساوی صفر گرفتیم که

اپراتور D → $mD^2 + CD + K = 0 \longrightarrow \Delta = 0 \longrightarrow C = 2\sqrt{mK}$

بحرانی

$D_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4mK}}{2m}$

این کار رو بودم ولی ظاهرا کردن ω_n

Year. Month. Date. ( )

$$\frac{c}{m} = \frac{C}{C_{crit}} \cdot \frac{C_{crit}}{m} = \xi \frac{2\sqrt{mk}}{m} \longrightarrow \frac{c}{m} = 2\xi W_n$$

ξ نسبت میرایی

$F = -c\dot{x}$ $\quad [N] = [c][m/s] \rightarrow [c] = \frac{N.S}{m}$ واحد میرا

(مثال)

for $m = 10\ kg$ $\quad k = 1000\ N/m$ $\quad C = 20\ \frac{N.S}{m}$

$\xi = \frac{20}{200} = 0.1$ $\quad C_{crit} = 2\sqrt{mk} = \boxed{200}$

* توضیحات مربوط به صفحه قبل *

gov Eq. $\quad \ddot{x} + 2\xi W_n \dot{x} + W_n^2 x = 0$

این همان معادله ① است که هم الان برحسب W_n شده است!

حالا فرم اپراتوری $\rightarrow$ $D^2 + 2\xi W_n D + W_n^2 = 0$

$$D_{1,2} = \frac{-2\xi W_n \pm \sqrt{4\xi^2 W_n^2 - 4W_n^2}}{2}$$

$$D_{1,2} = -\xi W_n \pm W_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

چطوری زیادرخ می‌دهد؟

(Case I) $\quad C < C_{crit}$ $\quad (\xi < 1)$ $\quad$ under_damped

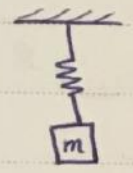
$$D_{1,2} = -\xi W_n \pm j\underbrace{W_n\sqrt{1-\xi^2}}_{W_d}$$

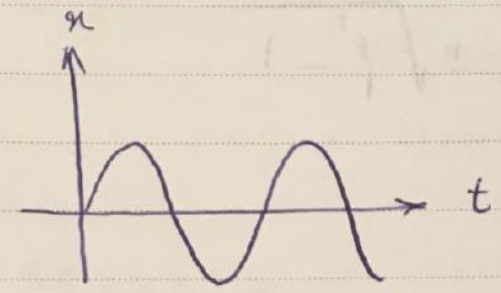
$(W_d) \longrightarrow$ damped natural freq. فرکانس طبیعی میرا شده

$$x_{h(t)} = e^{-\xi W_n t}(C_1 \sin W_d t + C_2 \cos W_d t)$$

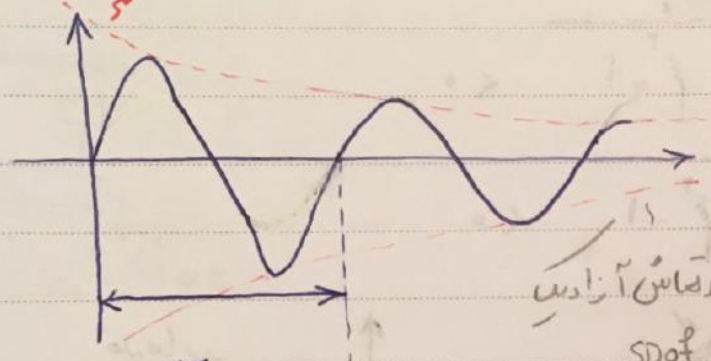
C_1 و C_2 توسط I.C پیدا می‌شوند!

پاسخ با فرکانس W_d است. (درحالی که m-k ایده‌آل W_n نوسان می‌کند.)





(پوش نمایی) $e^{-\xi W_n t}$



پاسخ ارتعاش آزاد یک سیستم SDof

$$T_d = \frac{2\pi}{W_d} > T_n$$

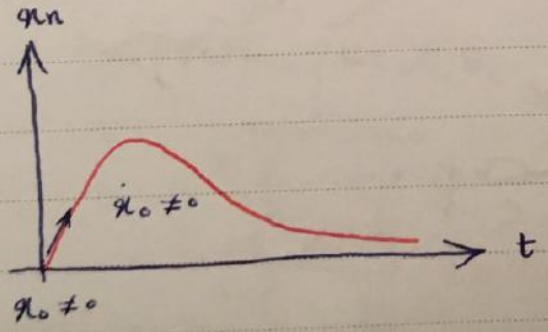
case II

$\xi = 1$ $C = C_{crit}$ critically Damped

پاسخ نوسانی نمی‌دهد.

$$D_{1,2} = -\xi W_n \pm W_n \sqrt{\xi^2 - 1} = -W_n$$

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-W_n t}$$



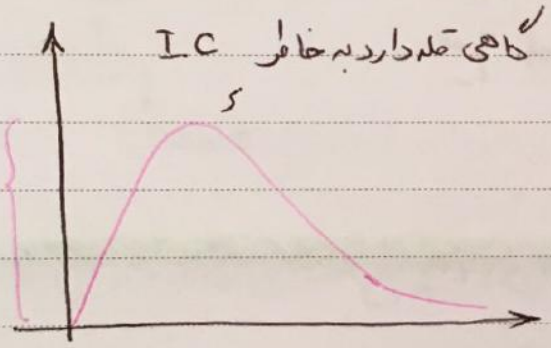
Case III $\xi > 1$ $C > C_{crit}$ over damped

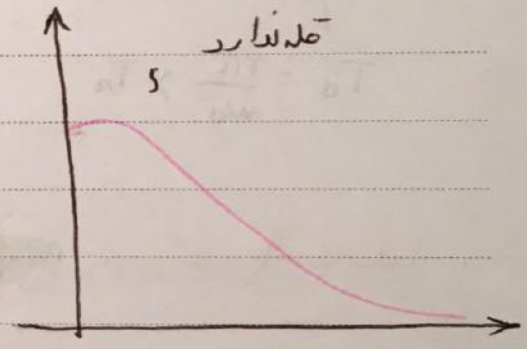
$$D_{1,2} = -\xi W_n \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$$

P_1 P_2

دو ریشه حقیقی

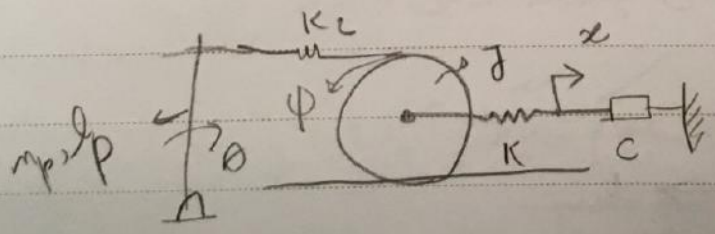
$$\begin{cases} P_1 = \xi W_n - W_n\sqrt{\xi^2 - 1} < 0 \\ P_2 = \xi W_n - W_n\sqrt{\xi^2 - 1} < 0 \end{cases}$$





یا عادی

$$x(t) = C_1 e^{P_1 t} + C_2 e^{P_2 t}$$

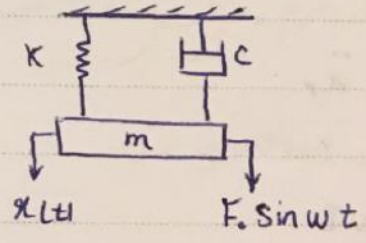


جلسه چهارم

ارتعاشات اجباری یک درجه آزادی با میرایی :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x_h(t) = e^{-\xi w_n t}\left(C_1 \sin w_d t + C_2 \cos w_d t\right)$$

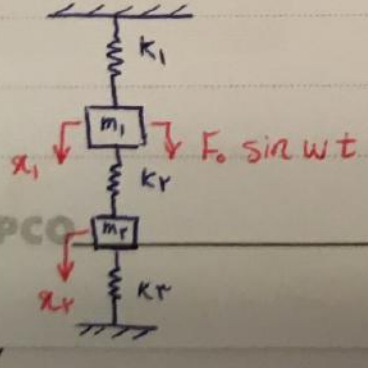


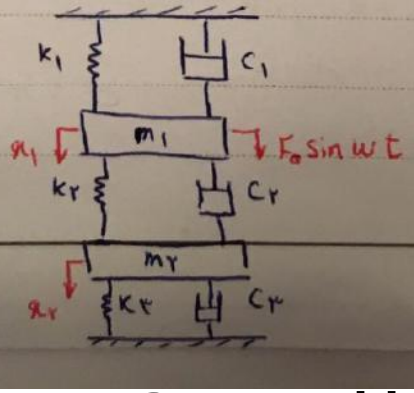
$x_p(t) = x_p \sin(wt - \varphi)$ می‌توان نشان داد پاسخ اجباری (ماندگار) با همان فرکانس تحریک (درس ارتعاشات) نوسان می‌کند.

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + (cw)^2}} \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{cw}{k - mw^2}$$

بحث فوق به طور مشابه در سیستم های چند درجه آزادی نیز وجود دارد.

مثلاً) 2Dof معادلات حاکم و دیاگرام آزاد :

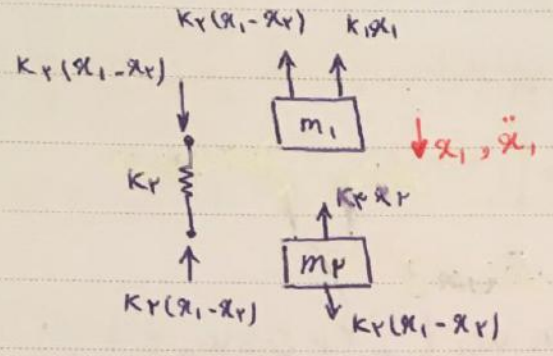




فرض کنید $x_1 > x_2$ از نیروهای وزن m_1 ، m_2 با جابه جایی اولیه

آن ها δ_1 ، δ_2 خنثی می شوند.

Dyn. E.q.



(1) $\Sigma F_x = m_1\ddot{x}_1 \longrightarrow F_0 \sin wt - k_1x_1 - k_2(x_1-x_2) = m_1\ddot{x}_1$

(2) $\Sigma F_x = m_2\ddot{x}_2 \longrightarrow -k_3x_2 + k_2(x_1-x_2) = m_2\ddot{x}_2$

معادلات جامع

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1-x_2) = F_0 \sin wt \\ m_2\ddot{x}_2 + k_3x_2 + k_2(x_2-x_1) = 0 \end{cases}$$

با لحاظ میرایی:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1-x_2) = F_0 \sin wt \\ m_2\ddot{x}_2 + c_3\dot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + k_3x_2 + k_2(x_2-x_1) = 0 \end{cases}$$

* در درس ارتعاشات می توان با حل معادلات $x_1(t)$ ✓ و $x_2(t)$ ✓

نمایش ماتریسی معادلات حاکم :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin wt \\ 0 \end{bmatrix}$$

[M] symm [C] symm [K] symm {F} برآیند نیروها

(دوران نداریم!!)

** زمانی که با سیستم های MDof ، $M \geq 2$ سروکار داریم، حرکت کاملاً خطی است

بهتر است جهت سهولت از روش ماتریسی به جای تعادل نیرو استفاده می شود.

حفظ شود!

- درایه k_{ii} می شود (قطر) مجموع همه فنرهای متصل به درجه آزادی i
- درایه k_{ij} می شود فنرهای واصل بین درجه i و j با علامت منفی

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin wt \\ 0 \end{bmatrix}$$

dynamically uncoupled قطری coupled damping غیرقطری statically coupled غیرقطری

یک سیستم n درجه آزادی دارای n فرکانس طبیعی است.

$$\omega_{n1}, \omega_{n2}, \dots, \omega_{nn}$$

می‌توان نشان داد $\left|[K]-[M]\omega^2\right| = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}}$ n فرکانس طبیعی را می‌دهد.

در مثال قبلی داریم:

$$\left|\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_2\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-m_2\omega^2 \end{bmatrix}\right| = 0$$

ω_{n1}, ω_{n2} ✓

تمام درجات آزادی با تمام فرکانس های طبیعی بدست آمده نوسان می‌کنند.

$x_1(t) = \omega_{n1}, \omega_{n2}, \dots, \omega_{nn}$ وجود دارند.

$x_2(t) = \omega_{n1}, \dots$

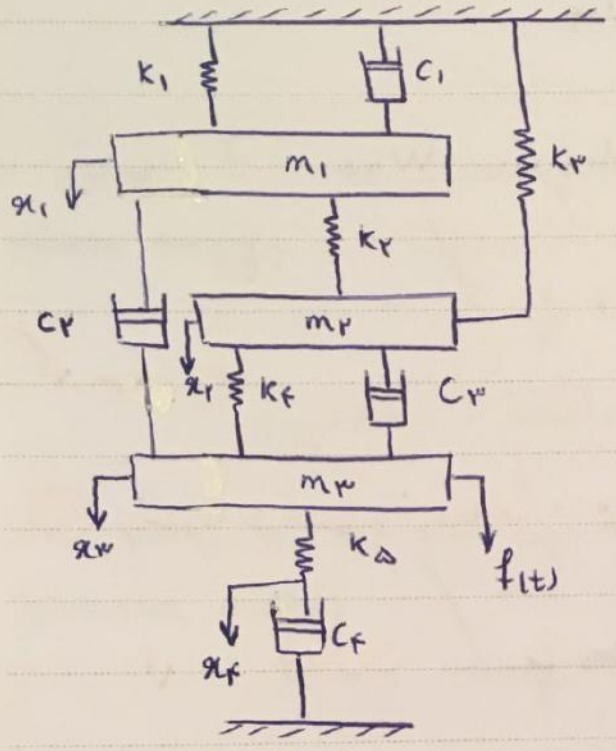
$\vdots \qquad \vdots$

$x_n(t) = \dots$

Subject
Date

مثال)

4Dof



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & +c_3 & -c_3 & 0 \\ -c_2 & -c_3 & c_2+c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} +$$

(11) (22) (33) (44)

$-c_4$ c_4

مشتق معادله

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

0 k_5

اگر جای k_5 و c_4 عوض شود صورتی رنگ ها می شود جواب ما!

$$\rightarrow c_4\dot{x}_4 + k_5(x_4 - x_3) = 0$$

$$c_4(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + k_5 - x_4 = 0$$

to find nat freq. :

$$|K - M\omega^2| = 0 \longrightarrow \checkmark\ \omega_{n1}, \dots, \omega_{nf}$$

✓ جلسه پنجم

◎ معادلات حاکم ارتعاشی :

۱) SDof ⟵ معادلات

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F &= ma \\ \Sigma M &= I\ddot{\theta} \end{aligned}\right\}$$

۲) MDof ⟵ کاملاً خطی

و

چند درجه آزادی

$$\left.\begin{aligned} &\text{روش ماتریسی} \\ &\text{لاگرانژ} \end{aligned}\right\}$$

ترکیب خطی دورانی یا کاملاً دورانی

انرژی جنبشی برای درجه آزادی غیر دمپر صفر است.

Subject
Date

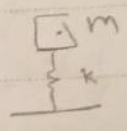
روش لاگرانژ :

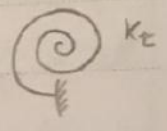
جنبشی T (Kinetic energy) $= \begin{cases} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 & \text{خطی} \\ \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 & \text{دورانی} \end{cases}$

زمانی وارد می‌شود که دنبال جرم مربوط توسط فنری تحمل نشود.

پتانسیل U (potential energy) $= \begin{cases} \frac{1}{2} k x^2 \ , \ mg\Delta h & \text{خطی} \\ \frac{1}{2} k_t \theta^2 & \text{دورانی (پیچشی)} \end{cases}$

آونگ ساده





$Q = \begin{cases} F_{ext} \ \text{یا} \ -c\dot{x} & \text{نیروی خارجی یا دمپر} \\ M_{ext} \ \text{یا} \ (-c\dot{x}) \times d & \text{گشتاور خارجی یا دمپر بازو} \end{cases}$

معمولاً صفر است اما نه همیشه

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1, \dots, M \ (MDof)$$

سرعت درجات آزادی

نیروهای خارجی

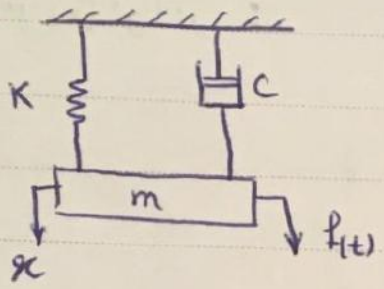
دمپر

F_{ext}

q_i : i امین درجه‌ی آزادی

* به تعداد درجات آزادی، رابطه لاگرانژ اعمال می‌شود. ← معادله دیفرانسیل

مثال)



- قبل از تعادل دینامیکی :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{(t)}$$

- از طریق لاگرانژ : (یک درجه آزادی SDof)

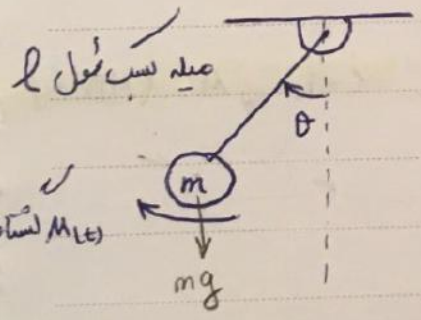
$$\begin{cases} q_1 = x \\ T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2} k x^2 \end{cases}$$

اگر سیستم چند درجه آزادی بود ف نمی‌شد!

$$\text{Lon } x: \frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 + kx = \underbrace{f_{(t)} - c(\dot{x} - 0)}_{Q_1}$$

$$m \text{ ثابت} \rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{(t)}$$

مثال)



مبدا گرفتیم : $\sum M_o = I_o \ddot{\theta}$

$$M_{(t)} - mgl\sin\theta = I_o \ddot{\theta}$$

$$M_{(t)} = I_o \ddot{\theta} + mgl\theta \leftarrow I_o = ml^2$$

که θ کوچک / خطی و

$\leftarrow$ m + میله $\rightarrow \frac{1}{3} ml^2$

① خطی $\rightarrow \sum F = ma$

مستقیم $\rightarrow$

دورانی $\sum M = I\ddot{\theta}$

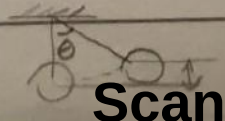
روی هر درجه آزادی

خطی

③ لاگرانژ

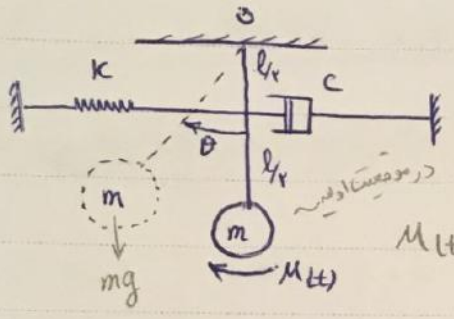
$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 \\ U = mgl(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2$$



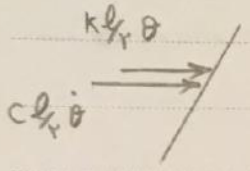
$$U = mgl(1-\cos\theta)$$

مثال)



$$\Sigma M_o = I_o \ddot{\theta}$$

$$M_{(t)} - mgl\overbrace{\sin\theta}^{\theta} - k\left(\frac{l}{2}\theta\right)\left(\frac{l}{2}\right) - c\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)\left(\frac{l}{2}\right)$$

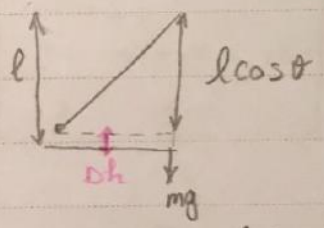


$$= I_o \ddot{\theta} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow M_{(t)} = I_o\ddot{\theta} + \frac{cl^2}{4}\dot{\theta} + \left(k\frac{l^2}{4} + mgl\right)\theta$$

$$T = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 \qquad I_o = ml^2$$

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\theta\right)^2 + mg\overbrace{l(1-\cos\theta)}^{\Delta h}$$



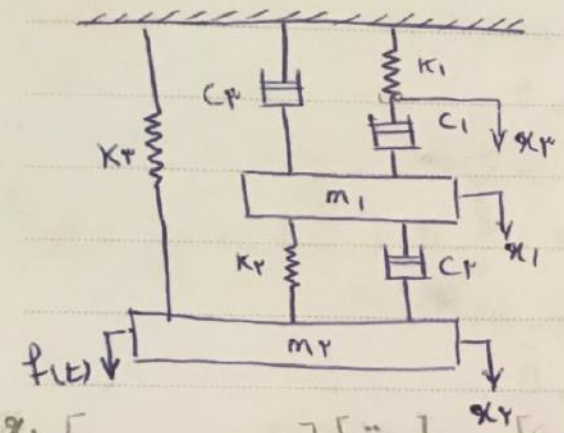
θ چون نوسانات کوچک است.

$$\frac{d}{dt}(I_o\dot{\theta}) - 0 + k\left(\frac{l}{2}\theta\right)\left(\frac{l}{2}\right) + mgl\sin\theta = M_{(t)} - c\underbrace{\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)}_{\text{نیرو}}\frac{l}{2}$$

$$I_o\ddot{\theta} + \frac{cl^2}{4}\dot{\theta} + \left(\frac{kl^2}{4} + mgl\right)\theta = M_{(t)}$$

مثال ۱

3 Eq. for 3 DoF



- روش ماتریسی :

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow \\ x_2 \rightarrow \\ x_3 \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2+c_3 & -c_2 & -c_1 \\ -c_2 & c_2 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix}$$

- روش لاگرانژ :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_3 - 0)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_2 - 0)^2$$

$$\mathcal{L} \text{ on } x_1 : \frac{d}{dt}(m_1 \dot{x}_1) - 0 + k_2 (x_1 - x_2) = -c_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3)$$

$$- c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3 (\dot{x}_1 - 0)$$

$$\rightarrow m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 - c_1 \dot{x}_3 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (1)$$

اتصال فنر، دمپر گرداشتیم انرژی جنبشی نداریم. اتصال فنر و دمپر یک درجه آزادی است!

Subject
Date

$$U = \frac{1}{2}k_1(x_3 - 0) + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(x_2 - 0)^2$$

$$\mathcal{L}\text{on } x_2: \frac{d}{dt}(m_2\dot{x}_2) - 0 + k_2(x_1 - x_2) + k_3 x_2$$

$$= f(t) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

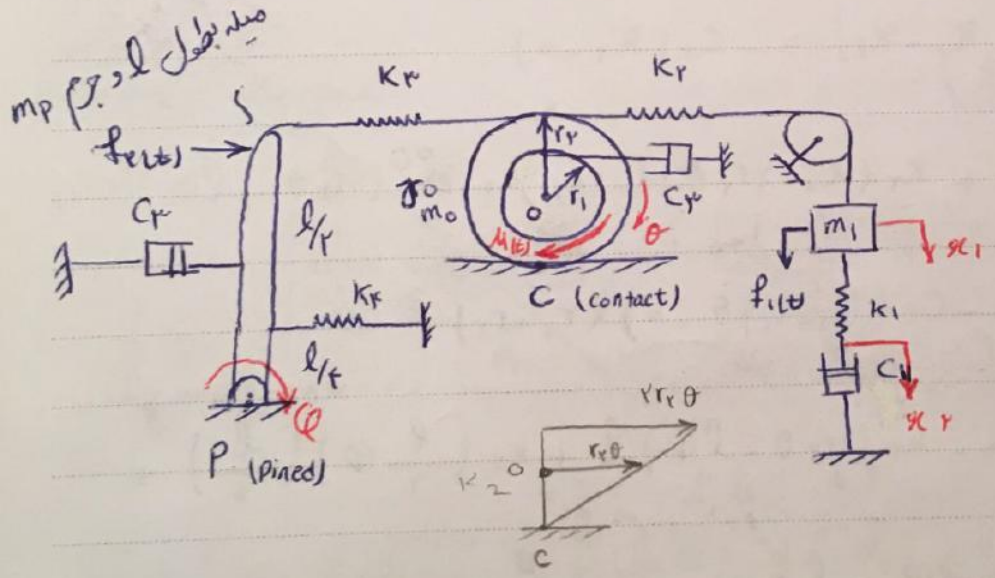
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f(t) \qquad (2)$$

$$\mathcal{L}\text{on } x_3: \frac{d}{dt}(0) - 0 + k_1 x_3 = -c_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)$$

$$c_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + k_1 x_3 = 0 \qquad (3)$$

مهم

✓ جلسه نهم
مثال ۱



4Dof

چون سیستم ۴ درجه آزادی است ۴ بار لاگرانژ باید بنویسیم!

یادآوری:

$$T_{\text{دیسک}} = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m v_0^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(J_0 + m r_2^2)}_{J_c}\dot{\theta}^2$$

$$U_{\text{دینامیک}} = \frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2$$

(در میله‌ها mg به مرکز جرم واردی شود!)

Subject
Date

$$(I \leftrightarrow J) \quad \left.\begin{aligned} I_c &= I_o + m_o r_o^2 \\ I_p &= \frac{m_p l^2}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{\varphi}^2$$

جابه‌جایی با توجه به مرکز آنی موجود

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - 2r_2\theta)^2 + \frac{1}{2} k_3 (2r_2\theta - l\varphi)^2$$

$$+ \frac{1}{2} k_4 \left(\frac{l}{4}\varphi - 0\right)^2 + \underbrace{m_p g \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)}_{mg\Delta h}$$

جابه‌جایی با توجه به مرکز آنی موجود

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\mathcal{L} \text{ on } x_1: \frac{d}{dt}(m_1 \dot{x}_1) - 0 + k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_1 - 2r_2\theta)^2 = f_1(t)$$

$$\mathcal{L} \text{ on } x_2: 0 - 0 + k_1(x_1 - x_2) = -c_1(\dot{x}_2 - 0)$$

$$\mathcal{L} \text{ on } \theta: \frac{d}{dt}(I_c \dot{\theta}) - 0 + k_2(x_1 - 2r_2\theta)(-2r_2) + k_3(2r_2\theta - l\varphi)(2r_2)$$

$$= M(t) - c_2((r_1 + r_2)\dot{\theta} - 0)(r_1 + r_2)$$

$$\mathcal{L} \text{ on } \varphi: \frac{d}{dt}(I_p \dot{\varphi}) - 0 - k_3(2r_2\theta - l\varphi)l + k_4\left(\frac{l}{4}\varphi\right)\left(\frac{l}{2}\right) +$$

$$m_p g \frac{l}{2}\sin\varphi = l f_2(t) - c_3\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi} - 0\right)\left(\frac{l}{2}\right)$$

matrix form :

$$
\begin{array}{c}
x_1 \rightarrow \\ x_2 \rightarrow \\ \theta \rightarrow \\ \varphi \rightarrow
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}}_{[M]_{4\times4}}
\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2(r_1+r_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \frac{l^2}{4} \end{bmatrix}}_{[C]_{4\times4}}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_1 & -2K_2 r_2 & 0 \\ -K_1 & K_1 & 0 & \\ -2r_2 K_2 & 0 & 4r_2^2(K_2+K_3) & -2r_2 l K_3 \\ 0 & 0 & -2r_2 l K_3 & l^2\left(r_3 + \frac{K_4}{16}\right) + m_p g \frac{l}{4} \end{bmatrix}}_{[K]_{4\times4}}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \\ M(t) \\ l f_2(t) \end{bmatrix}}_{\{f_{4\times1}\}}
$$

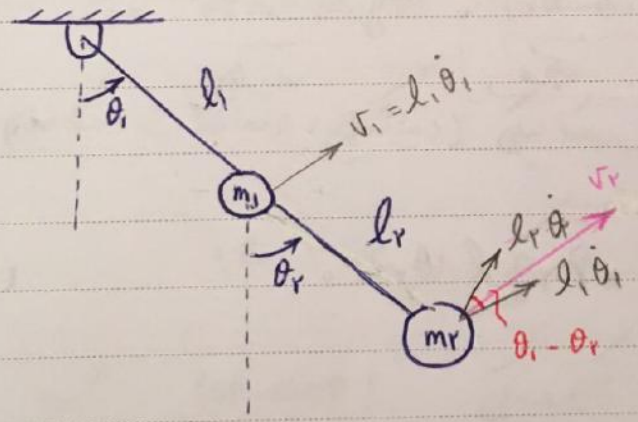
to find ω_{ni} $\quad i = 1, \dots, 4 \longrightarrow \left| [K] - [M]\omega^2 \right| = 0$

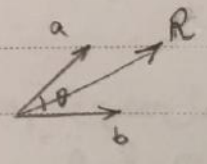
مثال) آونگ دوبل

Double pendulum

(2Dof)

صفحه ماسب





$$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (l_1\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \underbrace{\left((l_1\dot{\theta}_1)^2 + (l_2\dot{\theta}_2)^2 + 2(l_1\dot{\theta}_1)(l_2\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\right)}_{v_2^2}$$

$$U = m g l_1 (1-\cos\theta_1) + m_2 g \left(l_1(1-\cos\theta_1) + l_2(1-\cos\theta_2)\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$q_2 = \theta_2$

$$\mathcal{L} \text{ on } \theta_1 : \frac{d}{dt}\left\{ m_1(l_1\dot{\theta}_1)(l_1) + m_2(l_1\dot{\theta}_1)(l_1) + m_2 l_1 (l_2\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\right\}$$

$$+ \underbrace{m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2)}_{\text{صرف نظر می کنیم}} + m_1 g l_1 \underbrace{\sin\theta_1}_{\theta_1} + m_2 g l_1 \underbrace{\sin\theta_1}_{\theta_1} = l_1 f_{(t)}$$

* * در حالت کلی معادله غیرخطی است اما برای θ_1 و θ_2 کوچک و $\dot{\theta}_1$ و $\dot{\theta}_2$ کوچک است برای

* * همین می توان از یک سری عبارات بالا صرف نظر کرد.

$$\Rightarrow (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2)\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + g l_1 \theta_1 (m_1+m_2) = l_1 f_{(t)} \qquad (E.q.1)$$

$$\mathcal{L} \text{ on } \theta_2 : \frac{d}{dt}\left(m_2(l_2\dot{\theta}_2)(l_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2)\right) -$$

$$\underbrace{m_2 l_1 l_2 \underbrace{\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2}_{\text{کوچک}} \underbrace{\sin(\theta_1-\theta_2)}_{\text{کوچک}}}_{\text{صرف نظر می کنیم در ارتعاشات خطی}} + m_2 g l_2 \underbrace{\sin\theta_2}_{\theta_2} = 0$$

$$\Rightarrow m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \qquad (E.q.2)$$

✓ جلسه هفتم

ماتریس سوال قبلی :

$$\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1+m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coup. dynamics. غیرقطری [M] uncoup. Statics. قطری [K]

با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ← ✓ $\theta_1(t)$ ✓ $\theta_2(t)$

تمرین لاگرانژ : Home Work ، TA ، جزوه ارتعاشات ، PDF چند غونه در Home Page

Chap 1 : Introduction to Control Systems

مدل سازی سیستم های دینامیکی

- معادلات جبری
- معادلات دیفرانسیل

- مکانیکی (دینامیک ، ارتعاشات ، مکانیزم و ...)
- الکتریکی (R - L - C)
- الکترونیکی (op - amp)
- ترموفلوئید (حرارت سیالات)
- بیولوژی (بیومکانیک ، بیودارو ، زیست محیطی و ...)
- ساخت و تولید
- ⋮

ادامه در پشت صفحه

رباتیک و اتوماسیون / اپتیک / سیستم درمانی

نانو بری / HVAC تهویه مطبوع / کشاورزی

ماشین کاری / بویلر نیروگاه / هیدرولیک بیومتیک

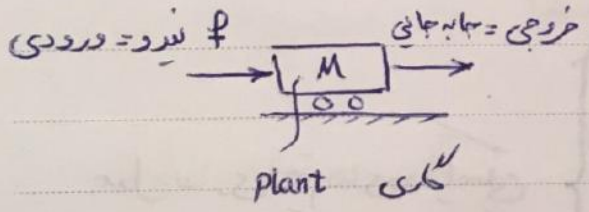
مفاهیم و تعاریف

سیستم‌های دینامیکی:

① SISO

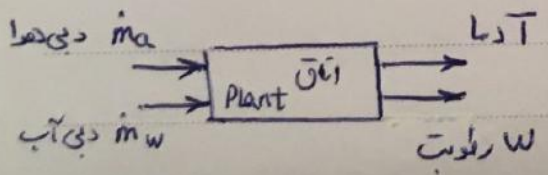
single input / single output

تک ورودی - تک خروجی



② MIMO

multi input / multi output



۳ MISO
SIMO } کمتر رخ می‌دهند

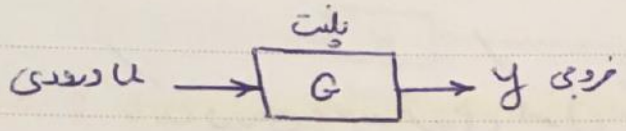
SIMO : با یک ورودی، چند خروجی کنترل شود. خیلی کم رخ می‌دهد اما اگر باشند سیستم‌هایی کارآمدند. (هزینه ورودی کم)

MISO : با چند ورودی، یک خروجی کنترل می‌شود. بسیار می‌توان تولید کرد اما نمی‌ارزد. (هزینه‌ی بالا در ورودی)

ورودی‌ها	>	خروجی‌ها	over actuate
"	<	"	under actuate
"	=	"	square sys.

