بخش چهارم: سری فوریه
(Fourier Series)

در علوم مهندسی به کرات با توابع متناوب برخورد می‌کنیم که در برخی موارد نیازمند نمایش این توابع برحسب توابع سینوس و کسینوس (نمایش سری فوریه) می‌باشد. سری فوریه یکی از ابزارات بسیار قدرتمند در آنالیز سیگنال‌ها در علوم مهندسی برق و به‌ویژه در علم مخابرات می‌باشد. قبل از پرداختن به بحث سری فوریه، در این بخش، یکسری مفاهیم مقدماتی معرفی می‌گردند.

تعریف ۴-۱ (توابع متناوب): تابع $f(x)$ را متناوب (پریودیک) با پریود T گوییم، هرگاه این تابع بازای هر عدد حقیقی $x \in D_f$ تعریف شده باشد و عدد مثبتی مانند T یافت شود به‌طوریکه $f(x+T) = f(x)$ باشد.

Dr Jamshid Abouei
ECE Department-Yazd University

<u>نکته ۴-۱</u>: مشخصاً اگر T دوره تناوب $f(x)$ باشد، kT برای $k \in Z$ نیز دوره تناوب $f(x)$ است.

<u>تعریف ۴-۲</u>: کوچکترین عدد مثبت T که در رابطه $f(x+T) = f(x)$ صدق کند را دوره تناوب اصلی (**Fundamental Period**) می‌نامند.

<u>مثال ۴-۱</u>: توابع $\sin \frac{m\pi}{\ell} x$ و $\cos \frac{m\pi}{\ell} x$ که در آن $m \in N$ است متناوب با دوره تناوب اصلی $T = \frac{2\ell}{m}$ می‌باشند.

$$\sin \frac{m\pi}{\ell}\left(x + \frac{2\ell}{m}\right) = \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cos 2\pi + \cos \frac{m\pi}{\ell} x \sin 2\pi = \sin \frac{m\pi}{\ell} x$$

همانگونه که بعداً خواهیم دید سری فوریه بازای $m = 1 \quad ; \quad T = \frac{2\ell}{m} = 2\ell$ بدست می‌آید.

<u>مثال ۴-۲</u>: تابع ثابت $f(x) = c$ نیز پریودیک با دوره تناوب T است که در آن T هر عدد حقیقی مثبت می‌باشد. همچنین این تابع دوره تناوب اصلی ندارد. $f(x+T) = c \quad \Rightarrow \quad \forall x \in R \therefore f(x) = c$

تعریف ۴-۳: اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع متناوب با پریود T باشند، $h(x)=c_1 f(x)+c_2 g(x)$ نیز متناوب

با پریود T است ($c_1, c_2 \in R$).

مفهوم فوق را می‌توان به ترکیب بی‌نهایت تابع پریودیک به شرط همگرایی توسیع داد. یعنی اگر $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

مجموعه‌ای از توابع متناوب با دوره تناوب اصلی T باشند، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ نیز تابعی متناوب با دوره

تناوب اصلی T است.

نتیجه ۴-۱: از آنجایی‌که مجموعه توابع $\left\{1, \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \cos\frac{n\pi}{\ell}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ پریودیک با دوره تناوب $T=2\ell$

است، تابع $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]$ نیز پریودیک با دوره تناوب $T=2\ell$

است. نمایش فوق را «سری فوریه» تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $T=2\ell$ می‌نامند.

نمایش سری فوریه:

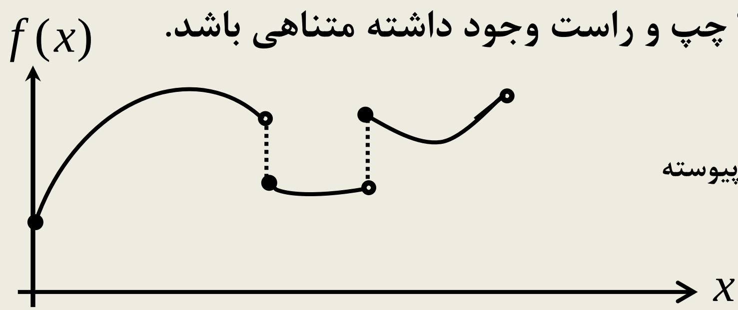
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]$$

قبل از محاسبه ضرائب سری فوریه a_0 ، a_n و b_n ، لازم است مفاهیم زیر معرفی گردند.

