آمار و احتمالات

• تعریف علم آمار: آمار مجموعه‌ای از روش‌ها برای جمع‌آوری و خلاصه کردن داده‌ها و طبقه‌بندی آنها و روش‌ها و تحلیلی برای پیش‌بینی و تعمیم کردن در شرایط مختلف را بیان می‌کند.

• تعریف متغیر: مشخصه‌ای مربوط به یک عنصر که می‌تواند مقدارهای مختلفی را قبول کند، در حالتی که برآمدها مستقیماً به صورت عدد بیان گردد متغیر را کمی می‌نامند و اگر به صورت غیرعددی بیان شود متغیر را کیفی می‌گویند.

• تعریف جامعه: مجموعه عناصر مورد نظر برای بررسی اطلاعات آماری را جامعه می‌گویند.

• تعریف نمونه: بخشی از جامعه تحت بررسی است که می‌توان از آن نتایج مورد نظر برای جامعه استخراج کرد.

انواع علم آمار:

۱- آمار توصیفی: شامل روش‌هایی است که برای خلاصه کردن، دسته‌بندی و رده‌بندی داده‌های موجود استفاده می‌شود و معمولاً در قالب نمودارها و شکل‌های مختلف نگاره‌ای به کار می‌رود.

۲- آمار استنباطی: شامل روش‌هایی است که با استفاده از آنها اطلاعات موجود در نمونه را به کل جامعه تعمیم می‌دهیم.

انواع فراوانی:

۱- فراوانی مطلق (تعداد داده‌ها)

۲- فراوانی نسبی

۳- فراوانی تجمعی

فراوانی: تعداد داده‌هایی که در طبقه (i) قرار می‌گیرد را فراوانی می‌گویند.

فراوانی نسبی: اگر تک تک فراوانی‌های هر دسته را بر کل جامعه تقسیم کنیم فراوانی نسبی به دست می‌آید برابر $\frac{f_i}{N}$ (N حجم)

همواره جمع فراوانی نسبی ۱ می‌شود و فراوانی تجمعی برابر است با مجموع فراوانی رده‌های ... f_i

ادامه ی ... ترتیب ...

مثال)

حدود دسته	f_i	$\frac{f_i}{n}$	Fc_i
۱۹-۲۱	۱۲	$\frac{۱۲}{۲۰}$	۱۲
۲۱-۲۳	۵	$\frac{۵}{۲۰}$	۱۷
۲۳-۲۵	۱	$\frac{۱}{۲۰}$	۱۸
۲۵-۲۷	۲	$\frac{۲}{۲۰}$	۲۰
+	۲۰	۱	

باید با هم برابر باشه

معرفی انواع نمودارها ۱) میله ای ، مستطیلی

۲) چند ضلعی

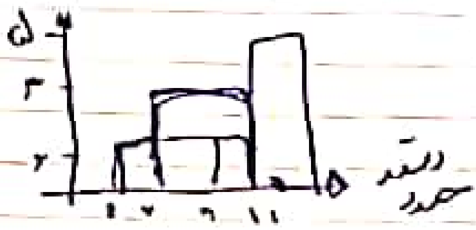
۳) دایره یا کیک جدول

مثال)

نکته - برای بدست آوردن مرکز دسته باید نیمه دسته را مشخص کنیم.

یعنی حد پایین دسته را با حد بالا آن جمع کرده و بر ۲ تقسیم کنیم.

	حدود دسته	f_i
$x_i=۶$	۵-۷	۲
۸	۷-۹	۳
۱۰	۹-۱۱	۵



مستطیلی

میله

تعریف: شاخص های مرکزی نشان می دهد که بیشتر اعداد جامعه در کجا متمرکز شده اند اما شاخص های پراکندگی نشان می دهند اعداد نسبت به یک مقدار مرکزی تا چه اندازه پراکنده می باشند.

شاخص های مرکزی
۱. میانگین
۲. میانه
۳. نما

میانگین
... برای بدست آوردن میانگین از جدول زیر استفاده می کنیم.

