# حل معادله موج
# (Wave Equation)

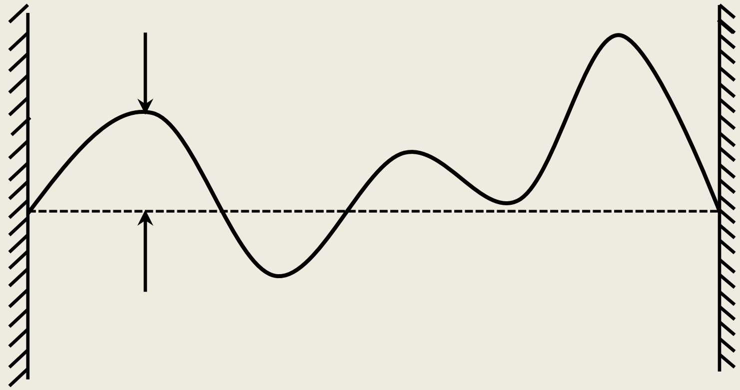
فرض کنید یک نخ کشسان به نقطه ابتدایی $x=0$ و نقطه انتهایی $x=\ell$ بسته شده و ثابت باشد.

همچنین فرض کنید وضعیت این نخ در لحظه $t=0$ بصورت تابع مفروض $f(x)$ و سرعت اولیه نخ

در لحظه $t=0$ برابر $g(x)$ باشد. حال اگر معادله ارتعاش نخ (معادله موج) بصورت زیر تعریف گردد،

مطلوب است بررسی انحراف نخ ($u(x,t)$) در هر لحظه از زمان $t$ و نقطه $x$ .

$$\text{(P.D.E.)}\begin{cases}\alpha^2 u_{xx}=u_{tt} \quad ; \quad 0<x<\ell \quad ; \quad t>0 \\ u(0,t)=u(\ell,t)=0 \quad ; \quad t>0 \qquad \text{(B.C.)} \\ \left.\begin{aligned} u(x,0)=f(x) \quad ; \quad 0<x<\ell \\ u_t(x,0)=g(x) \quad ; \quad 0<x<\ell \end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\text{وضعیت اولیه نخ}\\ &\text{سرعت اولیه نخ}\end{aligned} \quad \text{(I.C.)}\end{cases}$$




حل: مرحله اول: از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u(x,t)=X(x).T(t)$$

با جایگذاری در رابطه $\alpha^2 u_{xx}=u_{tt}$ داریم:

$$\alpha^2 X''(x).T(t)=X(x).T''(t)$$

تقسیم طرفین رابطه فوق بر $\alpha^2 X(x).T(t)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\lambda=\text{constant}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X''-\lambda X=0\\ T''-\lambda\alpha^2 T=0\end{cases}$$

**مرحله دوم: اعمال شرایط مرزی**

$$u(0,t)=X(0).T(t)=0 \quad , \quad \forall t>0 \quad \xrightarrow[\text{داشتن جواب غیربدیهی}]{T(t)\neq 0} \quad X(0)=0$$

$$u(\ell,t)=X(\ell).T(t)=0 \quad , \quad \forall t>0 \quad \xrightarrow[\text{داشتن جواب غیربدیهی}]{T(t)\neq 0} \quad X(\ell)=0$$

$$\begin{cases} X''-\lambda X=0 \\ X(0)=X(\ell)=0 \end{cases}$$

قبلاً در اسلایدهای ۲۷ و ۲۸ اثبات گردید که معادله فوق دارای جواب غیربدیهی $u(x,t)\neq 0$ تنها در حالت $\lambda=-\sigma^2<0$ است که در آن $\sigma=\frac{n\pi}{\ell}$ می‌باشد. در این حالت بدست آوردیم:

$$X(x)=k_1\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad ; \quad n\in N$$

مرحله سوم: حل معادلات دیفرانسیل معمولی $T'' - \lambda\alpha^2 T = 0$ :

$$T'' + \alpha^2\sigma^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad T'' + \alpha^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 T = 0$$

