بخش پنجم: حل معادلات لاپلاس روی نواحی چند بعدی

نکته ۵-۱: تا بدینجا هدف حل معادلات با مشتقات جزئی تعریف شده روی یک بعد بود (مفتول نازک که در امتداد محور x قرار دارد، یا نخ کشسانی که در جهت عمودی نوسان می‌کند). در این حالت تابع هدف $u(x,t)$ روی بعد x و در هر لحظه از زمان t بدست می‌آمد. برای این معادلات، شرایط مرزی مربوط به بعد x ارائه می‌گردید، مانند $u(0,t)=0$ و $u(\ell,t)=0$.

نکته ۵-۲: حال در این بخش می‌خواهیم به حل معادلات با مشتقات جزئی معروف روی نواحی دو بعدی x و y یا تعریف شده در مختصات قطبی بپردازیم. مهمترین این معادلات، معادله لاپلاس دو بعدی زیر در مختصات کارتزین می‌باشد که هدف بدست آوردن $u(x,y)$ است.

لاپلاسین u :
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

نکته ۵-۳: در اغلب کاربردهایی که به معادلات لاپلاس منتهی می‌شود (مانند قوانین ماکسول در درس الکترومغناطیس)، شرایط مرزی نیز وجود دارند که ما را در حل این معادلات یاری می‌دهند. اما باید دقت نمود که شرایط مرزی در کدام مختصات تعریف شده‌اند. در این حالت لازم است معادله لاپلاس را به آن مختصات تبدیل کرد.

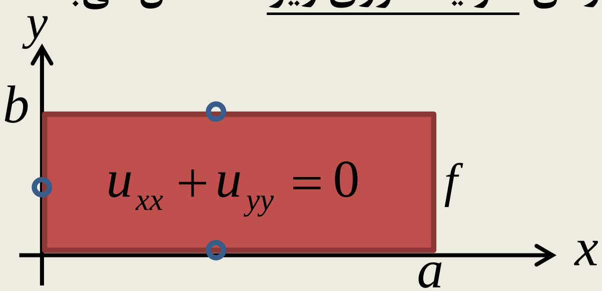
مختصات کارتزین
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

∇ : **nabla**

مختصات استوانه‌ای
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u_{zz}$$

مختصات کروی
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

<u>مثال ۵-۱:</u> فرض کنید بخواهیم معادله لاپلاس دوبعدی $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ را روی یک ناحیه مستطیلی شکل در مختصات کارتزین بدست آوریم که در آن <u>شرایط مرزی زیر</u> مشخص می‌باشند.



$$\text{(B.C.)}\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u(x,b) = 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 < x < a$$

$$\text{(B.C.)}\begin{cases} u(0,y) = 0 \\ u(a,y) = f(y) \end{cases} \quad ; \quad 0 < y < b$$

<u>حل:</u> از تکنیک جداسازی متغیرها داریم:

$$u(x,y) = X(x).Y(y)$$

$$X''.Y + X.Y'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ Y'' + \lambda Y = 0 \end{cases}$$

اعمال شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(x,0) = X(x).Y(0) = 0 \quad , \quad 0 < x < a \\ u(x,b) = X(x).Y(b) = 0 \quad , \quad 0 < x < a \end{cases} \xrightarrow[\text{داشتن جواب غیربدیهی}]{X(x) \neq 0} \begin{cases} Y(0) = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

$$u(0,y) = X(0).Y(y) = 0 \quad , \quad 0 < y < b \xrightarrow[\text{داشتن جواب غیربدیهی}]{Y(y) \neq 0} X(0) = 0$$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

قبلاً در اسلایدهای ۲۷ و ۲۸ اثبات گردید که معادله فوق دارای جواب غیربدیهی $u(x,y) \neq 0$ تنها در حالت $\lambda = \sigma^2 > 0$ است که در آن $\sigma = \dfrac{n\pi}{b}$ می‌باشد. در این حالت بدست آوردیم:

$$Y(y) \propto \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad ; \quad n \in N$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = X'' - \sigma^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = k_1 \sinh(\sigma x) + k_2 \cosh(\sigma x) \\ X(0) = k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X(x) = k_1 \sinh(\sigma x) = k_1 \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right)$$

$$u_n(x,y) = \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad ; \quad n \in N$$ جوابهای اساسی

