فصل اول

حل معادلات با مشتقات جزئی معروف

Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

بخش اول: مفاهیم مقدماتی

نکته ۱-۱: یکی از رایج‌ترین روشهای طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل، مبتنی است بر اینکه آیا تابع مجهول مورد نظر در این معادلات، تابعی از یک متغیر مستقل است یا تابعی از چند متغیر مستقل؟

تعریف ۱-۱: چنانچه تابع مورد نظر، تابعی از فقط یک متغیر مستقل باشد، آن معادله را «معادله دیفرانسیل معمولی (**Ordinary Differential Equation**)» می‌نامند.

مثال ۱-۱: در معادله دیفرانسیل معمولی زیر، x متغیر مستقل و $y(x)$ متغیر وابسته نامیده می‌شود.

با این معادلات در درس «معادلات دیفرانسیل» آشنا شده‌اید.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=4$$

تعریف ۱-۲: چنانچه تابع مورد نظر در یک معادله دیفرانسیل، تابعی از دو یا چند متغیر مستقل باشد، در این‌صورت مشتقات در معادله دیفرانسیل از نوع مشتقات جزئی است و در این حالت، معادله را یک «معادله با مشتقات جزئی (Partial Differential Equation)» می‌نامند.

تعریف ۱-۳: یک معادله با مشتقات جزئی عبارت است از یک رابطه بین یک تابع مجهول $u(x, y,...)$ و متغیرهای مستقل آن و مشتقات جزئی u می‌باشد.

مثال ۱-۲: یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معروف:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad u_{xx}+u_{yy}=0 \quad ; \quad u=u(x, y)$$

<u>تعریف ۱-۴:</u> بالاترین مرتبه مشتق جزئی موجود در یک معادله با مشتقات جزئی را مرتبه (**Order**) آن معادله دیفرانسیل می‌نامند.

<u>تعریف ۱-۵:</u> یک معادله با مشتقات جزئی را خطی (**Linear**) گویند هرگاه آن معادله برحسب تابع مورد نظر u و مشتقات جزئی آن خطی باشد، در غیر این‌صورت آن معادله را غیرخطی می‌نامند.

<u>مثال ۱-۳:</u> فرم کلی معادله با مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم خطی:

مرتبه اول:
$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_3 u = \beta \qquad \alpha_i = \alpha_i(x,y) \quad ; \quad \beta = \beta(x,y)$$

مرتبه دوم:
$$\alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_5 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_6 u = \beta$$

دانشگاه یزد

مثال ۱-۴: در هر یک از معادلات با مشتقات جزئی زیر، ابتدا مرتبه و سپس خطی یا غیرخطی بودن معادله را بررسی کنید:

1) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$	مرتبه دوم خطی
2) $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt} \quad ; \quad \alpha =$ ثابت	مرتبه دوم خطی
3) $\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad ; \quad \alpha =$ ثابت	مرتبه دوم خطی
4) $u_t + u.u_x = 1 + u_{xx}$	مرتبه دوم غیرخطی
5) $u_{xx} + u_{yy} + u.u_x + u.u_y + u = 0$	مرتبه دوم غیرخطی

نکته ۱-۲: منظور از جواب معادله با مشتقات جزئی، وجود تابع $\Phi(x, y, \ldots)$ می‌باشد به‌گونه‌ای که اولاً به اندازه مرتبه معادله، مشتق‌پذیر باشد و ثانیاً در معادله صدق کند.

مثال ۱-۵: معادلات با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید:

1) $$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \varphi(y)$$

2) $$\frac{\partial u}{\partial x} = g(x) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = G(x) + \varphi(y) \quad , \quad G'(x) = g(x)$$

3) $$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y)$$

4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(y)$$

$$\Rightarrow \quad u(x, y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1'(y) = \varphi(y)$$

<u>نتیجه ۱-۱</u>: جوابهای فوق، «جواب عمومی» معادله با مشتقات جزئی نامیده می‌شوند.

<u>نتیجه ۱-۲</u>: به‌اندازه مرتبه معادله، توابع دلخواه ظاهر می‌شوند ($\varphi_1(y),\varphi_2(x)$ در معادله ۴ در مثال ۱-۵).

<u>نتیجه ۱-۳</u>: در کنار یک معادله با مشتقات جزئی، شرایط مرزی مطرح می‌باشد که باعث می‌شوند توابع دلخواه تعیین شده و جواب خصوصی بدست آید.