دو جواب این معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} T_1(t) = \sin\left(\alpha\dfrac{n\pi}{\ell}t\right) \\ T_2(t) = \cos\left(\alpha\dfrac{n\pi}{\ell}t\right) \end{cases} \quad ; \quad n \geq 1$$

بنابراین، دو دسته جواب غیربدیهی برای معادله موج بصورت زیر بدست می‌آید:

جوابهای اساسی
$$\begin{cases} u_n(x,t) = X(x).T_1(t) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\alpha\dfrac{n\pi}{\ell}t\right) \\ v_n(x,t) = X(x).T_2(t) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\alpha\dfrac{n\pi}{\ell}t\right) \end{cases} \quad ; \quad n \geq 1$$

نکته: طبق قضیه ۱-۱ از صفحه ۱۲، می‌توان نتیجه گرفت که عبارت زیر نیز جواب معادله موج $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$ با شرایط اولیه و مرزی مذکور است:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n u_n(x,t) + b_n v_n(x,t)\right]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left\{a_n \sin\left(\alpha\frac{n\pi}{\ell}t\right) + b_n \cos\left(\alpha\frac{n\pi}{\ell}t\right)\right\} \qquad (۱)$$

مرحله چهارم: اعمال شرایط اولیه:

با اعمال شرط اولیه $u(x,0) = f(x)$ درجواب (۱) داریم: $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = f(x)$

که این مستلزم بسط سری فوریه سینوسی (تابع فرد پریودیک) $f(x)$ می‌باشد که در بخش ۴ به معرفی آن پرداخته شد:

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \quad ; \qquad n \geq 1$$



Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

ادامه مرحله چهارم: اعمال شرایط اولیه:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left\{a_n\sin\left(\alpha\frac{n\pi}{\ell}t\right)+b_n\cos\left(\alpha\frac{n\pi}{\ell}t\right)\right\} \qquad (۱)$$

با اعمال شرط اولیه $u_t(x,0)=g(x)$ درجواب (۱) داریم:

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{n\pi\alpha}{\ell}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=g(x)$$

که این مستلزم بسط سری فوریه سینوسی (تابع فرد پریودیک) $g(x)$ می‌باشد:

$$a_n\frac{n\pi\alpha}{\ell}=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\Rightarrow \qquad a_n=\frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^{\ell}g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \quad ; \quad n\geq 1$$

نکته ۴-۴: در حالت $g(x)=0$ دیده می‌شود که $a_n=0$ و جواب بصورت زیر است:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\alpha\frac{n\pi}{\ell}t\right) \qquad (۲)$$

نکته ۴-۵: به منظور اینکه شرایط مرزی و شرایط اولیه مربوط به معادله موج با یکدیگر سازگار باشند، لازم است:

$$\left.\begin{array}{lll} u(0,t)=0 & \Rightarrow & u(0,0)=0 \\ u(x,0)=f(x) & \Rightarrow & u(0,0)=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(0)=0$$

که این به معنی مکان نخ در نقطه $x=0$ و در لحظه $t=0$ است. همچنین:

$$u_t(x,0)=g(x) \quad \Rightarrow \quad u_t(0,0)=\frac{\partial}{\partial t}(u(0,0))=g(0)=0$$

$$\Rightarrow \quad g(0)=0$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود در لحظه $t=0$ باید $f(\ell)=0, g(\ell)=0$ باشند.