Open / Closed - Loop Control Sys

Open : ماشین لباسشویی ، سماور برقی

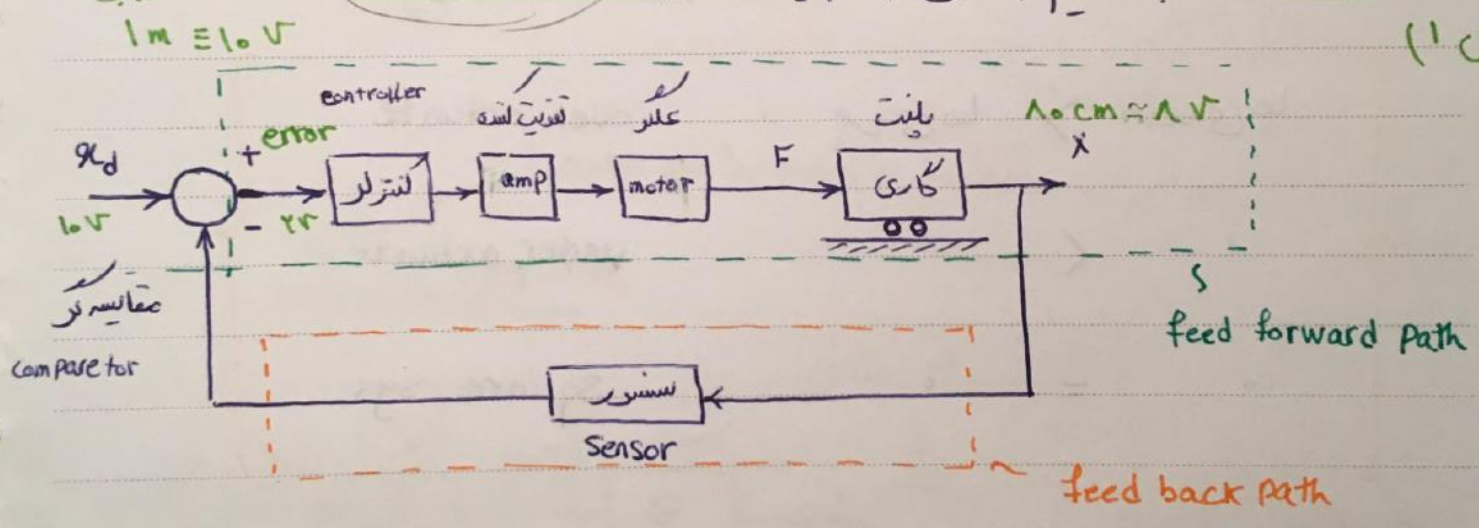


از خروجی ها به کمک سنسور ، فیدبک گرفته نمی‌شود. نیاز به حضور یک Operator است.

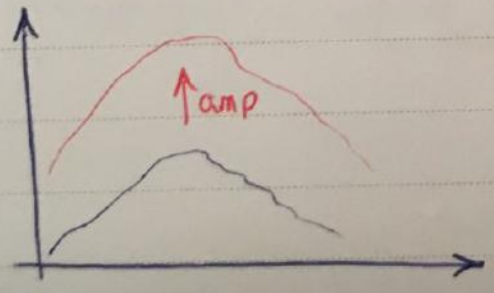
Closed :

مدار حلقه بسته داریم که همان حلقه باز است + feed back

مثال ۱)



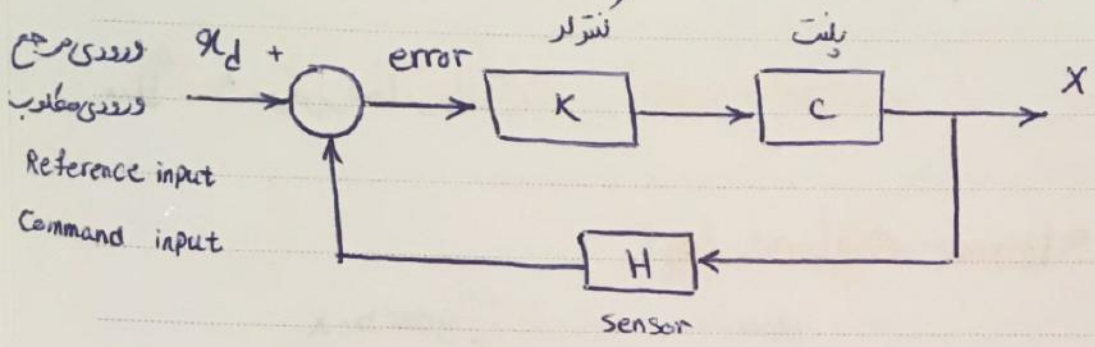
هدف : گاری در فاصله $x_d = 1m$ قرار گیرد. $x_d = 1m = 10V$



Subject
Date

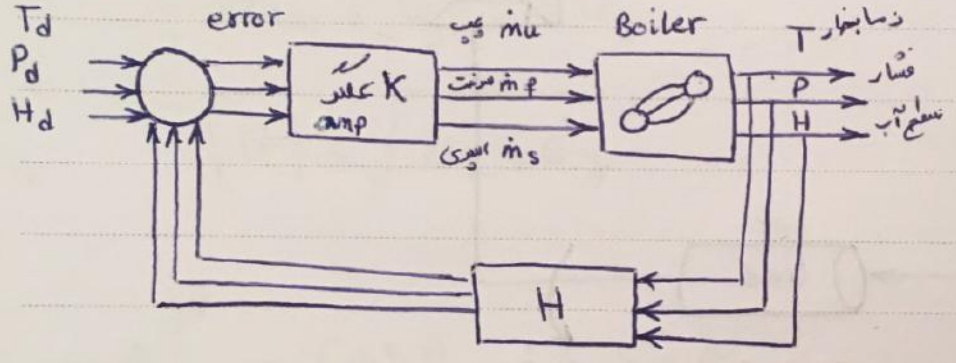
motor + amp = (K) کنترلر

- نمایش : Control Block diagram



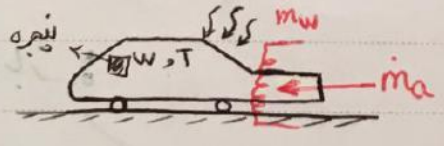
← closed loop control sys.

مثال ۲)



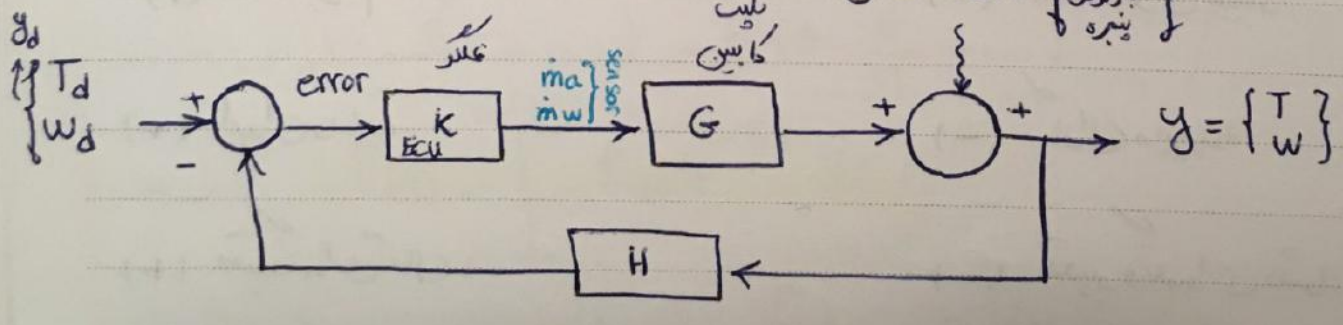
مثال ۳)

برای کنترل دما (T) و رطوبت (w) کابین داخل خودرو:



disturbance

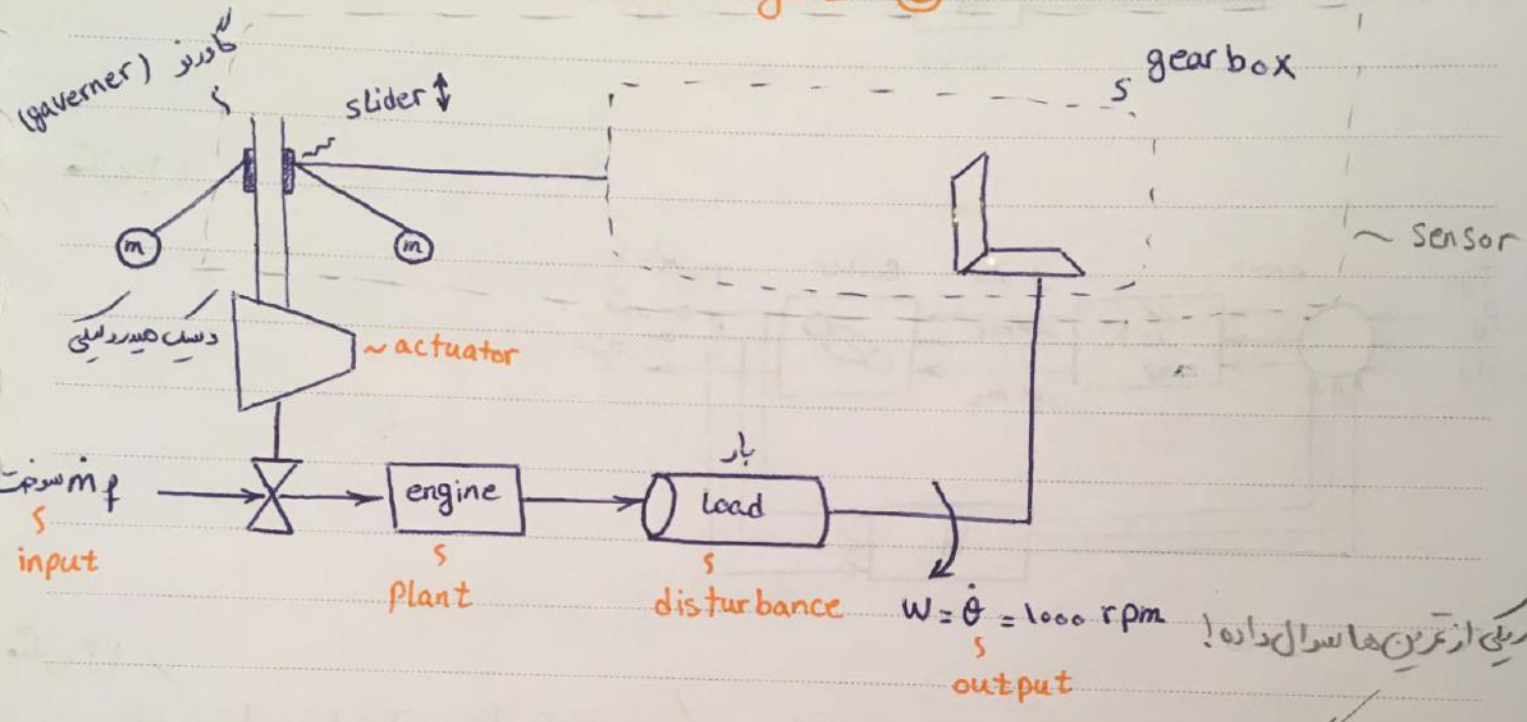
d = اغتشاش = { اشعه / بازکردن پنجره }



▲ در قرن گذشته و در مسائل اولیه کنترل تمام ادوات مکانیکی بوده اند.

مثلاً: موتور بخار وات

James Watt's Steam engine



در یکی از تمرین ها سوال داده!

حلقه باز:

(+) تعداد اجزا کم

(+) ارزان و ساده

(+) تعمیر و نگهداری آسان

(+) پایداری مناسب

(−) مصرف انرژی بالا

حلقه بسته:

(−) تعداد اجزای بیشتر

(−) گران و پیچیده

(−) تعمیر و نگهداری دشوارتر

(−) نگرانی های پایداری

(+) مصرف انرژی کم

جلسه هشتم

Chap 2: Laplase Transformation

به مطالبی اشاره می‌شود که در مدل‌سازی و کنترل نیاز داریم:

$$S = \overset{Re}{\sigma} + j\overset{Imag.}{w}$$

$$G_{(s)} = G_x + i\,G_y$$

$$|G| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \qquad \angle G = \tan^{-1}\frac{G_y}{G_x}$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \cdots\right)}_{\cos\theta} + j\underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right)}_{\sin\theta}$$

کاربرد زیاد $\quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$

کاربرد کم $\quad f(t) = \mathcal{L}^{-1} F(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{-st}\, ds$

$$t \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} s$$

به عنوان مثال

$$f_{(t)} = e^{-at} \longrightarrow F_{(s)} = \frac{1}{s+a}$$

$$F_{(s)} = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st}\, dt = \frac{1}{a+s} e^{-(a+s)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s+a}$$

$f_{(t)}$	$F_{(s)}$	$f_{(t)}$	$f_{(s)}$
$\frac{w}{s^2+w^2}$	$\sin wt$	1	$\delta_{(t)}$ ضربه
$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos wt$	$\frac{1}{s}$	$1_{(t)}$
$\frac{w}{s^2-w^2}$	$\sinh wt$	$\frac{\alpha}{s^2}$	αt
$\frac{s}{s^2-w^2}$	$\cosh wt$	$s^{\frac{n!}{n+1}}$	t^n
		$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}

مثال)

$$\frac{1}{s^2}, \quad te^{-at} = \frac{1}{(s+a)^2}$$

$$e^{-at} \sin wt = \frac{w}{(s+a)^2+w^2}$$

۱ $\mathcal{L} f_{(t)} = f(s+a)$

۲
$$\begin{cases} \mathcal{L} f_{(t)} = F_{(s)} \\ \mathcal{L} \dot{f}_{(t)} = s F_{(s)} - f_{(0)} \\ \mathcal{L} \ddot{f}_{(t)} = s^2 f_{(s)} - f_{(0)} - s \dot{f}_{(0)} \end{cases}$$

← فصل اول ۴

۳ $\mathcal{L}\, t^n f_{(t)} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f_{(s)}$

عامل انتگرال

۴ $\mathcal{L} \int f_{(t)}\, dt = \frac{1}{s} f_{(s)}$

۵ $\mathcal{L} \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = f_{(s)} G_{(s)}$

* تبدیل معکوس لاپلاس در فصل ۵ کاربرد دارد! *

$$G_{(s)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g_{(t)}$$

تعریف :

$$G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots\cdots(s+p_n)} =$$

$$= \frac{\text{چند جمله‌ای صورت } (m)}{\text{چند جمله‌ای مخرج } (n)} \xrightarrow[\text{مدل سازی dyn.sys}]{n \geq m} = \frac{s^m + \cdots}{s^n + \cdots}$$

صفرهای سیستم ← عواملی که باعث صفر شدن تابع می‌شود.

$$S = \{-z_1, -z_2, \ldots, -z_m\}$$

قطب‌های سیستم ←

$$S = \{-p_1, -p_2, \ldots, -p_n\}$$

مرتبه سیستم ← مرتبه n است. (توان مخرج) sys. order

مرتبه نسبی سیستم ← $n-m$ (relative order)

Date

هم ارز

$$G(s) \overset{s}{\equiv} \frac{s^m}{s^n} = \frac{1}{s^{n-m}}$$

$s = \infty \longleftarrow$ صفر مجازی در بی نهایت دارد.

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s^{n-m}} = 0 \qquad (n > m)$$

مثال ۱

$$G(s) = \frac{10(s+1)(s+5)}{s^2(s+3)(s^2+2s+5)}$$

$m = 2 \longrightarrow z_1 = -1 \qquad z_2 = -5$

$n = 5 \longrightarrow P_{1,2} = 0 \qquad P_3 = -3 \qquad P_{4,5} = -1 \pm 2j$

$n - m = 3 \longrightarrow z_{3,-5} = \{\infty, \infty, \infty\}$ سه تا صفر مجازی در بی نهایت

از آن جایی که در sys dyn. با توابع چند جمله ای کسری سروکار داریم:

$\mathcal{L}^{-1}$ با روش های زیر حل می شود!

روش اول: تفکیک کسرها

مثال ۱) $G(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ ← قطب‌های ساده Simple poles — زیرا توان هر کدام حد یک است.

$$\xrightarrow[\text{معادل قرار دادن}]{\text{مخرج مشترک +}} \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

$$a = \lim_{s \to -1} (s+1)\,G(s) = 2$$

$$b = \lim_{s \to -2} (s+2)\,G(s) = -1$$

$$\longrightarrow G(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \xrightarrow[\text{معادل}]{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\longrightarrow g(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

مثال ۲) $G(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$ ← قطب‌های تکراری — زیرا توان ۳ دارد.

$$\frac{a}{(s+1)^3} + \frac{b}{(s+1)^2} + \frac{c}{s+1}$$

$$a = \lim_{s \to -1} (s+1)^3\,G(s) = 2$$

$$b = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds}\left((s+1)^3 G(s)\right) = \lim_{s \to -1} 2s + 2 = 0$$

$$c = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2}\left((s+1)^3 G(s)\right) = 1$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g(t) = e^{-t} t^2 + e^{t}$$

مثال ۳) $G(s) = \dfrac{2s+12}{s^2+2s+5} = \dfrac{2s+12}{(s+1)^2+4} =$

$$= 2\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+\underbrace{4}_{\omega^2}} + \frac{\frac{1}{2}\times 5 \times 2}{(s+1)^2+\underbrace{4}_{\omega=2}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\longrightarrow 2\left\{e^{-t}\cos 2t + \frac{5}{2} e^{-t} \sin 2t\right\}$$

نکته: در سایر حالات که ترکیب مثال های ۱، ۲، ۳ در آن است:

متحد قرار دادن + مخرج مشترک

Subject
Date

مثال ۴)
$$G(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)(s^2+2s+5)^2}$$

$$\frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s+1} + \frac{ds^3+es^2+fs+g}{(s^2+2s+5)^2}$$

مثال ۵)
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3$$

$$x(0) \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \equiv I.C \qquad x(t) = ?$$

یکی دیگر از کاربردهای $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}^{-1}$ حل معادله دیفرانسیل است که
عمومی و حل همگن
حل خصوصی
را به ما می دهد!

$$\mathcal{L}: \left[s^2 x(s) - \dot{x}(0) - s x(0)\right] + 2\left[s x(s) - x(0)\right] + 5x(s) = \frac{3}{s}$$

$$x(s) = \frac{3}{s} \cdot \frac{1}{s^2+2s+5} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+2s+5}$$

$$= \frac{3}{''} + \frac{a(s^2+2s+5) + (bs+c)}{''}$$

$s^2: \quad a+b=0 \longrightarrow b=\frac{-3}{5}$

$s^1: \quad 2a+c=0 \longrightarrow c=\frac{-6}{5}$

$s^0: \quad 3=5a \longrightarrow a=\frac{3}{5}$

$$x(s)=\frac{3}{5}\left[\frac{1}{s}+\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right]=\frac{3}{5}\left[\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{1/2\times 2}{(s+1)^2+\underbrace{4}_{\omega^2}}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t)=\frac{3}{5}\left[1-\underbrace{e^{-t}}_{s}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-t}\sin \underbrace{2t}_{s}\right]$$

جواب خصوصی ✓ پوش نمایی $e^{-\xi\omega_n t}$ $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$\ddot{x}+\underbrace{2\dot{x}}_{s}+\underbrace{5x}_{s^2}=3$$

$2\xi\omega_n \qquad \omega_n^2$

$$\left(\begin{array}{l}\mathcal{L}\ddot{x}=s^2\mathcal{L}x(s)-s\mathcal{L}\dot{x}(t)-\dot{x}(t)\\ \mathcal{L}\dot{x}=s\mathcal{L}x(s)-x(t)\end{array}\right)$$

✓ جلسه نهم

Chap 3: Mathematical Modelling of Dynamic Sys.

قبلاً → SISO (بحث کنونی) → تابع تبدیل (فضای S)

→ MIMO → فضای حالت (حوزه زمانی t)

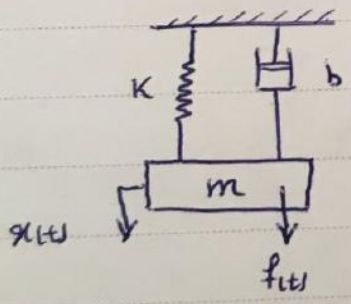
◎ Transfer Function ◎ تابع تبدیل

$$T.F.: G(s) = \frac{\mathcal{L}\ \text{output}}{\mathcal{L}\ \text{input}}\Bigg|_{\substack{\text{when} \\ I.C \equiv 0}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

شرایط اولیه

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

مثال)



ورودی $U(t) = f(t)$

خروجی $Y(t) = x(t)$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \xrightarrow{\mathcal{L}\ \text{with I.C} \equiv 0}$$

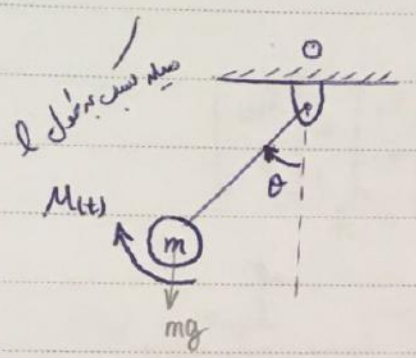
$$\longrightarrow X(s)\left[ms^2 + bs + k\right] = F(s) \longrightarrow \frac{\text{خروجی}\ Y(s)}{\text{ورودی}\ F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = G(s) \quad (*)$$

(سرعت خروجی $y = \dot{x} = v$) $\xrightarrow{*\text{ از}} \dfrac{V(s)}{F(s)} = \dfrac{s\,x(s)}{F(s)}$

$$\xrightarrow{*\text{ از}} \frac{k\,x(s)}{F(s)} = \frac{k \times 1/m}{s^2 + \frac{1}{m}s + \frac{k}{m}} \longrightarrow \frac{k\,x(s)}{F(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$k \times 1/m \sim \omega_n^2$ ، $\frac{1}{m} \sim 2\xi\omega_n$

مثال ۲) هدف: $\dfrac{\theta(s)}{M(s)} = ?$ گشتاور



$U = M$ گشتاور

$y = \theta$

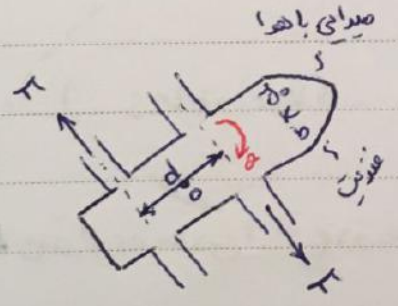
$J_0 = ml^2$ ← میله بسبک

$$\Sigma M_0 = J_0\ddot{\theta} \longrightarrow M(t) - mgl\overbrace{\sin\theta}^{\theta} = J_0\ddot{\theta} \longrightarrow J_0\ddot{\theta} + mgl\theta = M$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \theta(s)\left[J_0 s^2 + mgl\right] = M(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{J_0 s^2 + mgl}$$

مثال ۳) هدف: $\dfrac{\theta(s)}{F(s)} = ?$



$$\Sigma M_0 = J_0\ddot{\theta} \longrightarrow d\,f(t) - b\dot{\theta} - k\theta = J_0\ddot{\theta}$$

$$\longrightarrow J_0\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = d\,f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \cdots$$

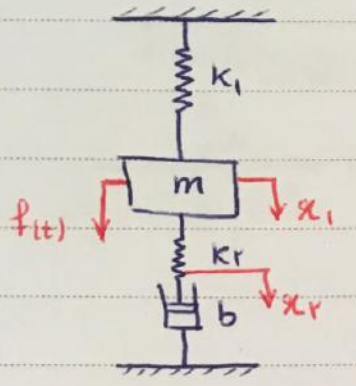
$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{d}{J_0 s^2 + bs + k}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خودمان حساب کنیم!

مثال ۲

$$\frac{x_{1(s)}}{F_{(s)}} = ? \quad , \quad \frac{x_{2(s)}}{F_{(s)}} = ?$$



① معادلات حاکم: (2Dof) لاگرانژ

ماتریس ✓ ← خیلی

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{(t)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_{(t)} \\ b\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_{1(s)}\underbrace{\left[ms^2 + k_1 + k_2\right]}_{A_{(s)}} - x_{2(s)}k_2 = F_{(s)} \\ -k_2 x_{1(s)} + x_{2(s)}\left[bs + k_2\right] = 0 \end{cases}$$

یک دسته معادلات جبری

(2 Eqs , 3 Variables)

می توان به سادگی از این دو معادله $\frac{x_1}{F}$ ، $\frac{x_2}{F}$ را بدست آورد اما در این درس

باید بلوک یا دیاگرام رسم شود. (ساده سازی شود.)

زیاد در sys ها با تعداد معادلات بیشتر یافتن تابع تبدیل از روی معادلات:

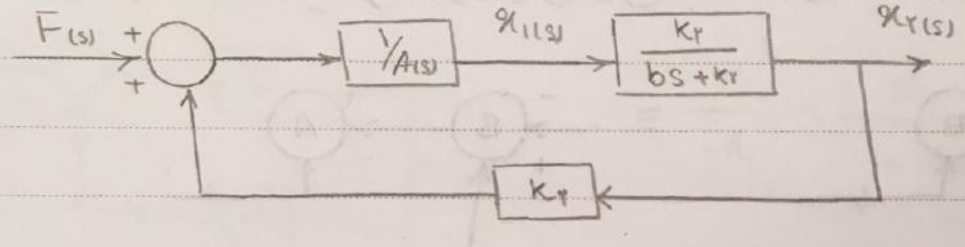
① دشوار بوده.

② احتمال خطا زیاد است.

(ادامه ی مثال قبل) بلوک دیاگرام از معادله های موجود:

از معادله دوم استفاده کردیم تا به x_2 برسیم!

(Block Diagram)



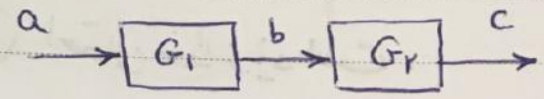
ساده سازی بلوک:

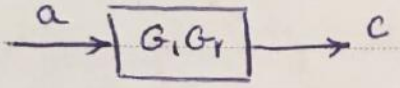
۱) قوانین جبر بلوک ها

۲) روش Mason

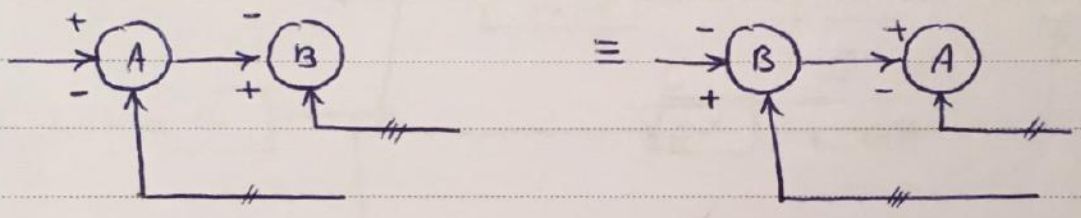
قوانین جبر بلوک ها:

۱) دو gain دنبال هم ضرب می شوند.

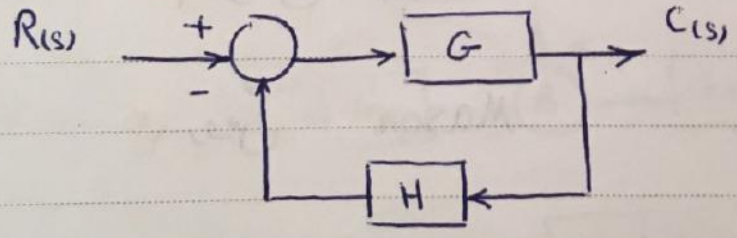


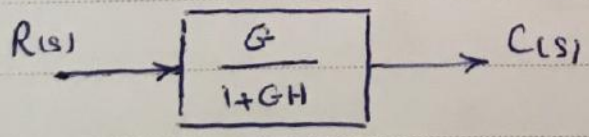


۲) محاسبه دو مقایسه گر مجاور را می توان جابه جا کرد.



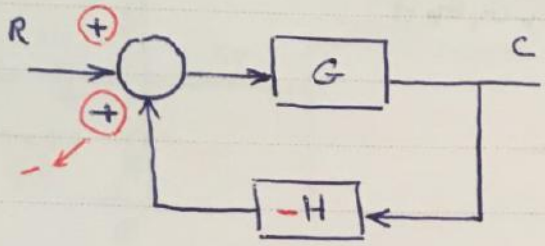
۳) قانون استاندارد حلقه بسته



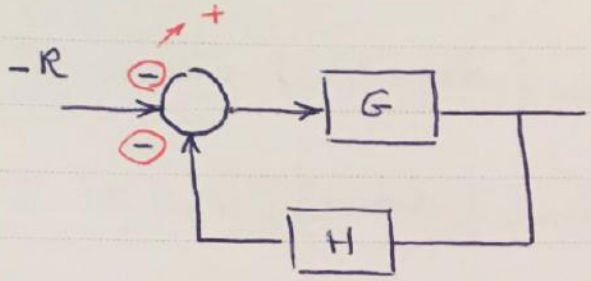


$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

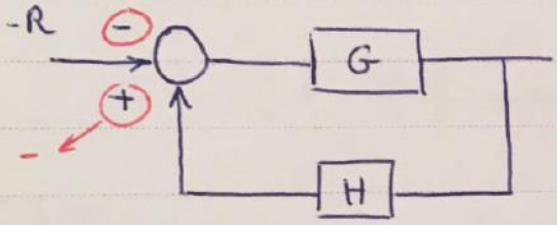
حالت‌های دیگر :



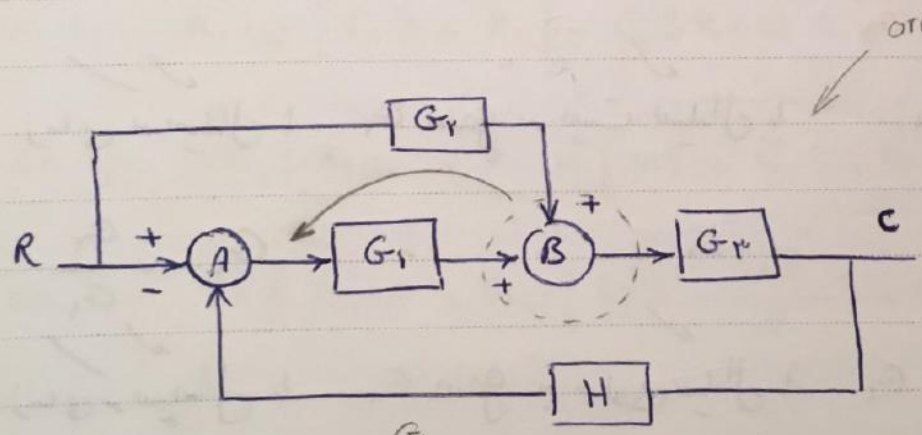
$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1-GH}$$



$$\frac{C}{-R} = \frac{G}{1+GH}$$



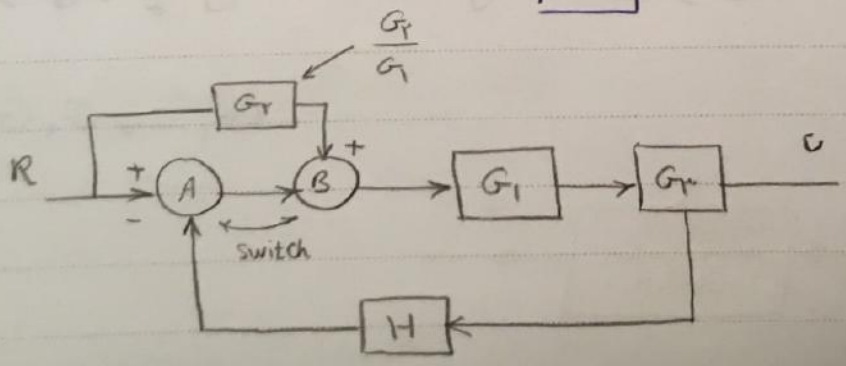
$$\frac{C}{-R} = \frac{G}{1-GH}$$

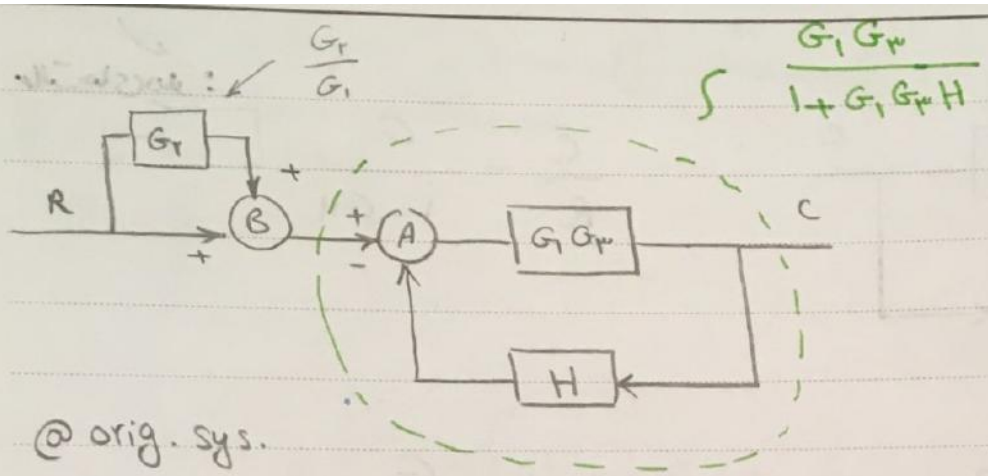


✓ جلسه دهم

۲) در قالب مثال :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = ?$$





@ orig. sys.

$$(R - CH)\,G_1 + R G_2)\,G_3 = C$$

@ deformed sys.

$$\left[(R + RG_2) - CH\right] G_1 G_3 = C$$

G_1 اضافی دارد باید در حین جابه جایی

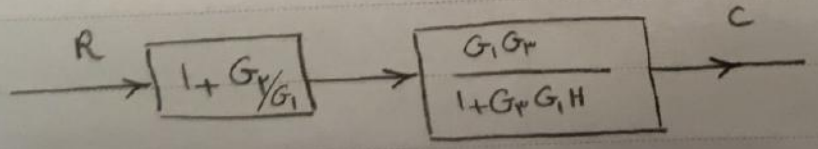
$$G_2 \longrightarrow \frac{G_2}{G_1}$$

* زمانی که سیگنال با gain G_2 به پشت سیگنال با gain G_1 رود باید

$$G_2 \longrightarrow \frac{G_2}{G_1}$$

* زمانی که سیگنال با gain G_2 به جلوی سیگنال با gain G_1 رود باید

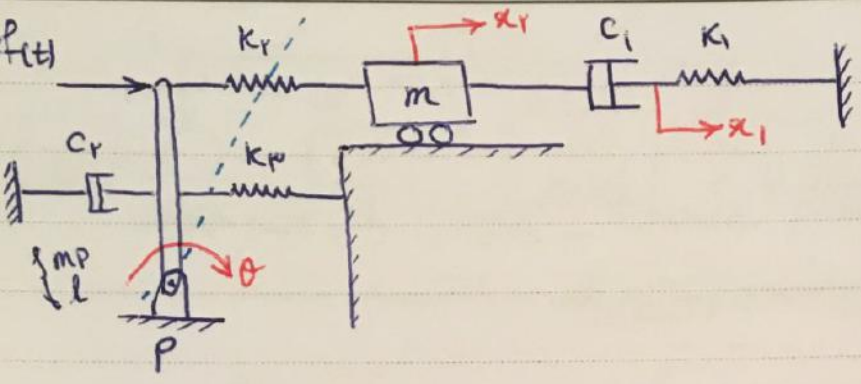
$$G_2 \longrightarrow G_1 G_2$$



$I_P = \frac{m_P l^2}{3}$

Subject
Date

$k_2(l\theta - x_2)$



مثال) $\frac{\theta(s)}{F(s)} = ?$

(خودتان ← به کمک لاپلاس)

خودمان ← $\frac{x_2}{F}$ ، $\frac{x_1}{F}$

1) on x_1: $(\Sigma F = m\ddot{x}_1) \longrightarrow c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - 0) = 0$

2) on x_2: $(\Sigma F = m\ddot{x}_2) \longrightarrow m\ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - l\theta) = 0$

3) on θ: $(\Sigma M_P = I_P\ddot{\theta}) \longrightarrow l f(t) - \overbrace{\underbrace{k_2(l\theta - x_2)}_{\text{نیرو بازگرداننده فنر}} l}^{\text{گشتاور بازگرداننده فنر}} - k_3\left(\frac{l}{2}\theta - 0\right)\frac{l}{2}$

$$- c_2\left(\frac{l}{2}\dot{\theta} - 0\right)\frac{l}{2} + m_P g \frac{l}{2}\frac{\sin\theta}{\theta} = I_P\ddot{\theta}$$

تابع تبدیل با شرط اولیه صفر است.