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

اعمال شرط مرزی:

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = f(y) \quad ; \quad 0 < y < b$$

$$u(a,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)=f(y) \qquad ; \qquad 0<y<b$$

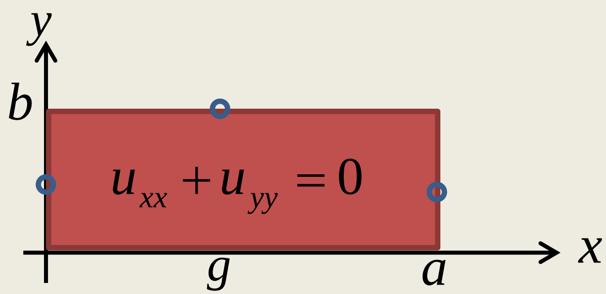
دیده می‌شود که $f(y)$ دارای سری فوریه سینوسی است. پس باید $f(y)$ را بصورت یک تابع فرد توسیع داد:

$$g(y)=\begin{cases} f(y) & ; \quad 0<y<b \\ 0 & ; \quad y=0,b \\ -f(-y) & ; \quad -b<y<0 \end{cases} \qquad g(y+2b)=g(y)$$

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)=\frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy$$

تمرین ۵-۱: مطلوبست حل معادله لاپلاس دوبعدی $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ روی یک ناحیه مستطیلی

شکل تحت شرایط مرزی زیر.



$$\text{(B.C.)} \begin{cases} u(x,0) = g(x) \\ u(x,b) = 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 < x < a$$

$$\text{(B.C.)} \begin{cases} u(0,y) = 0 \\ u(a,y) = 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 < y < b$$

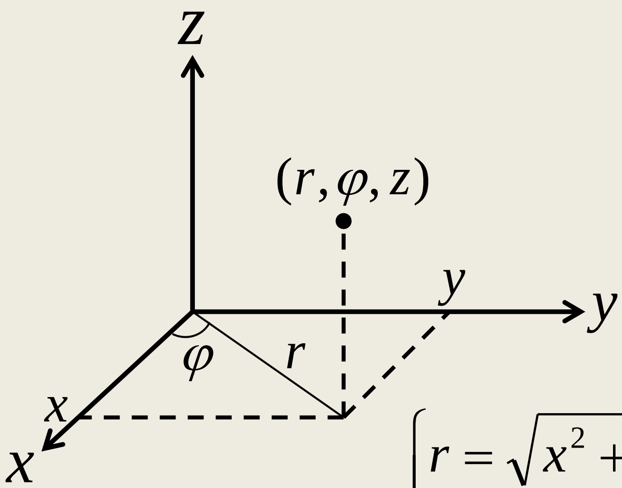
جواب:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad ; \quad c_n = \frac{k_1}{\cosh \frac{n\pi}{a} b}$$

نتیجه: در حالت بعدی شرط مرزی غیر صفر دیگر را در نظر گرفته، در نهایت از قضیه جمع آثار، تمام

جوابها با هم جمع می‌شوند.

معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ در مختصات استوانه‌ای



تمرین: در مختصات استوانه‌ای روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x = \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r} \\ r_{xx} = \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{y^2}{r^3} \end{cases} ; \begin{cases} \varphi_x = \dfrac{-y}{r^2} \\ \varphi_{xx} = \dfrac{2xy}{r^4} \end{cases}$$

در این بخش، هدف تبدیل معادله لاپلاس $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ از مختصات کارتزین به مختصات استوانه‌ای است و سپس به حل معادله $\nabla^2 u = 0$ در مختصات استوانه‌ای می‌پردازیم.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}.\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_r r_x + u_\varphi \varphi_x$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_r r_x + u_\varphi \varphi_x\right) = (u_r r_x)_x + (u_\varphi \varphi_x)_x$$