	تعداد دانشجو	نمره
ریاضی	۳	۱۴
	۲	۲۰
	۵	

$$1)\ \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\frac{۱۴\times۳ + ۲۰\times۲}{۵}$$

$$۲)\ \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}$$

x_i	حدود دسته	f_i
۳	۲-۴	۳
۵	۴-۶	۵

$$\bar{x} = \frac{(۳\times۳)+(۵\times۵ ...}{۸}$$

$$۳)\ \bar{x} = \frac{\sum f_i m_i}{n}$$

m_i = نماینده دسته

میانه: یکی دیگر از شاخص های مرکزی میانه می باشد که اگر حجم نمونه فرد باشد داده ها را ابتدا از کوچک به بزرگ (مرتب) می کنیم. میانه عددی است که در وسط این اعداد قرار می گیرد ولی اگر حجم نمونه زوج باشد در اینصورت میانه برابر میانگین دو عدد وسط. مثال ۱

۵, ۱۵, ۳, ۲, ۱

اول مرتب می کنیم

۱, ۲, ۳, ۵, ۱۵

وقتی تعداد داده ها فرد باشد

$Md = ۳$

زوج ۳ " ۷، ٤، ۱ و ۳

۱، ۳، ٤، ۷

میانه $\frac{۳+٤}{۲} = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$

برای بدست آوردن میانه از روی جدول ابتدا باید ستون مربوط به فراوانی تجمعی را تشکیل دهیم و سپس $\frac{n}{2}$ را بدست آوریم و بعداً آن را با جدول فراوانی تجمعی مقایسه می‌کنیم. اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا برابر $\frac{n}{2}$ باشد را به عنوان طبقه میانه انتخاب کرده و سپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$M_d = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{c_{i-1}}}{f_i} \times I$$

L: کران پایین طبقه میانه

$F_{c_{i-1}}$: فراوانی تجمعی طبقه ماقبل میانه

I: طول دسته

با جدول توزیع فراوانی ۱۰۰ دانشجو در جدول زیر داده شده است. مطلوب است میانگین، میانه

حدود طبقات	f_i فراوانی مطلق	F_{c_i} فراوانی تجمعی
۴۰-۴۲	۵	۵
۴۲-۴۴	۱۸	۲۳
۴۴-۴۶	۴۲	۶۵
۴۶-۴۸	۲۷	۹۲
۴۸-۷۰	۸	۱۰۰
	۱۰۰	

طبقه میانه

$k = \frac{n}{2} = \frac{۱۰۰}{۲} = ۵۰$

میانه $M_d = ۴۴ + \frac{۵۰-۲۳}{۴۳} \times ۲$

فراوانی نسبی آخرین ردیف طبقه

یعنی فراوانی مطلق

تعریف مد: بیشترین فراوانی مد گفته می‌شود

برای به دست آوردن مد به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۲ و ۳

mod = ۲

$$Mod = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$$

* برای به دست آوردن مد از روی جدول ابتدا به ستون فراوانی مطلق نگاه می‌کنیم جایی که بیشترین فراوانی مطلق داشته باشد طبقه مددار می‌نامیم.

d_1: تفاضل فراوانی طبقه ~~مد~~ مد که طبقه ما قبلش

d_2: تفاضل فراوانی طبقه مد از طبقه مابعد آن.

مثال) مطلوب است محاسبه مددار مثال قبلی.

مثال جدول فنی صفحه قبل

$d_1 = ۴۲ - ۱۸ = ۲۴$

$d_2 = ۴۲ - ۲۷ = ۱۵$

$Mod = ۴۴ + \frac{۲۴}{۲۴ + ۱۵} \times ۲$

$Mod = ۴۵/۲۳$

تعریف متقارن - توزیع را متقارن گویند که میانگین، میانه و مد برهم منطبق باشند و در غیر اینصورت توزیع دارای چولگی است. اگر مد بزرگتر از میانه و میانه هم بزرگتر از میانگین باشد، در اینصورت چوله به چپ است و همان اگر میانگین بزرگتر از میانه و میانه بزرگتر از مد باشد در اینصورت چوله به راست است.