<u>مثال ۱-۶</u>: تحقیق کنید توابع داده شده در ذیل، هر یک جوابی برای معادله با مشتقات جزئی $u_{xx}+u_{yy}=0$ می‌باشد.

$$\Phi(x,y)=\cos x\cosh y$$

$$\Psi(x,y)=\ln(x^2+y^2)$$

حل: $\Phi(x,y)=\cos x\cosh y$

$$\begin{cases}\Phi_x=\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}=-\sin x\cosh y\\[2ex]\Phi_{xx}=\dfrac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}=-\cos x\cosh y\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Phi_y=\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}=\cos x\sinh y\\[2ex]\Phi_{yy}=\dfrac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2}=\cos x\cosh y\end{cases}$$

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0$$

ادامه حل $\Psi(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ به عهده دانشجو.

نتیجه ۱-۴: دیده می‌شود که یک معادله با مشتقات جزئی الزاماً دارای جواب یکتا نیست. به‌عنوان مثال، $u_1(x,y)=x^2-y^2$ و $u_2(x,y)=e^x\cos y$ نیز جوابهای دیگر $u_{xx}+u_{yy}=0$ هستند. همانگونه که بعداً نشان خواهیم داد جواب منفرد و یکتای معادله با مشتقات جزئی توسط شرایط اولیه **(Initial Conditions)** و شرایط مرزی (کرانه‌ای **Boundary Conditions**) بدست می‌آیند.

مثال ۱-۷: مطلوب است حل معادله با مشتقات جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$ تحت شرایط $u(x,0) = x^2$ و $u(1,y) = \cos y$.

حل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x^2 y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}x^3 y + \varphi(y)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{6}x^3 y^2 + \varphi_1(y) + \varphi_2(x) \quad , \quad \varphi_1'(y) = \varphi(y)$$

$$u(x,0) = 0 + \varphi_1(0) + \varphi_2(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2(x) = x^2 - \varphi_1(0) \qquad \textbf{(1)}$$

$$u(1,y) = \frac{1}{6}y^2 + \varphi_1(y) + \varphi_2(1) = \cos y \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(y) = \cos y - \varphi_2(1) - \frac{1}{6}y^2 \qquad \textbf{(2)}$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \varphi_2(1) = 1 - \varphi_1(0)$$

ادامه حل:

$$u(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+\cos y-\frac{1}{6}y^2-(1-\varphi_1(0))+x^2-\varphi_1(0)$$

$$u(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+\cos y-\frac{1}{6}y^2+x^2-1$$

تمرین ۱-۱: جواب عمومی معادله با مشتقات جزئی $x^2u_x-xyu_y+yu=0$ که در آن $u=u(x,y)$ است را با تغییر متغیر $s=xy$ و $t=\dfrac{x}{y}$ بدست آورید (جواب: $u(x,y)=\varphi(x,y)e^{\frac{y}{2x}}$).

تمرین ۱-۲: جواب عمومی معادله با مشتقات جزئی $au_x-bu_y=0$ را با تغییر متغیر $s=x$ و $t=bx+ay$ بدست آورید.

تعریف ۱-۶: در معادله با مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم بیان شده در مثال ۱-۳ صفحه ۴، اگر $\beta(x,y)=0$ باشد، آنرا یک معادله «همگن» گوییم ($\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_3 u = 0$).

قضیه ۱-۱: اگر $u_1(x,y)$ و $u_2(x,y)$ جوابهای یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه اول خطی و همگن باشند، آنگاه $\forall c_1, c_2 \in R$

$$u(x,y) = c_1 u_1(x,y) + c_2 u_2(x,y)$$

نیز جوابی از معادله است.

اثبات: با توجه به تعریف معادله با مشتقات جزئی مرتبه اول خطی همگن داریم:

$$\begin{cases} \alpha_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \alpha_3 u_1 = 0 \\ \alpha_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \alpha_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \alpha_3 u_2 = 0 \end{cases}$$

از طرف دیگر:

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}(c_1 u_1 + c_2 u_2) + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y}(c_1 u_1 + c_2 u_2) + \alpha_3 (c_1 u_1 + c_2 u_2) =$$

$$c_1 \left\{ \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \alpha_3 u_1 \right\} + c_2 \left\{ \alpha_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \alpha_3 u_2 \right\} = 0$$

تعمیم قضیه ۱-۱

۱- اگر $i = 1, \ldots, m$ ، $u_i = u_i(x, y)$ جوابهای معادله با مشتقات جزئی (مرتبه اول) خطی همگن باشند، آنگاه $c_i \in R$ ، $\sum_{i=1}^{m} c_i u_i(x, y)$ نیز جواب معادله است.