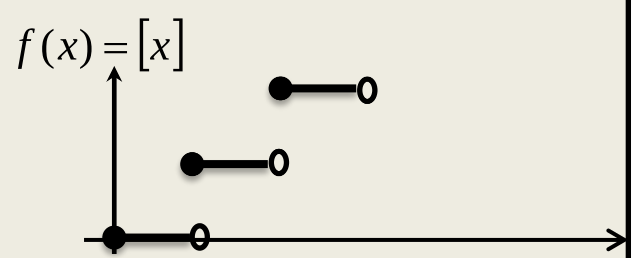
تعریف ۴-۴: تابع $f(x)$ را روی بازه $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته (**Piecewise Continuous**) گوییم، هرگاه این تابع در شرایط مندرج در ذیل صدق کند:

۱- مجموعه نقاط انفصال تابع $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ یک مجموعه متناهی (محدود) باشد.

۲- در نقاطی که تابع $f(x)$ در آنها ناپیوسته است، حدّ چپ و راست وجود داشته متناهی باشد.



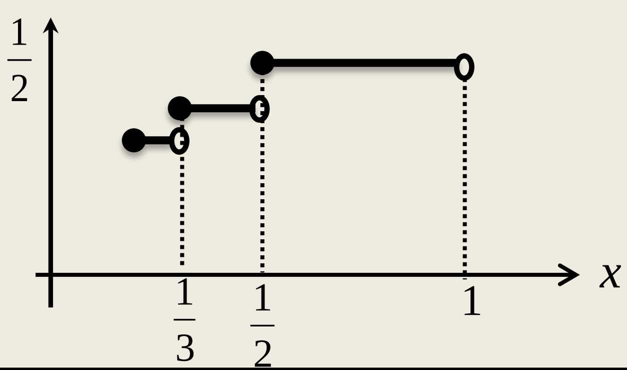
توابع قطعه‌ای پیوسته



مثال ۴-۳: تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ روی بازه $[-1,1]$ قطعه‌ای پیوسته نیست.

مثال ۴-۴: تابعی با بی‌نهایت نقطه ناپیوستگی:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n} \quad ; & \dfrac{1}{2n}<x<\dfrac{1}{2n-1}\\[2ex] \dfrac{1}{2n+1} \quad ; & \dfrac{1}{2n+1}<x<\dfrac{1}{2n}\end{cases} \qquad n\in N$$



قضیه ۴-۱: اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه تابع $f(x)$ روی فاصله مزبور انتگرال‌پذیر است (قابل استفاده در محاسبه ضرائب سری فوریه).

تعریف ۴-۵ (ضرب داخلی دو تابع حقیقی): فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع حقیقی قطعه‌ای پیوسته روی فاصله $[a,b]$ باشند. در این‌صورت ضرب داخلی (**Inner Product**) توابع $f(x)$ و $g(x)$ روی بازه $[a,b]$ بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

تعریف ۴-۶: دو تابع قطعه‌ای پیوسته $f(x)$ و $g(x)$ را روی بازه $[a,b]$ متعامد (**Orthogonal**) گویند و می‌نویسیم $f \perp g$ ، هرگاه $\langle f, g\rangle = 0$.

تعریف ۴-۷: یک مجموعه از توابع قطعه‌ای پیوسته را روی بازه $[a,b]$ متعامد گویند، هرگاه هر زوج متمایز از این مجموعه روی فاصله مزبور متعامد باشند.

قضیه ۴-۲ (روابط تعامد): توابع $\left\{\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \cos\frac{n\pi}{\ell}x\right\}_{n=1}^{\infty}$ روی فاصله $[-\ell,\ell]$ یک مجموعه از توابع متعامد را تشکیل می‌دهند.

$$1)\qquad \int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\sin\frac{m\pi}{\ell}x\,dx=\begin{cases}0 & ;\quad m\neq n\\ \ell & ;\quad m=n\end{cases}$$

$$2)\qquad \int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{m\pi}{\ell}x\,dx=\begin{cases}0 & ;\quad m\neq n\\ \ell & ;\quad m=n\end{cases}$$

$$3)\qquad \int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{m\pi}{\ell}x\,dx=0\qquad ;\qquad \forall m,n$$

بدین ترتیب مقدمات لازم برای محاسبه ضرائب سری فوریه فراهم می‌گردد.