مثال) در جدول زیر سن دانشجویان را نشان می‌دهد. مطلوب است تعیین چولگی آن

سن	f_i
۲۰-۲۴	۴
۲۴-۲۸	۵
۲۸-۳۲	۱
۳۲-۳۶	۲

شاخص‌های پراکندگی
۱- دامنه‌ی تغییرات
۲- صدک و چارک‌ها
۳- واریانس
۴- انحراف معیار

۲۷ و ۲۰

تعریف دامنه تغییرات: عبارتست از اختلاف بزرگترین مقدار از کوچکترین مقدار $D_R = ۲۷ - ۲۰ = ۷$

تعریف صدک: صدک Π_p یعنی $p\%$ درصد داده‌ها از آن کمتر و $1-p\%$ داده‌ها از آن بیشتر است. صدک Π_p را با H_p نمایش می‌دهند.

روش محاسبه صدک: ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و سپس به هر یک از داده‌ها متغیرهای $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ نسبت می‌دهیم. مرحله دوم: مقدار i را از فرمول زیر بدست می‌آوریم

$$i = \frac{p}{100}(n+1)$$

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۳	۲	۱				
۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴
۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱
۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸
	۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵

حالت (۲): اگر i عدد صحیح شد داریم صدک pام برابر است با $x_{(i)}$.

حالت (۱): اگر i عدد غیرصحیح شد آنگاه دو قسمت صحیح و اعشاری تقسیم می‌کنیم. قسمت صحیح را r و قسمت اعشاری را با w نشان می‌دهیم و سپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$H_p = (1-w)x_r + w\, x_{(r+1)}$$

اعشار

مثال) مطلوب است صدک ۴۳ام اعداد زیر

اعداد زیر ساعات انجام کاری کارمندان یک شرکت را نشان می‌دهد.

۱۶، ۱۵، ۱۳، ۱۰، ۱۲، ۲۲، ۲۴، ۱۸، ۱۹

حل:

۱) ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۲، ۲۴

$x_{(1)}\ x_{(2)}\ x_{(3)}\ x_{(4)}\ x_{(5)}\ x_{(6)}\ x_{(7)}\ x_{(8)}\ x_{(9)}$

۲) تعیین i: $i = \frac{43}{100}(\overset{10}{9+1}) = 4{,}3$

۳) $w = 0{,}3 \qquad r = 4$

$$H_{43} = (\underbrace{1-0{,}3}_{0{,}7})\overset{18}{\cancel{x_{(4)}}} + 0{,}3\,\overset{19}{\cancel{x_{(5)}}} = 18{,}3$$

صدک ۵۰ام

$i = \frac{50}{100}(\overset{10}{9+1}) = 5$

$r = 5$

$H_{50} = x_5 = 19$

چارک‌ها

تعریف چارک‌ها: مقادیری هستند که سطح نمودار را به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. چارک اول را با Q_1 نمایش می‌دهند و منظور این است که $\frac{1}{4}$ داده‌ها از آن کمتر و $\frac{3}{4}$ داده‌ها از آن بیشتر است. چارک دوم را با Q_2 نمایش می‌دهند، نصف داده‌ها از آن کمتر و نصف دیگر داده‌ها از آن بیشتر، منظور همان میانه است و چارک سوم $\frac{3}{4}$ داده‌ها از آن کمتر و $\frac{1}{4}$ داده‌ها از آن بیشتر است.