$\mathcal{L}$ on 1: $x_1(s)\left[c_1 s + k_1\right] - c_1 s\, x_2(s) = 0$

$\mathcal{L}$ on 2: $-c_1 s\, x_1(s) + x_2(s)\overbrace{\left[ms^2 + c_1 s + k_2\right]}^{B(s)} - k_2 l\,\theta = 0$

$\mathcal{L}$ on 3: $k_2 l\, x_2(s) + \theta(s)\overbrace{\left[I_P s^2 + \frac{c_2 l^2}{4}s + k_2 l^2 + \frac{k_3 l^2}{4} - m_P g\frac{l}{2}\right]}^{A(s)} =$

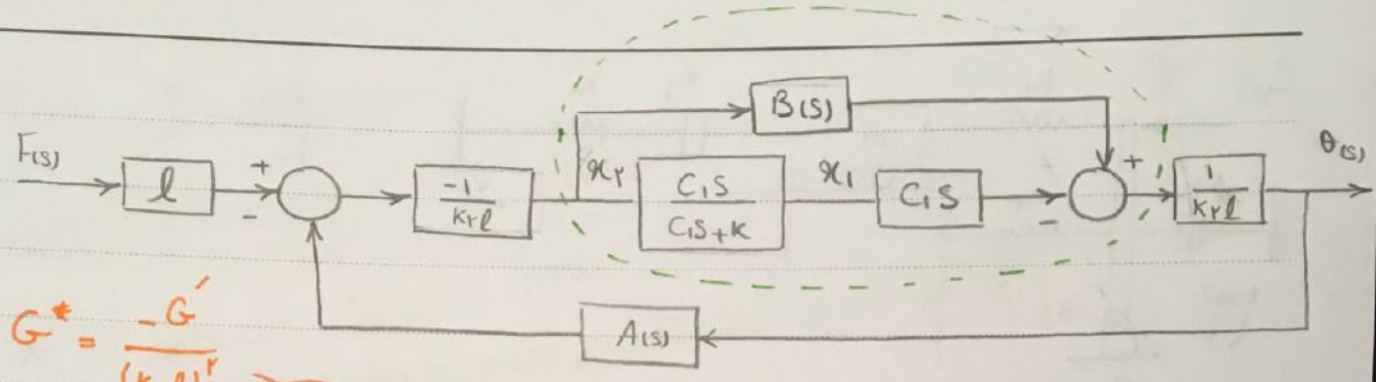
$= l F(s)$

Vars: x_1, x_2, θ, F, 3 Eqs.

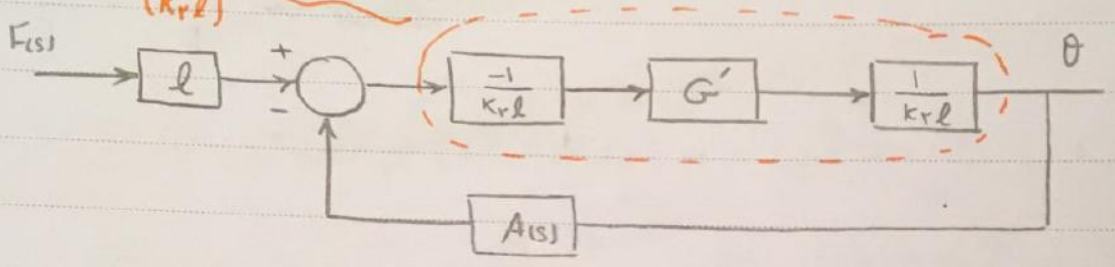
برای کشیدن بلوک دیاگرام از معادله‌ای شروع می‌کنیم که F دارد.

Subject
Date

$$G' = B - \frac{C_1^2 S^2}{C_1 S + K_1}$$



$$G^* = \frac{-G'}{(K_2 l)^2}$$



$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{l G^*}{1 + G^* A(s)}$$

✓ جلسه یازدهم

Moson's Rule :

$$G(s) = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta}$$ ← تابع تبدیل

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots \quad (*)$$

L_i : i-th loop حلقه i ام

حلقه: مسیر بسته ای که از یک نقطه شروع شود و بدون تا خوردن (قطع کردن) خود به آن نقطه بازگردد.

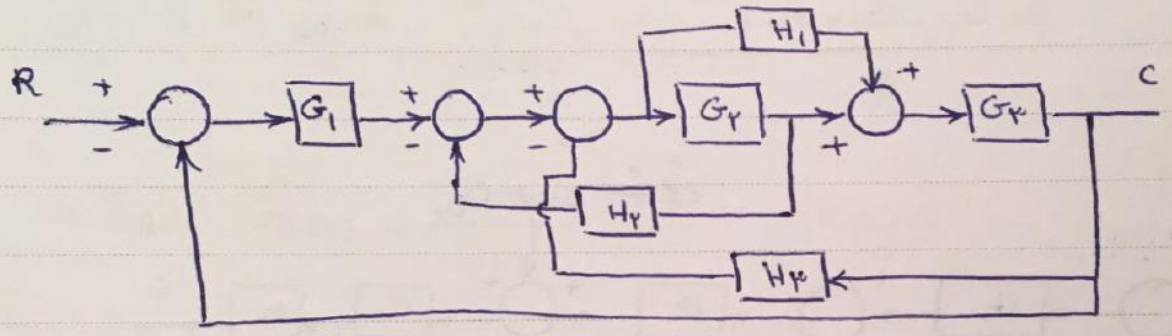
(*) ← زمانی که در حلقه i و j ام یکدیگر را قطع کنند حتی در یک نقطه

P_i : i-th feed forward path

i امین مسیر رو به جلو که از R شروع شده به C می رسد. (تا نخورد)

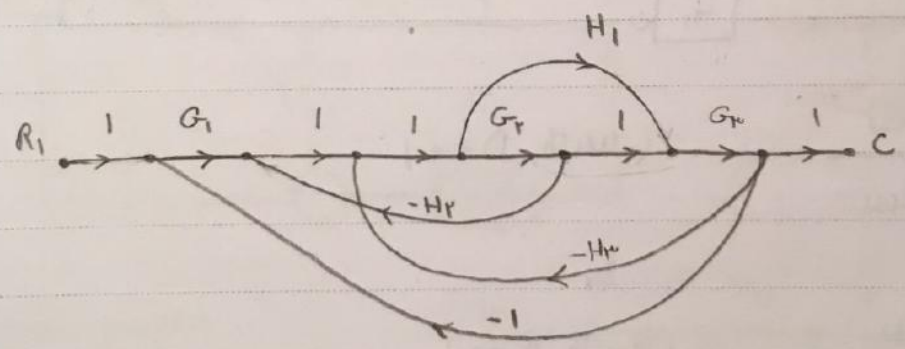
Δ_i : جملاتی از Δ که با P_i تماس ندارند، حتی در یک نقطه

مثال)



Signal graph :

مقایسه گره + انشعاب ≡ گره



$L_1 = -G_1 G_2 G_3$

$L_2 = -G_1 H_1 G_3$

$L_3 = -G_2 H_2$

$L_4 = -G_2 G_3 H_3$

$L_5 = -H_1 G_3 H_3$

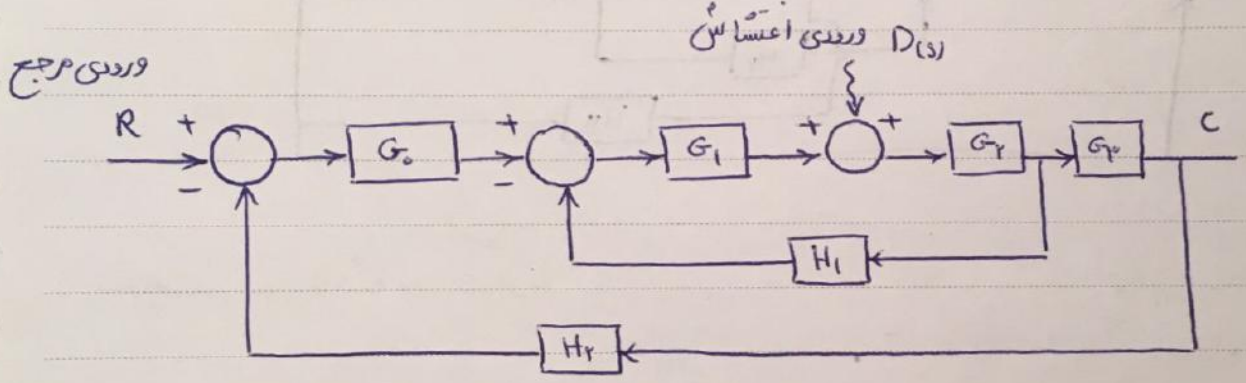
$\Delta = 1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 H_1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_3 H_1 H_3$

قطعی کلی: در بسیاری از ۱ها حتی ممکن است در یک گره در تماس باشند.

$P_1 = G_1 G_2 G_3 \longrightarrow \Delta_1 = 1$ همه‌ی حلقه‌ها با P_1 تماس دارند.

$P_2 = G_1 H_1 G_3 \longrightarrow \Delta_2 = 1$ همه‌ی حلقه‌ها با P_2 تماس دارند.

$$G(s) = \frac{G_1 G_3 (G_2 + H_1)}{\Delta}$$



مثال ۱

سوال ۷ کتاب

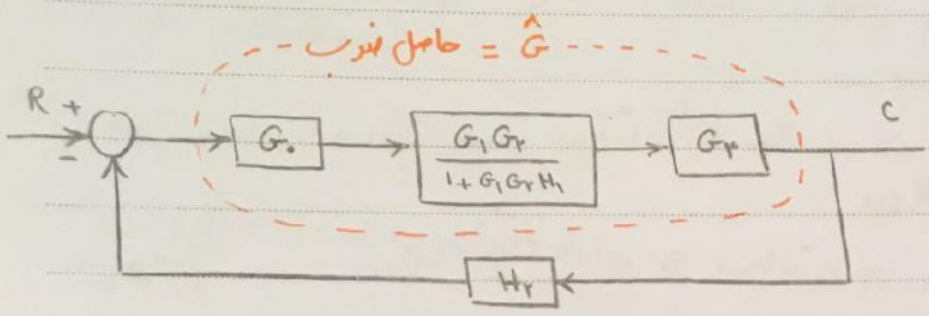
$$G_1^*(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \quad (\text{with } D = 0)$$

$$G_2^*(s) = \frac{C(s)}{D(s)} \quad (\text{with } R = 0)$$

ورودی ۲ ← D , R

خروجی ← C

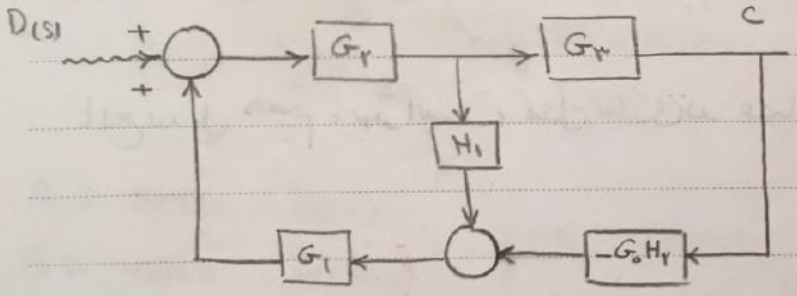
to find $G^*_{1(s)} = \dfrac{C(s)}{R(s)}$ $(D \equiv 0)$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = G^*_1(s) = \frac{\hat{G}}{1+\hat{G}H_2} \checkmark$$

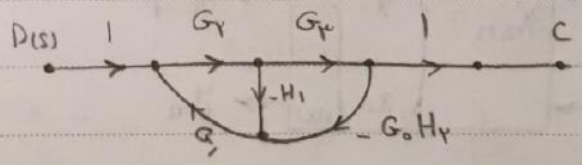
to find $G^*_{2(s)} = \dfrac{C(s)}{D(s)}$ $(R = 0)$

Rotate the block diag.



برای مسائلی که دو بلوک مربعی کنار هم باشند
بهترین روش حل میسون است.

signal graph:



$L_1 = -G_2 G_3 G_0 H_2 G_1$

$L_2 = -G_2 H_1 G_1$

$\Delta = 1 + G_1 G_2 (G_0 G_3 H_2 + H_1)$

$P_1 = G_2 G_3 \longrightarrow \Delta_1 = 1$

$$G^*_{2(s)} = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2 G_3}{\Delta}$$

$$G^*_{r(s)} = \frac{C(s)}{D(s)}$$

$$\begin{cases} C_1(s) = G^*_{r(s)} D(s) \\ C_r(s) = G^*_{1(s)} R(s) \end{cases}$$

+ جمع آثار $\longrightarrow C(s) = C_1(s) + C_r(s)$

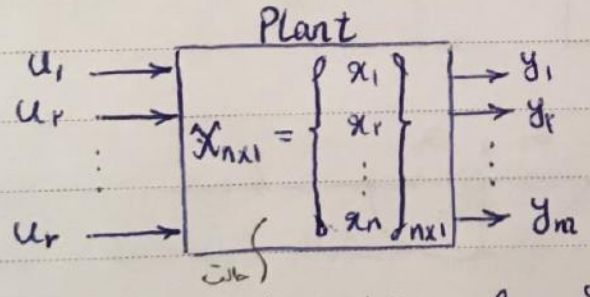
$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C(t)$ پاسخ کلی سیستم

✓ جلسه دوازدهم

State Space :

قبلاً اشاره شد که برای MIMO سیستم به دلیل آن که ناچار به یافتن تعداد بیشتری تابع تبدیل هستیم، بهتر است مدل سازی در فضای حالت انجام شود.

ورودی



State vector

$$U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{Bmatrix}_{r\times1} \qquad Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{Bmatrix}_{m\times1}$$

input vector — output vector

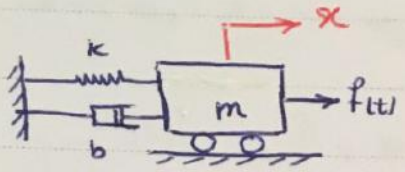
$r = m$ square sys

$r < m$ under act

$r > m$ over act

شود

- **تعریف متغیر حالت:** کمترین تعداد متغیر مستقل که نیاز است تا دینامیک سیستم کامل توصیف



بدای شود. ✓ سرعت ✓ مکان

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

(۲ متغیر حالت ← x و $\dot{x}$)

- یک معادله دیفرانسیل مرتبه n در قالب n معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ قابل بیان است.

↕

از طریق معادلات فضای حالت.

- یک معادله دیفرانسیل مرتبه n نیاز به n متغیر حالت دارد.

$$\dot{X}_{n\times 1} = \underbrace{A}_{n\times n} X_{n\times 1} + \underbrace{B}_{n\times r} U_{r\times 1}$$

$$Y_{m\times 1} = \underbrace{C}_{m\times n} X_{n\times 1} + \underbrace{D}_{m\times r} U_{r\times 1}$$

- معادلات فضای حالت
State Space Eq.

A : State matrix → پرکاربردترین → طراحی کنترلر ، تحلیل پایداری sys ، پاسخ sys

B : input matrix → پاسخ ، طراحی کنترلر

C : output matrix

D : Direct transmission matrix

↓

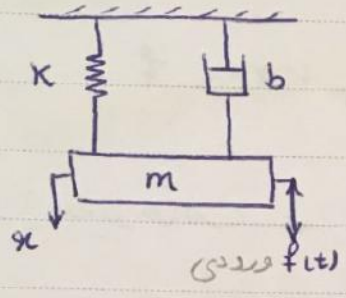
معمولاً در sys dyn $[D] \equiv 0$

۱- نوشتن معادلات حاکم ۲- نوشتن تابع تبدیل

Subject
Date

مثال) معادلات فضای حالت + $[A]$ و $[B]$ و $[C]$ و $[D]$ ؟

یک درجه آزادی



x جابه‌جایی ، $\dot{x}$ سرعت → خروجی

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = f(t)$$

$x_1 = x$ متغیر حالت اول

$x_2 = \dot{x}$ متغیر حالت دوم

$$\begin{cases} x_1 = x \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \checkmark \\ x_2 = \dot{x} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x} \xrightarrow[\text{gov. E.q.}]{\text{acc. to}} = \frac{1}{m}\left[\overset{u}{f} - bx_2 - Kx_1\right] \end{cases}$$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \qquad Y = \begin{Bmatrix} y_1 = x \\ y_2 = \dot{x} \end{Bmatrix} \begin{matrix} = x_1 \\ = x_2 \end{matrix}$$

$$\dot{X} = AX + BU \longrightarrow \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{B} u$$

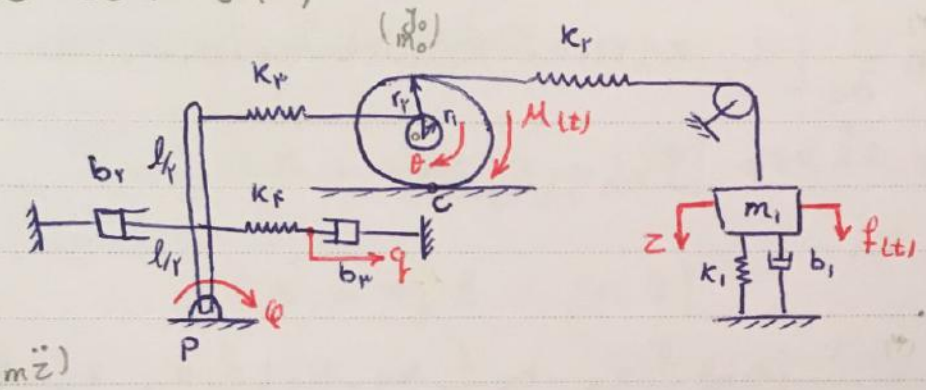
$$Y = CX + DU \longrightarrow \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C = I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D = \text{zero}} u$$

نکته : تعداد ستون های B = تعداد ورودی ها

تعداد سطرهای C = تعداد خروجی ها

مثال) معادلات فضای حالت و [A, B, C, D] ؟

$(J_c = J_o + m_o r_2^2)$



ورودی ها : $\begin{cases} M(t) \\ f(t) \end{cases}$

خروجی : $\begin{cases} \theta \\ \dot{\varphi} \end{cases}$

معادلات حاکم ← بالا را از تمرین ببینید.

$(\Sigma F = m\ddot{z})$

on z : $m_1\ddot{z} + b_1(\dot{z} - 0) + k_1(z - 0) + k_2(z - 2r_2\theta) = f(t)$ (۱)

$(\Sigma M_c = J_c\ddot{\theta})$

on θ : $M(t) - k_2(2r_2\theta - z)(2r_2) - k_3((r_1+r_2)\theta - l\varphi)(r_1+r_2) = J_c\ddot{\theta}$ (۲)

چون باز گردانده است منفی نوشتیم.

$(\Sigma M_p = J_p\ddot{\varphi})$

on φ : $-k_3(l\varphi - (r_1+r_2)\theta)l - k_4(\frac{l}{2}\varphi - q)\frac{l}{2} - b_2(\frac{l}{2}\dot{\varphi} - 0)\frac{l}{2}$

$+ mg\frac{l}{2}\sin\varphi = J_p\ddot{\varphi}$ (۳) $(J_p = m\frac{l^2}{3})$

on q : $b_3(\dot{q} - 0) + k_4(q - \frac{l}{2}\varphi) = 0$ (۴)

مرتبه های معادلات بدست آمده ← $2+2+2+1 = 7$ متغیرهای حالت

$Y = CX + DU$

جلسه سیزدهم

$$x_1 = z \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2$$

$$x_2 = \dot{z} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{z} \overset{(1)}{=} \frac{1}{m_1}\left[u_1 - k_2(x_1 - 2r_2 x_3) - k_1 x_1 - b_1 x_2\right]$$

$$x_3 = \theta \longrightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_4$$

$$x_4 = \dot{\theta} \longrightarrow \dot{x}_4 = \ddot{\theta} \overset{(2)}{=} \frac{1}{J_c}\Big[u_2 - k_2(2r_2 x_3 - x_1)(2r_2) - k_3\big((r_1+r_2)x_3 - l x_5\big)(r_1+r_2)$$

$$x_5 = \varphi \longrightarrow \dot{x}_5 = \dot{\varphi} = x_6$$

$$x_6 = \dot{\varphi} \longrightarrow \dot{x}_6 = \ddot{\varphi} \overset{(3)}{=} \frac{1}{J_p}\Big[m_p g \frac{l}{2} x_5 - b_2 \frac{l^2}{4} x_6 - k_4\left(\frac{l}{2}x_5 - x_7\right)\frac{l}{2} - k_3\big(l x_5 - (r_1+r_2)x_3\big) l\Big]$$

$$x_7 = q \longrightarrow \dot{x}_7 = \dot{q} \overset{(4)}{=} \frac{-k_4}{b_3}\left(x_7 - \frac{l}{2}x_5\right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{-b_1}{m_1} & \frac{2r_2 k_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}}^{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{D} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{Bmatrix} \theta \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} x_3 \\ x_6 \end{matrix}$$

Subject
Date

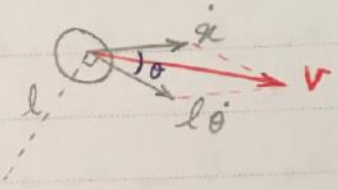
مهم

مثال) آونگ معکوس (inverted Pendulum)

معادلات فضای حالت آونگ معکوس؟

خروجی : $y = \theta$

2 DOF



میله سبک به طول l

زیرا θ کوچک

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + (l\dot{\theta})^2 + 2\dot{x} l \dot{\theta} \cancel{\cos\theta} \right]$$

$$U = \frac{1}{2} K x^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\mathcal{L} \text{ on } x: \frac{d}{dt}(M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\theta}) - 0 + Kx = f(t) - b(\dot{x} - 0) \quad (1)$$

زیرا θ کوچک

$$\mathcal{L} \text{ on } \theta: \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}) - 0 + mgl \cancel{\sin\theta} = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)} (m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + b\dot{x} + Kx = f(t)$$

Dyn. coupled

static. uncoup.

$$\xrightarrow{(2)} ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m+M & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}}_{[m]} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[b]} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}}_{[K]} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{[f(t)]}$$

$2 + 2 = 4$ ← state vars.

Subject
Date

$x_1 = x \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$

$x_2 = \dot{x} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x} = ?$

$x_3 = \theta \longrightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_4$

$x_4 = \dot{\theta} \longrightarrow \dot{x}_4 = \ddot{\theta} = ?$

دو معادله دو مجهول $\ddot{x}$ ، $\ddot{\theta}$

کرامر

کرامر

$$\ddot{x} = \frac{\begin{vmatrix} f - kx_1 - bx_2 & ml \\ -mgl\,x_3 & ml^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m+M & ml \\ ml & ml^2 \end{vmatrix}}$$

دترمینان ضرایب

ضرایب $\ddot{x}$ ضرایب $\ddot{\theta}$

* این ستون را با ساده سازی معادلات ۱ و ۲ پیدا می کنیم برحسب $\ddot{\theta}$ و $\ddot{x}$

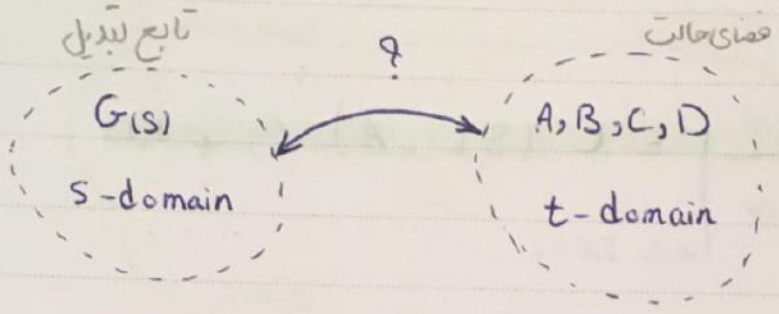
$$\ddot{\theta} = \frac{\begin{vmatrix} m+M & f - kx_1 - bx_2 \\ ml & -mgl\,x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m+M & ml \\ ml & ml^2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

روش کرامر

ارتباط بین تابع تبدیل فضای حالت :



$$\mathcal{L}\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

$$SX_{(s)} - \bar{x}_{(0)} = AX_{(s)} + BU_{(s)} \longrightarrow [\underset{n\times n}{SI} - A]\, X_{(s)} = \bar{x}_{(0)} + BU_{(s)}$$

$$Y_{(s)} = CX_{(s)} + DU_{(s)}$$

$$\mathcal{L}\,\dot{f}_{(t)} = S f_{(s)} - f_{(0)} \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\,\dot{x}_1 = SX_{1(s)} - x_{1(0)} \\ \vdots \\ \mathcal{L}\,\dot{x}_n = SX_{n(s)} - x_{n(0)} \end{cases}$$

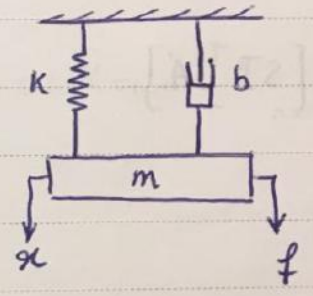
Subject
Date

$$X(s) = [sI - A]^{-1}\,\cancel{x(0)}^{\,0} + [sI - A]^{-1} B\,U(s) \qquad (*)$$

تابع تبدیل $G(s) = \left.\dfrac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\text{with } I.C \equiv 0} = C\,(sI - A)^{-1} B + D$

محاسبه‌ی $G(s)$ از رابطه فوق برای سیستم‌های مرتبه $n \geq 3$ کمی دشوار است.

مثال)



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

قبلاً

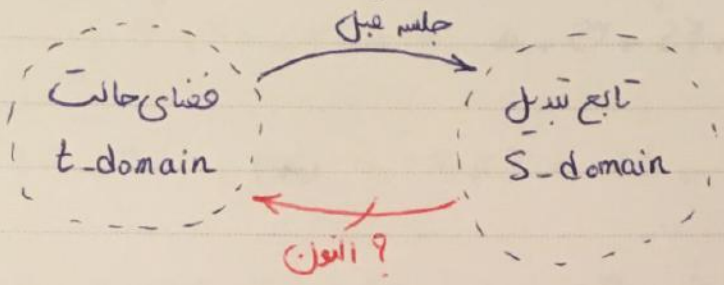
$$G(s) \quad \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

از طرفی جلسه قبل $\longrightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = [0]$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + \cancel{[0]}^{\,0} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ \frac{-k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}{s(s + \frac{b}{m}) + \frac{k}{m}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m \\ s/m \end{bmatrix}}{''} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \checkmark$$

✓ جلسه چهاردهم



مثال)

فضای حالت ؟ A,B,C,D

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3+4s^2+3s+5}$$

خروجی / ورودی

$$C(s)\,(s^3+4s^2+3s+5) = R(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\dddot{c} + 4\ddot{c} + 3\dot{c} + 5c = r \qquad (*)$$

$$\begin{cases} x_1 = c \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{c} = x_2 \\ x_2 = \dot{c} \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{c} = x_3 \\ x_3 = \ddot{c} \rightarrow x_3 = \dddot{c} \overset{(*)}{=} u - 4x_3 - 3x_2 - 5x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -4 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u$$

خروجی $y = c$

$$y = c = x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u$$

مثال ۱) فضای حالت؟

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{s^3+4s^2+3s+5}$$

$$\dddot{c} + 4\ddot{c} + 3\dot{c} + 5c = \dot{r} + r \qquad (*)$$

$$x_1 = c \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{c} = x_2$$

$$x_2 = \dot{c} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{c} = x_3 \xrightarrow{\text{تعمیم}} \dot{x}_2 = \ddot{c} = x_3 + r$$

$$x_3 = \ddot{c} \longrightarrow \dot{x}_3 = \dddot{c} = u + \cancel{u} + \dots$$

تعریف مجدد

$$x_3 = \ddot{c} - r \longrightarrow \dot{x}_3 = \ddot{c} - \dot{r} = u - 5x_1 - 3x_2 - 4(x_3 + r)$$

جهت رفع مشکل:

$\boxed{1}$ از (*) بالاترین مشتق ورودی و خروجی یک طرف، پس از طرف اول آن انتگرال گرفته

$$\dddot{c} - \dot{r} = r - 5c - 3\dot{c} - 4\ddot{c}$$

$$\downarrow \int$$

$$x_1 = \ddot{c} - r \longrightarrow \dot{x}_1 = \dddot{c} - \dot{r} = u - 5x_3 - 3x_2 - 4(x_1 + r)$$

$$\downarrow \int$$

$$x_2 = \dot{c} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{c} = x_1 + r$$

$$\downarrow \int$$

$$x_3 = c \longrightarrow \dot{x}_3 = \dot{c} = x_2$$

مثال)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{s^3+4s^2+3s+5}$$

$$\dddot{c} + 4\ddot{c} + 3\dot{c} + 5c = \ddot{r} + r$$

$$\dddot{c} - \ddot{r} = r - 5c - 3\dot{c} - 4\ddot{c}$$

مشتق ورودی نباید ظاهر شود.

$$\begin{cases} x_1 = \ddot{c} - \dot{r} \longrightarrow \dot{x}_1 = u - 5x_3 - 3(x_2 + r) - 4(\cancel{x_1} + \cancel{\dot{r}}) \\ x_2 = \dot{c} - r \\ x_3 = c \end{cases}$$

بهترین راه

۲) همه‌ی مشتقات ورودی خروجی یک طرف سپس انتگرال می‌گیریم:

$$\dddot{c} + 4\ddot{c} + 3\dot{c} - \ddot{r} = r - 5c$$

$$x_1 = \ddot{c} + 4\dot{c} + 3c - \dot{r} \longrightarrow \dot{x}_1 = u - 5x_3 \quad ✓$$

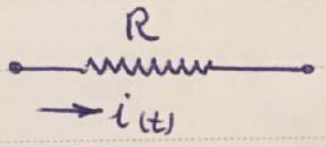
$$x_2 = \dot{c} + 4c - r \longrightarrow \dot{x}_2 = x_1 - 3x_3 \quad ✓$$

$$x_3 = c \longrightarrow \dot{x}_3 = \dot{c} = x_2 + u - 4x_3 \quad ✓$$

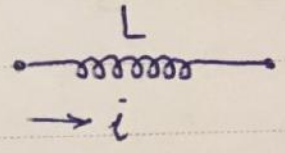
** ملاحظه می شود که شکل فضای حالت ماتریس های A و B و C و D منحصر به فرد نبوده و می تواند متفاوت باشند اما همه ی آن ها منجر به یک تابع تبدیل منحصر به فرد می شود.