نمایش سری فوریه:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]$$

برای محاسبه a_0، ابتدا از طرفین رابطه فوق روی فاصله $\left[-\ell,\ell\right]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\ell}^{\ell}dx+\int_{-\ell}^{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]dx$$

$$=a_0\ell+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\underbrace{\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx}_{=0}+b_n\underbrace{\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx}_{=0}\right]=a_0\ell$$

$$\Rightarrow\qquad \boxed{a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx}$$

نمایش سری فوریه:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]$$

برای محاسبه a_n، ابتدا طرفین رابطه فوق را در $\cos\frac{m\pi}{\ell}x$ ضرب کرده روی فاصله $[-\ell,\ell]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{m\pi}{\ell}xdx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{m\pi}{\ell}xdx}_{=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{m\pi}{\ell}xdx\right.$$

$$\left.+b_n\underbrace{\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{m\pi}{\ell}xdx}_{=0}\right]$$

طبق رابطه (۳) از روابط تعامد

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{m\pi}{\ell}xdx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\underbrace{\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{m\pi}{\ell}xdx}=a_m\ell$$

طبق رابطه (۲) از روابط تعامد بازای $m=n$ غیر صفر

$$\Rightarrow \qquad \boxed{a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx} \qquad n\in N$$

بطور مشابه برای محاسبه b_n ، طرفین رابطه سری فوریه را در $\sin\frac{m\pi}{\ell}x$ ضرب کرده و روی فاصله $[-\ell,\ell]$ انتگرال می‌گیریم. بعنوان تمرین نشان دهید:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx} \qquad n\in N$$

نمایش سری فوریه:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]$$

روابط اویلر – فوریه:

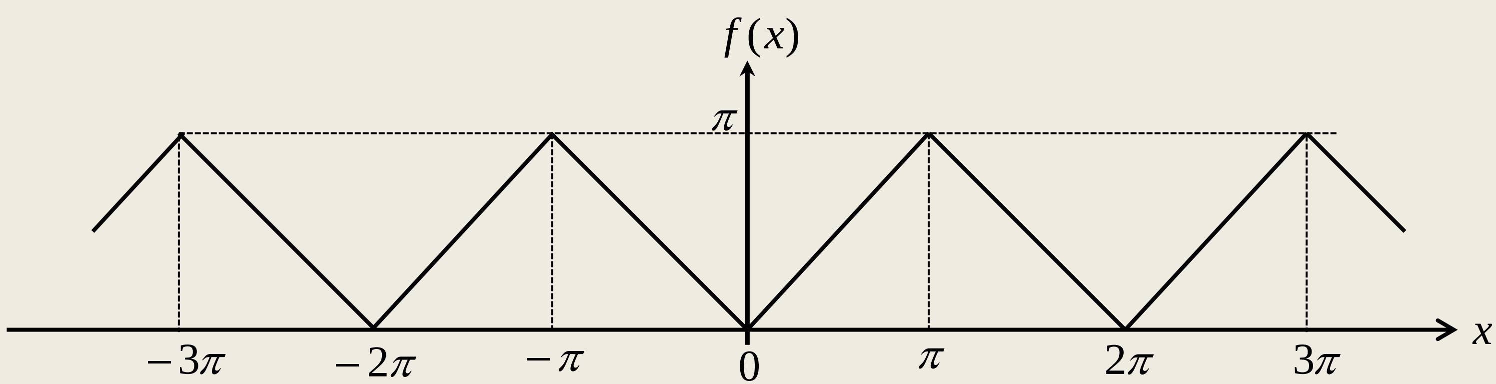
$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx \qquad ; \qquad n\in N$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx$$

مثال ۴-۵ (کنکور ارشد ۷۰): تابع متناوب $f(x)$ یک موج مثلثی پریودیک با دوره تناوب 2π است که در یک پریود $[-\pi,\pi]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد. مطلوب است نمایش سری فوریه $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}-x & ; \quad -\pi \le x < 0 \\ x & ; \quad 0 \le x < \pi\end{cases}$$



حل: دیده می‌شود که $\ell=\pi$ است. بنابراین:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$$

نمایش سری فوریه:

بسیار مهم

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]}$$

روابط اویلر – فوریه:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{تابع زوج}}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi-1\right)\quad ;\quad n\geq 1$$

از قاعده هوپیتال نمی‌توان a_0 را بدست آورد.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{تابع فرد}}dx=0$$

نمایش سری فوریه:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi-1\right]\cos nx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

نتیجه: همانگونه که بعداً نشان خواهیم داد، از آنجایی که تابع $f(x)$ یک تابع زوج است، سری فوریه آن فرم کسینوسی است.