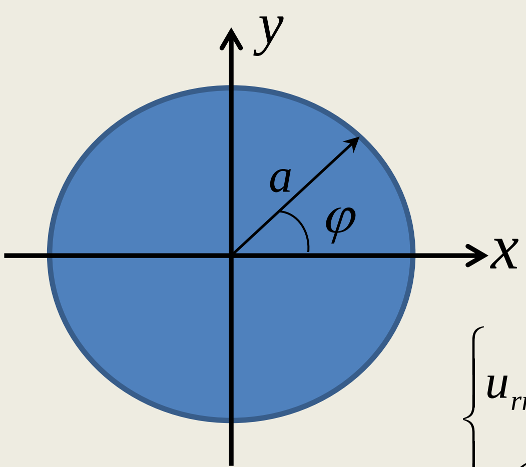
$$u_{xx} = [u_{rr} r_x + u_{r\varphi}\varphi_x] r_x + u_r r_{xx} + [u_{\varphi r} r_x + u_{\varphi\varphi}\varphi_x]\varphi_x + u_\varphi \varphi_{xx}$$

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2\dfrac{xy}{r^3} u_{r\varphi} + \dfrac{y^2}{r^4} u_{\varphi\varphi} + \dfrac{y^2}{r^3} u_r + 2\dfrac{xy}{r^4} u_\varphi \\ u_{yy} = \dfrac{y^2}{r^2} u_{rr} + 2\dfrac{xy}{r^3} u_{r\varphi} + \dfrac{x^2}{r^4} u_{\varphi\varphi} + \dfrac{x^2}{r^3} u_r - 2\dfrac{xy}{r^4} u_\varphi \end{cases}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u_{zz}$$

معادله لاپلاس در
مختصات استوانه‌ای

مثال ۵-۲: فرض کنید بخواهیم معادله لاپلاس دوبعدی $\nabla^2 u = 0$ را روی ناحیه دایره‌ای شکل زیر در مختصات قطبی بدست آوریم که در آن شرط مرزی $u(a,\varphi) = f(\varphi)$ مشخص می‌باشد. در این مساله فرض می‌شود که $u(r,\varphi)$ بازای کلیه نقاط $r \le a$ کرانه‌دار (محدود) می‌باشد. همچنین فرض کنید $u(r,\varphi)$ برحسب φ یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π است. هدف از این مساله بدست آوردن تابع $u(r,\varphi)$ داخل ناحیه $r \le a$ می‌باشد.



حل: لازم به ذکر است که مختصات استوانه‌ای به ازای $z = 0$ تبدیل به مختصات قطبی می‌شود.

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0 & ; \quad r \le a \\ u(a,\varphi) = f(\varphi) & ; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0 & ; \quad r \le a \\ u(a,\varphi) = f(\varphi) & ; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

<u>ادامه حل مثال ۵-۲:</u> از روش جداسازی متغیرها داریم:

$$u(r,\varphi) = R(r).\Phi(\varphi)$$

$$R''.\Phi + \frac{1}{r} R'.\Phi + \frac{1}{r^2} R.\Phi'' = 0$$

$$\left(r^2 R'' + rR'\right)\Phi = -R.\Phi''$$

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \end{cases}$$

حال بازای مقادیر مختلف λ بحث می‌کنیم. قبلاً ثابت گردید که λ یک ثابت حقیقی است.

حالت اول: $\lambda = 0$

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = c_1\varphi + c_2$$

از طرفی $u(r,\varphi)$ برحسب φ یک تابع پریودیک با دوره تناوب 2π است.

$$\begin{cases} \Phi(\varphi) = c_1\varphi + c_2 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \quad c_1(\varphi + 2\pi) + c_2 = c_1\varphi + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = c_2 \quad \text{ثابت دلخواه}$$

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad r^2R'' + rR' = 0$$

یادآوری: فرم کلی معادله اویلر بصورت $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ است که معادله شاخص آن بصورت

$F(r) = r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$ است. اگر در معادله شاخص $r_1 = r_2 = r$ باشد داریم:

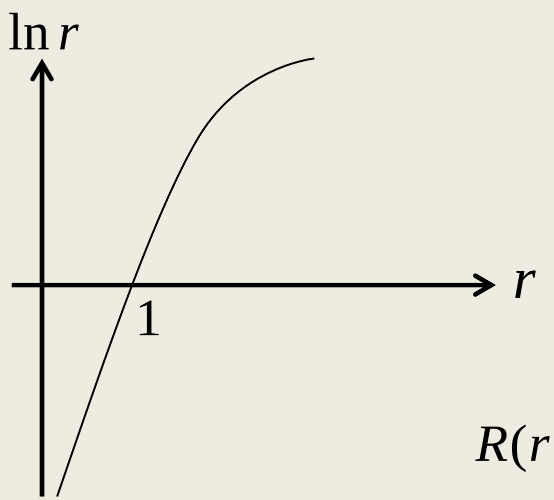
$$y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)x^r$$

Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

با معادل سازی روابط داریم: $F(x) = x^2 + (1-1)x + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0$

در این حالت، $R(r) = (c_1 + c_2 \ln r) r^0 = c_1 + c_2 \ln r \qquad (۱)$



از شکل روبرو دیده می‌شود که $\lim_{r \to 0^+} \ln r \to -\infty$

در حالیکه طبق فرض مساله $u(r,\varphi)$ باید بازای کلیه

نقاط $r \le a$ کرانه‌دار (محدود) می‌باشد. بنابراین الزاماً

باید $c_2 = 0$ باشد. در نتیجه از معادله (۱) داریم: $R(r) = c_1$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} R(r) = c_1 \\ \Phi(\varphi) = c_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(r,\varphi) = c_1 c_2 \quad \Rightarrow \quad u_0(r,\varphi) = 1$$

جواب اساسی

حالت دوم: $\lambda = -\sigma^2 < 0 \quad (\sigma > 0)$

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \lambda = -\sigma^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \Phi'' - \sigma^2\Phi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \Phi(\varphi) = c_1 \sinh\sigma\varphi + c_2 \cosh\sigma\varphi \\ \text{یا} \quad \Phi(\varphi) = k_1 e^{\sigma\varphi} + k_2 e^{-\sigma\varphi} \end{cases}$$

از طرفی $u(r,\varphi)$ برحسب φ یک تابع پریودیک با دوره تناوب 2π است که این مستلزم آن است که

$k_1 = k_2 = 0$ باشد. بنابراین جواب بدیهی زیر بدست می‌آید.

$$\Phi(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(r,\varphi) = 0$$

حالت سوم: $\lambda = \sigma^2 > 0 \quad (\sigma > 0)$

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \lambda = \sigma^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \Phi'' + \sigma^2\Phi = 0 \quad \Rightarrow \Phi(\varphi) = c_1 \sin\sigma\varphi + c_2 \cos\sigma\varphi$$

$$\begin{cases} \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \\ c_1 \sin\sigma(\varphi + 2\pi) + c_2 \cos\sigma(\varphi + 2\pi) = c_1 \sin\sigma\varphi + c_2 \cos\sigma\varphi \end{cases}$$

برای برقراری رابطه فوق باید $\sigma = n \geq 1$ یک عدد صحیح باشد و حالتهای گویا همچون $\sigma = \frac{1}{2}$ یا

$\sigma = \frac{1}{4}$ درست نیست. بنابراین می‌توان نوشت: $\sigma_n = n \geq 1$ و در نتیجه:

$$\Phi(\varphi) = c_1 \sin n\varphi + c_2 \cos n\varphi$$

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ \lambda = \sigma^2 \end{cases} \Rightarrow \quad r^2 R'' + rR' - \sigma^2 R = 0$$

$$F(x)=x^2+(\alpha-1)x+\beta=x^2-\sigma^2=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\pm\sigma$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} R(r)=k_1r^{\sigma}+k_2r^{-\sigma} \\ R(r)=k_1r^{n}+k_2r^{-n} \end{cases}$$

از آنجایی‌که $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{k_2}{r^n}\to\infty$ و با توجه به اینکه $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ کرانه‌دار (محدود) است، پس الزاماً $k_2=0$ است.

$$\Rightarrow \quad R(r)=k_1r^n$$

$$\Phi(\varphi)=c_1\sin n\varphi+c_2\cos n\varphi$$

$$\begin{cases} v_n(r,\varphi)=r^n\sin n\varphi \quad ; \quad n\in N \\ u_n(r,\varphi)=r^n\cos n\varphi \quad ; \quad n\in N \\ u_0(r,\varphi)=1 \end{cases}$$