# حل معادله موج به روش دالامبر (D’Alembert)

در این بخش، معادله موج را به یک روش ساده‌تر حل می‌کنیم که در نهایت به جوابی می‌رسیم که به آن جواب دالامبر می‌گویند. اساس کار استفاده از تغییر متغیرهای زیر است:

$$\begin{cases} r = x - \alpha t \\ s = x + \alpha t \end{cases}$$

در این حالت $u(x,t)$ تابعی از $r$ و $s$ خواهد شد و بصورت $u(r,s)$ نوشته می‌شود. بدین ترتیب،

معادله موج $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$ بصورت زیر ساده می‌شود:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\times 1 + \frac{\partial u}{\partial s}\times 1 = u_r + u_s$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(u_r + u_s)$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial r}(u_r + u_s).\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s}(u_r + u_s).\frac{\partial s}{\partial x} = u_{rr} + u_{ss} + 2u_{rs}$$

$$\begin{cases} r = x - \alpha t \\ s = x + \alpha t \end{cases}$$

بطور مشابه داریم:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}.\frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha u_r + \alpha u_s$$

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(-\alpha u_r + \alpha u_s)$$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial r}(-\alpha u_r + \alpha u_s).\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(-\alpha u_r + \alpha u_s).\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha^2[u_{rr} - 2u_{rs} + u_{ss}]$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله موج $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$ داریم:

$$\alpha^2[u_{rr} + u_{ss} + 2u_{rs}] = \alpha^2[u_{rr} - 2u_{rs} + u_{ss}]$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2 u_{rs} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{rs} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0$$

$$u_{rs}=\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial s}=H(s)$$ مستقل از $r$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=H(s) \quad\Rightarrow\quad u(r,s)=\int_s H(\eta)d\eta+\phi_2(r)$$

که در آن $\phi_2(r)$ تابعی دلخواه از $r$ است. بدین ترتیب با تعریف $\phi_1(s)=\int_s H(\eta)d\eta$ خواهیم داشت:

$$u(r,s)=\phi_1(s)+\phi_2(r) \quad\Leftrightarrow\quad u(x,t)=\phi_1(x+\alpha t)+\phi_2(x-\alpha t)$$

حال باتوجه به شرایط اولیه می‌توان توابع $\phi_1$ و $\phi_2$ را پیدا نمود. جواب فوق معروف به جواب دالامبر معادله موج است.

$$u(r,s)=\phi_1(s)+\phi_2(r) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,t)=\phi_1(x+\alpha t)+\phi_2(x-\alpha t)$$

حالت اول: فرض کنید سرعت اولیه نخ کشسان صفر باشد ( $g(x)=0$ ):

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) & ; \quad 0<x<\ell \\ u_t(x,0)=g(x)=0 & ; \quad 0<x<\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,t)=\phi_1(x+\alpha t)+\phi_2(x-\alpha t) \\ u(x,0)=\phi_1(x)+\phi_2(x)=f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(x,t)=\alpha\phi_1'(x+\alpha t)-\alpha\phi_2'(x-\alpha t) \\ u_t(x,0)=\alpha\phi_1'(x)-\alpha\phi_2'(x)=0 \end{cases} \overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} \quad \phi_1'(x)=\phi_2'(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1(x)+\phi_2(x)=f(x) \\ \phi_1'(x)-\phi_2'(x)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} \quad \begin{cases} \phi_1'(x)+\phi_2'(x)=f'(x) \\ \phi_1'(x)-\phi_2'(x)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi_1'(x)+\phi_2'(x)=f'(x)\\ \phi_1'(x)-\phi_2'(x)=0\end{cases} \Rightarrow 2\phi_1'(x)=f'(x) \quad\Rightarrow\quad \phi_1(x)=\frac{1}{2}f(x)+c$$

$$\phi_1(x)+\phi_2(x)=f(x) \quad\Rightarrow\quad \phi_2(x)=\frac{1}{2}f(x)-c$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$\begin{cases}\phi_1(x)=\dfrac{1}{2}f(x)+c\\[2ex] \phi_2(x)=\dfrac{1}{2}f(x)-c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\phi_1(x+\alpha t)=\dfrac{1}{2}f(x+\alpha t)+c\\[2ex] \phi_2(x-\alpha t)=\dfrac{1}{2}f(x-\alpha t)-c\end{cases}$$

$$u(x,t)=\phi_1(x+\alpha t)+\phi_2(x-\alpha t)\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+\alpha t)+f(x-\alpha t)\right]$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+\alpha t)+f(x-\alpha t)\right]$$ جواب دالامبر