مثال/ چارک اول و سوم را برای مقادیر زیر حساب کنید

۲، ۵، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ۲۰

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$

$$i = \frac{25}{100}(8+1) = 2.25$$

$r = 2$

عدد اعشار $w = 0.25$

$$H_{25} = (1-0.25)x_2 + 0.25(x_3) = 5.75$$

$$i = \frac{100}{100} \, 9 =$$

$$i = \frac{75}{100}(8+1) = 9$$

محاسبه‌ی صدک‌ها از روی جدول: این روش کاملاً مشابه به روش محاسبه میانه است. برای محاسبه صدک Pام ابتدا جدول ستون فراوانی تجمعی را اضافه کرده و سپس np را حساب کرده و اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن از np بزرگتر یا مساوی است را به عنوان طبقه‌ی صدک در نظر می‌گیریم و سپس از فرمول زیر استفاده می‌کنیم. صدک Pام را از رابطه:

$$P \text{ صدک} = L + \frac{np - F_{C_{i-1}}}{F_{C_i}} \times I \rightarrow \text{طول دسته}$$

L: کران پایین صدک

$F_{C_{i-1}}$: فراوانی تجمعی طبقه ماقبل صدک

F_i: فراوانی مطلق طبقه صدک

۱) $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

محاسبه واریانس :

واریانس نمونه

واریانس جامعه توسط ... بجای n ، عدد n-1 را قرار میدهیم

S^2 واریانس جامعه

۲) $S^2 = \frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^2$

x	f_i
۵	۲
۴	۲

۳) اگر داده ها گروه بندی شده باشد

$$S^2 = \frac{1}{n}\left[\sum f_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2\right]$$

مثال) واریانس داده های زیر را حساب کنید

۱) واریانس داده های زیر را حساب کنید

۱۲, ۴, ۷, ۳, ۱۵, ۱۰, ۱۸, ۵

$n=8$

$$\bar{x} = \frac{12+4+7+3+15+10+18+5}{8} = 9.5$$

$$S^2 = \frac{1}{8}\left[(12-9.5)^2+(4-9.5)^2+\dots+(18-9.5)^2+(5-9.5)^2\right] = \boxed{23.7}$$

مثال) جدول توزیع فراوانی نمرات درس آمار ۱۰۰ دانشجو. مطلوب است واریانس آن:

واریانس بر اساس ...

حدود طبقات	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
۶۰_۶۳	۵	۳۰۷٫۵	۱۸۹۱۱٫۲۵
۶۳_۶۶	۱۸	۱۱۴۳	۷۴۸۸۴٫۵
۶۶_۶۹	۴۲	۲۸۳۵	۱۹۱۳۶۲٫۵
۶۹_۷۲	۲۷	۱۹۰۳٫۵	۱۳۴۱۹۶٫۷۵
۷۲_۷۵	۸	۵۸۸	۴۳۲۱۸
$n=100$		۶۷۹۵	۴۶۱۷۱۰٫۲۵

۴۶۱۷۱۰٫۲۵

$$S^2 = \frac{1}{100}\left[18911.25 - \frac{1}{100}(307.5)^2 + 74884.5 - \frac{1}{100}(1143)^2 + 191362.5 - \frac{1}{100}(2835)^2 + 134196.75 - \frac{1}{100}(1903.5)^2 \right]$$

۶۷۹۵   ۴۶۱۷۱۰٫۲۵ $= 14{,}0\ldots$ ۶۷۹۵   ۴۶۱۷۱۰٫۲۵

انحراف معیار = جذر مثبت واریانس — واریانس نمونه = s^2 — واریانس جامعه = σ^2

انحراف معیار = s — انحراف معیار جامعه = σ

پایان مبحث آمار

فصل ۲

آزمایش تصادفی: آزمایشی تصادفی است که نتیجه آن از قبل معلوم و قابل تشخیص نباشد.

فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن در یک آزمایش را فضای نمونه می‌گوییم و آن را با S نشان می‌دهیم.

پیشامد: هر مجموعه از نتایج که آزمایش را پیشامد می‌گویند، به عبارت دیگر هر زیرمجموعه از فضای نمونه است.

فرزندان را شمارش کنید. [(د، د) و (د، پ) و (پ، د) و (پ، پ)]

(خ، خ، خ) و (خ، خ، ش) و (خ، ش، خ) و (ش، خ، خ) و (ش، ش، خ) و (ش، خ، ش) و (خ، ش، ش) و (ش، ش، ش)

زیرمجموعه آن (خ، خ، خ)

مثال: اگر یک تاس را n بار پرتاب کنیم، فضای نمونه آن 6^n عضو دارد؛ اگر سکه باشد 2^n عضو است.