جوابهای اساسی

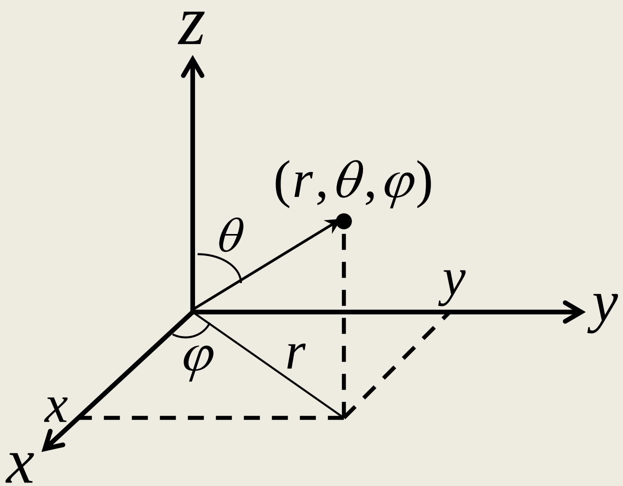
$$\begin{cases} u(r,\varphi) = \dfrac{a_0}{2} u_0(r,\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n u_n(r,\varphi) + b_n v_n(r,\varphi)\right] \\ u(r,\varphi) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right] \end{cases}$$

اعمال شرط مرزی:

$$u(a,\varphi) = f(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(\varphi) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left[a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right] \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a^n . a_n = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad ; \quad n \ge 0 \\ a^n . b_n = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad ; \quad n \ge 1 \end{cases}$$

معادله لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ در مختصات کروی



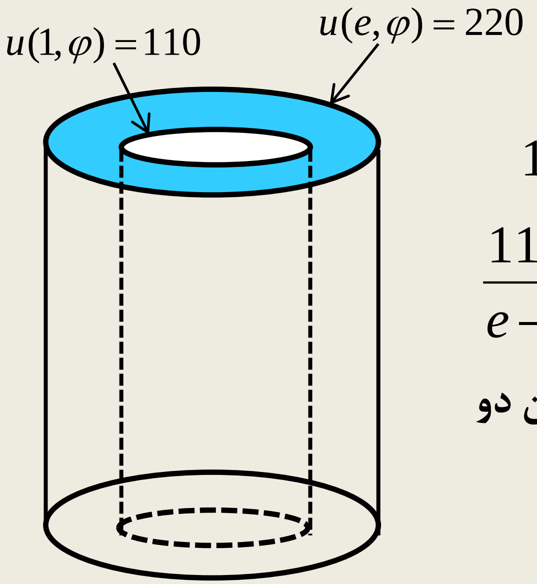
<u>تمرین</u>: در مختصات کروی روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

در این بخش، هدف تبدیل معادله لاپلاس $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ از مختصات کارتزین به مختصات کروی (یک کره به شعاع r) است.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

مثال ۵-۳ (کنکور کارشناسی ارشد ۷۰-۶۹) فرض کنید پتانسیل الکتریکی موجود بر روی بدنه دو استوانه هم محور و به شعاعهای قاعده ۱ و e بترتیب برابر ۱۱۰ و ۲۲۰ ولت باشد. اگر معادله لاپلاس در مختصات قطبی (استوانه‌ای) بصورت $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0$ باشد، آنگاه تابع پتانسیل موجود بین دو استوانه برابر است با:



۱) $110r+220$

۲) $110(\ln r+1)$ ●

۳) $110\ln r+220$

۴) $\frac{110}{e-1}(r+e-2)$

حل: به توجه به مفاهیم درس الکترمغناطیس، می‌دانیم که پتانسیل بین دو استوانه بصورت شعاعی است و تابعی از r است نه φ. بنابراین:

$$u(r,\varphi)=u(r) \quad \Rightarrow \quad u_{\varphi\varphi}=0$$

حتی اگر با مفاهیم مغناطیس آشنا نیستید، از خود جوابها کمک بگیرید که دیده می‌شود، پتانسیل بین دو

استوانه بصورت شعاعی است و تابعی از r است نه φ. بنابراین $u_{\varphi\varphi}=0 \quad \Rightarrow \quad u(r,\varphi)=u(r)$

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0 \quad \Rightarrow \quad u_{rr}+\frac{1}{r}u_r=0 \quad \Rightarrow \quad u''+\frac{1}{r}u'=0$$

$$\Rightarrow \quad ru''+u'=0 \quad \Rightarrow \quad (ru')'=0$$

$$\Rightarrow \quad ru'=c_1 \quad \Rightarrow \quad u(r)=u(r,\varphi)=c_1\ln r+c_2$$

$$\begin{cases} u(1,\varphi)=110=c_2 \\ u(e,\varphi)=220=c_1\ln e+110 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1=110$$

$$\Rightarrow \quad u(r,\varphi)=110(\ln r+1)$$

بخش ششم: حل معادلات دیفرانسیل اشتورم-لیوویل (Sturm-Liouville)