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\alpha\frac{n\pi}{\ell}t\right)$$ (۱) $\xleftarrow{g(x)=0}$ نکته ۴-۴ از صفحه ۱۰۱

<u>نکته ۴-۶</u>: حال باید ثابت کرد که جواب دالامبر فوق در حالت $g(x)=0$ با جواب (۱) یکی است:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}(x+\alpha t)\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}(x-\alpha t)\right)$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=f(x)$$ شرط اولیه

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+\alpha t)+f(x-\alpha t)\right]$$

$$u(r,s)=\phi_1(s)+\phi_2(r) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,t)=\phi_1(x+\alpha t)+\phi_2(x-\alpha t)$$

حالت دوم: فرض کنید سرعت اولیه نخ کشسان غیر صفر باشد ($g(x)\neq 0$)، اما $f(x)=0$ است.

هدف بدست آوردن توابع $\phi_1$ و $\phi_2$ است.

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x)=0 & ; \quad 0<x<\ell \\ u_t(x,0)=g(x) & ; \quad 0<x<\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,t)=\phi_1(x+\alpha t)+\phi_2(x-\alpha t) \\ u(x,0)=\phi_1(x)+\phi_2(x)=f(x)=0 \end{cases} \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} u_t(x,t)=\alpha\phi_1'(x+\alpha t)-\alpha\phi_2'(x-\alpha t) \\ u_t(x,0)=\alpha\phi_1'(x)-\alpha\phi_2'(x)=g(x) \end{cases} \qquad (۲)$$

(۱) و (۲) $\Rightarrow \begin{cases} \phi_1(x)+\phi_2(x)=0 \\ \alpha\phi_1'(x)-\alpha\phi_2'(x)=g(x) \end{cases}$ مشتق می‌گیریم $\Rightarrow \begin{cases} \alpha\phi_1'(x)+\alpha\phi_2'(x)=0 \\ \alpha\phi_1'(x)-\alpha\phi_2'(x)=g(x) \end{cases}$

$$\begin{cases}\alpha\phi_1'(x)+\alpha\phi_2'(x)=0\\ \alpha\phi_1'(x)-\alpha\phi_2'(x)=g(x)\end{cases} \Rightarrow 2\alpha\phi_1'(x)=g(x) \quad \Rightarrow \quad \phi_1(x)=\frac{1}{2\alpha}\int_{x_0}^{x} g(\eta)d\eta+\phi_1(x_0)$$

$$\phi_1(x)+\phi_2(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \phi_2(x)=-\frac{1}{2\alpha}\int_{x_0}^{x} g(\eta)d\eta-\phi_1(x_0)$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$u(x,t)=\phi_1(x+\alpha t)+\phi_2(x-\alpha t)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2\alpha}\int_{x_0}^{x+\alpha t} g(\eta)d\eta+\phi_1(x_0)-\frac{1}{2\alpha}\int_{x_0}^{x-\alpha t} g(\eta)d\eta-\phi_1(x_0)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} g(\eta)d\eta$$

**<u>حالت سوم:</u> حال فرض کنید $f(x) \neq 0$ و $g(x) \neq 0$ باشند. از جواب دالامبر، جواب نهایی $u(x,t)$ را بدست می‌آوریم.**

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_{tt} \quad ; \quad 0 < x < \ell \quad ; \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad ; \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \neq 0 \quad ; \quad 0 < x < \ell \\ u_t(x,0) = g(x) \neq 0 \quad ; \quad 0 < x < \ell \end{cases}$$

**در حالت اول که $g(x) = 0$ بود بدست آوردیم:**

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+\alpha t) + f(x-\alpha t)\right]$$

**در حالت دوم که $f(x) = 0$ بود بدست آوردیم:**

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} g(\eta)\,d\eta$$

**حال از قضیه جمع آثار، جواب نهایی برابر است با:**

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+\alpha t) + f(x-\alpha t)\right] + \frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} g(\eta)\,d\eta \qquad (۱)$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+\alpha t)+f(x-\alpha t)\right]+\frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} g(\eta)d\eta \qquad (۱)$$