مثال ۴-۶ (تمرین کتاب بویس): الف) از بسط فوریه موج مثلثی مثال ۴-۵ نشان دهید:

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

ب) بطور تقریبی مقدار π را از چهار ترم اول سری فوق بدست آورید.

حل: الف) با توجه به سری فوریه موج مثلثی مثال ۴-۵ داریم:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

دیده می‌شود که بازای $x=0$ ، $f(0)=0$ است. بنابراین:

$$f(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 0}{(2n-1)^2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\Rightarrow\pi^2\approx 9.372\Rightarrow\pi\approx 3.06$$

مثال ۴-۷ (تمرین کتاب بویس): فرض کنید $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$ سری فوریه $f(x)$ باشد. ثابت کنید: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2+b_n^2\right]$

این معادله معروف به معادله پارسوال (**Parseval's Equation**) می‌باشد (سوال کنکور ارشد).

حل: ابتدا سری فوریه را در $f(x)$ ضرب کرده روی بازه $[-\pi,\pi]$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n f(x)\cos nx+b_n f(x)\sin nx\right]dx$$

فرض کنید بتوان از جمله جمله عبارات داخل $\sum$ انتگرال گرفت:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{a_0}{2}\times[\pi a_0]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx}_{\pi a_n}+b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx}_{\pi b_n}\right]$$

تمرین ۴-۱: تابع متناوب $f(x)$ یک موج سینوسی نیم سیکل مثبت پریودیک با دوره تناوب ۶ است که در یک پریود $[-3,3]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد. مطلوب است نمایش سری فوریه $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad -3<x\le 0\\ \sin\dfrac{\pi}{3}x & ; \quad 0<x\le 3\end{cases} \qquad ; \qquad f(x)=f(x+6)$$

جواب:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}x$$

قضیه همگرایی سری فوریه

دیده شد که تابع متناوب $f(x)$ را می‌توان برحسب توابع سینوس و کسینوس (نمایش سری فوریه) نوشت. حال این سوال مطرح می‌شود که آیا برای هر تابع پریودیک $f(x)$ ، سری فوریه وجود دارد؟

<u>قضیه ۴-۳ (همگرایی سری فوریه)</u>: فرض کنید توابع $f(x)$ و $f'(x)$ روی بازه $[-\pi,\pi]$ قطعه‌ای پیوسته باشند. علاوه بر آن فرض کنید تابع $f(x)$ خارج از بازه $[-\pi,\pi]$ متناوب و با دوره تناوب 2π تعریف شده باشد. در این صورت، سری فوریه متناظر با تابع $f(x)$ وجود دارد (همگراست) و بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$$

که در آن ضرائب فوریه از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad n\geq 0 \qquad ; \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad n\geq 1$$

ادامه قضیه ۴-۳: در نقاطی که تابع $f(x)$ در آنها پیوسته باشد، سری فوریه به مقدار $f(x)$ در آن نقطه همگرا خواهد شد و در نقاطی که تابع $f(x)$ در آنها ناپیوسته باشد، سری مزبور به متوسط (میانگین) حد چپ و راست تابع $f(x)$ در آن نقطه همگرا خواهد شد:

$$\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} = \text{متوسط حد چپ و راست}$$

در حالت کلی می‌توان گفت سری فوریه در هر نقطه (اعم از پیوسته یا ناپیوسته) به میانگین حد چپ و راست تابع $f(x)$ در آن نقطه همگرا خواهد شد زیرا در نقاط پیوستگی داریم: $f(x) = f(x^-) = f(x^+)$

یادآوری:

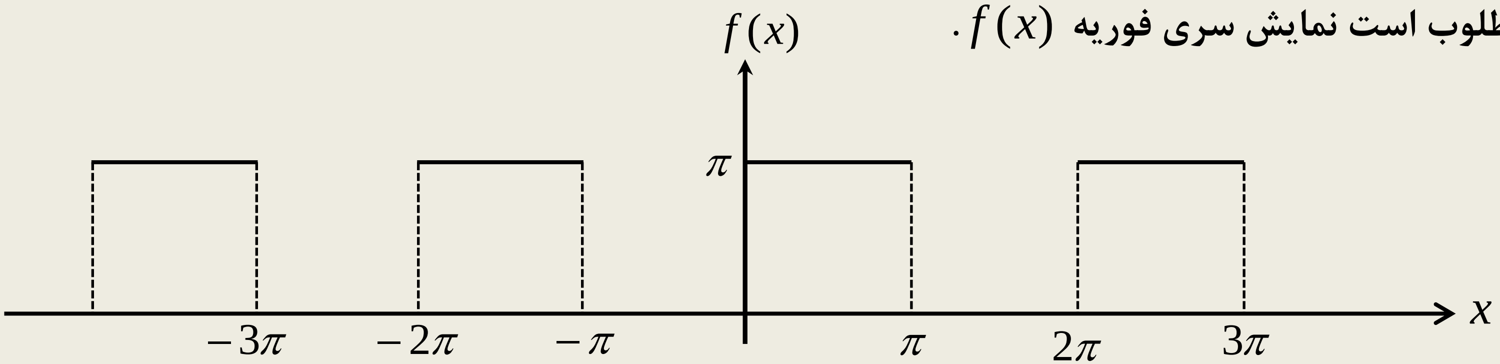
1) حد چپ تابع $f(x)$ در x_0 $\qquad f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