تمرین: مطلوب است واریانس جدول زیر و انحراف معیار.

حدود دسته	f_i
۵-۹	۳
۹-۱۳	۵
۱۳-۱۷	۲
	$n=10$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{10} \ldots (x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{10} \ldots (7-11)^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{10} \times 3(7-11)^2 + 5(11-11)^2 + 2(15-11)^2$$

$$4.8 + 0 + 32 = \boxed{36.8}$$

احتمال:

اصل شمارش. اگر اتفاقی را به m طریق مختلف بتوان انجام داد و به ازای هر کدام از این m طریق اتفاقی دیگر را به n طریق دیگر مختلف بتوان انجام داد در این صورت این دو اتفاق را به صورت m×n طریق می‌توان انجام داد.

مثال) خانواده‌ای سه فرزند دارند چند حالت مختلف این خانواده وجود دارد؟

فرزند اول — دوم — سوم

پسر دختر — پسر دختر — پسر دختر

۲ حالت — ۲ حالت — ۲ حالت

$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

مثال) با فرض آنکه تکرار ارقام مجاز نباشد با رقم‌های ۲، ۳، ۵، ۶ و ۹ الف) چند عدد سه رقمی که کمتر از ۴۰۰ باشد می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت. ج) چند عدد ۳ رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟

الف) $۲ \times ۵ \times ۴$

ب) $۲ \times ۵ \times ۴$

ج) $۴ \times ۵ \times ۱$

نکته. مفهوم فاکتوریل: اگر n شیء متمایز داشته باشیم و بخواهیم آن‌ها را کنار هم قرار دهیم این عمل به $n!$ حالت امکان‌پذیر است.

$n! = n(n-1)\cdots 1$ $\qquad$ $0! = 1$

مثال) سه کتاب ریاضی مختلف و سه کتاب معنوی مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید به طوری که یکی در میان باشد.

$۳! \times ۳! \times ۲ = ۷۲$

نکته- اگر بخواهیم m شئ متشابه را در کنار n شئ متمایز دیگر قرار دهیم درصورتی که m با n کنار هم باشند
دارا است با $2\times m!\times n!$

مثال) ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۳ کتاب داستان مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید
طوری‌که یکی در میان باشند. $4!\times 3! = 4\times3\times2\times1\times3\times2\times1 = 144$

نکته- اگر بخواهیم m شئ متمایز در کنار n شئ متمایز دیگر به صورت یکی در میان قرار دهیم درصورتی‌که
m و n با هم یک واحد اختلاف داشته باشند مثلاً m≠n باشد $m!\,n!$

نکته- اگر بخواهیم تعداد تبدیل‌های دوری n شئ را در حالتی دست بیاوریم در حالت آن به صورت
$(n-1)!$ فاکتوریل می‌باشد.

مثال) به چند طریق ۵ نفر دور یک میز دایره‌ای شکل می‌توانند قرار بگیرند

$(5-1)! = 4! = 24$

نکته- تعداد جایگشت‌های n شئ که n_1 تای آن از نوع اول، n_2 تای از نوع دوم تا n_k
دارا است با: $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$

مثال) به چند طریق می‌توان ۲ کتاب ریاضی ۳ کتاب آمار ۲ کتاب داستان در قفسه‌ای چید
به شرط آنکه کتاب‌های هم نوع از هم متمایز نباشند.

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!} = \frac{7!}{2!\times3!\times2!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times2\times3\times2\times2} = \frac{210\times3}{3} = 210$$

تعریف ترتیب: اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز r شیء را انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آن برای ما مهم باشد از فرمول ترتیب استفاده می‌کنیم

ترتیب $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

مثال) فرض کنید می‌خواهیم از یک گروه ۱۰ نفره صف ۵ نفره تشکیل دهیم به چند طریق ممکن است؟

$$P(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = 30240$$

انتخاب ۵ تا از ۱۰ تا.