حال باید چک کنیم جواب (۱) در شرایط اولیه $u(x,0)=f(x)$ و $u_t(x,0)=g(x)$ صدق می‌کند یا نه؟

$$u(x,0)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(x)\right]+\underbrace{\frac{1}{2\alpha}\int_{x}^{x} g(\eta)d\eta}_{=0}=f(x) \qquad \textbf{ok}$$

$$u_t(x,0)=\frac{1}{2}\left[\alpha f'(x)-\alpha f'(x)\right]+\frac{1}{2\alpha}\left[\alpha g(x+\alpha t)-(-\alpha g(x-\alpha t))\right]_{t=0}$$

$$u_t(x,0)=0+\frac{1}{2\alpha}\left[\alpha g(x)+\alpha g(x)\right]=g(x) \qquad \textbf{ok}$$

**مثال ۴-۱۶** (سوال میانترم): با انتخاب $y(x,t)=e^{at}u(x,t)$ ، معادله زیر را تحت شرایط اولیه مزبور حل کنید. در این معادله $a$ و $c$ ثابت‌های مثبت هستند.

$$\begin{cases} u_{tt}+2au_t+a^2u=c^2u_{xx} \quad ; \quad -\infty<x<\infty \quad ; \quad t>0 \\ u(x,0)=e^x \quad ; \quad -\infty<x<\infty \\ u_t(x,0)=-2ae^x \quad ; \quad -\infty<x<\infty \end{cases}$$

**حل**: ساده‌سازی معادله فوق:

$$u(x,t)=e^{-at}y(x,t)$$

$$\begin{cases} u_t(x,t)=-ae^{-at}y(x,t)+e^{-at}y_t(x,t) \\ u_{tt}(x,t)=a^2e^{-at}y(x,t)-ae^{-at}y_t(x,t)-ae^{-at}y_t(x,t)+e^{-at}y_{tt}(x,t) \\ u_{tt}(x,t)=a^2e^{-at}y(x,t)-2ae^{-at}y_t(x,t)+e^{-at}y_{tt}(x,t) \\ u_{xx}=e^{-at}y_{xx}(x,t) \end{cases}$$

ادامه حل مثال ۴-۱۶ : با جایگذاری در معادله و با توجه به اینکه $e^{-at} \neq 0$ داریم:

$$c^2 y_{xx} = y_{tt}$$ معادله موج

مرحله بعد بدست آوردن شرایط اولیه جدید است:

$$u(x,t) = e^{-at} y(x,t) \quad \Rightarrow \quad u(x,0) = e^x = y(x,0)$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -ae^{-at} y(x,t) + e^{-at} y_t(x,t) \\ u_t(x,0) = -2ae^x \quad \Rightarrow \quad y_t(x,0) = -ae^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^2 y_{xx} = y_{tt} \quad ; \quad -\infty < x < \infty \quad ; \quad t > 0 \\ y(x,0) = e^x = f(x) \quad ; \quad -\infty < x < \infty \\ y_t(x,0) = -ae^x = g(x) \quad ; \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$ معادله موج

**ادامه حل مثال ۴-۱۶ :** جواب معادله با کمک روش دالامبر بدست می‌آید:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\eta)d\eta$$

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[e^{x+ct}+e^{x-ct}\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}(-a)e^{\eta}d\eta$$

$$y(x,t)=\frac{1}{2}e^{x-ct}\left[1+\frac{a}{c}\right]+\frac{1}{2}e^{x+ct}\left[1-\frac{a}{c}\right]$$

$$u(x,t)=e^{-at}y(x,t)$$

مثال ۴-۱۷ (سوال میانترم): معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را تحت شرایط مفروض حل کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_x = u_t & ; \quad 0 < x < \ell \quad ; \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & ; \quad t > 0 \qquad \text{(B.C.)} \\ u(x,0) = 2e^{-x} & ; \quad 0 < x < \ell \qquad \text{(I.C.)} \end{cases}$$