2) حد راست تابع $f(x)$ در x_0 $\qquad f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

دانشگاه یزد

<u>نکته ۴-۲:</u> همان‌طور که مشاهده می‌شود در نقاط ناپیوستگی، تعریف تابع اهمیتی ندارد ولی از لحاظ کاربردی، بهترین تعریف (در جهت همگرایی سریعتر سری) میانگین حدود چپ و راست می‌باشد.

<u>مثال ۴-۸:</u> تابع متناوب $f(x)$ یک موج مربعی پریودیک با دوره تناوب 2π است که در یک پریود $[-\pi,\pi]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد. الف) آیا سری فوریه متناظر با تابع $f(x)$ وجود دارد؟ ب) در صورت وجود، مطلوب است نمایش سری فوریه $f(x)$.



حل: الف) بسادگی دیده می‌شود که توابع $f(x)$ و $f'(x)$ روی فاصله $[-\pi,\pi]$ قطعه‌ای پیوسته‌اند.

از طرفی، تابع $f(x)$ در خارج از فاصله مذکور پریودیک با دوره تناوب 2π تعریف شده است. بنابراین،

باستناد قضیه همگرایی سری فوریه، دیده می‌شود که سری فوریه متناظر با تابع $f(x)$ وجود دارد.

ب)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi dx=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi\cos nxdx=0 \qquad ; \qquad n\geq 1$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi\sin nxdx=\frac{1-\cos n\pi}{n} \qquad ; \qquad n\geq 1$$

ادامه حل:

$$1-\cos n\pi=\begin{cases}0 & ; \quad \text{زوج } n\\ 2 & ; \quad \text{فرد } n\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \qquad (۱)$$

بررسی سری فوریه در نقاط ناپیوسته $x=0,-\pi,\pi$:

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

ازسری فوریه (۱) نیز دیده می‌شود که $f(0)=\dfrac{\pi}{2}$ است. بنابراین، در نقطه ناپیوسته $x=0$ ، مقدار سری فوریه $f(x)$ به میانگین حد چپ و راست آن همگراست. بطور مشابه: $f(\pi)=f(-\pi)=\dfrac{\pi}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad -\pi<x<0\\ \dfrac{\pi}{2} & ; \quad x=-\pi,0,\pi\\ \pi & ; \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

مثال ۴-۹ (تمرین کتاب بویس): از بسط فوریه موج مربعی مثال ۴-۸ ، مقدار $\frac{\pi}{4}$ را بدست آورید:

حل: با توجه به سری فوریه موج مربعی از مثال ۴-۸ داریم:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

از روی شکل صفحه ۵۴ دیده می‌شود که $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ است. بنابراین:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi=\frac{\pi}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

دانشگاه یزد

تمرین ۴-۲: تابع متناوب $f(x)$ یک موج پریودیک با دوره تناوب ۲ است که در یک پریود $[-1,1]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد. الف) مطلوب است نمایش سری فوریه $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} x & ; \quad 0<x<1 \\ 0 & ; \quad -1<x<0 \end{cases} \qquad ; \qquad f(x)=f(x+2)$$

ب) در مورد همگرایی سری فوریه در نقاط ناپیوستگی بحث کنید. ج) ثابت کنید $\dfrac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$

جواب: $$f(x)=\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\cos n\pi\sin n\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)\cos n\pi x$$

سری فوریه توابع زوج و فرد

در این بخش ابتدا به معرفی توابع زوج و فرد پرداخته سپس سری فوریه این توابع را بدست می‌آوریم.