ترکیب: اگر بخواهیم r شیء را از بین n شیء متمایز بدون ترتیب انتخاب آنها، انتخاب کنیم، آنگاه از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم

$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ترکیب C

مثال) جعبه‌ای شامل ۴ تا قرمز، ۳ تا سبز و ۹ توپ آبی است به چند طریق می‌توان ۶ توپ را انتخاب کرد به طوری که: الف) محدودیتی وجود نداشته باشد. ب) ۳ توپ قرمز، یک توپ سبز و ۲ توپ آبی وجود داشته باشد.

الف)
$$C(16,6) = \binom{16}{6} = \frac{16!}{6!(16-6)!}$$

ب)
$$C\binom{4}{3} \times \binom{3}{1} \times \binom{9}{2} = ? \quad \frac{4!}{3!\,1!} \times \frac{3!}{1!\,2!} \times \frac{9!}{2!\,7!}$$

مثال) از ۱۰ دستگاه تلویزیون موجود در یک فروشگاه ۳ تلویزیون نقص فنی دارند به چند طریق صاحب یک هتل می‌تواند ۵ دستگاه از این تلویزیون‌ها خریداری کند به طوری که حداکثر ۲ تلویزیون نقص فنی داشته باشند.

تعریف احتمال : احتمال عبارت است از پیشامد مطلوب تقسیم بر کل فضای نمونه

$$P(A) = \frac{\text{پیشامد مطلوب}}{\text{کل فضای نمونه}}$$

روابط در احتمال :

۱) $0 \leq P(A) \leq 1$

۲) $P(A) + P(A') = 1$ A' پیشامد متمم

۳) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

۴) اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

۵) اگر A, B ناسازگار باشند $P(A \cap B) = 0$

۶) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

نکته . اگر A, B مستقل باشند

$$P(A|B) = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$P(B|A) = P(B)$

۷)

مثال) از کیف کتابی با ۳ خودکار سفید ۲ خودکار آبی ۴ خودکار مشکی ، ۲ خودکار به تصادف بیرون آوردیم
مطلوب است احتمال آنکه ۲ خودکارها هر دو مشکی باشند!

۳ سفید
۲ آبی
۴ مشکی

۹تا

$$P(\text{هر دو مشکی باشد}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{9!}{2!\,7!}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{مشکی نبودن}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

مثال) از جعبه‌ای که شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است ۲ مهره بدون جایگذاری خارج می‌کنیم مطلوب است احتمال اینکه الف) هر دو سفید باشد ب) هر دو هم‌رنگ باشد.

۴ سفید
۳ سیاه
۴

الف) $P(\text{سفید باشد}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}$

$P(\text{هر دو مهره سفید باشد}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}$ بدون جایگذاری

$\frac{2}{7} = 0/285$

$P(\text{۲ مهره هم‌رنگ}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{6}$

مثال) احتمال آنکه علی در کنکور ارشد قبول شود ۰/۸ و احتمال آنکه آسیه قبول شود ۰/۷ است و احتمال آنکه هر دو قبول شوند ۰/۵۶ است احتمال اینکه حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شود.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \overset{\text{اشتراک}}{P(A \cap B)} \to (0/8 + 0/7) - 0/56 = 0/94$

مثال) جعبه‌ی A شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی قرمز است و جعبه‌ی B شامل ۶ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی قرمز است. یک جعبه را تصادفاً انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم و بدون توجه به رنگ در جعبه‌ی سوم قرار می‌دهیم که خود این جعبه قبلاً شامل ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی قرمز است سپس از جعبه‌ی سوم یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال قرمز بودن این مهره را حساب کنید.