۲- تعمیم قضیه ۱-۱ در جهت مرتبه معادله با مشتقات جزئی به هر مرتبه دلخواه n می‌باشد. بدین معنی که اگر $i = 1, \ldots, m$ ، $u_i = u_i(x, y)$ جوابهای معادله با مشتقات جزئی خطی همگن مرتبه n باشند، آنگاه $c_i \in R$ ، $\sum_{i=1}^{m} c_i u_i(x, y)$ نیز جواب معادله است.

بخش دوم: روش جداسازی متغیرها

یکی از اساسی‌ترین (اولین) روشهای بررسی یک معادله با مشتقات جزئی، روش جداسازی متغیرها (Separation of Variables) یا روش ضربی می‌باشد. در صورت کارآیی این روش، حل یک معادله با مشتقات جزئی، به حل چند معادله دیفرانسیل معمولی منجر می‌شود.

مثال ۲-۱: کارآیی روش جداسازی متغیرها در حل معادله با مشتقات جزئی $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

حل: فرض می‌کنیم $u(x,y) = X(x).Y(y)$. در این حالت داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x).Y(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = X(x).Y'(y)$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad xX'(x).Y(y) = yX(x).Y'(y) \qquad (1)$$

Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

ادامه حل: با تقسیم طرفین رابطه (۱) بر $X(x).Y(y)$ داریم:

$$\underbrace{x\frac{X'(x)}{X(x)}}_{x\ \text{تابعی فقط از}} = \underbrace{y\frac{Y'(y)}{Y(y)}}_{y\ \text{تابعی فقط از}} = \lambda \longrightarrow \text{ثابت حقیقی}$$

از آنجایی که x و y متغیرهای مستقل از هم می‌باشند، λ یک ثابت است که آن‌را ثابت جداسازی می‌نامند. همانگونه که بعداً ثابت خواهیم کرد λ یک ثابت حقیقی است و تحت شرایط اولیه تعیین می‌شود.

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{\lambda}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln X(x) = \lambda \ln x = \ln x^{\lambda}$$

$$\Rightarrow X(x) = x^{\lambda}$$

به‌طور مشابه داریم: $Y(y) = y^{\lambda}$. بدین ترتیب جواب معادله برابر $u(x,y) = x^{\lambda} y^{\lambda}$ است.

Dr Jamshid Abouei
ECE Department-Yazd University

<u>مثال ۲-۲:</u> کارآیی روش جداسازی متغیرها در حل معادله با مشتقات جزئی $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3y^2u=0$.

حل: فرض می‌کنیم $u(x,y)=X(x).Y(y)$. در این حالت داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=X'(x).Y'(y) \quad\Rightarrow\quad x^2X'(x).Y'(y)=-3y^2X(x).Y(y)$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $X(x).Y'(y)$ داریم:

$$\underbrace{x^2\frac{X'(x)}{X(x)}}_{\text{تابعی فقط از } x}=\underbrace{-3y^2\frac{Y(y)}{Y'(y)}}_{\text{تابعی فقط از } y}=\lambda=\text{constant}$$

دیده می‌شود که در این مثال نیز «روش جداسازی متغیرها» موفقیت آمیز است.

مثال ۲-۳: کارآیی روش جداسازی متغیرها در حل معادله $\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

حل: فرض می‌کنیم $w(x,t) = X(x).T(t)$. در این حالت داریم:

$$X.T' + X.T.X'.T = X''.T$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر $X(x).T(t)$ داریم:

$$\frac{T'}{T} + X'.T = \frac{X''}{X}$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق بر X' داریم:

$$\frac{T'}{X'.T} + T = \frac{X''}{X.X'}$$

دیده می‌شود که در این مثال «روش جداسازی متغیرها» کارآمد نمی‌باشد.

تمرین ۲-۱ (کتاب بویس): کارآیی روش جداسازی متغیرها در حل معادله $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$ ؟

ثابت می‌شود که معادله فوق قابل تبدیل به دو معادله دیفرانسیل معمولی است.