Electric Systems:

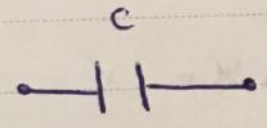
مدار برقی از المان های قدرتی R - L - C تشکیل شده.



$$V(t) = \boxed{R}\, i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_R(s) = \boxed{R}\, I(s)$$

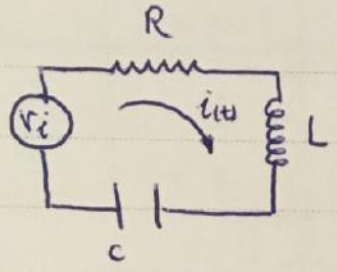


$$V(t) = \boxed{L}\, \frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} V_L(s) = \boxed{LS}\, I(s)$$



$$V_c(t) = \boxed{\frac{1}{C}} \int i\, dt \xrightarrow{\mathcal{L}} V_c(s) = \boxed{\frac{1}{CS}}\, I(s)$$

مثال ۱

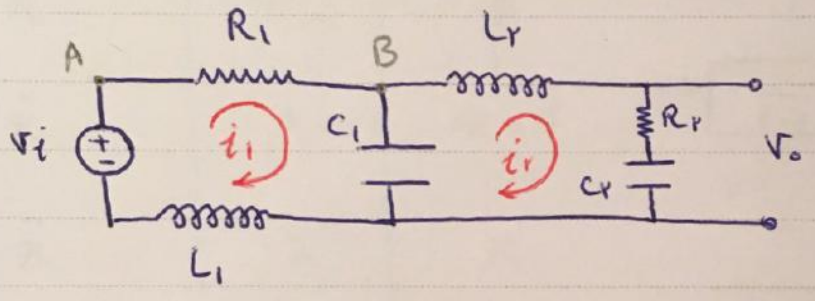


$$V_{i(t)} = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$V_{i(s)} = I_{(s)}\left[R + LS + \frac{1}{CS}\right]$$

$$\frac{I_{(s)}}{V_{i(s)}} = \frac{1}{R + LS + \frac{1}{CS}}$$

مثال ۱



هدف : $\frac{V_{o(s)}}{V_{i(s)}} = ?$

معادلات حاکم :

① حلقه ۱ : $\cancel{V_{A(s)}} - R_1 I_{1(s)} - \frac{1}{C_1 S}\left[I_{1(s)} - I_{2(s)}\right] - L_1 S I_{1(s)} + V_{i(s)} = \cancel{V_{A(s)}}$

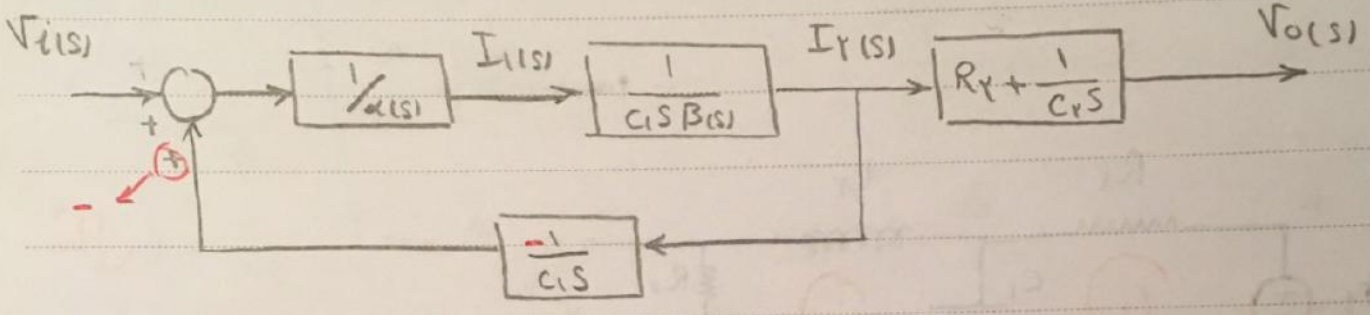
② حلقه ۲ : $\cancel{V_{B(s)}} - L_2 S I_{2(s)} - R_2 I_{2(s)} - \frac{1}{C_2 S} I_{2(s)} - \frac{1}{C_1 S}\left[I_{2(s)} - I_{1(s)}\right]$

$= \cancel{V_{B(s)}}$

③ ولت‌متر : $V_{o(s)} = R_2 I_{2(s)} + \frac{1}{C_2 S} I_{2(s)}$

$$① \rightarrow V_i = \overbrace{\left(L_1 S + \frac{1}{C_1 S} + R_1\right)}^{\alpha(s)} I_1 - \frac{1}{C_1 S} I_2$$

$$② \rightarrow I_2 \underbrace{\left(L_2 S + R_2 + \frac{1}{C_1 S} + \frac{1}{C_2 S}\right)}_{\beta(s)} = \frac{1}{C_1 S} I_1$$

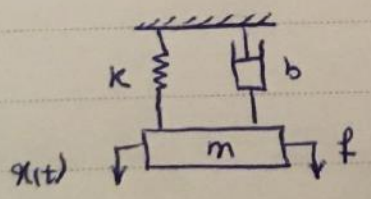


$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\dfrac{1}{C_1 S \alpha(s) \beta(s)}}{1 - \dfrac{1}{(C_1 S)^2} \dfrac{1}{\alpha(s) \beta(s)}} \cdot \left(R_2 + \frac{1}{C_2 S}\right)$$

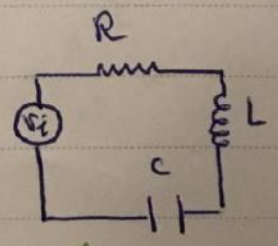
✓ جلسه پانزدهم

معادل سازی سیستم های الکتریکی - مکانیکی

(I) force - Voltage annalogy (F.V)



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = V$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$ بار الکتریکی

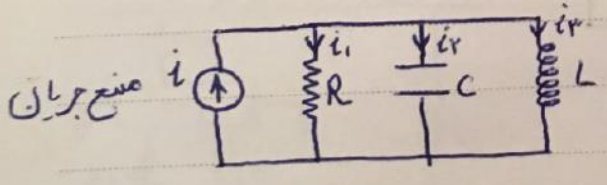
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = V_i$$

مقایسه می کنیم!

Subject
Date

mech		F-V elect.	F-I elect.
مقاوم حرکت	m	L	C
اتلاف	b	R	$\frac{1}{R}$
ذخیره	K	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{L}$
	f	V_i	i
	x	بار q	φ
	$\dot{x}$	i	$\dot{\varphi} = V$
	$\ddot{x}$	X	X

(II) Force - current analogy (F.I)



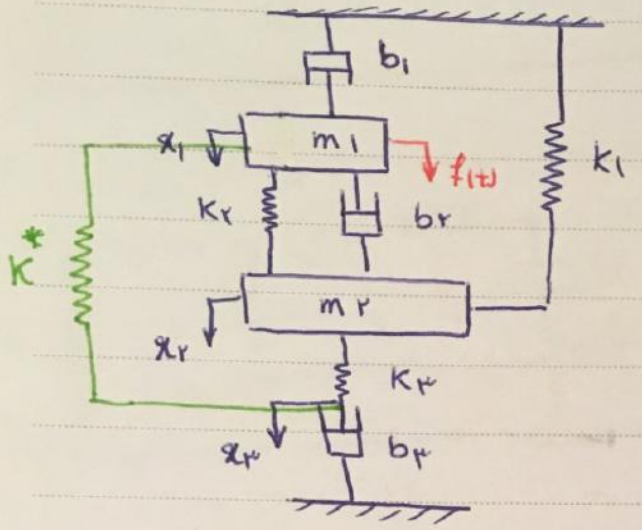
$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

$$i = \frac{V}{R} + C\frac{dV}{dt} + \frac{1}{L}\int V\,dt$$

$$V = \frac{d\varphi}{dt} \longrightarrow$$ شار الکتریکی

$$i = C\ddot{\varphi} + \frac{1}{R}\dot{\varphi} + \frac{1}{L}\varphi$$

مثال ۱

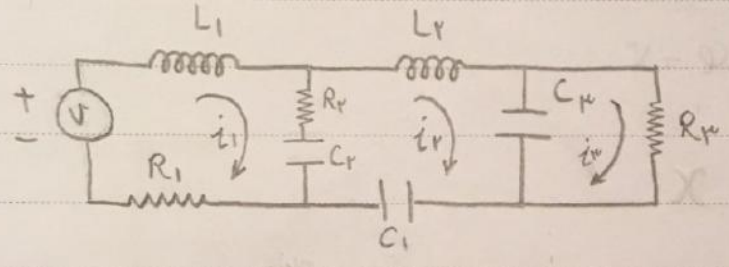


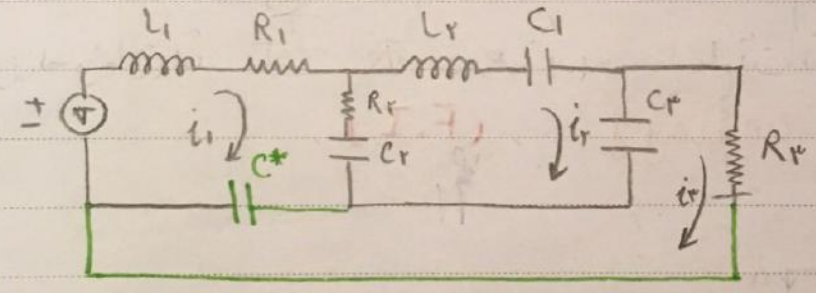
F-V

mech → elect.

* به تعداد درجات آزادی حلقه جریان داریم. *

بین جسم m_1 و m_2 ، K_2 و b_2 وجود دارد پس بین حلقه i_1 و i_2 ، R_2 و C_2 می گذاریم!





وقتی فنر K^* به مسئله اضافه شود!

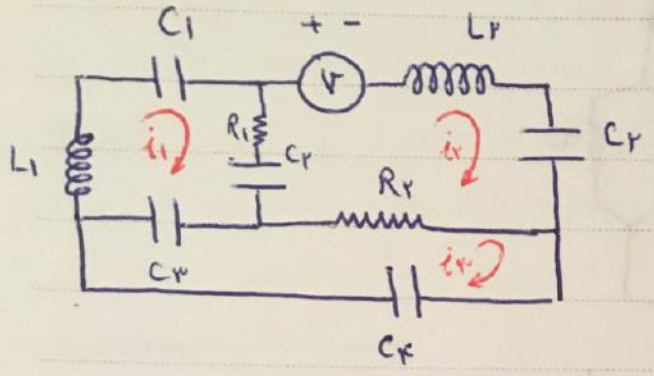
اگر $f(t)=0$ ارتعاشات آزاد $\overset{\text{معادل}}{\cong}$ I.C $x_{i(0)}$ شارژ اولیه خازن ها

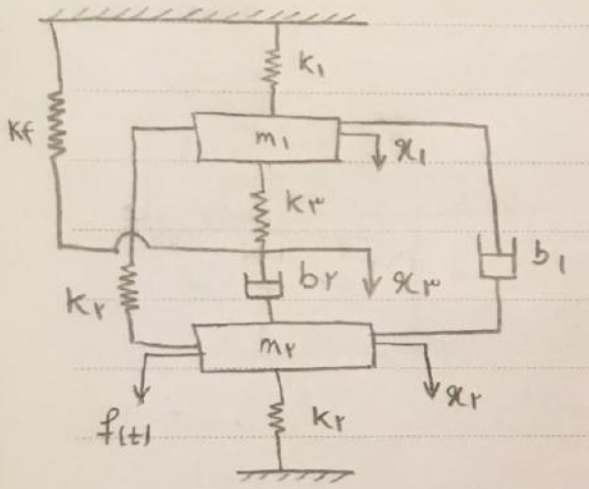
چرا خازن C^* را روی سیم بزرگ وصل نکرد؟

مثال ۱

F-V

elect → mech



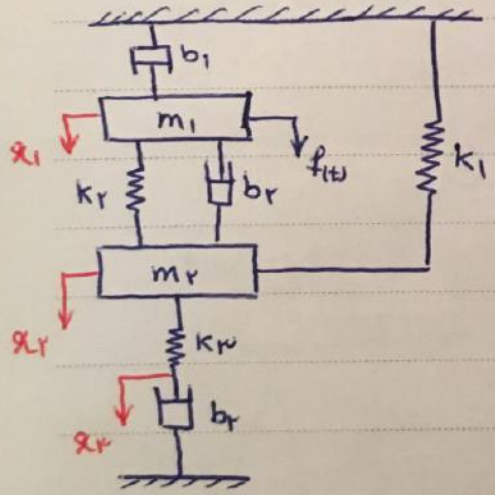


برای کشیدن نمودار مثلاً برای گره ۲ جسم m_2 را نگه داشته و بقیه جسم ها را تکان می دهیم هر چیزی که مربوط به m_2 شود و تکان نخورد را از گره به زمین وصل می کنیم.

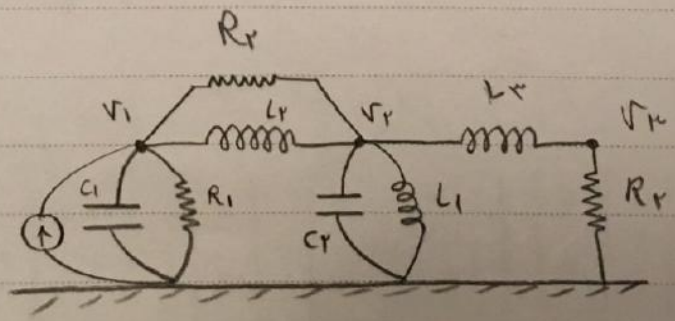
مثال ۱

F-I

mech → elect



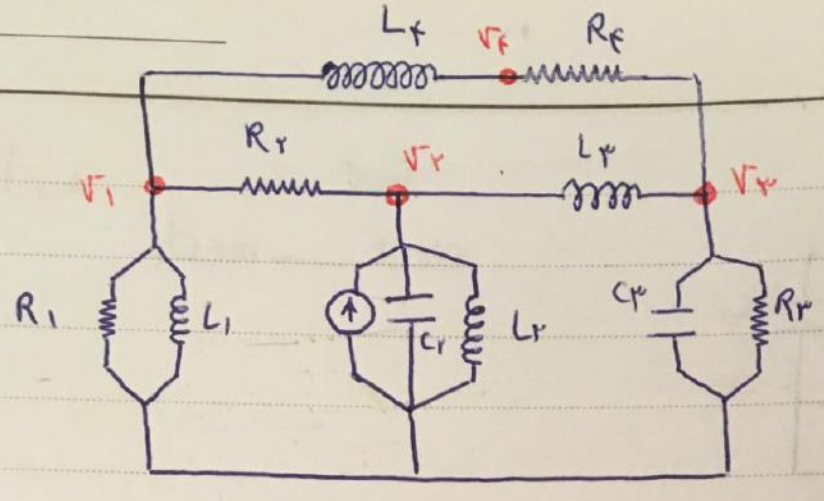
* به تعداد درجات آزادی گره و تار داریم! *



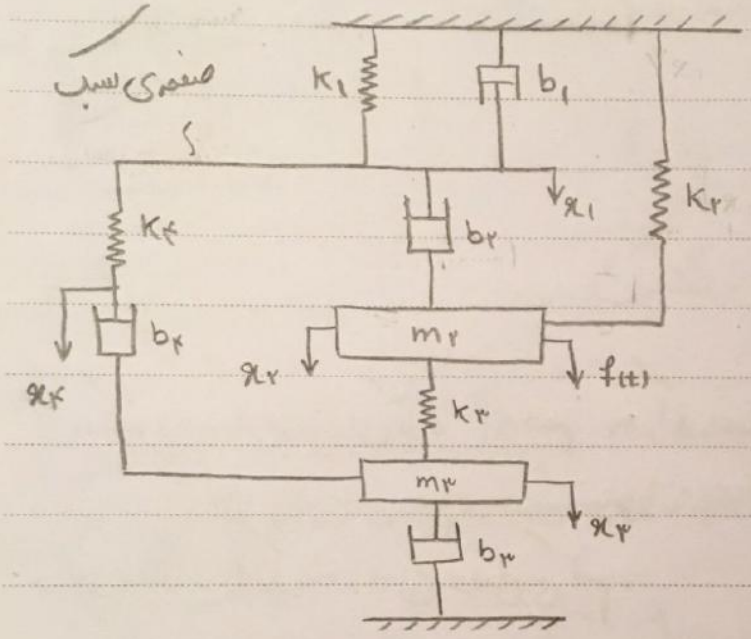
Subject
Date

مثال ۱

F.I



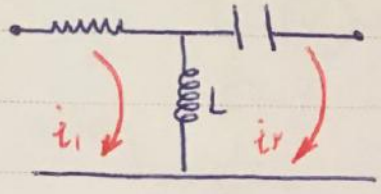
صفحه‌ی بعد



✓ جلسه شانزدهم

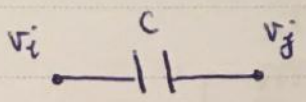
نکات باقی مانده :

۱ در موارد زیر



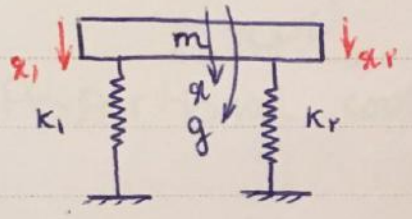
F-V

یا



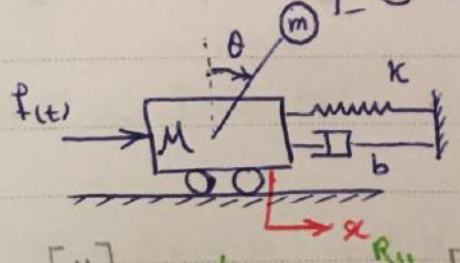
F-I

یعنی جرم بین دو درجه آزادی در مکانیک



مدل نیمه خودرو

۲ در مسائل دورانی یا ترکیب خطی دورانی ابتدا ماتریس های M و C و K و f را تشکیل داده سپس معادل برقی را مانند مثال زیر ارائه می کنیم.



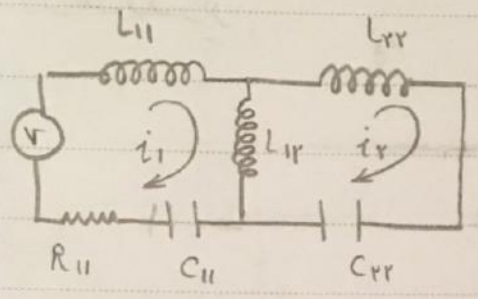
$$\overset{L_{11}}{\overbrace{\begin{bmatrix} M+m \\ ml \end{bmatrix}}}\overset{[M]}{} \quad \overset{L_{12}}{\overbrace{\begin{bmatrix} ml \\ \underbrace{ml^2}_{L_{22}} \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \overset{R_{11}}{\overbrace{\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}\overset{[b]}{} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \overset{C_{11}}{\overbrace{\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \underbrace{-mgl}_{C_{22}} \end{bmatrix}}}\overset{[k]}{} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \overset{V}{\overbrace{\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}}}\overset{[f]}{}$$

Dyn. Coupled — Static

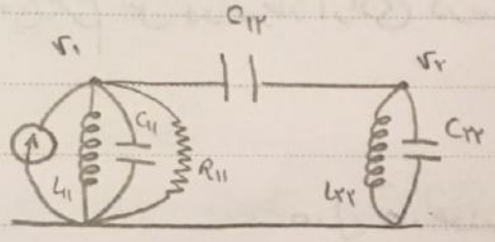
m_{ii} جرم‌های مربوط به درجه آزادی i

m_{ij} جرم‌های مربوط به درجه آزادی بین i و j

به‌طور مشابه برای b و k



← F-V

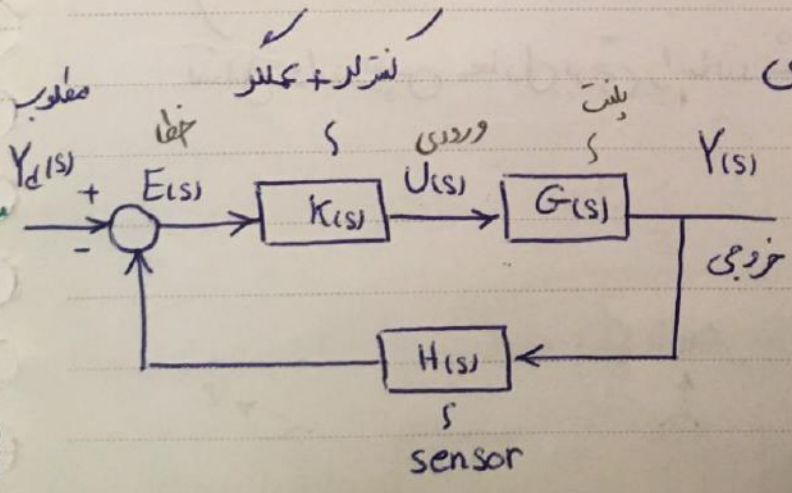


← F-I

Automatic Controllers:

1) On-off cont. (switch)

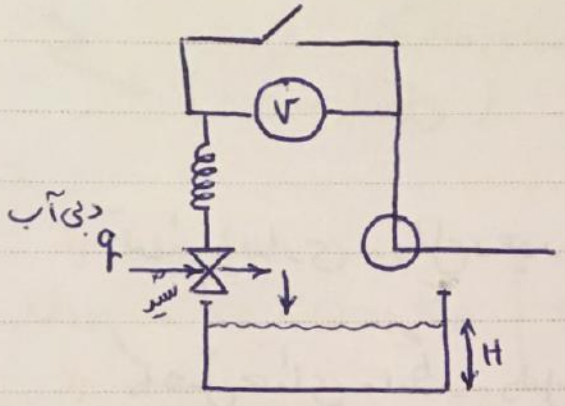
بازگشت به بحث های اول مدل‌سازی



$$K(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

Subject
Date

$$u(t) = \begin{cases} 0 & e(t) \geq 0 \\ 1 & e(t) < 0 \end{cases} \quad , \quad u(t) = \begin{cases} u_1 & e \geq 0 \\ u_2 & e < 0 \end{cases}$$



۱) ساده و ارزان (+)

۲) قطعات کم (+)

۳) هزینه مصرف انرژی بالا (−)

۴) خستگی قطعات (−)

تناسبی

۲) Proportional cont. (P_cont)

$$u(t) = K_p\, e(t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad K(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

افزایش پایداری سیستم

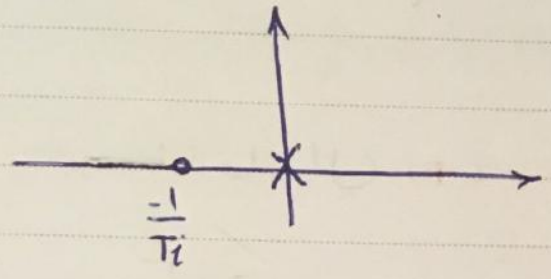
۳) Prop + Integral cont (PI_cont)

$$u(t) = \overbrace{K_p\, e(t)}^{P} + \overbrace{K'_p \int e(t)\, dt}^{I}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \Big[\underbrace{1}_{P} + \underbrace{\frac{1}{T_i S}}_{I} \Big]$$

اضافه کردن PI به معنای اضافه کردن یک قطب در مبداء $S=0$ و

یک صفر در $S=\frac{-1}{T_i}$ است.



(در درس کنترل)

۱) تنظیم پایداری به دلیل وجود Kp

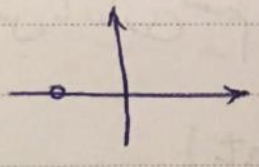
۲) کاهش خطای ماندگار به دلیل I

۴) Prop + Derivative Cont. (PD-cont)

$$u(t) = K_p\, e(t) + K'_p \frac{de(t)}{dt} \qquad T_d = \frac{K'_p}{K}$$

$$\mathcal{L} \downarrow \quad K(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left[\underset{P}{1} + \underset{D}{T_d S}\right]$$

اضافه کردن یک صفر در $\frac{-1}{T_d}$ (X)



(خوب نیست!)

تقویت نویز (عیب بزرگ) (-)

معمولاً در صنعت استفاده نمی‌شود. (-)

افزایش سرعت پاسخ سیستم (+)

۵) Prop + Integral + Deriv. (PID-Cont.)

۱) کامل‌ترین نوع کنترلر کلاسیک در صنعت (+)

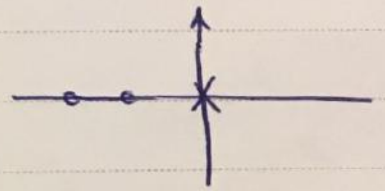
۲) افزایش پایداری و سرعت پاسخ و کاهش خطای ماندگار (+)

۳) گران و هزینه نگهداری (قطعات بیشتر) (−)

$$u(t) = K_p\, e(t) + K_p' \int e(t)\,dt + K_p'' \frac{de(t)}{dt}$$

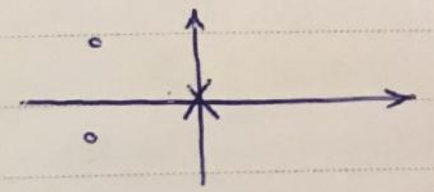
$\mathcal{L}$

$$K(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left[1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S\right]$$



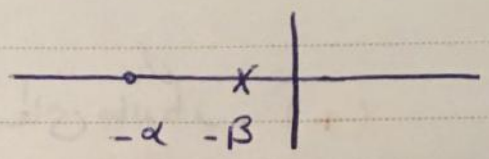
اضافه کردن یک قطب در مبدا $S=0$ و دو صفر

یا



4) Lead - lag Compensators جبران ساز ها

Lag یا Lead ← $\alpha > \beta$ یا $\alpha < \beta$ بسته به



$$K(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{s+\alpha}{s+\beta}$$

✓ جلسه هفدهم

Electronic Sys.

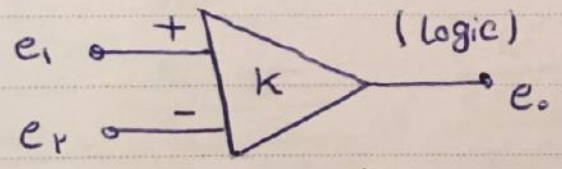
مدارهای الکترونیکی از المان های R-C دیود، ترانزیستور، OP-amp ، ...

تشکیل شده اند، به طوری که برخلاف مدارهای برقی ولتاژ جریان بزرگی در مدار نیست.

Operational Amplifiers (op-amp) :

تشکیل شده از یک سری R-C ، ترانزیستور و.... ≡ کاتالوگ

وظیفه : تصمیم گیری های هوشمند در مدارهای کنترلی



$10^5 - 10^6$

$$e_o = K(e_1 - e_2) \longrightarrow e_1 \simeq e_2 \quad ①$$

mV چند ، $\simeq 0$

② op-amp جریانی به داخل نمی کشد.

برای مدارهای DC / AC ⟵ $K \simeq 10^5 - 10^6$

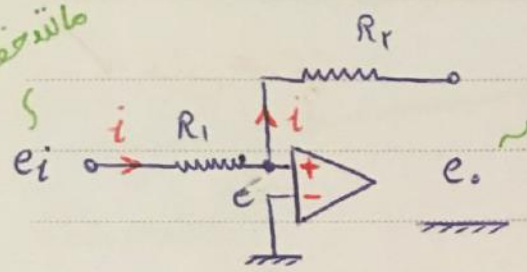
P-Controller $\frac{E_o}{E_i} = \frac{R_2}{R_1} = K_p$

Subject
Date

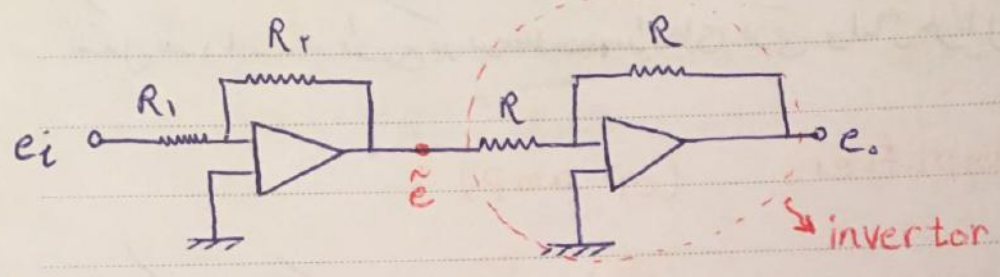
مثال) هدف $\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = ?$

مانند خطا

مانند u



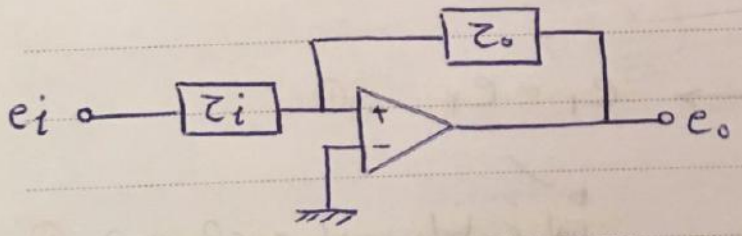
$$i = i \longrightarrow \frac{e_i - e'}{R_1} = \frac{e' - e_o}{R_2} \xrightarrow{e'=0} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-R_2}{R_1}$$



$$\frac{\tilde{e}}{e_i} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \frac{e_o}{\tilde{e}} = \frac{-R}{R} = -1$$

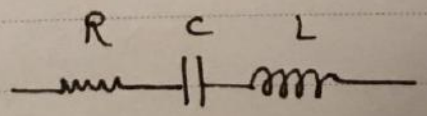
$$\frac{e_o}{e_i} = \frac{R_2}{R_1}$$

تعمیم مثال بالا)



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_o(s)}{Z_i(s)}$$

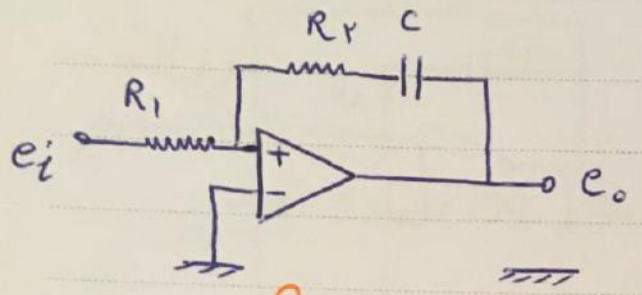
یادآوری:



$$Z(s) = R + \frac{1}{Cs} + Ls$$

impedance

مثال ۱



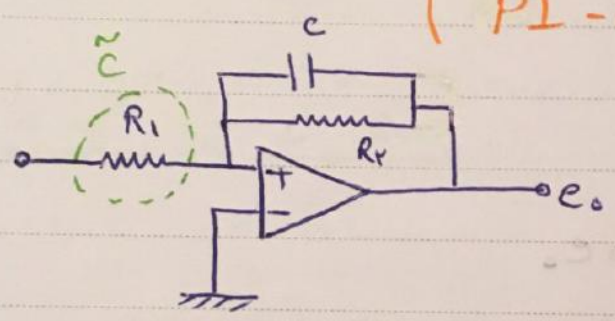
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = ?$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{CS}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 CS} = -K_p\left[1 + \frac{1}{T_i S}\right] \quad , \quad T_i = \frac{R_1 C}{R_2}$$

P I

(PI - cont)

مثال ۱

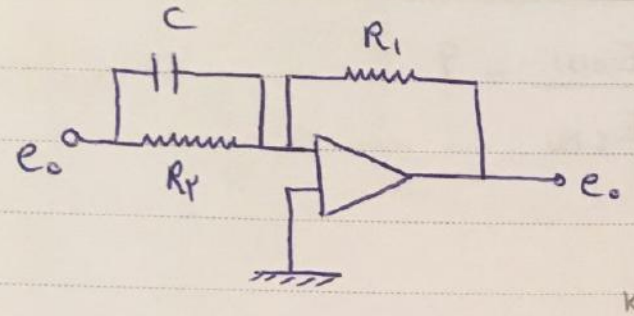


$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{CS}}{R_2 + 1/CS} = \frac{\frac{R_2}{R_2 CS + 1}}{R_1\left(\frac{1}{\tilde{C}S}\right)} = \frac{R_2}{R_1(R_2 CS + 1)\left(\frac{1}{\tilde{C}S}\right)}$$

کنترلر خاصی نیست / جبران ساز

(جدول موجود در کتاب 3.1)

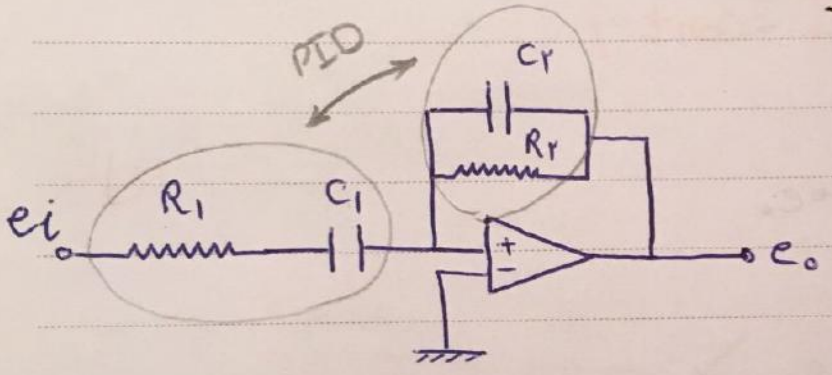
مثال ۱



(PD - cont)

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{-R_1}{\frac{R_2}{CSR_2+1}} = -\overset{K_p}{\frac{R_1}{R_2}}\left(\overset{T_d}{R_2CS+1}\right) = -K_p\left[1+T_dS\right]$$

مثال ۱

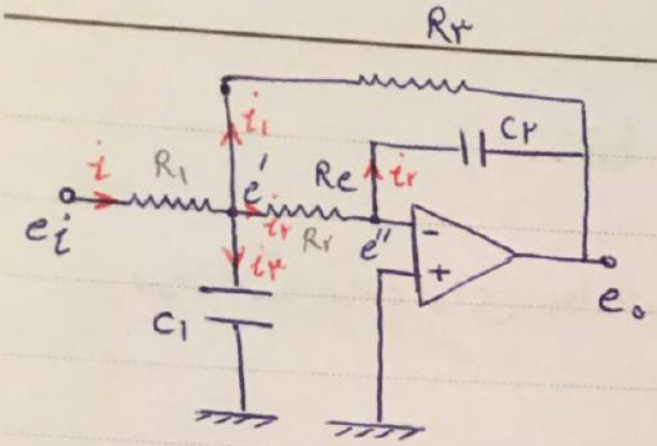


$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{\frac{-R_2}{R_2C_2S+1}}{R_1+\frac{1}{C_1S}} = \frac{\overset{d}{R_2C_1S}}{(R_1C_1S+1)(R_2C_2S+1)} = \frac{\overset{D}{as^2}+\overset{P}{bs}+\overset{I}{c}}{ds}$$

اگر برعکس می شد.