تعریف ۴-۸ (توابع زوج و فرد): تابع $f(x)$ را زوج گوییم، هرگاه نمودار تابع نسبت به محور عمودی y متقارن باشد. بعبارتی:

$$\forall x \in D_f \quad : \quad -x \in D_f$$

$$f(x) = f(-x)$$

بعنوان مثال $\cos x$ و $\cosh x$ توابعی زوج هستند.

تابع $f(x)$ را فرد گوییم، هرگاه نمودار تابع نسبت به مبدا مختصات متقارن باشد و $f(0)=0$ است.

بعبارتی:

$$\forall x \in D_f \quad : \quad -x \in D_f$$

$$f(x) = -f(-x)$$

بعنوان مثال $\sin x$ و موج دندانه اره‌ای توابعی فرد هستند.

ویژگیهای توابع زوج و فرد

۱- مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم دو تابع زوج، تابعی زوج است.

۲- مجموع و تفاضل دو تابع فرد، تابعی فرد است.

۳- حاصل ضرب و تقسیم یک تابع زوج و یک تابع فرد، تابعی فرد است.

۴- مجموع و تفاضل یک تابع زوج و یک تابع فرد، نه زوج و نه فرد است ($f(x)=x^3+\cos x$).

۵- مشتق یک تابع فرد، تابعی زوج و مشتق یک تابع زوج، تابعی فرد است.

۶- اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، ثابت کنید: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ = سطح زیر منحنی تابع

۷- اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، ثابت کنید: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ = سطح زیر منحنی تابع

۸- ثابت کنید تابعی که هم فرد است و هم زوج، تابع $f(x)=0$ است.

تمرین ۴-۳ (کتاب بویس): فرض کنید $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ تعریف شده باشد. ثابت کنید اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد، $F(x)$ یک تابع فرد است و اگر $f(x)$ یک تابع فرد باشد، $F(x)$ یک تابع زوج است.

سری فوریه توابع زوج (سری فوریه کسینوسی): فرض کنید تابع زوج و متناوب $f(x)$ با پریود اصلی 2π در کلیه شرایط قضیه همگرایی سری فوریه صدق کند. در این‌صورت، سری فوریه و ضرائب آن به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nxdx}_{\text{تابع زوج}}=\boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad ; \quad n\geq 0}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nxdx}_{\text{تابع فرد}}=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]=\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx}$$

دانشگاه یزد

<u>سری فوریه توابع فرد (سری فوریه سینوسی):</u> فرض کنید تابع فرد و متناوب $f(x)$ با پریود اصلی 2π در کلیه شرایط قضیه همگرایی سری فوریه صدق کند. در این‌صورت، سری فوریه و ضرائب آن به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx dx}_{\text{تابع فرد}} = 0 \qquad ; \qquad n \ge 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx dx}_{\text{تابع زوج}} = \boxed{\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad ; \qquad n \ge 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right] = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx}$$

تمرین ۴-۴: الف) نشان دهید تابع $f(x)=x^2$ با $-\pi < x \le \pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ دارای سری فوریه کسینوسی بصورت زیر است:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{9}\cos 3x-....\right)$$

ب) با استفاده از سری فوریه بند (الف) و پیدا نمودن x مشخص، نشان دهید:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+....=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

ج) همچنین نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+....=\frac{\pi^2}{12}$$

Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

تمرین ۴-۵: سری فوریه هر یک از توابع زیر را بدست آورید:

1) $f(x) = |\sin x| \quad ; \quad x \in R$

2) $f(x) = 4 - x^2 \quad ; \quad -2 \le x < 2 \quad , \quad f(x+4) = f(x)$

تمرین ۴-۶: سری فوریه تابع $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ را روی هر یک از بازه‌های زیر بدست آورید:

الف) $[-\pi, \pi]$ ب) $[-2\pi, 2\pi]$

مثال ۴-۱۰: سری فوریه تابع $f(x) = \cos^4 x$ را روی بازه $[-\pi, \pi]$ بدست آورید.

حل:

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{3}{4} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{8} \quad ; \quad \text{other} \quad a_n = 0$$

Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

دانشگاه یزد

تمرین ۴-۷: نشان دهید سری فوریه تابع $f(x)=x+x^2$ روی بازه $[-\pi,\pi]$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ بصورت زیر است:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx+\frac{-2}{n}(-1)^n\sin nx\right]$$

- با استفاده از سری فوریه فوق و پیدا نمودن x مشخص، نشان دهید:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+....=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

- در مورد همگرایی سری فوریه در نقاط ناپیوستگی $x=-\pi,\pi$ بحث کنید.