تعریف ۶-۱: معادله کلاسیک اشتورم-لیوویل، یک معادله دیفرانسیل حقیقی مرتبه ۲ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} \left[p(x)y'\right]' - q(x)y + \lambda w(x)y = 0 \\ a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0 \qquad\qquad ; \qquad 0 < x < 1 \\ b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \end{cases}$$

که برای آن ویژگیهای زیر برقرار است:

الف) توابع $p(x) > 0$ ، $p'(x)$ ، $q(x)$ و $w(x) > 0$ روی بازه $[0,1]$ پیوسته‌اند.

ب) λ ها را مقادیر ویژه مساله با شرایط مرزی اشتورم-لیوویل می‌نامند که مقادیری حقیقی هستند.

ج) بازای هر مقدار ویژه λ ، یک تابع ویژه متناظر $\phi(x)$ بدست می‌آید.

<u>مثال ۶-۱:</u> مطلوبست حل معادله .S.-L با شرایط مرزی زیر:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \qquad ; \qquad 0 < x < 1$$

<u>حل:</u> دیده می‌شود که $p(x)=1$ ، $q(x)=0$ ، $w(x)=1$ و $\lambda=1$ است.

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 \sin 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = 0$$ جواب بدیهی

مثال ۶-۲: مطلوبست حل معادله .S.-L با شرایط مرزی زیر:

$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

حل: دیده می‌شود که $p(x) = 1$ ، $q(x) = 0$ ، $w(x) = 1$ و $\lambda = \pi^2$ است.

$$y(x) = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x$$

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 \sin \pi = 0 \end{cases}$$ با هر c_1 دلخواه

$$\Rightarrow \quad y(x) = c_1 \sin \pi x$$

مثال ۶-۳: مطلوبست حل معادله با شرایط مرزی زیر:

$$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0 \\ y(0) + y(1) = 0 \qquad ; \qquad 0 < x < 1 \\ y'(0) + y'(1) = 0 \end{cases}$$

حل: دیده می‌شود که مساله .S.-L نیست (شرایط مرزی چک گردد).

$$y(x) = c_1 \sin \pi x + c_2 \cos \pi x$$

$$\begin{cases} y(0) + y(1) = c_2 - c_2 = 0 & \text{بازای هر } c_2 \text{ دلخواه} \\ y'(0) + y'(1) = c_1\pi - c_1\pi = 0 & \text{بازای هر } c_1 \text{ دلخواه} \end{cases}$$

چون محدودیتی روی c_1 و c_2 وجود ندارد، لذا دو دسته جواب $\sin \pi x$ و $\cos \pi x$ بدست می‌آید،

در حالیکه در مساله .S.-L بازای هر مقدار ویژه λ تنها یک جواب داریم.

مثال ۶-۴: مطلوبست حل معادله با شرایط مرزی زیر:

$$\begin{cases} y'' + y' + \lambda(y' + y) = 0 \\ y(1) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

حل: دیده می‌شود که مساله .S.-L نیست (بخاطر $p(x)$). اما اگر $\lambda = -1$ باشد مساله .S.-L است.

$$\begin{cases} y'' + (1+\lambda)y' + \lambda y = 0 \\ m^2 + (1+\lambda)m + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = -\lambda \end{cases}$$

حالت اول: اگر $\lambda = -1$ باشد. در این صورت ریشه مضاعف داریم.

$$\begin{cases} y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x} \\ y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 - c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0 \\ y(x) = 0 \end{cases}$$

جواب بدیهی

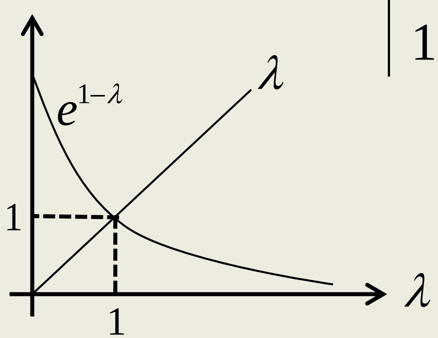
ادامه حل مثال ۶-۴:

حالت دوم: اگر $\lambda \neq -1$ باشد.