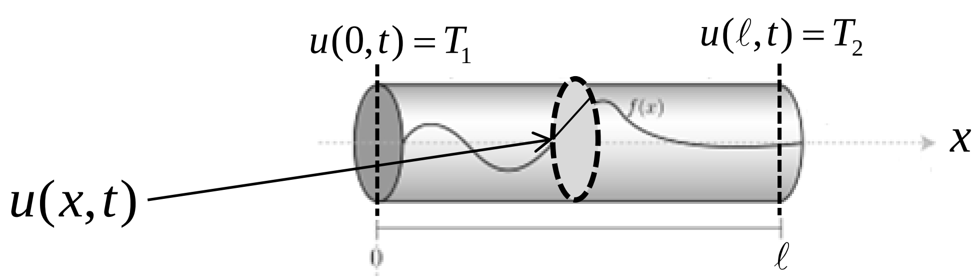
بخش سوم: حل معادله انتقال حرارت (یک بعدی)
(Heat Conduction Equation)

یک مفتول نازک در امتداد محور xها که مقطع آن در طول سیم ثابت باشد را درنظر بگیرید. فرض می‌کنیم سطح جانبی مفتول بطور کامل عایق‌بندی شده باشد بطوری‌که حرارت (گرما) فقط در جهت محور x ها جریان یابد.

اگر معادله انتقال حرارت به صورت زیر تعریف گردد، مطلوب است بررسی دمای مفتول، $u(x,t)$ ، در هر لحظه از زمان t و مکان x .

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t \\ 0 < x < \ell \qquad ; \qquad t > 0 \end{cases}$$

$\alpha^2 =$ قابلیت نفوذ گرمایی مفتول



Dr Jamshid Abouei
ECE Department-Yazd University

برای حل این معادله یکسری شرایط اولیه (Initial Conditions) و شرایط مرزی (کرانه‌ای **Boundary Conditions**) لازم است.

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t \\ 0 < x < \ell \quad ; \quad t > 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

<u>شرایط اولیه (I. C.):</u> فرض کنید توزیع دمای اولیه مفتول ($t = 0$) برابر تابع مفروض $f(x)$ باشد.

$$u(x,0) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < \ell$$

<u>شرایط مرزی یا کرانه‌ای (B. C.):</u> معادله (۱) را برای حالتی در نظر می‌گیریم که دمای نقاط ابتدا و انتهای مفتول در هر لحظه از زمان به ترتیب برابر T_1 و T_2 باشد.

$$\begin{cases} u(0,t) = T_1 \\ u(\ell,t) = T_2 \end{cases} \quad \forall t > 0$$

برای سادگی مساله، فرض کنید $T_1 = T_2 = 0$.

حل معادله انتقال حرارت با شرایط اولیه و مرزی (معادله مرتبه دوم، خطی و همگن):

$$\text{(P.D.E.)}\begin{cases}\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad ; \quad 0 < x < \ell \quad , \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad ; \quad t > 0 \quad \text{(B.C.)} \\ u(x,0) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < \ell \quad \text{(I.C.)}\end{cases}$$

مرحله اول: اعمال روش جداسازی متغیرها

$$u(x,t) = X(x).T(t)$$

با جایگذاری در رابطه $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ داریم:

$$\alpha^2 X''(x).T(t) = X(x).T'(t)$$

تقسیم طرفین رابطه فوق بر $\alpha^2 X(x).T(t)$

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{تابعی فقط از } x} = \underbrace{\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)}}_{\text{تابعی فقط از } t} = \lambda = \text{constant}$$

ثابت جداسازی

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad \Rightarrow \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ T' - \lambda\alpha^2 T = 0 \end{cases}$$

بدین ترتیب دو معادله دیفرانسیل معمولی خطی بدست می‌آید که دارای روش حل ساده‌تری می‌باشند.

مرحله دوم: اعمال شرایط مرزی $\quad$ **(1)** $\quad u(0,t) = X(0).T(t) = 0 \quad , \quad \forall t > 0$

ثابت می‌کنیم $T(t) \neq 0$ است. فرض کنید بازای هر $t > 0$، $T(t) = 0$ باشد. در این‌صورت $u(0,t) = 0$

و همچنین $u(x,t) = X(x).T(t) = 0$ که این منجر به جواب بدیهی $u(x,t) = 0$ می‌شود، در حالیکه

ما بدنبال جواب غیربدیهی هستیم. از دیدگاه دیگر، اگر $T(t) = 0$ باشد، آنگاه $u(x,t) = 0$، که در نتیجه

شرط $u(x,0) = f(x)$ برآورده نمی‌شود.

نتیجه: بنابراین بازای $T(t) \neq 0$ از رابطه (۱) خواهیم داشت: $X(0) = 0$

بطور مشابه داریم: $X(\ell) = 0 \xleftarrow[\text{داشتن جواب غیربدیهی}]{T(t) \neq 0} u(\ell,t) = X(\ell).T(t) = 0 \quad , \quad \forall t > 0$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases}$$

مرحله سوم: حل معادلات دیفرانسیل معمولی بازای مقادیر مختلف λ

ثابت می‌شود λ یک ثابت حقیقی است (اثبات در صفحه ۲۵).