حل: اعمال روش جداسازی متغیرها:

$$\left.\begin{aligned} & u(x,t) = X(x).T(t) \\ & X''.T + 2X'.T = X.T' \\ & \frac{X'' + 2X'}{X} = \frac{T'}{T} = \sigma = \text{constant} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} X'' + 2X' - \sigma X = 0 \\ T' - \sigma T = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & u(0,t) = X(0).T(t) = 0 \quad , \quad \forall t > 0 \\ & u(\ell,t) = X(\ell).T(t) = 0 \quad , \quad \forall t > 0 \end{aligned} \xrightarrow[\text{داشتن جواب غیربدیهی}]{T(t) \neq 0} \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases}$$

**ادامه حل مثال ۴-۱۷ :**

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} X'' + 2X' - \sigma X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

یک روش حل آن است که از معادله مشخصه $s^2 + 2s - \sigma = 0$ استفاده کنیم و روی ریشه‌های

آن یعنی $-1 \pm \sqrt{1+\sigma}$ بحث کرد (سه حالت $1+\sigma > 0$ ، $1+\sigma < 0$ و $1+\sigma = 0$).

روش دوم: برای حل معادله (۱)، فرض کنید $X(x) = S(x).U(x)$ باشد و با انتخاب مناسب یکی از

توابع $S(x)$ یا $U(x)$ ، مجهول دیگر را بدست می‌آوریم.

$$X'' + 2X' - \sigma X = 0 \quad \Rightarrow \quad S''U + SU'' + 2S'U' + 2SU' + 2S'U - \sigma SU = 0$$

$$\Rightarrow \quad SU'' + (2S' + 2S)U' + (S'' + 2S' - \sigma S)U = 0$$

حال ضریب $U'$ را صفر قرار می‌دهیم:

$$2S' + 2S = 0 \quad \Rightarrow \quad S(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad X(x) = e^{-x}U(x)$$

**ادامه حل مثال ۴-۱۷ :**

$$\left.\begin{array}{l} S(x) = e^{-x} \\ SU'' + (2S' + 2S)U' + (S'' + 2S' - \sigma S)U = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow e^{-x}U'' + 0 \times U' + (e^{-x} - 2e^{-x} - \sigma e^{-x})U = 0$$

$$\Rightarrow U'' - (1+\sigma)U = 0$$

**از طرف دیگر از رابطه $X(x) = e^{-x}U(x)$ و رابطه (۱) اسلاید صفحه قبل می‌توان شرایط مرزی زیر را بدست آورد:**

$$\begin{cases} X(0) = 0 = e^{-x}U(x)\big|_{x=0} & \Rightarrow \quad U(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 = e^{-x}U(x)\big|_{x=\ell} & \Rightarrow \quad U(\ell) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U'' - (1+\sigma)U = 0 \\ U(0) = U(\ell) = 0 \end{cases}$$

**حال باید برحسب $\sigma$ بحث کرد:**

<u>حالت اول:</u> اگر $1+\sigma=0$ یا $\sigma=-1$ باشد:

$$U''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad U(x)=c_1x+c_2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} U(0)=c_2=0 \\ U(\ell)=c_1\ell=0 \quad \Rightarrow \quad c_1=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad U(x)=0$$

بنابراین، حالت $\sigma=-1$ منجر به جواب $X(x)=e^{-x}U(x)=0$ و بدنبال آن جواب بدیهی $u(x,t)=0$ خواهد شد.