$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-\lambda x} \\ y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 e^{-1} + c_2 e^{-\lambda} = 0 \\ y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -c_1 - c_2 \lambda = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-\lambda} \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

شرط وجود جواب غیر صفر داشتن دترمینان ضرائب صفر است.

$$\begin{vmatrix} e^{-1} & e^{-\lambda} \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = e^{1-\lambda}$$



تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $\lambda = 1$ باشد، در حالیکه

طبق فرض $\lambda \neq 1$ است. بنابراین $c_1 = c_2 = 0$ و جواب بدیهی

$y(x) = 0$ بدست می‌آید.

قضیه ۶-۱ (شرط تعامد و نرمالیزه کردن): فرض کنید $\phi_n(x)$ و $\phi_m(x)$ توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه λ_n و λ_m در مساله .S.-L باشند. در این‌صورت:

$$\int_0^1 w(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 \quad ; \quad m \neq n & \text{شرط تعامد} \\ 1 \quad ; \quad m = n & \text{شرط نرمالیزه} \end{cases}$$

در حقیقت، در مساله .S.-L توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز، نسبت به تابع وزن (Weight Function) $w(x)$ متعامدند.

قضیه ۶-۲: متناظر با هر مقدار ویژه λ ، فقط یک تابع ویژه بطور خطی مستقل بدست می‌آید. همچنین کلیه مقادیر ویژه تشکیل یک دنباله نامتناهی صعودی (واگرا) می‌دهند . بعنوان مثال: $\lambda_n = n\pi$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots \qquad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$$

مثال ۶-۵: مطلوبست محاسبه توابع ویژه نرمالیزه شده معادله .S.-L با شرایط مرزی زیر:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

حل: دیده می‌شود که $p(x) = 1$ ، $q(x) = 0$ و $w(x) = 1$ است. طبق آنچه بیان گردید کلیه مقادیر ویژه حقیقی هستند.

حالت اول: اگر $\lambda = 0$ باشد.

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y(x) = 0 \quad \text{جواب بدیهی}$$

ادامه حل مثال ۶-۵:

حالت دوم: اگر $\lambda = -\alpha^2 < 0$ باشد.

$$\begin{cases} y'' - \alpha^2 y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 \sinh \alpha x + c_2 \cosh \alpha x$$

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 \underbrace{\sinh \alpha}_{\text{مثبت}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = 0$$ جواب بدیهی

ادامه حل مثال ۶-۵:

حالت سوم: اگر $\lambda = \alpha^2 > 0$ باشد ($\alpha > 0$ حقیقی).

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

$$y(x) = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x$$

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

برای داشتن جواب غیر بدیهی باید $c_1 \neq 0$. بنابراین:

$$\Rightarrow \quad \sin \alpha = 0 = \sin n\pi$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \alpha^2 = n^2\pi^2 \quad ; \quad n \geq 1$$ مقادیر ویژه

$$\Rightarrow \quad \phi_n(x) = c_n \sin n\pi x$$ توابع ویژه متناظر

دیده می‌شود که $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots$

دانشگاه یزد

ادامه حل مثال ۶-۵: برای بدست آوردن c_n ، از شرط نرمالیزه استفاده می‌کنیم ($w(x)=1$).

$$\int_0^1 w(x)\phi_n^2(x)dx = 1$$

$$\int_0^1 c_n^2 \sin^2 n\pi x dx = 1 \quad ; \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad c_n^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad c_n = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x \quad ; \quad n \geq 1$$

توابع ویژه متناظر

مثال ۶-۶: مطلوبست محاسبه مقادیر ویژه و توابع ویژه معادله .S.-L با شرایط مرزی زیر:

$$\begin{cases} \left(e^x y'\right)' + \lambda e^x y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

حل: دیده می‌شود که $p(x) = e^x$ ، $q(x) = 0$ و $w(x) = e^x$ است. طبق آنچه بیان گردید کلیه مقادیر ویژه حقیقی هستند.

$$\begin{cases} e^x y' + e^x y'' + \lambda e^x y = 0 \quad ; \quad e^x \neq 0 \quad \forall x \in (0,1) \\ y'' + y' + \lambda y = 0 \end{cases}$$

$$m^2 + m + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} \\ m_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} \end{cases}$$

<u>حالت اول:</u> اگر $\Delta = 1-4\lambda = 0$ باشد. در این حالت ریشه مضاعف $m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}$ داریم.