A: ۳ سفید، ۵ قرمز

B: ۶ سفید، ۲ قرمز

C: ۳ سفید، ۲ قرمز

جواب هفته‌ی بعد

P(از جعبه رسم برداشته و مهره قرمز باشد) $= (\frac{3}{8} \times \frac{3}{7}) + (\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}) = \frac{29}{56}$

سه از جعبه اول احتمال انتقال

احتمال قرمز بودن

P(قرمز بودن از جعبه دوم) $= (\frac{2}{8} \times \frac{4}{7}) + (\frac{6}{8} \times \frac{3}{7}) = \frac{26}{56}$

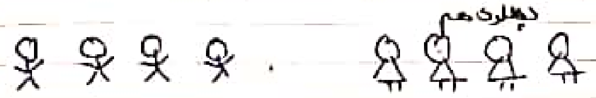
سه اول مهره از B — سه قرمز از B — سه الی سیاه از B — که قرمز از جعبه C

P(قرمز بودن) $= (\frac{29}{56} \times \frac{1}{2}) + (\frac{26}{56} \times \frac{1}{2}) = \frac{55}{112}$

۴ زوج خوشبخت برای یک تئاتر ۸ بلیط در یک ردیف خریداری کردند. الف) احتمال اینکه هر زوج جلوی یکدیگر بنشینند را ب) احتمال اینکه تمام مردها در یک سمت و تمام زن ها سمت دیگر باشند.

صف با فاکتوریل ۲ ۲ می نویسیم

جلوی هم



$\underset{2!}{OO}\ \underset{2!}{OO}\ \underset{2!}{OO}\ \underset{2!}{OO}$ حالات $2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 8$

الف) $\frac{2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 4!}{8!} = \frac{1}{10\ldots}$

خانم‌ها

$\underset{4!}{OOOO}\ \underset{4!}{OOOO}$ آقایان

ب) $\frac{4! \times 4!}{8!} = \frac{4!}{8 \times 7 \times 6 \times 5} = \frac{\ldots}{2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}$

فصل جدید

متغیرهای تصادفی: تعریف: تابعی که از فضای نمونه‌ای یک آزمایش آماری به مجموعه اعداد حقیقی تعریف شود را متغیر تصادفی می‌نامیم. حال اگر فضای نمونه‌ای S دارای عناصر متناهی یا نامتناهی قابل شمارش باشد فضای نمونه را فضای نمونه گسسته می‌نامیم و متغیری که روی آن تعریف می‌شود متغیر تصادفی گسسته مانند تعداد افراد یک کلاس و غیره. اگر تعداد عناصر فضای نمونه نامتناهی غیرقابل شمارش باشد فضای نمونه را پیوسته می‌گوییم و متغیر تصادفی که روی این فضا تعریف می‌شود متغیر تصادفی پیوسته می‌گوییم. مثل اعدادی که در یک بازه قرار می‌گیرند [۰،۲] و تابعی را که برای متغیر تصادفی گسسته تعریف می‌کنیم تابع توزیع احتمال و تابعی را که برای متغیر تصادفی پیوسته تعریف می‌کنیم تابع چگالی احتمال می‌نامیم.

مثال) سکه‌ای را ۳ بار پرتاب می‌کنیم اگر X تعداد دفعات شیر باشد آنگاه مطلوب است تابع توزیع احتمال.

S فضای نمونه = {(ر،ر،ر)، (پ،پ،ر)، (ر،ر،پ)، (ر،پ،پ)، (پ،پ،پ)، (پ،ر،ر)، (پ،ر،پ)، (ر،پ،ر)}

X تعداد دفعات شیر	۰	۱	۲	۳
f(x) احتمال	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مثال) جعبه‌ای محتوی ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید است. اگر از جعبه ۲ مهره به تصادف انتخاب کنیم و X نشان دهنده تعداد مهره‌های سفید باشد مطلوب است جدول توزیع احتمال.