* اگر برعکس می شدیم PID می شد! *

Date



مثال ۱

$$\frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = ?$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad , \quad i_2 = i_3$$

$$\begin{cases} \dfrac{e_i - e'}{R_1} = \dfrac{e' - e_o}{R_2} + \dfrac{e' - e''}{R_3} + \dfrac{e' - 0}{\frac{1}{C_1 s}} \\[2ex] \dfrac{e' - e''}{R_3} = \dfrac{e'' - e_o}{\frac{1}{C_2 s}} \end{cases}$$

$$e_i, e_o, e' \xrightarrow{2\,Eqs} \frac{E_o}{E_i} \checkmark$$

Linearization of Nonlinear Eqs.

درحالت ساده برای معادلات چیزی :

مثلاً $f(x,y,z) = xy^2z^3$

خطی سازه حول نقطه $a=(1,2,3)$

$\bar{x}=1 \qquad \bar{y}=2 \qquad \bar{z}=3$

$$= \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right]_a}_{\bar{y}^2\bar{z}^3}(x-\bar{x}) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right]_a}_{\underbrace{2\bar{x}\bar{z}^3\bar{y}}_{\alpha}}(y-\bar{y}) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right]_a}_{\underbrace{3\bar{x}\bar{y}^2\bar{z}^2}_{\beta}}(z-\bar{z})$$

$$= 108(x-1) + \alpha(y-2) + \beta(z-3)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right]_a (x-\bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-\bar{x})^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x-\bar{x})^3$$

$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right]_a \cdots\cdots$$

$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right]_a \cdots\cdots$$

بسط جمله

✓ جلسه هجدهم

ادامه‌ی خطی‌سازی:

یکی از مهم‌ترین مسائل در control sys dyn. این است که معادلات حاکم جهت تحلیل پاسخ و طراحی کنترلر، خطی‌سازی شوند.

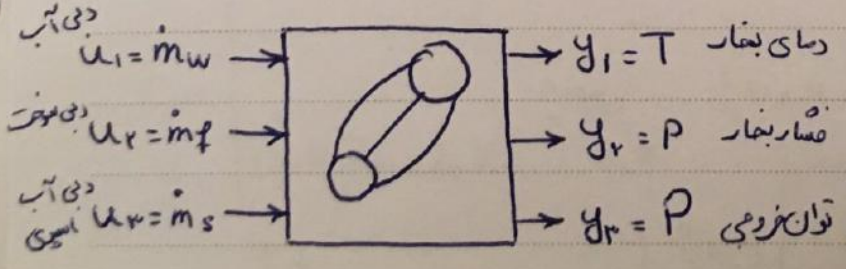
عمدتاً در فضای حالت است. $\xrightarrow{\text{معادلات حاکم}}$ برای MIMO

$$\begin{cases} \dot{X} = f(x, u) & \text{غیرخطی} \\ Y = g(x, u) & \text{واقعی - غیرخطی} \end{cases} \xrightarrow{\text{هدف خطی‌سازی}} \begin{cases} \dot{X} = AX + BU & \text{خطی} \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

$$\bar{X} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{Bmatrix} \qquad \bar{U} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{Bmatrix}$$

حول نقطه‌ی کاری
operating point

مثال) Non Linear Dynamics of a Boiler-Turbine Unit



مثلاً حول نقطه کاری زیر می‌خواهیم خطی کنیم : (اعداد و مدل قابل اعتماد نیست.)

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = 20 \ \text{ton/hr} \\ \bar{u}_2 = 100 \ \text{lit/s} \\ \bar{u}_3 = 3 \ \text{lit/s} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{y}_1 = 400 \ ^\circ C \\ \bar{y}_2 = 300 \ MPa \\ \bar{y}_3 = 100 \ MW \end{cases}$$

چگالی

$\bar{x}_3 = 0.98 \ kg/m^3$

$x_1 = y_1 = T \quad , \quad x_2 = y_2 = P \quad , \quad x_3 = \rho$ چگالی آب ← متغیرهای حالت

Non Linear model

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_1 x_1^2 x_2 + \alpha_2 x_3 u_2 + \alpha_3 u_1^2 + \alpha_4 x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta_1 x_1^3 u_2 + \beta_2 u_1 u_3 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_1 \\ \dot{x}_3 = \gamma_1 x_1 x_3^{9/8} + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 x_2 u_3 + \gamma_4 x_3 \end{cases}$$

← from experiment.

$$\dot{x} = f(x, u)$$ غیرخطی

خروجی‌ها

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \lambda_1 x_1^2 x_2 + \lambda_2 x_3 u_2 + \lambda_3 x_1 x_3 \end{cases}$$

توان خروجی

$$y = g(x, u)$$ غیرخطی

$i = 1, \dots, 4 \qquad \alpha_i , \beta_i , \gamma_i$

$j = 1, \dots, 3 \qquad \lambda_j$

ثوابت ←

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_j, u_j) \\ y_i &= g_i(x_j, u_j) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned}\right.$$

$$\left(A = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad B = \frac{\partial f_i}{\partial u_i}, \quad C = \frac{\partial g_i}{\partial x_i}, \quad D = \frac{\partial g_i}{\partial u_i} \right)$$

حول نقطه کاری $\bar{X}$ ، $\bar{U}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

✓ ✓
C, D

بجای f، g می‌نشیند.

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 & \alpha_1 \bar{x}_1^2 + \alpha_4 & \alpha_2 \bar{u}_2 \\ 3\beta_1 \bar{x}_1^2 \bar{u}_2 + \beta_4 & 2\beta_3 \bar{x}_2 & 0 \\ \gamma_1 \bar{x}_3^{9/8} & \gamma_3 \bar{u}_3 + 2\gamma_5 \bar{x}_2 & \frac{9}{8}\gamma_1 \bar{x}_1 \bar{x}_3^{1/8} + \gamma_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha_2 \bar{u}_1 & \alpha_2 \bar{x}_3 & 0 \\ \beta_2 \bar{u}_3 & \beta_1 \bar{x}_1^3 & \beta_2 \bar{u}_1 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\lambda_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \lambda_3 \bar{x}_3 & \lambda_1 \bar{x}_1^2 & \lambda_2 \bar{u}_2 + \lambda_3 \bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \bar{x}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Chapter 4: Mathematical Modelling of thermo-Fluid sys

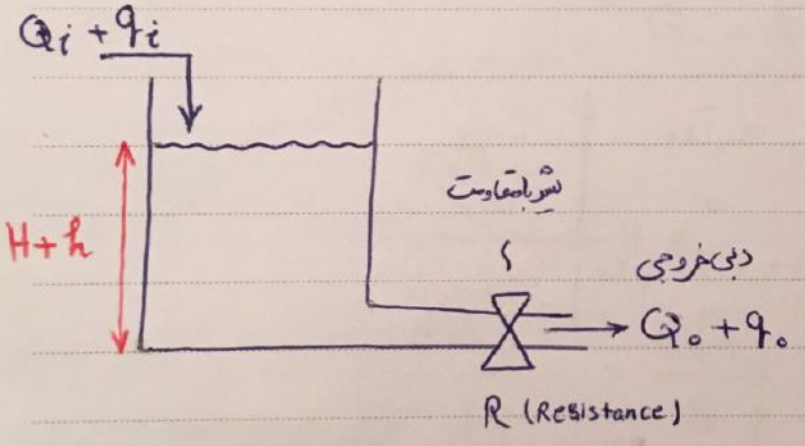
۱) مخزن سیال

۲) نیوماتیک / هیدرولیک

۳) حرارتی

... Liquid level Sys ..... سیستم سطح آب ...

در این درس با جریان آرام سیال سروکار داریم (خطی) $Re < ۲۳۰۰ \leftarrow$ Linear



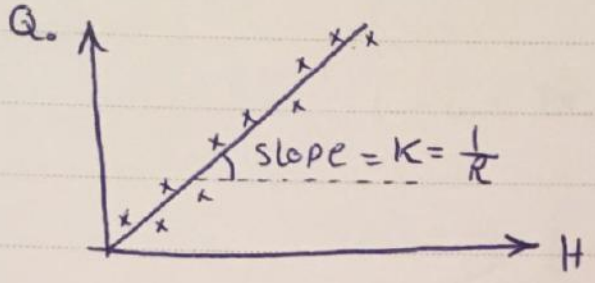
در این درس ✓ @ Laminar flow: $Q_o = KH$ (خطی)

تعریف مقاومت شیر $R = \dfrac{\text{عامل حرکت}}{\text{جریان سیال}} = \dfrac{dH}{dQ_o} = \dfrac{h}{q_o}$ (تغییرات ارتفاع)

Subject
Date

Laminar $R = \frac{dH}{K\,dH} = \frac{1}{K}$

$Q_o = KH$

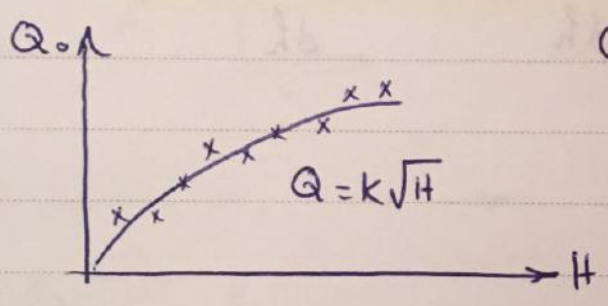


آزمایشگاه سیالات

آشفته

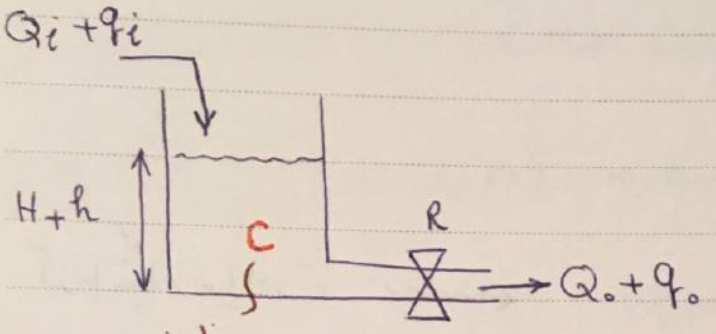
@ Turbulent flow: $Q_o = K\sqrt{H}$

$Q_o = K H^{m/n}$



$$R = \frac{dH}{dQ_o} = \frac{dH}{\frac{K}{2\sqrt{H}}\,dH} = \frac{2\sqrt{H}}{K} = \frac{2\sqrt{H}}{\frac{Q_o}{\sqrt{H}}} = \frac{2H}{Q_o}$$

✓ جلسه نوزدهم



ظرفیت مخزن
capacitance

(به لحاظ هندسی معرف سطح مخزن است.)

(۱) $$R = \frac{\Delta h}{q} = \frac{h}{q_o}$$

(۲) $$C = \frac{\text{تغییر حجم سیال}}{\text{ارتفاع}} = \frac{q_{net}\,dt}{dh} = \frac{(q_i - q_o)\,dt}{dh}$$

$$\text{هدف} = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = ?$$

2EQS. q_i , q_o , h

$$\underbrace{RQ_o(s)}_{} = H(s) \quad ①$$

$$*\text{از}: C\dot{h} = q_i - q_o \xrightarrow{\mathcal{L}} CSH(s) = Q_i(s) - Q_o(s) \quad ②$$

$$Q_o(s)(RCS + 1) = Q_i(s) \longrightarrow \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\underbrace{RCS}_{\text{ثابت زمانی سیستم}} + 1}$$

تابع تبدیل مرتبه ۱

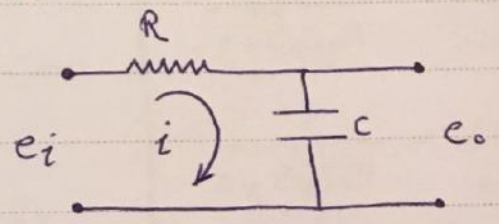
تابع تبدیل مرتبه ۱ ← حرارت - سیالات

تابع تبدیل مرتبه ۲ ← m-k-c (جرم-فنر-دمپر) / R-L-C (=)

تابع تبدیل مرتبه ۳ ← DC-motor (دمانسیه)

می توان نشان داد، مسأله مخزن سیالات، معادل الکتریکی دارد:

elect 1:

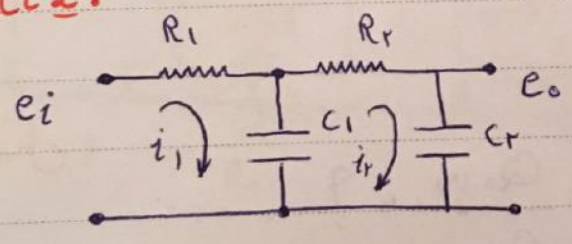


$$E_i = \left(R + \frac{1}{CS}\right) I(s)$$

$$E_o = \frac{1}{CS} I(s)$$

$$\rightarrow \frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{RCS+1}$$

elect 2:



۱) $E_i = R_1 I_1 + \frac{1}{C_1 S}(I_1 - I_2)$

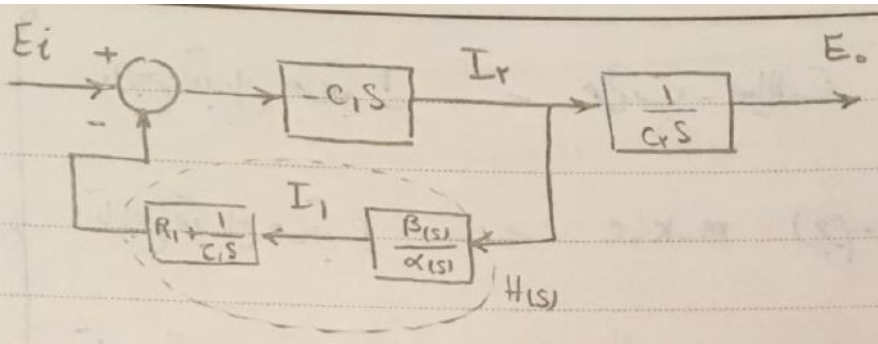
$$I_2 \overbrace{\left(R_2 + \frac{1}{C_1 S} + \frac{1}{C_2 S}\right)}^{\beta(s)} = \overbrace{\frac{1}{C_1 S}}^{\alpha(s)} I_1$$

۲) $\cancel{V_B} - R_2 I_2 - \frac{1}{C_2 S} I_2 - \frac{1}{C_1 S}(I_\alpha - I_1) = \cancel{V_B}$

۳) $E_o = \frac{1}{C_2 S} I_2$

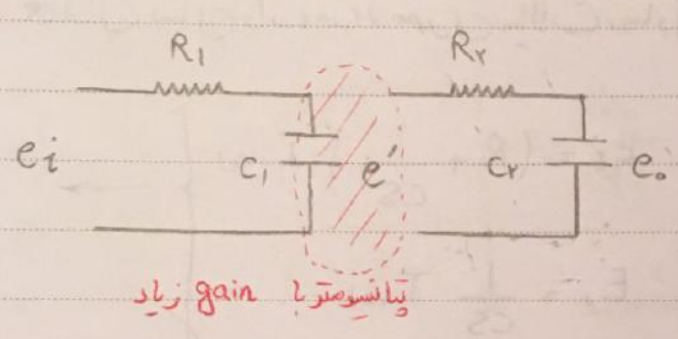
3 Eqs.

4 Vars I_1, I_2, E_i, E_o



$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{-C_1S}{1-C_1SH(s)}\,\frac{1}{C_2S} \xrightarrow{\text{ساده کنید}} \frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2S^2+(R_1C_1+R_2C_1+R_1C_2)S+}$$

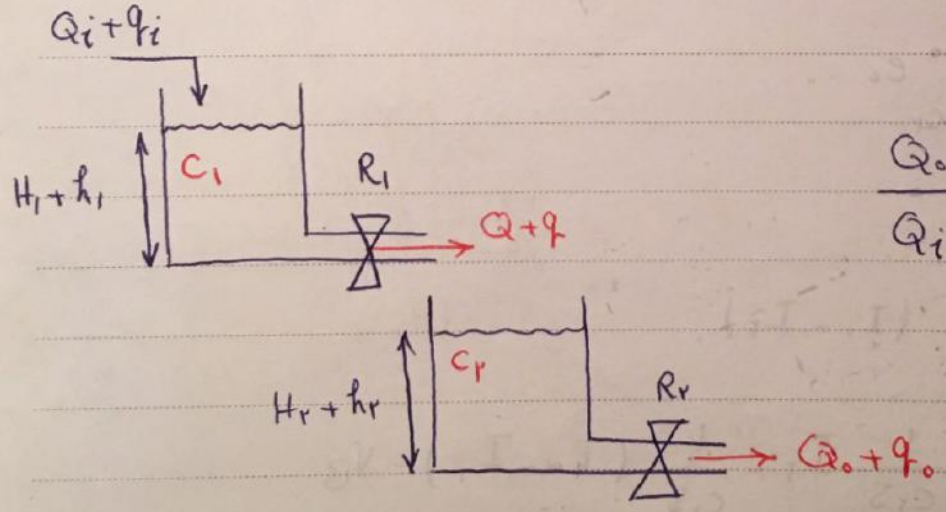
coupling در مدار



$$\left.\begin{aligned}\frac{e'}{e_i} &= \frac{1}{R_1C_1S+1}\\ \frac{e_o}{e_i} &= \frac{1}{R_2C_2S+1}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{e_o}{e_i} = \frac{1}{\tau_1 S+1}\,\frac{1}{\tau_2 S+1}$$

مثال ۱



$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = ?$$

4 Eqs

5 vars : q_i, q_o, q, h_1, h

$$R_1 = \frac{h_1}{q} \xrightarrow{\mathcal{L}} R_1Q = H_1 \quad (1) \qquad R_2 = \frac{h_2}{q_o} \xrightarrow{\mathcal{L}} R_2Q_o = H_2 \quad (2)$$

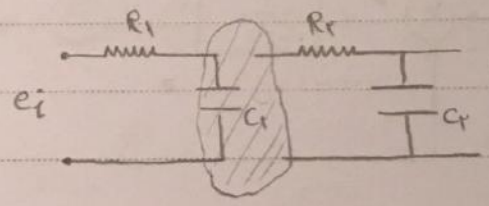
$$C_1 = \frac{q_{net}\,dt}{dh_1} = \frac{(q_i - q)\,dt}{dh_1} \xrightarrow{\mathcal{L}} C_1 S H_1 = Q_i - Q \qquad (۳)$$

$$C_2 = \frac{(q - q_o)\,dt}{dh_2} \longrightarrow C_2 S H_2 = Q - Q_o \qquad (۴)$$

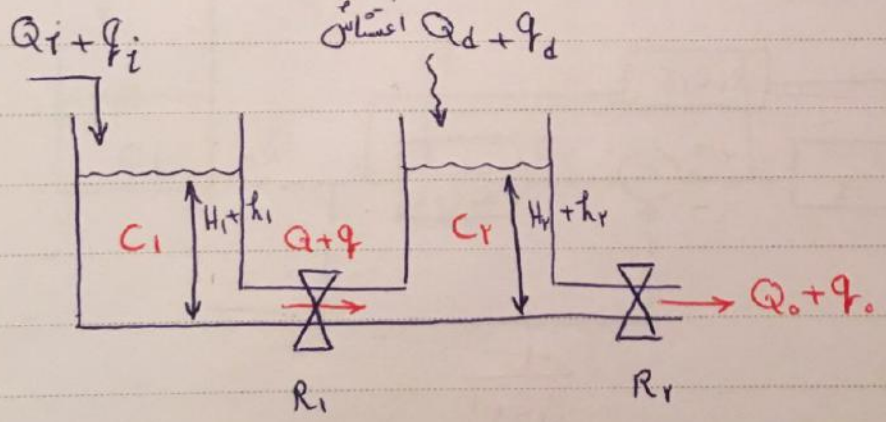
از ۱ و ۳ ← حذف H_1 ، از ۲ و ۴ ← حذف H_2

$$\left.\begin{array}{l} \text{from (۱) و (۳)}: \dfrac{Q}{Q_i} = \dfrac{1}{R_1C_1S+1} \\[2ex] \text{from (۲) و (۴)}: \dfrac{Q_o}{Q} = \dfrac{1}{R_2C_2S+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Q_o}{Q_i} = \frac{1}{(R_1C_1S+1)(R_2C_2S+1)}$$

مانند:



مثال ۱)



$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = ?$$

4 EQs , 6 Vars : q_i , q , q_d , h_1 , h_1 , q_o

اغتشاش ، می‌تواند ورودی دوم کنترلی باشد.

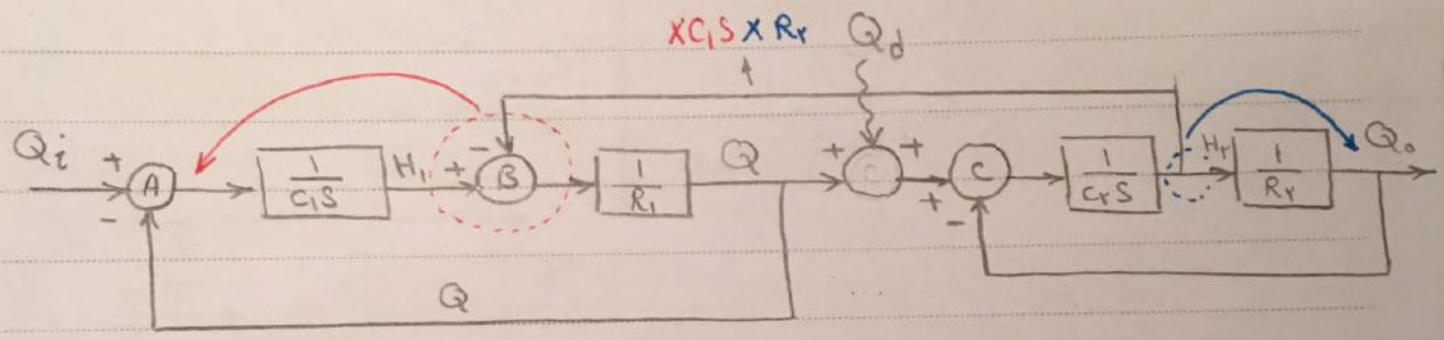
در بسیاری از موارد صنعتی ، هدف کنترل H_1 یا H_2 است. (مثلاً در استخر)
هدف کنترل Q_o است.

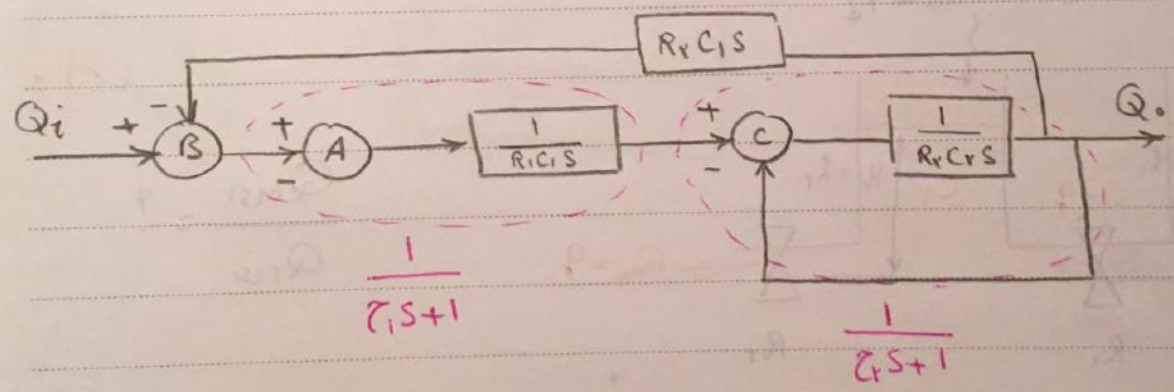
$$R_1 = \frac{h_1 - h_2}{q} \longrightarrow R_1 Q = H_1 - H_2$$

$$R_2 = \frac{h_2}{q_o} \longrightarrow R_2 Q_o = H_2$$

$$C_1 = \frac{(q_i - q)\,dt}{dh_1} \longrightarrow C_1 H_1 S = Q_i - Q$$

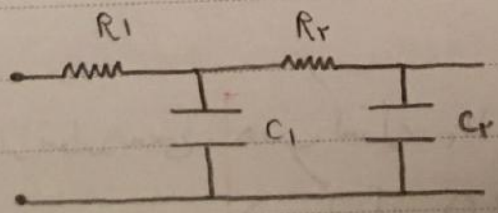
$$C_2 = \frac{(q + q_d - q_o)\,dt}{dh_2} \longrightarrow C_2 H_2 S = Q + Q_d - Q_o$$





$Q_d \equiv 0$

$$\frac{Q_o}{Q_i} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + \underbrace{\cancel{R_2 C_1}}_{\text{جمله اضافی}})S + 1}$$



مشابه

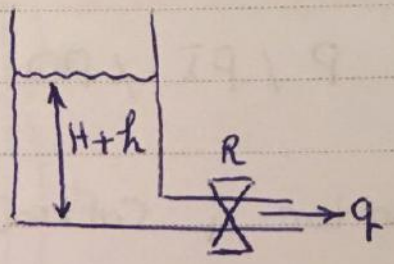
✓ جلسه بیستم

نکات باقی مانده :

(تأثیرات ...

① $R = \frac{h}{q}$

$C = \frac{q\,dt}{dh}$



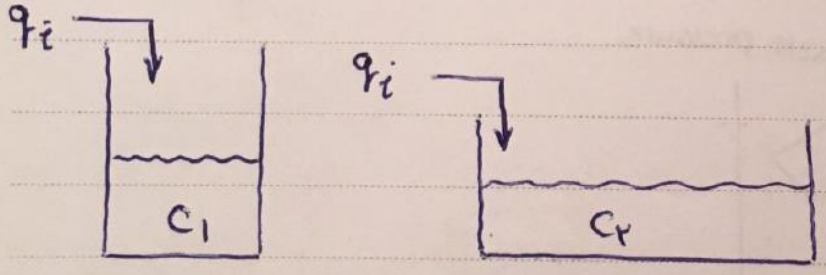
$R \uparrow \longrightarrow (q \to 0)$

(∞) شیر کاملاً بسته

$R \downarrow \longrightarrow (q \to \infty$ بزرگ$)$

(0) شیر کاملاً باز

②



$h_1 > h_2$

$C_1 < C_2$

q_i یکسان

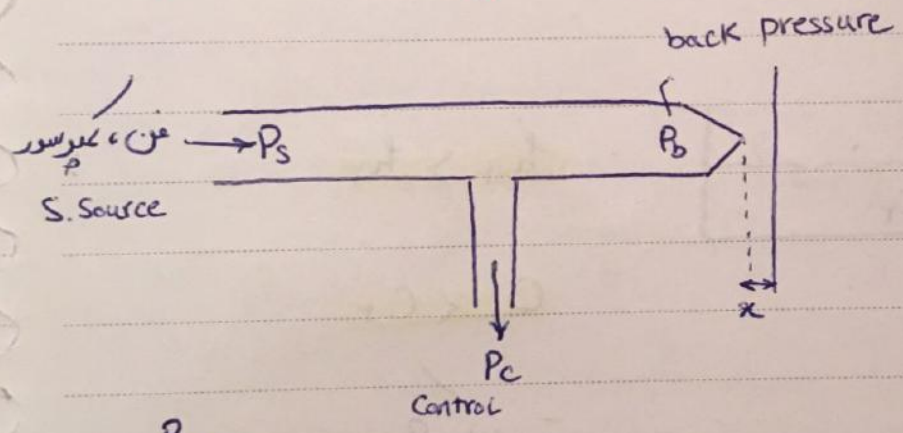
Pneumatic and Hydraulic SyS :

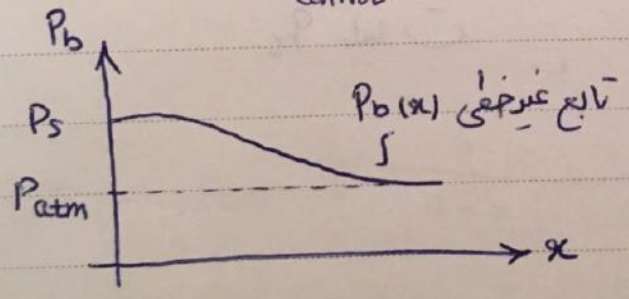
هدف این درس بررسی مکانیزم های نیوماتیک یا هیدرولیکی که منجر به عملگر شوند.

P / PI / PD / PID / ....

actuator + Controller : اجزاء مکانیکی بوده و قابلیت کنترل و اعمال کنترل را دارند.