<u>حالت دوم:</u> اگر $1+\sigma=\lambda^2>0$ باشد:

$$\begin{cases} U''-(1+\sigma)U=0 \\ U''-\lambda^2U=0 \quad \Rightarrow \quad U(x)=c_1\sinh\lambda x+c_2\cosh\lambda x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} U(0)=c_2=0 \\ U(\ell)=c_1\underbrace{\sinh\lambda\ell}_{\text{مخالف صفر}}=0 \quad \Rightarrow \quad c_1=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad U(x)=0 \quad \Rightarrow X(x)=0$$

جواب بدیهی $u(x,t)=0$

**حالت سوم:** اگر $0 > -\lambda^2 = \sigma + 1$ باشد ( $\lambda > 0$ حقیقی):

$$\begin{cases} U'' - (1+\sigma)U = 0 \\ U'' + \lambda^2 U = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad U(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U(0) = c_2 = 0 \\ U(\ell) = c_1 \sin \lambda\ell = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{داشتن جواب غیربدیهی}]{c_1 \neq 0} \sin \lambda\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda\ell = n\pi \\ \lambda_n = \dfrac{n\pi}{\ell} \end{cases} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$U(x) = c_1 \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \quad \Rightarrow \quad X(x) = e^{-x} U(x) = c_1 e^{-x} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

$$\begin{cases} T' - \sigma T = 0 \\ T' + (1+\lambda_n^2) T = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad T(t) = k e^{-(1+\lambda_n^2)t}$$

$$\xrightarrow{kc_1 = 1} \quad u_n(x,t) = X(x).T(t) = e^{-(1+\lambda_n^2)t} e^{-x} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad n \geq 1$$

جوابهای اساسی

نکته: طبق قضیه ۱-۱ از صفحه ۱۲، می‌توان نتیجه گرفت که عبارت زیر نیز جواب معادله با شرایط اولیه و مرزی مذکور است:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(1+\frac{n^2\pi^2}{\ell^2})t} e^{-x}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \qquad (۱)$$

اعمال شرط اولیه:

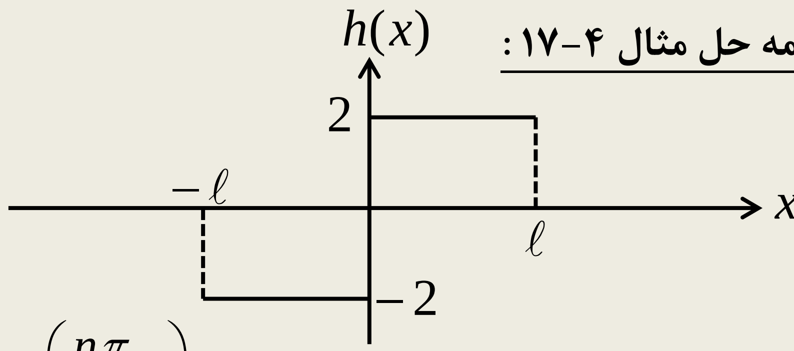
با اعمال شرط اولیه $0<x<\ell \quad u(x,0)=2e^{-x}\,,$ درجواب (۱) داریم:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-x}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=2e^{-x} \quad ; \quad 0<x<\ell$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=2$$

که این مستلزم بسط سری فوریه سینوسی (تابع فرد پریودیک) $g(x)=2, \quad 0<x<\ell$ می‌باشد.

**ادامه حل مثال ۴-۱۷ :**




$$h(x)=\begin{cases}2 & ; \quad 0<x<\ell\\ 0 & ; \quad x=0,\ell\\ -2 & ; \quad -\ell<x<0\end{cases}$$

$$h(x+2\ell)=h(x)$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} h(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} 2\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$b_n=\frac{4}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}0 & ; \quad n \ \text{زوج}\\ \dfrac{8}{\mathrm{n}\pi} & ; \quad n \ \text{فرد}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b_{2n}=0\\ b_{2n-1}=\dfrac{8}{(2\mathrm{n}-1)\pi} & ; \quad n\geq 1\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(1+\frac{n^2\pi^2}{\ell^2})t} e^{-x}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)\pi} e^{-(1+\frac{(2n-1)^2\pi^2}{\ell^2})t} e^{-x}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{\ell}x\right)$$