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x/2}$$

$$\left.\begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = c_2 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad y(x) = 0$$ جواب بدیهی

<u>حالت دوم:</u> اگر $\Delta = 1-4\lambda > 0$ باشد.

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1 \\ y(1) = c_1 e^{m_1} + c_2 e^{m_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\left[e^{m_1} - e^{m_2}\right] = 0 \end{cases}$$

چون $m_1 \neq m_2$ است، پس $c_1 = 0$ و در نتیجه $c_2 = 0$. بدین صورت جواب بدیهی $y(x) = 0$ بدست می‌آید.

حالت سوم: اگر $\Delta = 1 - 4\lambda < 0$ باشد.

$$1 - 4\lambda = -\alpha^2 \qquad ; \qquad \alpha > 0$$

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} \\ m_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{-1 + i\alpha}{2} \\ m_2 = \dfrac{-1 - i\alpha}{2} \end{cases}$$

$$y(x) = e^{-x/2}\left[c_1 \cos\frac{\alpha}{2}x + c_2 \sin\frac{\alpha}{2}x\right]$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = e^{-1/2} c_2 \sin\dfrac{\alpha}{2} = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{داشتن جواب غیر بدیهی}]{c_2 \neq 0} \frac{\alpha}{2} = n\pi \qquad ; \qquad n \geq 1$$

$$1 - 4\lambda = -\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{1}{4} + n^2\pi^2 \qquad ; \qquad n \geq 1$$ مقادیر ویژه

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{1}{4} + n^2\pi^2 \quad ; \quad n \geq 1 & \text{مقادیر ویژه} \\ \phi_n(x) = c_n e^{-x/2} \sin n\pi x & \text{توابع ویژه متناظر} \end{cases}$$

برای بدست آوردن c_n ، از شرط نرمالیزه استفاده می‌کنیم ($w(x) = e^x$).

$$\int_0^1 w(x)\phi_n^2(x)dx = 1$$

$$\int_0^1 e^x c_n^2 e^{-x} \sin^2 n\pi x dx = 1 \quad ; \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad c_n^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad c_n = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_n(x) = \sqrt{2} e^{-x/2} \sin n\pi x \quad ; \quad n \geq 1$$

قضیه ۶-۳ (نمایش تابع $f(x)$ برحسب توابع ویژه مساله .S.-L): فرض کنید $f(x)$ و $f'(x)$ روی فاصله $[0,1]$ پیوسته باشند. همچنین فرض کنید $\phi_n(x)$, $n \geq 1$ ، توابع ویژه متناظر نرمالیزه شده مساله .S.-L باشند. در این حالت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ بازای هر $x \in [0,1]$ به مقدار $f(x)$ همگراست که در آن

$$a_n = \int_0^1 w(x) f(x) \phi_n(x) dx \quad ; \quad n \geq 1 \qquad (۱)$$

همچنین اگر $f(x)$ و $f'(x)$ روی فاصله $[0,1]$ قطعه‌ای پیوسته باشند، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ به مقدار $\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$ همگرا خواهد شد که در آن x_0 نقطه ناپیوسته است.

اثبات رابطه (۱): فرض کنید بتوان نوشت: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x)\phi_m(x)w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)\phi_m(x)w(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 f(x)\phi_m(x)w(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\int_0^1 \phi_n(x)\phi_m(x)w(x)dx \right)}_{m=n \text{ مساوی یک بازای }}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \int_0^1 w(x) f(x)\phi_n(x)dx \quad ; \quad n \geq 1$$

از مثال ۶-۶ داریم:

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} e^{-x/2} \sin n\pi x \quad ; \quad n \geq 1$$

$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

$$a_n = \int_0^1 e^x \sqrt{2} e^{-x/2} \sin n\pi x dx \quad ; \quad n \geq 1$$

$$a_n = \int_0^1 \sqrt{2} e^{x/2} \sin n\pi x dx$$