Pneumatic sys :



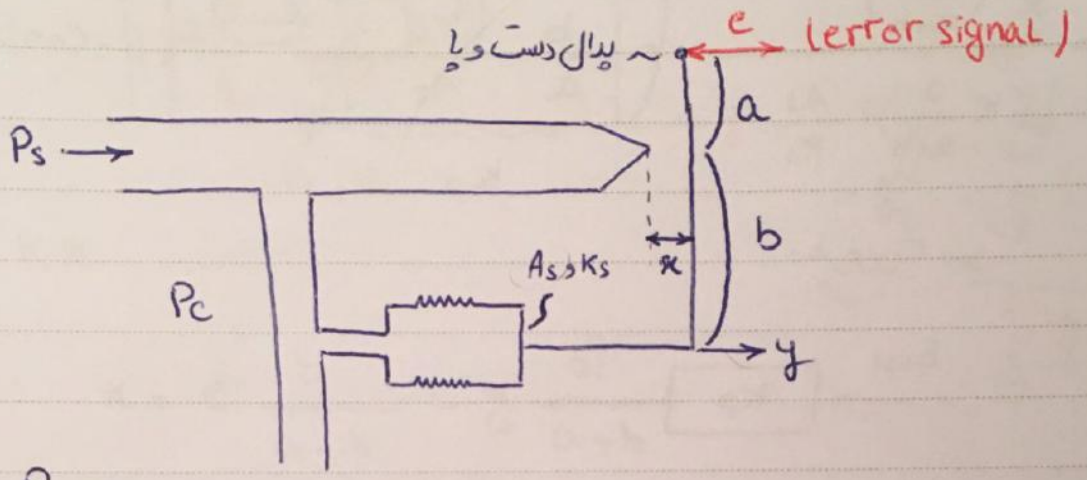


می توان P_b را حول نقاطی از x، خطی سازی کرد به گونه ای که : ① $P_b = k'x$

به سادگی می توان نشان داد که در مکانیزم فوق : $P_c = K'' P_b$ ②

②, ① $\rightarrow$ $P_c = Kx$ ✓

مثال)

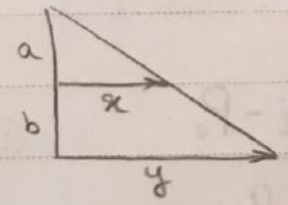


هدف : $\dfrac{P_c(s)}{E(s)} = ?$

① $P_c = Kx$

② هندسه : x تابعی از y و e ؟

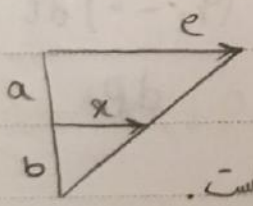
$e = 0$



$$\frac{x}{y} = \frac{a}{a+b}$$

$$\Longrightarrow x = e\frac{b}{a+b} - y\frac{a}{a+b}$$

$y = 0$

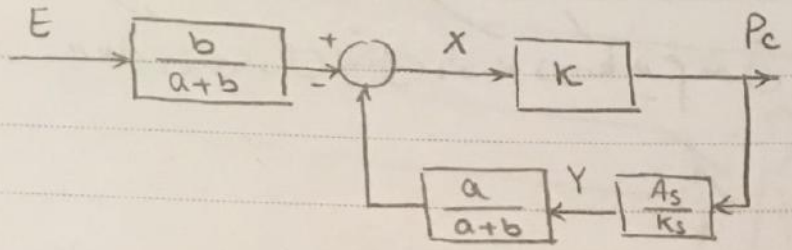


$$\frac{x}{e} = \frac{b}{a+b}$$

* اگر در یک لحظه $x=0$ شود حرکت e و y خلاف هم است.

$\begin{pmatrix} 4 \text{ vars.} \\ 3 \text{ Eqs.} \end{pmatrix}$

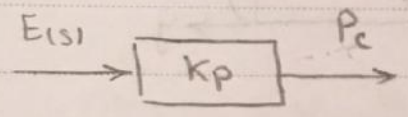
③ $P_c A_s = K_s y$



$$\frac{P_{c(s)}}{E_{(s)}} = \frac{K\left(\frac{b}{a+b}\right)}{1+K\frac{a}{a+b}\cdot\frac{A_s}{K_s}} = \underbrace{\frac{b}{a}\,\frac{K_s}{A_s}}_{K_p}$$

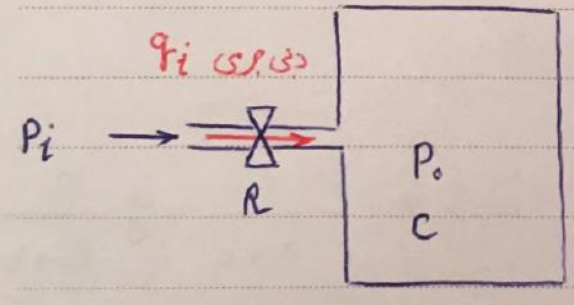
(P-Cont./act.)

با فرض $\gg 1$



$\frac{K_s}{A_s}\nearrow$ $\quad K_p\nearrow$ $\quad \frac{b}{a}\nearrow$ البته $\frac{b}{a}$ محدودیت مفاهیم دارد!

تعریف مقاومت R و ظرفیت C :



$$R = \frac{\Delta P}{q_i} = \frac{P_i - P_o}{q_i} \quad (1)$$

$$C = \frac{q_{net}\,dt}{dP_o} = \frac{(q_i - 0)\,dt}{dP_o} \quad (2)$$

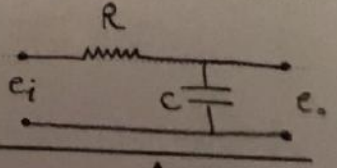
(1) → $P_i - P_o = R\,Q_i$

(2) → $CS\,P_o = Q_i$

$$\rightarrow \frac{P_{o(s)}}{P_{i(s)}} = \frac{1}{\underbrace{RCS}_{\text{ثابت زمانی}}+1}$$

T.F مرتبه اول

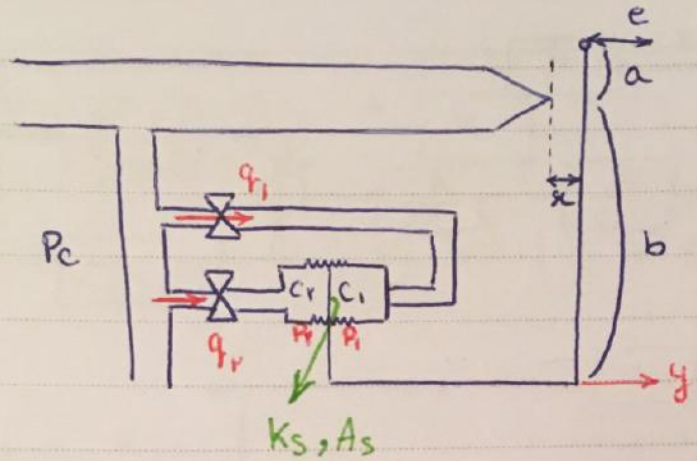
مشابه مسائل سیالات



Subject
Date

نام گذاری ترمز توسط خودمان انجام شده.

مثال ۱



$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = ?$$

$C_1 \dot{P}_1 = q_1$

$C_2 \dot{P}_2 = q_2$

$P_1 = x_1 \rightarrow \dot{P}_1 = \dot{x}_1$

$P_2 = x_2$

چاه: مقدار ثابت

EqS.

① $P_c = Kx$

② هندسه: $x = e\dfrac{b}{a+b} - y\dfrac{a}{a+b}$

③ $R_1 = \dfrac{P_c - P_1}{q_1}$ ⑤ $C_1 = \dfrac{q_1\,dt}{dP_1}$ ⑦ $(P_1 - P_2)A_s = K_s y$

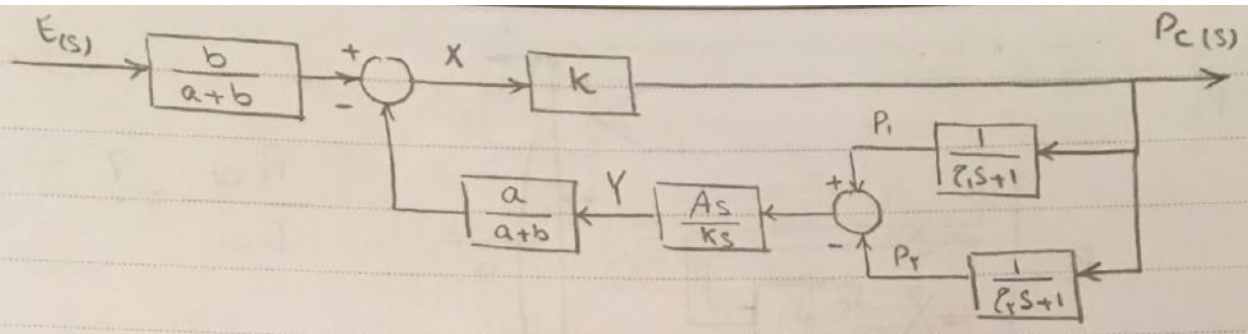
④ $R_2 = \dfrac{P_c - P_2}{q_2}$ ⑥ $C_2 = \dfrac{q_2\,dt}{dP_2}$

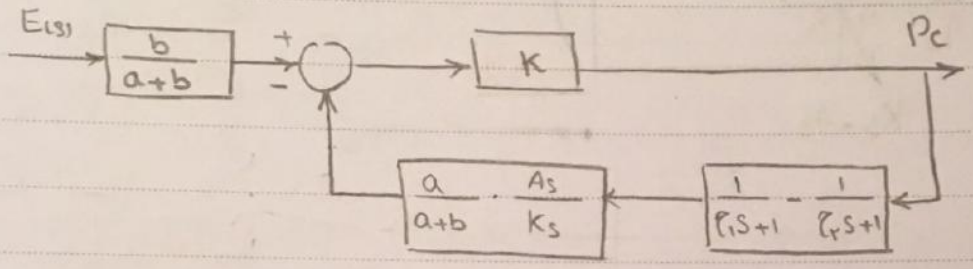
(۸ vars : $x, y, e, q_1, q_2, P_1, P_2, P_c$ ۷ EqS.)

از رابطه ۳ و ۵، q_1 و از رابطه ۴ و ۶، q_2 را حذف کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ③: P_c - P_1 = R_1 Q_1 \\ ⑤: C_1 S P_1 = Q_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{Q_1 \text{ حذف}} \frac{P_1}{P_c} = \frac{1}{R_1 C_1 S + 1}$$

به طور مشابه: $\dfrac{P_2}{P_c} = \dfrac{1}{R_2 C_2 S + 1}$





$$\frac{P_{c(s)}}{E_{(s)}} = \frac{K\left(\frac{b}{a+b}\right)}{1+\underbrace{K\cdot\frac{a}{a+b}\,\frac{A_s}{K_s}\left(\frac{(\tau_2-\tau_1)s}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}\right)}_{\gg 1}}$$

$$\frac{P_{c(s)}}{E_{(s)}} = \overbrace{\frac{a}{b}\,\frac{K_s}{A_s}}^{\text{عدد}}\;\frac{\overbrace{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}^{\to\; as^2+bs+c}}{(\tau_2-\tau_1)s}$$

$$= K_p\left[1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right] \qquad (\text{PID\_act / cont})$$

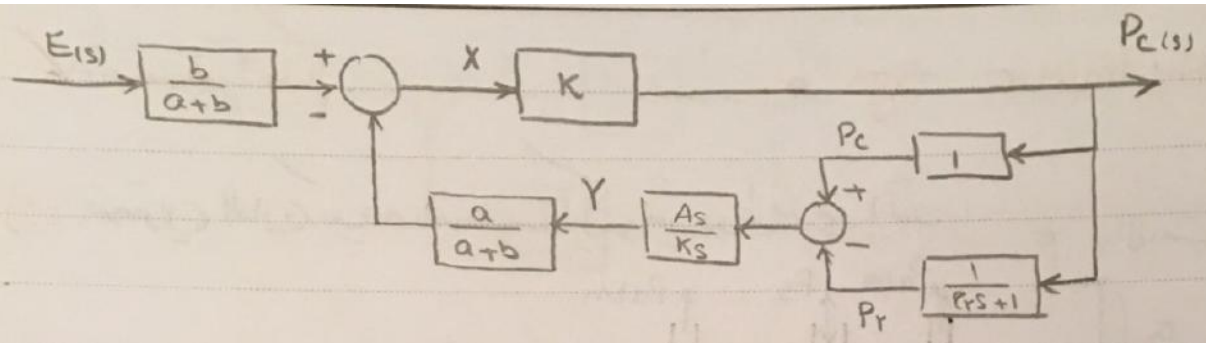
اگر بشر ۱ باز شود، $R_1 = 0$ ← کنترلر؟

معادلات: ① $P_c = Kx$

② $x = e\,\frac{b}{a+b} + y\,\frac{a}{a+b}$

③ $R_2 = \frac{P_c - P_2}{q_2}$ ⑤ $(P_2 - P_c)A_s = K_s y$

④ $C_2 = \frac{q_2\,dt}{dP_2}$ از ۳ و ۴ حذف q_2: $\frac{P_2}{P_c} = \frac{1}{\tau_2 s+1}$



جدید : $R_1 = 0$

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{K\,\frac{b}{a+b}}{1+K\,\frac{a}{a+b}\,\frac{As}{Ks}\,\underbrace{\left(1-\frac{1}{\tau_2 s+1}\right)}_{\gg 1}} = \frac{b}{a}\,\frac{Ks}{As}\,\frac{\tau_2 s+1}{\tau_2 s}$$

$$= K_p\left[1+\frac{1}{T_i s}\right] \qquad (P.I\text{-}act/cont)$$

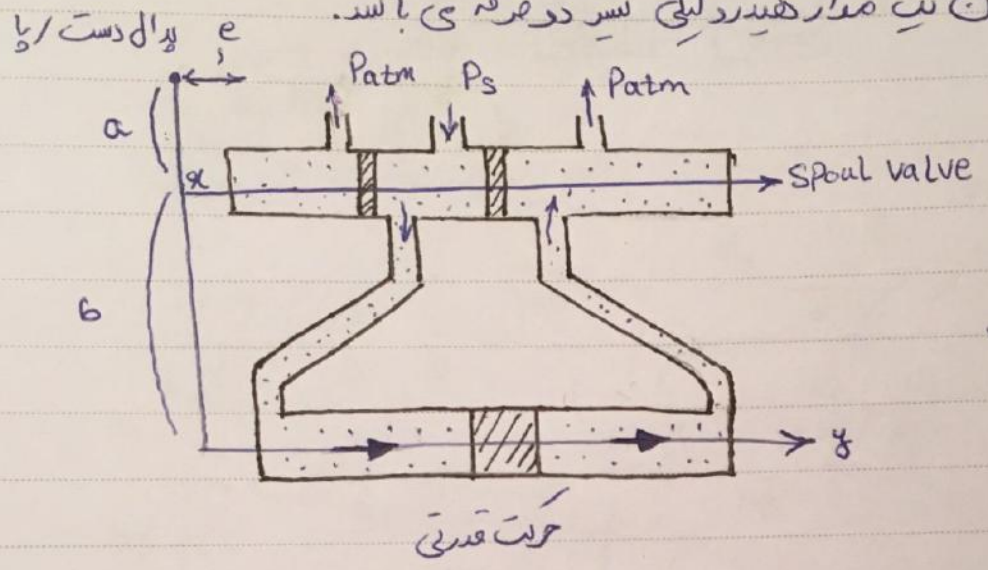
اگر $R_1 \neq 0$ (بسته)

$R_2 = 0$ (باز) $\longrightarrow$ PD

... Hydraulic Sys ...

✓ جلسه بیست و یکم

مثال) مهمترین المان یک مدار هیدرولیکی شیر دو طرفه می باشد.



هدف : $\frac{Y(s)}{E(s)} = ?$

برخی روابط حاکم :

$$P_{\text{روغن}} = \underset{\text{غیرخطی}}{f}(q, dx)$$

بدون اثبات و با کمک برخی روابط فیزیکی

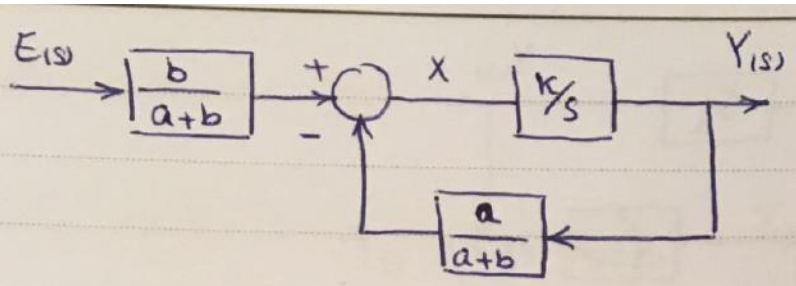
default (۱) $$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{S} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = K\int x(t)\,dt$$

با حرکت x، می توان حرکت y ای گرفت که خطای کمتری در جابه جایی دارد

و تقویت شده است.

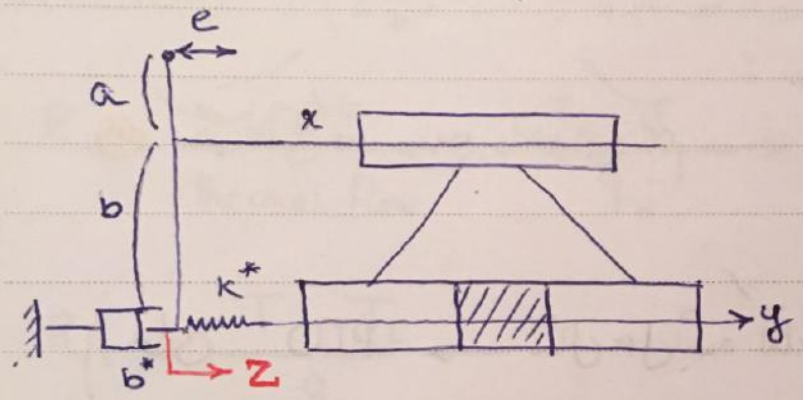
هندسی (۲) $$x = e\frac{b}{a+b} - y\frac{a}{a+b}$$ $\begin{cases} x \\ y \\ e \end{cases}$

* نسبت به نیوماتیک روابط کمتری دارد. *



$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{K}{s}\cdot\frac{b}{a+b}}{1+\underbrace{\frac{K}{s}\cdot\frac{a}{a+b}}_{\gg 1}} = \frac{b}{a} = K_p \qquad (\text{P-Cont/act})$$

مثال) مهم



حرکت قدرتی

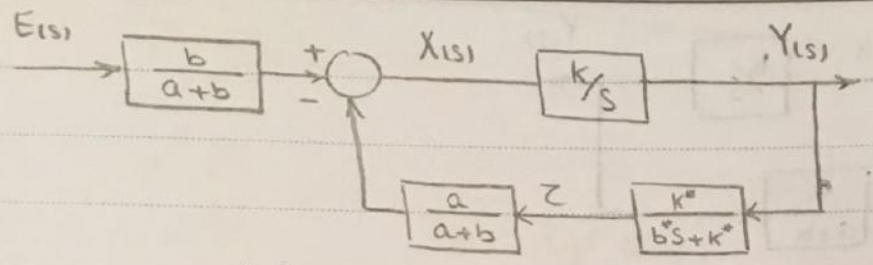
① $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$

y نگذاشیم چون فنر و میرا یک درجه آزادی است و فنر داریم برای همین z می‌گذاریم.

هندسی ② $x = e\frac{b}{a+b} - z\frac{a}{a+b}$

③ 4 vars: x, y, e, z

$$b^*(\dot{z}-0) + k^*(z-y) = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} Z(s)\left[b^*s + k^*\right] = k^* Y(s)$$



$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{k}{s}\cdot\frac{b}{a+b}}{1+\underbrace{\frac{k}{s}\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{k^*}{b^*s+k^*}}_{\gg 1}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{b^*s+k^*}{k^*} =$$

$$= \checkmark\ k_p = \frac{b}{a}\ ,\ T_d = \frac{b^*}{k^*} \quad = k_p\,(\overset{P}{1} + \overset{D}{T_d s}) \quad (PD\text{-}cont/act)$$

اگر جای فنر و دمپر را عوض کنیم ← $(PI\text{-}Cont/act)$

(برای PID ← مثال حل شده کتاب و HW)

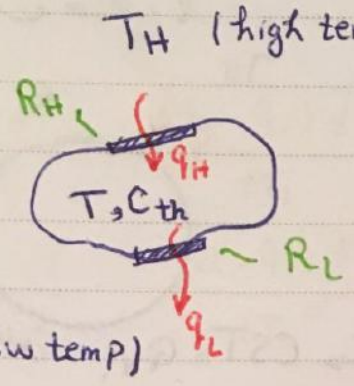
در برخی مسائل واقعی و در حضور نشتی (Leakage):

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \qquad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{s} \checkmark$$

نیوماتیک:	هیدرولیک:
✗ دقت و کورس کمتر	✓ دقت بیشتر و کورس حرکت بیشتر
✗ اعمال زور کنترلی کمتر	✓ اعمال زور کنترلی بزرگ‌تر
✓ ارزان و اجزا کمتر	✗ گران و اجزا بیشتر
✓ تمیزی به دلیل هوا	✗ کثیفی به دلیل نشتی روغن
✗ قابلیت انفجار	✗ قابلیت اشتعال
✗ سیال هوا تراکم پذیری	✓ سیال روغن تراکم پذیری بالا

Thermal Sys :

دمای آنان : T



در مقایسه با مساله سیال و نیوماتیک :

$$R_H = \frac{\text{عامل حرکت}}{\text{thermal flow}} = \frac{T_H - T}{q_H}$$

from experiment

we have : R_L, R_H, C_{th}

$$R_L = \frac{T - T_L}{q_L}$$

$$C_{th} = \frac{q_{net}\, dt}{dT} = \frac{(q_H - q_L)\, dt}{dT}$$

* about R_{th} :

$$R = \frac{\Delta T}{q} \quad , \quad q = -KA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Conduction هدایت : $R_{th} = \dfrac{\Delta x}{KA}$

$$q = hA\Delta T$$

Convection جابجایی : $R_{th} = \dfrac{1}{hA}$

Rediation تشعشع : $R_{th} = \dfrac{1}{\varepsilon A \sigma (T + T_\infty)(T^2 + T_\infty^2)}$

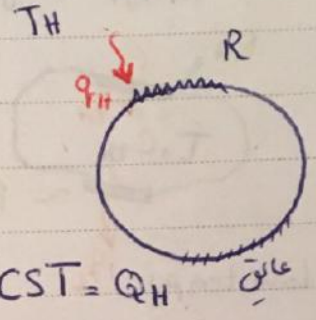
$$q = \varepsilon \sigma A (T^4 - T_\infty^4) = \varepsilon \sigma A \overbrace{(T - T_\infty)}^{\Delta T}(T + T_\infty)(T^2 + T_\infty^2)$$

✓ جلسه بیست و دوم

مثال: در حالت خاص:

$$R = \frac{\Delta T}{q} = \frac{T_H - T}{q_H} \longrightarrow$$

$$T_H - T = R\,Q_H$$



حذف Q_H

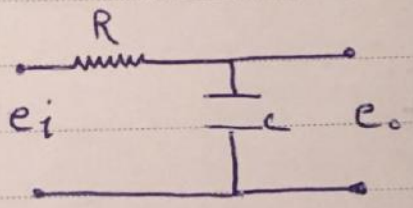
$$C_{th} = \frac{q_{net}\,dt}{dT} = \frac{(q_H - 0)\,dt}{dT} \xrightarrow{\mathcal{L}} CST = Q_H$$

$$\frac{T}{T_H} = \frac{1}{RCS + 1}$$

تابع تبدیل مرتبه اول — ثابت زمانی مخزن حرارتی

$R \to \infty$ ← $q \simeq 0$ عایق حرارتی

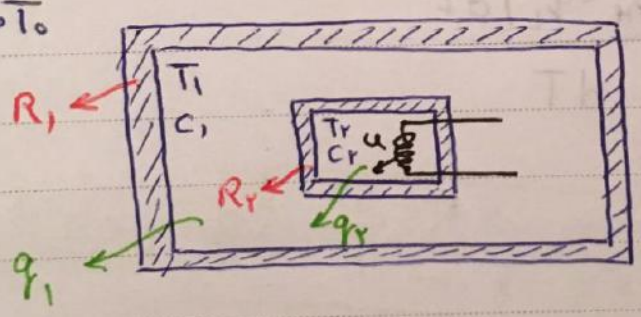
مشابه:



$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{RSC+1}$$

مثال:

داخل اتاق یک کوره (گل خانه) داریم.



دبی حرارتی u توسط المان هیتر در اتاق ۲ ایجاد می‌شود.

هدف: $\frac{T_{1(s)}}{U_{(s)}} = ?$

R_1, R_2, C_1, C_2 are given

۱) $R_1 = \frac{\Delta T}{q_r} = \frac{T_1 - T_0}{q_1}$

متغیرها: $T_1, T_2, q_1, q_2, T_0, u$

۲) $R_2 = \frac{\Delta T}{q_r} = \frac{T_2 - T_1}{q_2}$

Eqs: ۴

۳) $C_1 = \frac{q_{net}\, dt}{dT_1} = \frac{(q_2 - q_1)\, dt}{dT_1}$

disturbance T_0

۴) $C_2 = \frac{q_{net}\, dt}{dT_2} = \frac{(u - q_2)\, dt}{dT_2}$

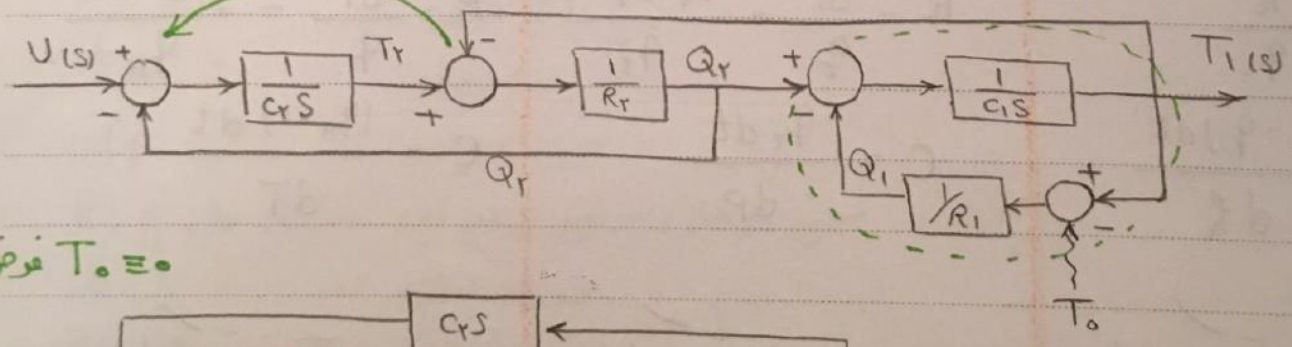
(۱) $R_1 Q_1 = T_1 - T_0$

(۲) $R_2 Q_2 = T_2 - T_1$

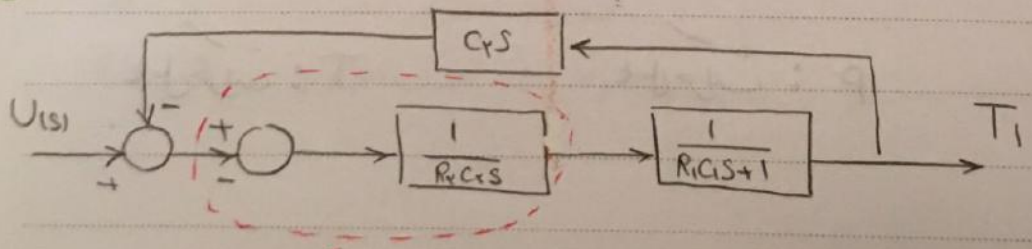
(۳) $C_1 S T_1 = Q_2 - Q_1$

(۴) $C_2 S T_2 = U - Q_2$

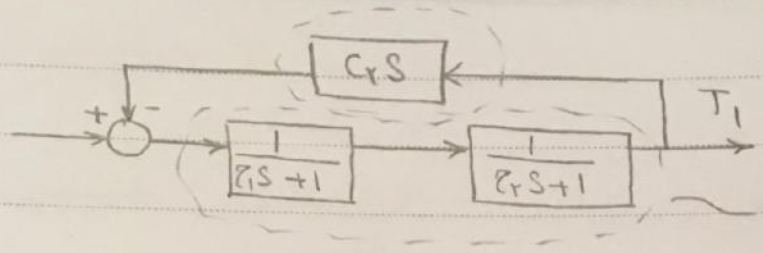
$$\frac{\frac{1}{C_1 S}}{1 + \frac{1}{R_1 C_1 S}} = \frac{1}{R_1 C_1 S + 1}$$



فرض $T_0 \equiv 0$



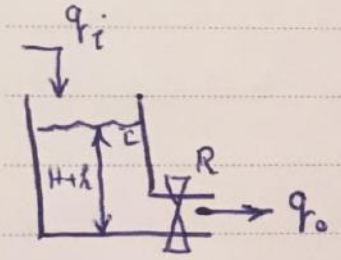
$$\frac{\frac{1}{\tau_2 S}}{1 + \frac{1}{\tau_2 S}} = \frac{1}{\tau_2 S + 1}$$



$$\frac{T_1}{U} = \frac{G}{1+GH}$$

خودتان $\frac{T_1(s)}{T_0(s)} = ?$ را تعیین کنید.

مقایسه مختصر سیالات، نیوماتیک، حرارت

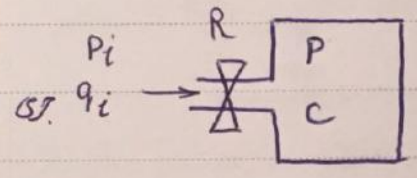


$$\frac{Q_o}{Q_i} = \frac{1}{RCS+1}$$

$$R = \frac{h}{q_o}$$

$$C = \frac{(q_i - q_o)dt}{dh}$$

عامل حرکت : h

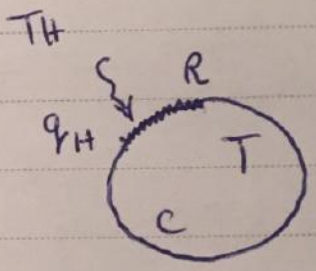


$$\frac{P}{P_i} = \frac{1}{RCS+1}$$

$$R = \frac{\Delta P}{q} = \frac{P_i - P}{q_i}$$

$$C = \frac{q_i\,dt}{dP}$$

عامل حرکت : P



$$\frac{T}{T_H} = \frac{1}{RCS+1}$$

$$R = \frac{\Delta T}{q} = \frac{T_H - T}{q_H}$$

$$C = \frac{(q_H - 0)\,dt}{dT}$$

عامل حرکت : T

Subject
Date

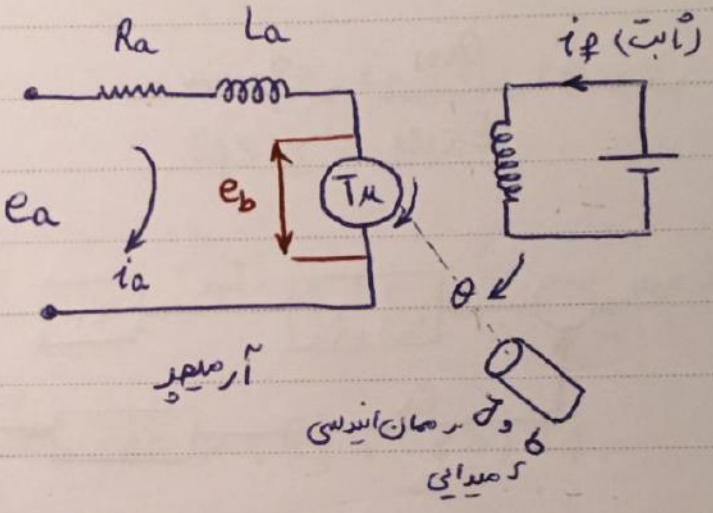
DC Motor :

1) Armature Control 2) Field Control

Armature Control

مدار میان

هدف : $\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = ?$



R_a	:	مقاومت آرمیچر
i_a	:	جریان آرمیچر
L_a	:	سلف آرمیچر
e_a	:	ولتاژ محرک
T_M	:	گشتاور موتور
i_f	:	جریان فیلد
K, J, b	:	سختی و رهمان اینرسی و میرایی
θ	:	دوران بار
e_b	:	ولتاژ ضد محرک موتور

روابط : از درس مداری توان نشان داد

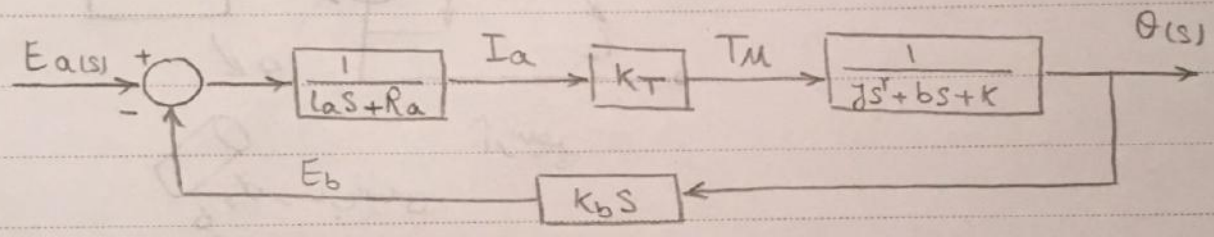
۱) $T_M = K_T i_a$

۲) $e_b = K_b \dot{\theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} E_b = K_b S \theta$ در موتور $\dot{\theta} = W$

۳) $e_a = e_b + R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt}$ سایر ثابت ها K_b ، K_T داده شده اند.