۲ مهره تصادفی ← ۳ قرمز

X سفید	۰ (هر دو مهره قرمز)	۱	۲
p(x)	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$	$(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4})+(\frac{3}{5}\times\frac{2}{4})$	$\frac{2}{20}$

جمع احتمال‌ها باید یک شود پس حساب ۲ را می‌شود

اولی $\frac{3}{5}$ … $\frac{2}{20}$

$p+q=1$

متغیرهای تصادفی گسسته
۱. برنولی
۲. توزیع دوجمله‌ای
۳. پواسون
۴. هندسی

$b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}$

$E(x)=np$
$V(x)=npq$

۱. تعریف آزمایش برنولی: آزمایشی که فقط شامل دو نتیجه شکست یا پیروزی باشد را آزمایش برنولی می‌نامیم

۲. تعریف توزیع دوجمله‌ای: اگر آزمایش برنولی را n بار تکرار کنیم به طوری که این آزمایش‌ها مستقل از هم تکرار شوند در اینصورت توزیع بدست آمده توزیع دو جمله‌ای می‌گوییم و آن را بصورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم.

مثال ۱) سکه‌ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال آنکه در ۶ امین پرتاب حداقل یک شیر ظاهر شود را بدست آورید.

$n=10$

$x=6$ $\qquad f(x)=\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{10!}{6!4!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$p=\frac{1}{2}$

مثال ۲) خانواده‌ای دارای ۶ فرزند است. اگر احتمال فرزند پسر و دختر مطلوب است احتمال اینکه حداقل ۲ فرزند پسر داشته باشند.

$p(x\geq 2)=?$

$1-p(x<2)=?$ $\qquad \frac{57}{64}$

$x=0, x=1$

~~$x=1$~~ $\cancel{\underbrace{\binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}_{x=0}+\underbrace{\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}_{x=1}}$

توزیع پواسون: اگر بخواهیم تعداد وقایعی که در فاصله زمانی یا در ناحیه مکانی مشخص به وقوع بپیوندد از توزیع پواسون استفاده می‌کنیم که در آن λ بیانگر متوسط رخدادها در فاصله زمانی یا مکانی مشخص می‌باشد و فرمول آن به صورت روبه‌رو است

تابع توزیع

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$x=0,1,2,3,\dots$$

$$E(x)=\lambda$$

$$\sigma_x^2=V(x)=\lambda$$

مثال) در یک کتاب به طور متوسط در هر صفحه ۳ غلط چاپی وجود دارد مطلوب است محاسبه احتمال آنکه دقیقاً دو غلط چاپی در یک صفحه وجود داشته باشد.

$$\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}=\frac{9}{2}e^{-3}=4.5e^{-3}$$

ب) حداکثر یک غلط چاپی در یک صفحه وجود داشته باشد.

$$\frac{e^{-3}3^{1}}{1!}= \quad 3e^{-3}+\frac{e^{-3}3^{0}}{0!}=e^{-3}$$

یکی از کاربردهای مهم متغیر تصادفی پواسون آن است که می‌توان به عنوان تقریبی از یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و p وقتی n بزرگ و p کوچک که دلیل هست:

$$\lambda=np$$

مثال) احتمال اینکه ... $\frac{1}{100}$ است ... احتمال اینکه دقیقاً ۲ بار ...

$P(X=2) = \frac{e^{-1} 1^2}{2!}$

$\lambda = np = 100 \cdot \frac{1}{100} = 1$

$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n$

$\binom{100}{2} (0{,}01)^2 (0{,}98)^{98}$

توزیع فوق هندسی: فرض کنید ظرفی دارای N لامپ ... $N = K + M$ ... K تای آن سالم و M تای آن معیوب ... x نشان دهنده تعداد لامپ‌های سالم باشد ... توزیع فوق هندسی

$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad E(x) = \mu = n\frac{K}{N}$

$x = 0, 1, \dots$

مثال) از ظرفی که شامل ۱۰ توپ که ۶ تای قرمز و بقیه سفید است یک نمونه ۳ تایی انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی x نشان دهنده تعداد توپ‌های قرمز ... باشد،
تابع توزیع احتمال x.

$f(x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{10}{3}}$

$x = 0$
$x = 1$
$x = 2$
$x = 3$