۴) $T_M = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + K\theta \xrightarrow{\mathcal{L}} T_M = (JS^2 + bS + K)\theta$ مکانیکی

هدف : $\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = ?$



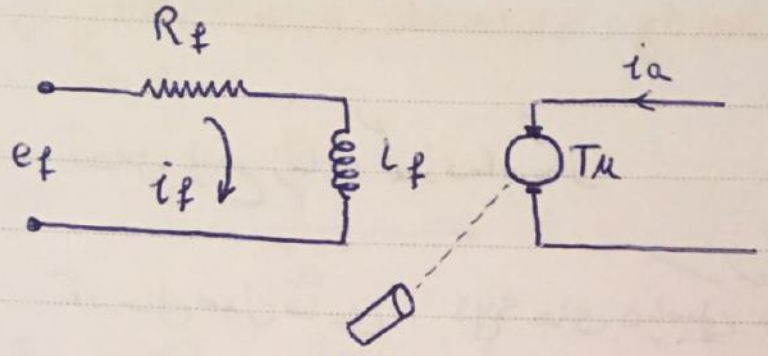
$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K_T}{(L_aS+R_a)(JS^2+bS+K)}}{1 + \text{بالایی} \times K_bS} =$$

$$= \frac{K_T}{(L_aS+R_a)(JS^2+bS+K)+K_bK_TS}$$

تابع تبدیل مرتبه سوم

Field Control

مدار ساده‌تر
کاربرد کمتر نسبت به arm. cont.



هدف: $\dfrac{\theta(s)}{E_f(s)} = ?$

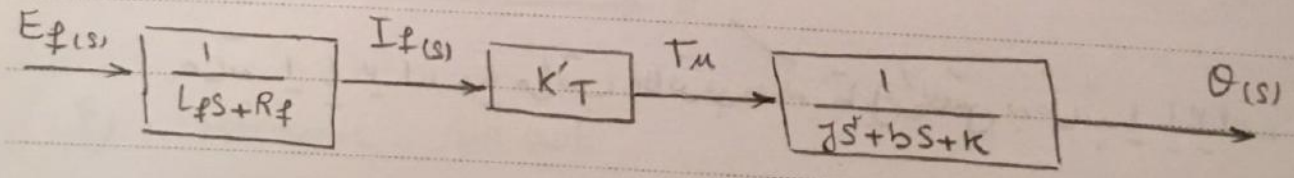
vars: θ, i_f, T_M, e_f
Eqs 3

اندرس مدار:

elec ۱) $T_M = K'_T i_f$

elec ۲) $e_f = R_f i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} E_f = (R_f + L_f S) I_f$

mech ۳) $T_M = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta \xrightarrow{\mathcal{L}} T_M = (JS^2 + bS + k)\theta$



$$\frac{\theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K'_T}{(L_f S + R_f)(JS^2 + bS + k)}$$

تابع تبدیل مرتبه سوم

✓ جلسه بیست و سوم

Chap 5: Transient and steady state Response Analysic

تحلیل پاسخ زمانی گذرا و ماندگار

تا به حال مدل سازی sys های دینامیکی گوناگونی بررسی شد.

حال هدف بررسی پاسخ این sys ها به ورودی های مرجع شناخته شده است.

خوب ✓

بد

؟

طراحی کنترلر و بهبود پاسخ

در این فصل، رفتار سیستم های مرتبه اول و دوم به ورودی های مرجع بررسی می شود.

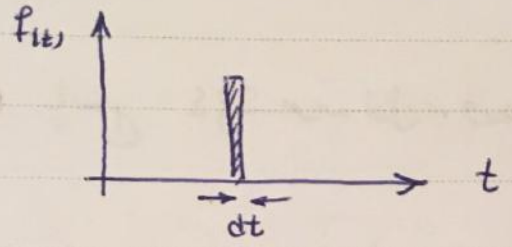
به دلیل این که بسیاری از sys های موجود در طبیعت و صنعت

مرتبه ۱ یا ۲ اند و یا مراتب بالاتر بوده که قابل کاهش به مرتبه ۱ یا ۲ اند.

تحلیل پاسخ مسائل این فصل، ابزار مؤثری در شناسایی سیستم است.

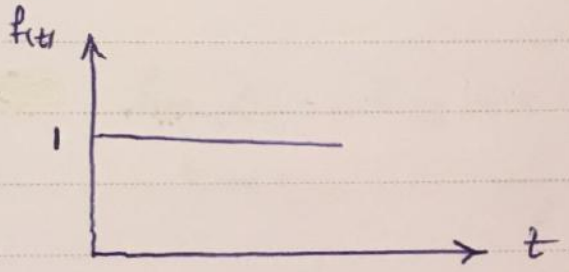
Reference Input ورودی های مرجع

۱) Iro Pulse $\delta(t)$ ✗



ورودی قابل توجه در زمان کم

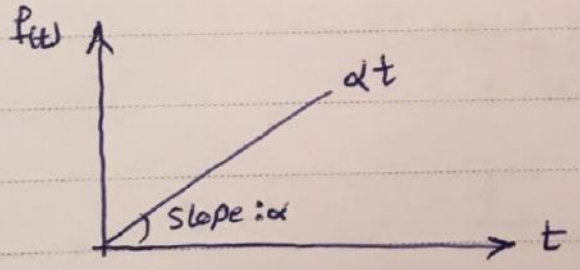
۲) Step $1(t)$ پله واحد ✓



کاربرد زیاد

فرمان ناگهانی

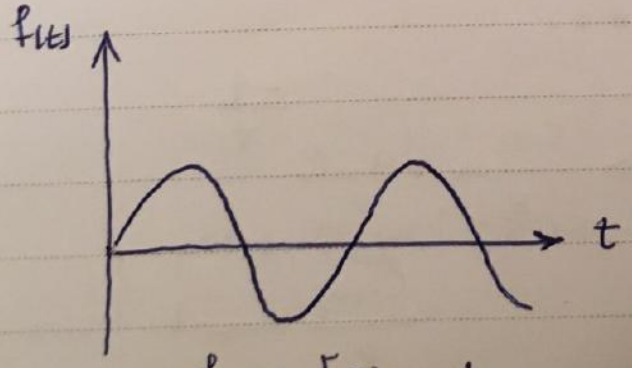
۳) Ramp αt شیب ✓



کاربرد کمتر

فرمان تدریجی

۴) Harmonic $\sin wt$



$f(t) = F \sin wt$

فصل ۸ کنترل به اندازه کافی بحث می شود.

* در ادامه پاسخ sys { مرتبه اول / مرتبه دوم } به ورودی های { پله / شیب } بررسی می‌شود.

مثال ۱ پاسخ sys مرتبه اول به ورودی پله

$$\begin{cases} C(t) = ? \\ r(t) = 1 \end{cases}$$

فرم استاندارد $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{K}{TS+1}$ (K: gain ، T: ثابت زمانی)

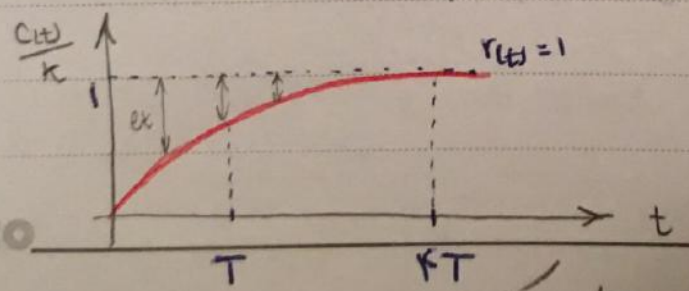
پله: $r(t) = 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} R(s) = \dfrac{1}{s}$

$$C(s) = \frac{1}{s}\,\frac{K}{TS+1} \xrightarrow[\text{فصل ۲}]{\mathcal{L}^{-1}} \frac{C(s)}{K} = \frac{1}{s}\,\frac{1/T}{S+\frac{1}{T}}$$

$$\frac{C(s)}{K} = \frac{a}{s} + \frac{b}{S+1/T}$$ (متحد قرار دهید)

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{S\to 0} S.\left(\dfrac{C(s)}{K}\right) = 1 \\ b = \lim\limits_{S\to \frac{1}{T}} \left(S+\dfrac{1}{T}\right)\left(\dfrac{C(s)}{K}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{C(s)}{K} = \frac{1}{s} - \frac{1}{S+\frac{1}{T}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{C(s)}{K} = 1 - e^{\frac{-t}{T}}$$



$$\frac{C(t\to\infty)}{K} \longrightarrow 1$$

$C_{ss} = 1$ ← پاسخ ماندگار

* مماس بر مبدأ $r(t) = 1$ را در $t = T$ قطع می‌کند. *

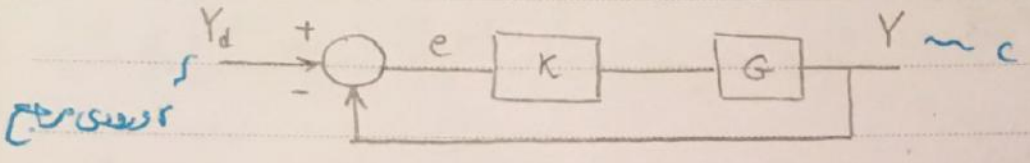
بعد از ۴ ثابت زمانی، خروجی ورودی را دنبال می‌کند.

راه اول یافتن e_{ss}

خطای ماندگار = صفر $(E_{ss} = 0)$

① خطا $e(t) = |c(t) - r(t)| = |1 - e^{-t/T} - 1|$

فصل اول



$$\lim_{t \to \infty} e(t) = e_{ss} = 0$$

خطای ماندگار steady state

② راه دوم یافتن e_{ss} :

حال اگر یافتن $c(t)$ بسیار دشوار بود. مثلاً :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{s^9 + 5s^8 + \dots} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t) = ?$$

دشوار

... استفاده از قضیه مقدار نهایی است. ...

(در صفحه بعدی اول به قضیه Final value پرداخته سپس ادامه می‌دهیم.)

Subject
Date

Final Value Theorem:

$$f_{ss} = f(t\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

اگر دشوار بود!

به شرطی که تمام قطب های $sF(s)$ سمت چپ صفحه s باشد.

مثال ۱

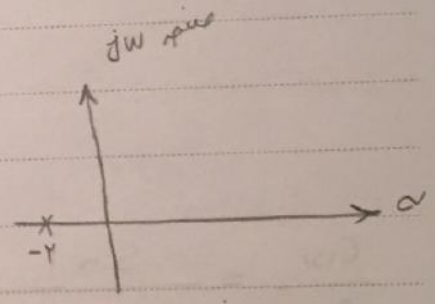
$$f(t) = 1 - e^{-2t}$$

① $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$ ✓

② $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} = \frac{2}{s(s+2)}$

$\lim_{s\to 0} sF(s) = \frac{2}{s+2} = 1$

قطب های $sF(s)$: $\{-2\}$



مثال ۱

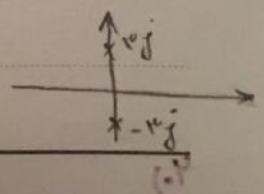
$$f(t) = \sin 3t$$

① $\lim_{t\to\infty} f(t) = -1 < \text{نوسان دار} < 1$ ندارد

② $\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{3}{s^2+9} = 0$ ✗

علت: قطب های $sF(s) = \{\pm 3j\}$ روی محور موهومی $\alpha = 0$ در حالی که باید $\alpha < 0$ باشد.

$s = \alpha \pm jw$



(آخر فصل ۲ چند مثال حل شده چک کنید خودتان)

Subject
Date

ادامه‌ی بحث برای ورودی پله

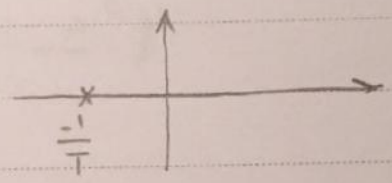
② بررسی اعمال final value در مساله کنونی :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{TS+1}$$

$$(*)\ \frac{C(s)}{K(s)} = \frac{R(s)}{TS+1} \quad , \quad E(s) = \frac{C(s)}{K} - R(s) = R(s)\left[\frac{1}{TS+1} - 1\right]$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{TS}{TS+1} = 0 \checkmark$$

$\left\{\frac{-1}{T}\right\} = sE(s)$ قطب های



$$|E(s)| = \underbrace{R(s)}_{1/s}\frac{TS}{TS+1}$$

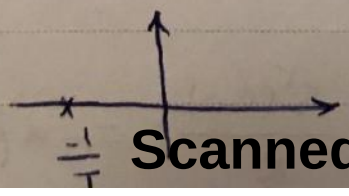
③ راه سوم یافتن e_{ss} :

چیز جدیدی نیست . یک جور هایی همان ۲ است.

$$e_{ss} = |\underbrace{c_{ss}}_{1} - \underbrace{r_{ss}}_{1}| = 0 \checkmark$$

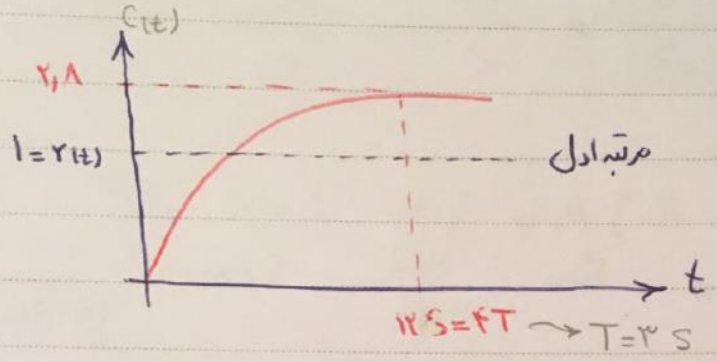
$$\frac{c_{ss}}{K} = \lim_{s\to 0} s\frac{C(s)}{K} \overset{(*)}{=} \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1/s}{TS+1} = 1$$

$\frac{sC(s)}{K}$ قطب های



System Indentification

از دیدگاه شناسایی سیستم



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{۲,۸}{۳s+۱} \rightsquigarrow K$$

✓ جلسه بیست و چهارم

مثال) پاسخ مرتبه اول به پله :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{۱}{\tau s+۱} \quad , \quad r(t) = \alpha t \longrightarrow r(s) = \frac{\alpha}{s^۲}$$

$$\frac{C(s)}{K} = \frac{\alpha}{s^۲} + \frac{۱}{\tau s+۱} = \frac{\alpha}{s^۲} \frac{\frac{۱}{\tau}}{s+\frac{۱}{\tau}} =$$

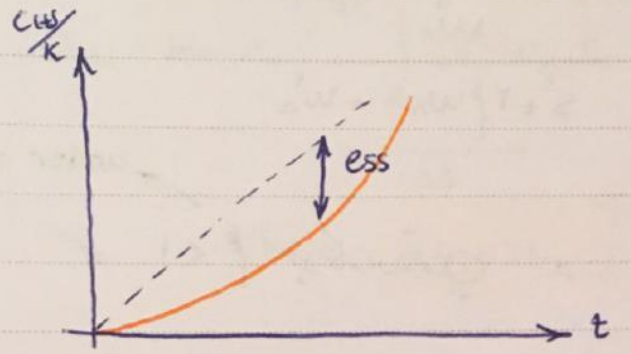
$$= \frac{a}{s^۲} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s+۱/\tau}$$

$$a = \lim_{s\to ۰} s^۲ \frac{C(s)}{K} = \alpha \qquad c = \lim_{s\to ۱/\tau} (s+۱/\tau)\frac{C(s)}{K} = \alpha\tau$$

$$b = \lim_{s\to ۰} \frac{d}{ds}\left(\frac{s^۲(C(s))}{K}\right) = -\alpha\tau$$

$$\frac{C(s)}{K} = \frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha\tau}{s} + \frac{\alpha\tau}{s+1/\tau} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\frac{C(t)}{K} = \alpha t - \alpha\tau + \alpha\tau e^{\frac{-t}{\tau}}$$



خطا $e(t) = \left| \frac{C(t)}{K} - r(t) \right| = \alpha\tau\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

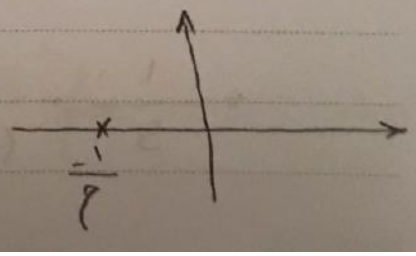
$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \alpha\tau \neq 0$$

خروجی، ورودی مرجع را دنبال می‌کند اما با خطای ماندگار. (جهت صفر کردن خطا ← کنترلر)

Alternative for $e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s\left|\frac{C(s)}{K} - R(s)\right| =$

$$= \lim_{s \to 0} s\left|\frac{R(s)}{\tau s+1} - R(s)\right|$$

قطب‌های $sE(s)$ $= \lim s \frac{\alpha}{s^2}\left|\frac{\tau s}{\tau s+1}\right| = \alpha\tau$



پاسخ سیستم مرتبه دوم به پله واحد (مهم) :

مثال ۲) $r(t) = 1(t)$, استاندارد $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

$$R(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow C(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^2}{\underbrace{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}_{\Delta<0}} = \text{ادامه}$$

under damped

✓ $\xi<1$ پرکاربردترین و $(\xi=1)$ و $(\xi>1)$ → در کتاب بعدیه شود.

$$\text{ادامه} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\xi^2)} \Longrightarrow \omega_n^2 \equiv a(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2) + (bs+c)s$$

مخرج مشترک + منفرد

$s^2: a+b=0 \longrightarrow b=-1$

$s^1: 2\xi\omega_n a + c = 0 \longrightarrow c = -2\xi\omega_n$

$s^0: \omega_n^2 = a\omega_n^2 \longrightarrow a=1$ $\quad (\omega_n \to \omega)$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2\xi\omega}{(s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s+\xi\omega}{(s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2)} - \frac{\xi\omega}{\cdots}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s+\xi\omega}{(s+\xi\omega)^2+\omega^2(1-\xi^2)} - \frac{\xi\omega\sqrt{1-\xi^2}}{\text{همین..}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C(t) = 1 - e^{-\xi w t} \cos w\sqrt{1-\xi^2}\, t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w t} \sin w_n \sqrt{1-\xi^2}\, t$$

فرکانس طبیعی میرا $w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$

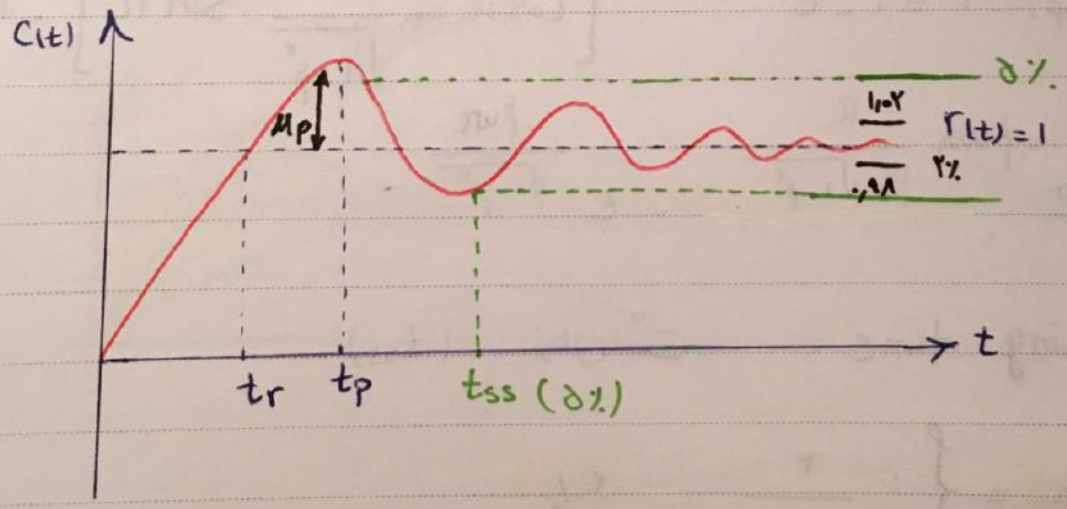
$$C(t) = 1 - e^{-\xi w_n t}\left[\cos w_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin w_d t\right] \quad (*)$$

where $w_d = w_n \sqrt{1-\xi^2}$

$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Time Specifications : مشخصات زمانی پاسخ :

در عمل ، بسیاری از اهداف کنترلی در قالب مشخصات زمانی بیان می شوند.



1 Rise time زمان اوج

$$C(t) = 1 \longrightarrow t_r = \frac{\pi - \beta}{w_d} \quad \text{که} \quad \beta = \cos^{-1}\xi$$

اولین جایی که خروجی به ورودی می رسد.

۲ Peak time زمان قله (t_p)

$$\frac{dC(t)}{dt} = 0 \xrightarrow{\text{اولین جا}} t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

۳ over shout فراجهش M_p

$$M_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \xrightarrow{\text{در این حالت کلی}} M_p = \frac{C(t_p) - 1}{1}$$

$$\longrightarrow M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

جایگذاری در (*) :

$$M_p = C(t_p) - 1 = \cancel{1} - e^{-\xi\omega_n \frac{\pi}{\omega_d}}\left[\cos\pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\pi\right] - \cancel{1}$$

$$= e^{-\xi\cancel{\omega_n}\frac{\pi}{\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

۴ Settling time زمان نشست (t_{ss})

$$t_{ss}\ \text{تقریبی} = \begin{cases} \dfrac{4}{\xi\omega_n} & 2\% \\[2ex] \dfrac{3}{\xi\omega_n} & 5\% \end{cases}$$

✓ جلسه بیست و پنجم

اثر میرایی ξ :

$\xi \uparrow \longrightarrow M_p \downarrow$ اما $t_r, t_{ss}, t_p \nearrow$

(+) بهتر (-) کاهش سرعت پاسخ (کند، تنبل)

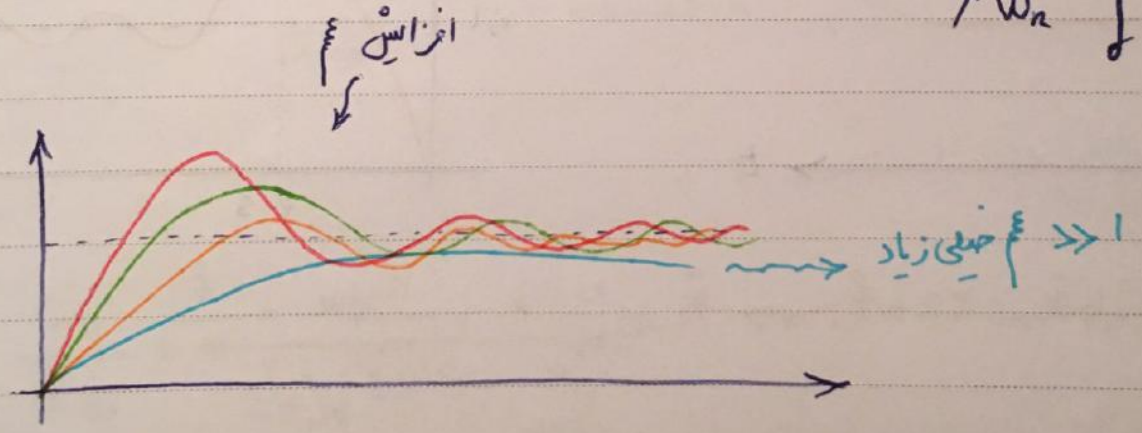
اثر W_n :

$W_n \uparrow \longrightarrow M_p$ اما $t_r, t_{ss}, t_p \downarrow$

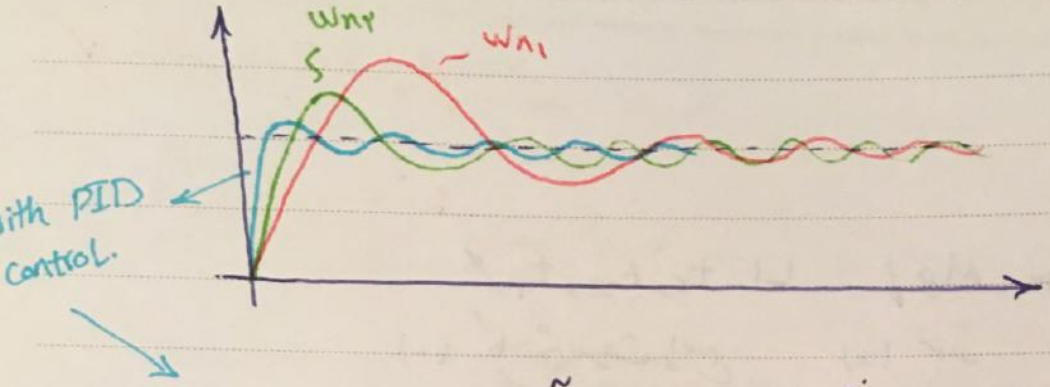
بی تغییر (+) افزایش سرعت پاسخ

(-) اما هزینه کنترل زیاد

* پس اگر $\xi \uparrow$ ، $W_n \uparrow$ هم سرعت خوب می‌شود هم M_p کاهش می‌یابد.



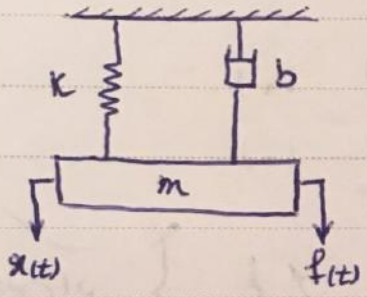
سیستم مرتبه دوم با میرایی خیلی زیاد رفتار مشابه مرتبه اول دارد.



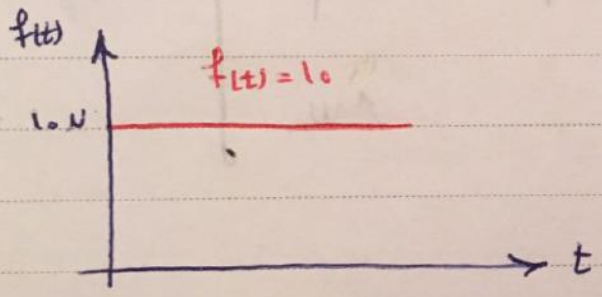
$w_{n2} > w_{n1}$

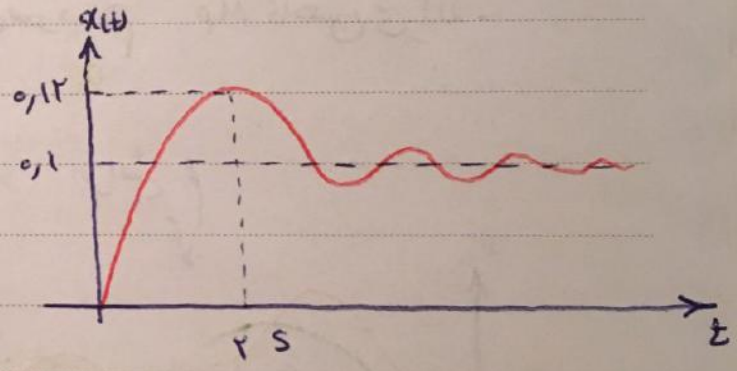
* با تغییر ورودی plant ، رفتار خروجی $c(t)$ آن را بهبود می‌دهد.

مثال ۳)



$m, b, K = ?$





$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \longrightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2\xi w_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{w_n^2}x = \frac{f}{m}$$

① $t_p = 2 = \dfrac{\pi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}} \xrightarrow{\xi = 0.45} w_n$ ✓

② $M_p = \dfrac{0.12 - 0.1}{0.1} = 0.2 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \longrightarrow \xi = 0.45$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \xrightarrow{K=100} m$$

$$2\xi\omega_n = \frac{b}{m} \longrightarrow b$$

از کجا آوردی؟

$$K \overset{0.1}{x_{ss}} = \overset{10}{f} \longrightarrow K = 100 \ N/m$$

راه دوم:

$$x_{ss} = 0.1 \qquad x_{ss} = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+bs+K}$$

$$f(t) = 10 \longrightarrow F(s) = \frac{10}{s}$$

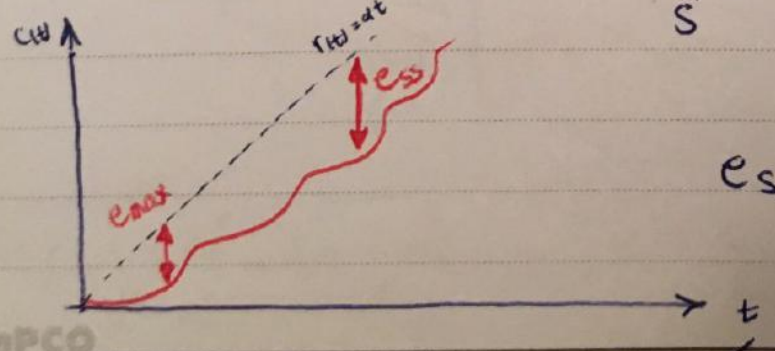
$$\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{10}{s}\,\frac{1}{ms^2+bs+K} = \frac{10}{K}$$

مثال ۴) پاسخ سیستم مرتبه ۲ به شیب:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

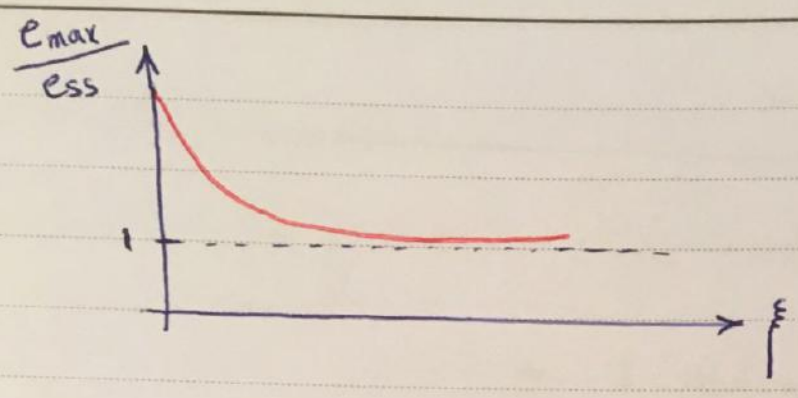
* تعیین کرهاو یافتن $c(t)$. (HW) *

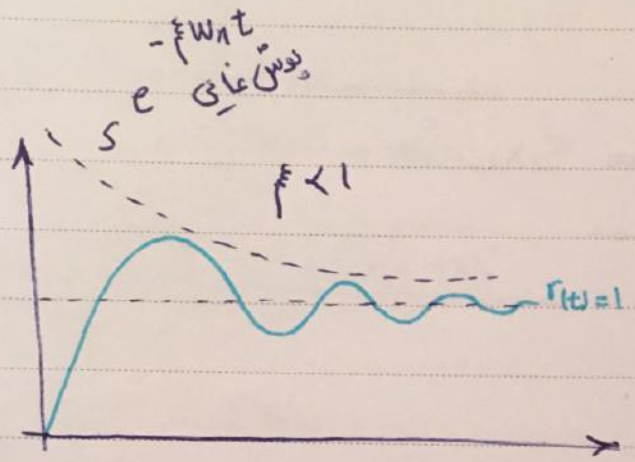
$$r(t) = \alpha t \longrightarrow R(s) = \frac{\alpha}{s^2}$$



$$e_{ss} = \frac{2\xi\alpha}{\omega_n}$$

سیستم مرتبه دوم ورودی شیب را دنبال می کند اما با خطای ماندگار.





▲ مانند از مثال ۳ : مرتبه دوم به پله

برای $\xi<1$ کتاب نگاه شود.

$\xi>1$:

$$\frac{C}{R}=\frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}=\frac{a}{s+s_1}+\frac{b}{s+s_2}=ae^{-s_1 t}+be^{-s_2 t}$$

پاسخ ساده‌تر

✓ جلسه بیست و نهم

محل قطب های سیستم مرتبه دوم :

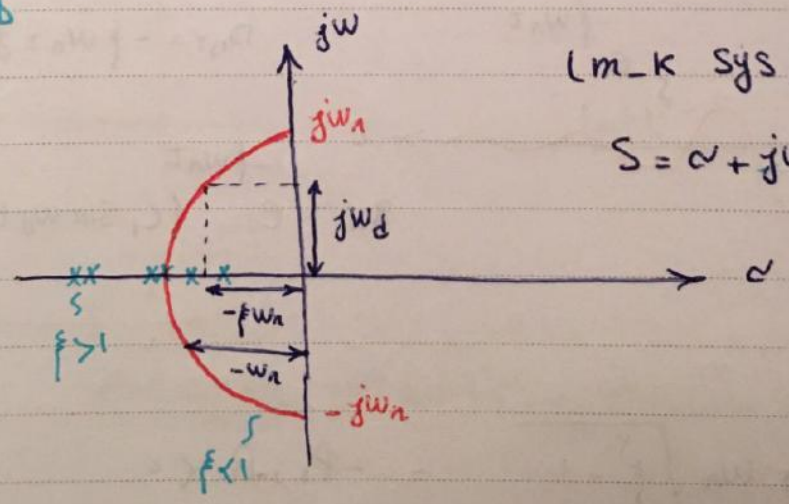
فرم استاندارد تابع تبدیل حلقه بسته

$$\frac{C}{R} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm 2\sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (*)$$

قطب های حلقه بسته مرتبه دوم

$$\begin{cases} \xi = 0 \longrightarrow \pm j\omega_n \\ \xi < 1 \longrightarrow s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_d} \\ \xi = 1 \longrightarrow s_{1,2} = -\xi\omega_n = -\omega_n \\ \xi > 1 \longrightarrow (*) \end{cases}$$



(m_k sys)

$s = \alpha + j\omega$

مرتبه اول :

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

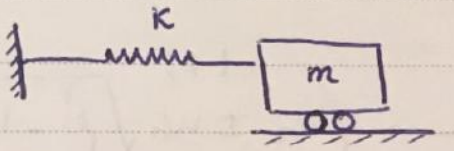
for $\xi < 1$: $Re^2 + Im^2 = \omega_n^2$

دایره به مرکز (0,0) و شعاع ω_n

محل قطب های تابع تبدیل تعیین کننده شکل پاسخ است.

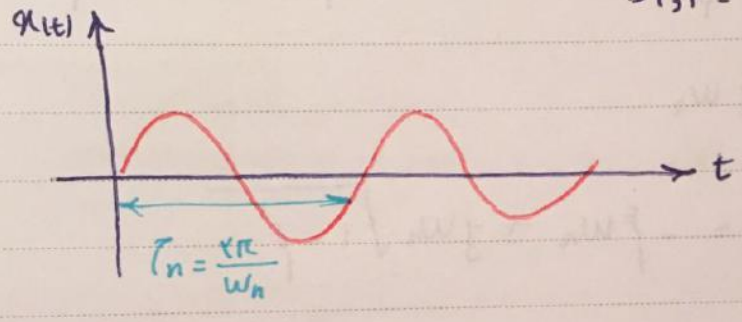
مثلاً $\xi = 0$ (میرایی = 0)

m-k sys :

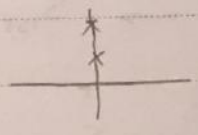


$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow mD^2 + k = 0$

$D_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j\omega_n$



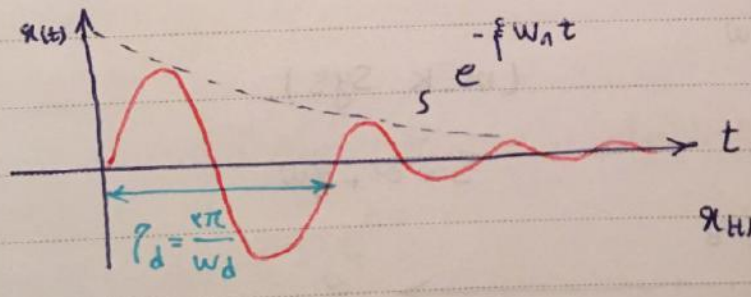
$x(t) = C_1 \sin\omega_n t + C_2 \cos\omega_n t$



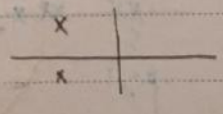
$\xi < 1$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \xrightarrow{\div c} \ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \longrightarrow$

$D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$



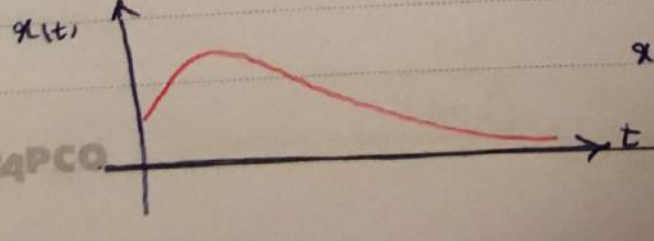
$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}(C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_d t)$

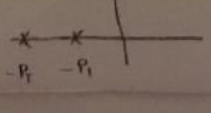


$\xi > 1$

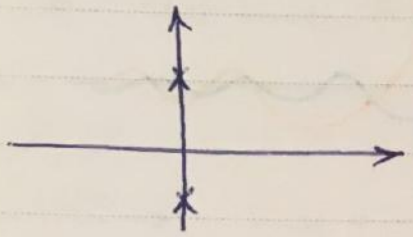
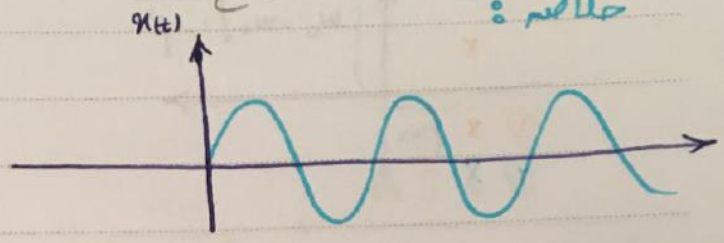
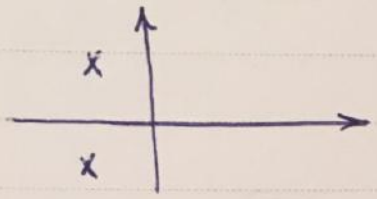
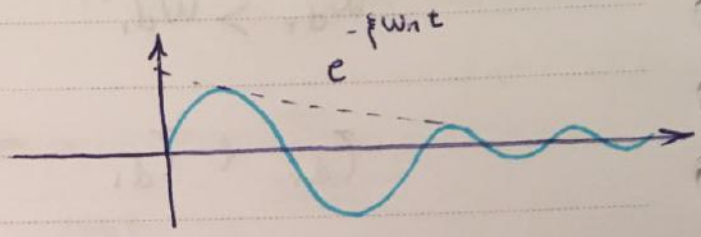
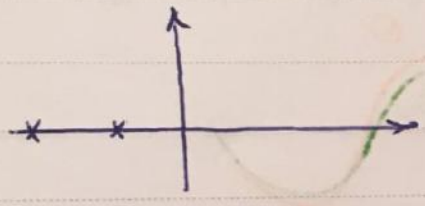
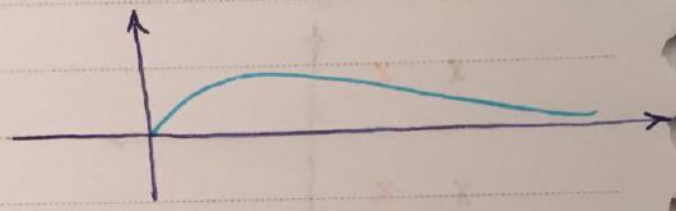
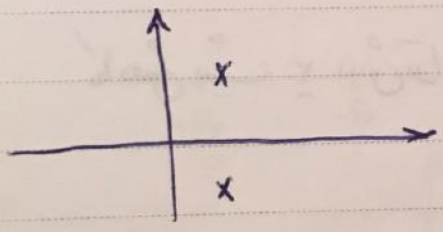
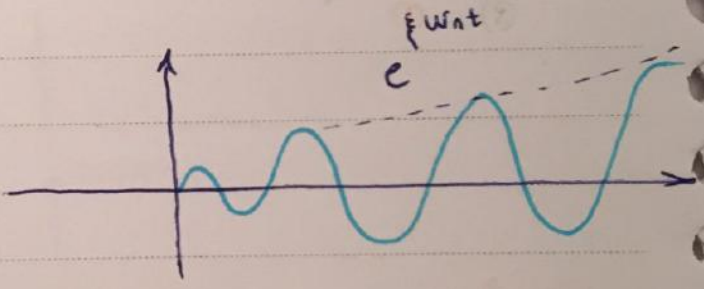
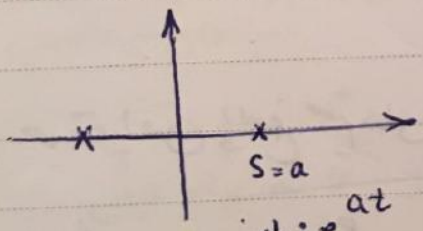
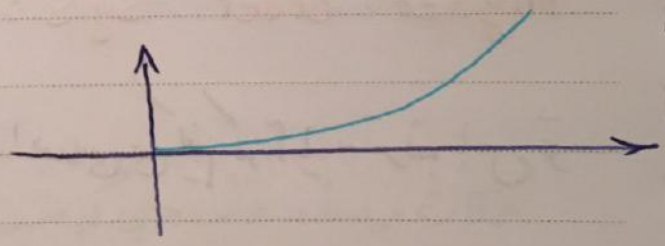
$D_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -P_1, -P_2 < 0$

$x(t) = C_1 e^{\overbrace{(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1})}^{-P_2}t} + C_2 e^{\overbrace{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1})}^{-P_1}t}$



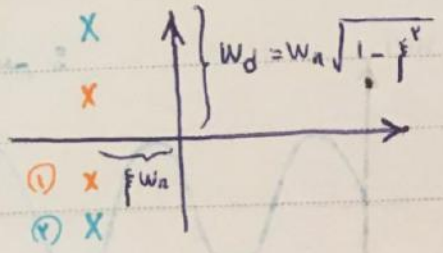


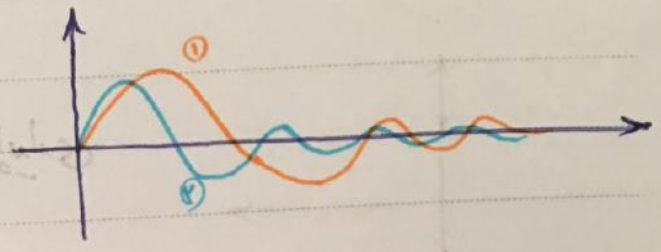
خلاصه :

قطب ها		پاسخ
	مرز پایداری	
	پایدار	
	پایدار	
	ناپایدار	
 پاسخ : e^{at}	ناپایدار	

وجود یک قطب با قسمت حقیقی مثبت کافی است تا یک سیستم دینامیک از هر مرتبه ای را ناپایدار کند.

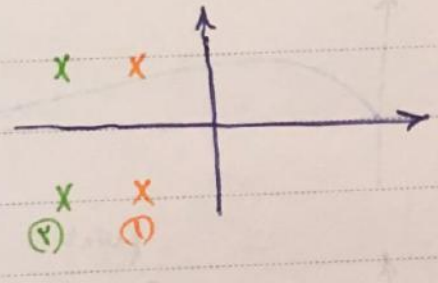
Date

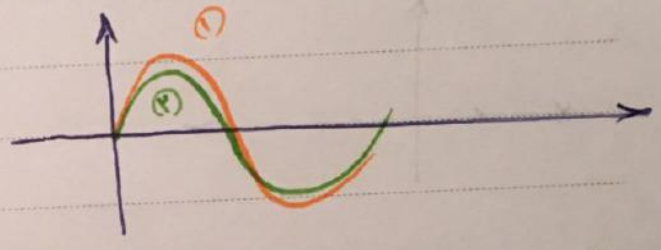




$$w_{d_2} > w_{d_1}$$

$$\tau_{d_2} < \tau_{d_1}$$





کاهش شیب ۲ بیش‌تر از ۱ است.

Higher order Sys:

جهت یافتن پاسخ سیستم‌های دینامیکی مرتبه بالا، ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا به مرتبه پایین‌تر قابل کاهش است؟

مثال: $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{s^5 + s^4 + \cdots}{s^7 + 5s^6 + 4s^5 + \cdots} \rightarrow$ ۷ قطب داریم

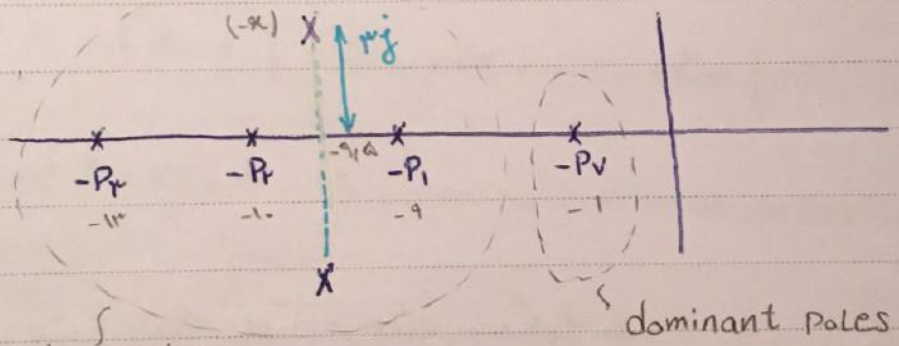
نفکیک کسرها

پله $r(t) \longrightarrow R(s) = \frac{1}{s}$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک کسرها}} C(s) = \frac{\alpha_1}{s+P_1} + \frac{\alpha_2}{s+P_2} + \frac{\alpha_3}{(s+P_4)^2} + \frac{\beta_1 s + \gamma_1}{(s^2+2\xi w_n s + w_n^2)} + \frac{\alpha_4}{s+P_7}$$

$\xi < 1$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} c(t) = \alpha_1 e^{-P_1 t} + \alpha_2 e^{-P_2 t} + \alpha_3 e^{-P_3 t} + e^{-\xi w_n t}(\lambda_1 \sin w_d t + \lambda_2 \cos w_d t) + \alpha_4 e^{-P_7 t}$$



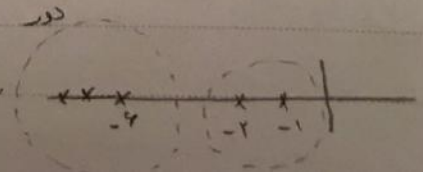
قطب های غیرغالب

dominant poles

قطب های غالب

جملات مربوط به قطب‌هایی که قسمت حقیقی آن‌ها حدود ۶ تا ۵ برابر بیش از قسمت حقیقی قطب‌های نزدیک مبدا باشند، تأثیر چندانی در پاسخ ندارند چرا که زود محو می‌شوند. $e^{-Pt} \xrightarrow{\text{زود}} 0$ چون P بزرگ دارند.

$$\overset{\text{مرز}}{\equiv} \frac{k}{s+P_7} \equiv \frac{k}{(s+1)(s+2)}$$



خلاصه کاربردی بحث:

پاسخ زمانی:

مرتبه ۱ و ۲ به دلیل جملات کم، آسان است. ✓ $\mathcal{L}^{-1}$ ✓

مرتبه ۳ و بالاتر ← می‌توانید وقت بگذارید و $\mathcal{L}^{-1}$ بلدید.

① ممکن است قابل کاهش به مرتبه ۱ و ۲ باشد. (کاهش دهید بعد $\mathcal{L}^{-1}$)

② Matlab

مثلاً برای $\frac{C}{R} = \frac{s^4 + 3s^3 + \cdots}{s^5 + 7s^4 + \cdots}$

بدیله

* امتحان پایان ترم تا آخر خطای ماندگار *

✓ جلسه بیست و هفتم

درباره‌ی خطای ماندگار:

فرم استاندارد تابع تبدیل حلقه باز:

$$GH(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

قطب‌ها Poles : تا $N+n$: $\{\underbrace{-p_1, -p_2, \ldots, -p_n}_{\text{تا } n}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{تا } N}\}$

$N+n$: مرتبه ← sys order

صفرها zeros : تا m : $\{-z_1, -z_2, \ldots, -z_m\}$

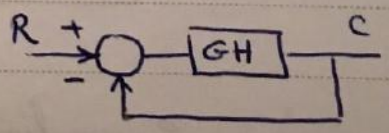
مرتبه نسبی سیستم : $n+N-m$ ← relative order

فرم استاندارد حلقه باز مرتبه ۱ و ۲:

بستری استاندارد

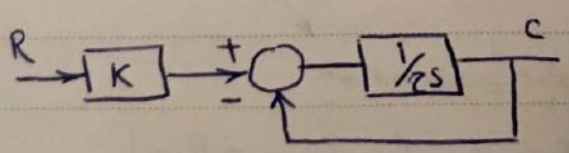
۱) مرتبه یک : $\frac{C}{R} = \frac{K}{1+\tau s}$

فیدبک واحد
unit feedback



فرم استاندارد حلقه باز مرتبه یک

$$GH(s) = \frac{1}{\tau s}$$

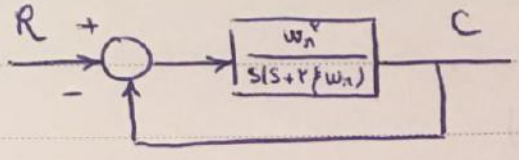


$$= \frac{\frac{1}{\tau s}}{1+\frac{1}{\tau s}} \cdot K = \frac{K}{\tau s+1} \checkmark$$

۲) مرتبه دوم : $\frac{C}{R} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

فرم استاندارد حلقه باز مرتبه دوم

$$GH(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

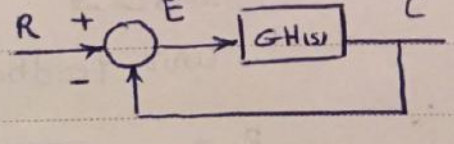


$$\frac{C}{R} = \frac{''}{1+''} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

- sys مرتبه اول، نوع ۱ است. $(N=1)$
- sys مرتبه دوم، نوع ۱ است. $(N=1)$

* در بسیاری مواقع تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم یا داده شده یا براساس حلقه بسته قابل استخراج است.

✓ باز $GH(s)$ is given



خطای ماندگار ② $e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+GH(s)}$ (اثبات در ضمیمه بعد)

که به شرطی که شرایط قضیه final value را داشته باشد

① موارد مربوط به اول فصل

$\lim_{t\to\infty} e(t)$ / $\lim_{s\to 0} sE(s)$ / $\lim_{s\to 0} |C(s) - R(s)|$

اثبات :

$$E(s) = R - C = R - EGH$$

$$E(s) = \frac{R}{1+GH}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1+GH(s)}$$

type / R	ضربه $\delta(t)$	پله $1(t)$	شیب αt	سهمی $\frac{1}{2}\beta t^2$	مرتبه سوم
$N=0$	0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞	∞
$N=1$	0	0	$\frac{\alpha}{K_v}$	∞	∞
$N=2$	0	0	0	$\frac{\beta}{K_a}$	∞
$N=3$	0	0	0	عدد	∞

تمرین ! :

$$\lim_{s \to 0} GH(s) = K_p$$ ثابت خطای موقعیت

* $N=0$ نوع صفر $GH(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$

1) $r = \delta(t)$: $e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s \times 1}{1 \times \frac{(\,)\cdots(\,)}{(\,)\cdots(\,)}} = 0$

$R(s) = 1$

۲) $r(t) = 1(t)$: $e_{ss} = \lim_{s \to 0} \dfrac{s \times 1/s}{1 + \dfrac{(\ )\cdots(\ )}{(\ )\cdots(\ )}} = \dfrac{1}{1+K_p}$

$R(s) = \dfrac{1}{s}$

۳) $r(t) = \alpha t$: $e_{ss} = \lim_{s \to 0} \dfrac{s \times 1/s^2}{1 + \dfrac{(\ )\cdots(\ )}{(\ )\cdots(\ )}} = \dfrac{1}{0+0} = \infty$

$R(s) = \dfrac{\alpha}{s^2}$

۴) به بعد : $e_{ss} = \infty$

تعریف ۲ :

$\lim_{s \to 0} sGH(s) = K_v$ ثابت خطای سرعت

* $N=1$ نوع ۱ $GH(s) = \dfrac{(\ )\cdots(\ )}{s(\ )\cdots(\ )}$

۱) $r(t) = \delta(t)$: $R(s) = 1$ $e_{ss} = \lim_{s \to 0} \dfrac{s \cdot 1}{1 + \dfrac{(\ )\cdots(\ )}{s(\ )\cdots(\ )}} = 0$

۲) $r(t) = 1(t)$: $R(s) = \dfrac{1}{s}$ $e_{ss} = \lim \dfrac{s \cdot 1/s}{1 + \dfrac{(\ )\cdots(\ )}{s(\ )\cdots(\ )}} = \dfrac{1}{1} = 0$

۳) $r(t) = \alpha t$: $R(s) = \dfrac{\alpha}{s^2}$ $e_{ss} = \lim \dfrac{s \cdot \alpha/s^2}{1 + \dfrac{(\ )\cdots(\ )}{s(\ )\cdots(\ )}} = \dfrac{\alpha}{s + K_v} = \dfrac{\alpha}{K_v}$

۴) $r(t) = \frac{1}{2}\beta t^2$: $R(s) = \dfrac{\beta}{s^3}$ $e_{ss} = \infty$

تعریف ۳ : ثابت خطای شتاب $\lim_{s\to 0} s^2 GH(s) = K_a$

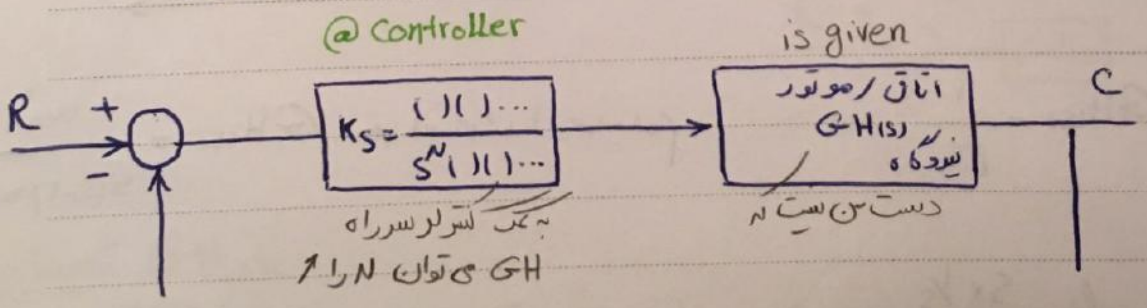
* $N = 2$ نوع ۲ $GH(s) = \dfrac{(\ )\cdots(\ )}{s^2(\ )\cdots(\ )}$

۱) $r(t) = \delta(t)$: $R(s) = 1$ $e_{ss} = \lim \dfrac{s \times 1}{1 + \dfrac{(\ )\cdots(\ )}{s^2(\ )\cdots(\ )}} = 0$

۲,۳) Similarly for $r(t) = 1(t)$, $r(t) = \alpha t$ we have $e_{ss} = 0$

۴) $r(t) = \frac{1}{2}\beta t^2$: $R(s) = \dfrac{\beta}{s^3}$ $e_{ss} = \lim \dfrac{s \cdot \beta/s^3}{1 + \dfrac{(\ )\cdots(\ )}{s^2(\ )\cdots(\ )}} = \dfrac{\beta}{s^2 + K_a} = \dfrac{\beta}{K_a}$

هرچه نوع سیستم افزایش یابد یا به عبارتی تعداد عوامل انتگرال گیر ($\frac{1}{s}$) افزایش یابد ($N \nearrow$) ، سیستم دارای خطای ماندگار صفر به ورودی های متنوع تری است.



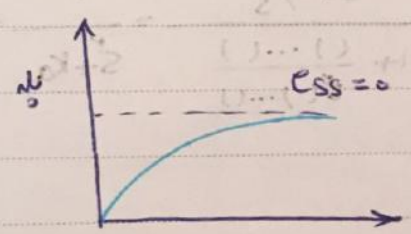
$GH(s)$ جدید $= GH(s)$ قبلی $\times K(s)$ ✓

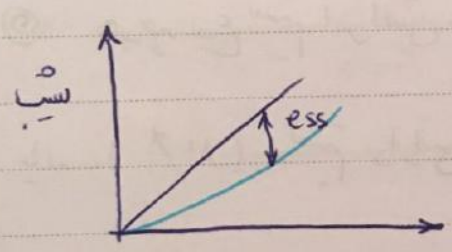
محدودیت افزایش N : ① با افزایش N می توان احتمال از دست دادن پایداری به شدت زیادی شود.

② هزینه بر است.

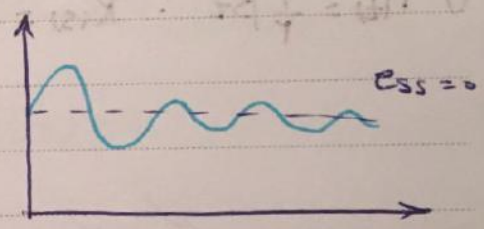
Check Point :

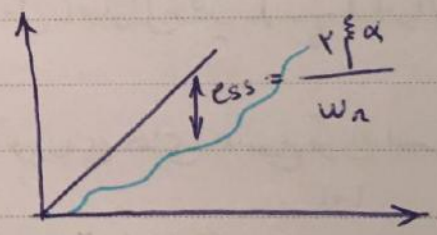
مرتبه اول $N=1$





مرتبه دوم $N=1$





استاندارد باز مرتبه ۱ $GH(s)=\frac{1}{\tau s}$

استاندارد باز مرتبه دوم $GH(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$

مرتبه ۱ به پله $e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\times 1/s}{1+\frac{1}{\tau s}}=0$

مرتبه ۲ به پله $e_{ss}=\lim\frac{s\times 1/s}{1+\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}}=\frac{1}{\infty}=0$

مرتبه ۱ به شیب $e_{ss}=\lim\frac{s\times\frac{\alpha}{s^2}}{1+\frac{1}{\tau s}}=\alpha\tau$

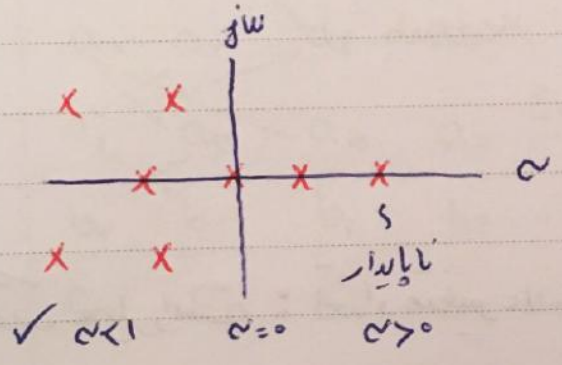
مرتبه ۲ به شیب $e_{ss}=\lim\frac{s\times\frac{\alpha}{s^2}}{1+\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}}=\frac{2\xi\alpha}{\omega_n}$

✓ جلسه بیست و هشتم

⑨ معیار پایداری راست Routh Stability Criterion

هدف : تعیین پایداری تابع تبدیل حلقه بسته به کمک باز

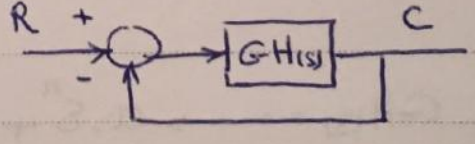
تابع تبدیل حلقه بسته پایدار است اگر همه قطب های آن سمت چپ (و یا نهایتاً روی مرز پایداری $j\omega$) صفحه S باشند.



$Re(Poles) \leq 0$

حاصل ضرب gain رو به جلو در رو به عقب

تابع تبدیل حلقه باز $GH(s) =$



تابع حلقه بسته $\frac{GH(s)}{1+GH(s)}$ → معادله‌ی مشخصه characteristic Eq.

قطب های حلقه بسته = ریشه‌های $1+GH(s) = 0$

شرط پایداری :

قسمت حقیقی ریشه‌های $1+GH_{(s)}=0$ ≤ 0

مثال) پایداری حلقه بسته ؟

$$GH_{(s)} = \frac{s^2+1}{s^4+3s^3+5s^2+2s+1}$$

$1+GH_{(s)}=0 \longrightarrow s^4+3s^3+6s^2+2s+2=0$ معادله مشخصه

یافتن ریشه ها — ماشین حساب / Matlab

roots([1 3 6 2 2]) → ۴ ریشه

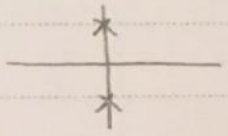
به کمک معیار راست : تعداد متغیر علامت ها در ستون اول جدول راست برابر است با تعداد قطب های سمت راست حلقه بسته

$$1+GH_{(s)}=0 \rightarrow a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

قبل جدول : ۱) اگر حداقل یکی از a_i ها منفی بود و سایرین مثبت، ناپایدار است

۲) اگر حداقل یکی از a_i ها صفر شد، قطب‌هایی روی محور $j\omega$ دارد و یا ممکن است سمت راست هم داشته باشند.

$s^2+1=0 \rightarrow s_{1,2}=\pm j$ (یا مرز است یا ناپایدار)



s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	.....	✓
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	.....	✓
s^{n-2}	b_0	b_1	b_2	b_3	.....	✓
$\vdots$	c_0	c_1	c_2	c_3	.....	✓
s^2						
s^1						
s^0						

$$b_0=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} \qquad b_1=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$$

$$b_2=\frac{a_1a_6-a_0a_7}{a_1} \qquad c_0=\frac{b_0a_3-a_1b_1}{b_0}$$

$$c_1=\frac{b_0a_5-a_1b_2}{b_0} \qquad \ldots$$

مثال ۱)

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	1	5	0
s^1	-6	0	0
s^0	5	0	0

۲ بار تغییر علامت ← ۲ قطب سمت راست

roots([1 2 3 4 5])

مثال ۲)

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

s^3	1	1
s^2	2	2
s	$\cancel{0}$ $\varepsilon>0$	0
s^0	2	پایدار

در صورت وجود صفر در ستون اول :

(۱) $\varepsilon \to 0$: علامت ε همان علامت عدد بالایی است و ادامه دهید.

(۲) ضرب کردن مسئله در یک قطب پایدار مثلاً $s+1$ و تحلیل جدول برای چندجمله‌ای جدید.

اگر پایداری بود ← مسأله پایدار است.

اگر ناپایدار بود ← مسأله ناپایدار است.

(۳) اگر یک ردیف صفر شد از چندجمله‌ای کمکی $P(s)$ ردیف بالا استفاده شود.

مثال مورد (۲)

s^3	1	1	
s^2	2	2	$\to P(s) = 2s^2 + 2 = 0$
s^1	$\cancel{4}$	0	$\downarrow$
s^0	2	پایدار	$\frac{dP(s)}{ds} = 4s$

ریشه‌های $P(s)$ تعدادی از قطب‌های $1+GH(s)=0$ را مشخص می‌کند.

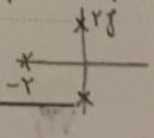
$2s^2 + 2 = 0 \to s^2 + 1 = 0$

$s_{1,2} = \pm j$

$$\begin{array}{l|l} s^3 + 2s^2 + s + 2 & s^2+1 \\ \hline -s^3 - s & s+2 \\ \hline 2s^2 + 2 & \\ -2s^2 - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

۳ قطب دارد ←

$\{\pm j, -2\}$



مثال)

$$S^5 + 2S^4 + 24S^3 + 48S^2 \underbrace{-25S}_{\text{ناپایدار}} - 50 = 0$$

S^5	1	24	-25
S^4	2	48	-50
S^3	$\cancel{4}\ 1$	$\cancel{96}\ 12$	0
S^2	⋮	ادامه دهید	
S^1			
S^0	→ تغییر علامت دارید.		

ردیف صفر →

$$P(s) = 2S^4 + 48S^2 - 50 \quad (*)$$

$$\frac{dP(s)}{dS} = 8S^3 + 96S$$

از (*) → $S^4 + 24S^2 - 25 = 0 \rightarrow (S^2+25)(S^2-1) = 0$

$S_{1,2} = \pm 5j$

$S_{3,4} = \pm 1$

مثال)

حلقه بسته $\dfrac{C}{R} = \dfrac{K}{\underbrace{S(S^2+S+1)(S+2)+K}_{1+GH(s)=0}}$

K را به گونه ای بیابید که سیستم پایدار شود.

$$S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 2S + K = 0 \qquad K > 0$$

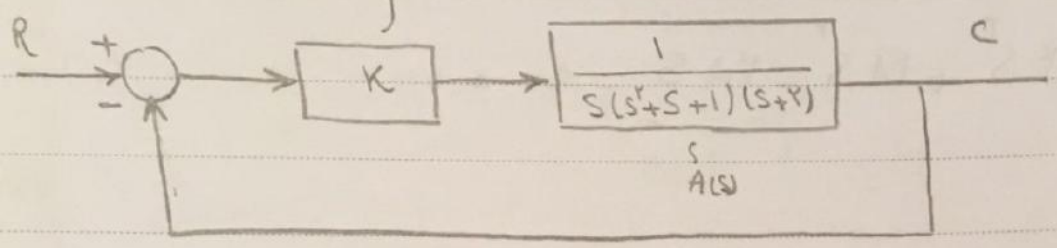
S^4	1	3	K
S^3	3	2	0
S^2	$\frac{7}{3}$	K	0
S^1	$\dfrac{\frac{14}{3} - 3K}{7/3}$	0	0
S^0			

$\rightarrow \frac{14}{3} - 3K > 0 \rightarrow K < \frac{14}{9}$

$0 < K < \frac{14}{9}$ ✓

ubject کنترلر تناوبی P-Cont

ate



$$\frac{C}{R} = \text{مسأله} \checkmark \qquad \frac{\frac{K}{A(s)}}{1+\frac{K}{A(s)}} = \frac{K}{A(s)+K}$$

تعیین محدوده K به کمک Matlab دشوار است. (try and error)