حالت اول: اگر $\lambda = 0$ باشد.

$$\Rightarrow X'' = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ X(\ell) = 0 \Rightarrow c_2 \ell = 0 \overset{\ell > 0}{\Rightarrow} c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(x) = 0$$

بدین ترتیب :

$$\Rightarrow u(x,t) = X(x).T(t) = 0$$

که نه تنها شرط $u(x,0) = f(x)$ برآورده نمی‌شود بلکه $\lambda = 0$ منجر به جواب بدیهی خواهد شد.

از آنجایی‌که ما بدنبال جواب غیر بدیهی $u(x,t) \neq 0$ هستیم حالت $\lambda \neq 0$ را در نظر می‌گیریم.

دانشگاه یزد

<u>حالت دوم:</u> اگر $\lambda = \sigma^2 > 0$ ثابت حقیقی مثبت باشد.

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = X'' - \sigma^2 X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = c_1 e^{\sigma x} + c_2 e^{-\sigma x}$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1 \\ X(\ell) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sigma\ell} + c_2 e^{-\sigma\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\left(e^{\sigma\ell} - e^{-\sigma\ell}\right) = 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\text{if} \quad e^{\sigma\ell} - e^{-\sigma\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2\sigma\ell} = 1 = e^0$$

$$\underset{\ell \neq 0}{\Rightarrow} \quad \sigma = 0$$ غیر قابل قبول

بنابراین ازمعادله (۱) نتیجه می‌شود که $c_1 = 0$ است، در این حالت $c_2 = -c_1 = 0$ است و این منجر به

جواب $X(x) = 0$ و در نتیجه جواب بدیهی $u(x,t) = 0$ خواهد شد. تنها حالت باقیمانده: $\lambda = -\sigma^2 < 0$

اثبات λ حقیقی

ثابت می‌شود در معادله انتقال حرارت λ یک ثابت حقیقی است.

فرض کنید $0 \neq \lambda = -\sigma^2$ باشد.

$$X'' - \lambda X = 0 \Rightarrow X'' + \sigma^2 X = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 e^{i\sigma x} + c_2 e^{-i\sigma x} \qquad ; \quad \sigma = \mu + i\nu$$

فرم کلی عدد مختلط

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ X(\ell) = 0 \Rightarrow c_1 e^{i\sigma\ell} + c_2 e^{-i\sigma\ell} = 0 \end{cases} \qquad (۱)$$

اگر $c_1 = c_2 = 0$ باشد، جواب بدیهی بدست می‌آید. شرط وجود جواب غیر بدیهی آن است که دترمینان

ضرائب معادلات (۱) مساوی صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\sigma\ell} & e^{-i\sigma\ell} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow e^{-i\sigma\ell} - e^{i\sigma\ell} = 0$$

$$\sigma = \mu + i\nu$$

Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

اثبات λ حقیقی

از طرفی طبق فرمول اویلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ داریم:

$$e^{-i(\mu+i\nu)\ell} - e^{i(\mu+i\nu)\ell} = 0$$

$$e^{\nu\ell}.e^{-i\mu\ell} - e^{-\nu\ell}.e^{i\mu\ell} = 0$$

$$e^{\nu\ell}(\cos\mu\ell - i\sin\mu\ell) - e^{-\nu\ell}(\cos\mu\ell + i\sin\mu\ell) = 0 + i0$$

حال باید قسمت حقیقی و موهومی طرف چپ معادله فوق را مساوی صفر قرار داد.

$$\left(e^{\nu\ell} - e^{-\nu\ell}\right)\cos\mu\ell = 0$$

$$\underbrace{\left(e^{\nu\ell} + e^{-\nu\ell}\right)}_{\text{مقدار مثبت}}\sin\mu\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\mu\ell = 0 = \sin n\pi \quad ; \quad n \geq 1$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{\ell} \quad ; \quad n \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 0$$

Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

اثبات λ حقیقی

$$\left(e^{\nu\ell}-e^{-\nu\ell}\right)\cos\mu\ell=0 \quad\Rightarrow\quad \cos\mu\ell=\cos\frac{n\pi}{\ell}\ell=\cos n\pi\neq 0$$

$$\Rightarrow e^{\nu\ell}-e^{-\nu\ell}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{2\nu\ell}=1=e^{0} \quad\Rightarrow\quad \nu=0$$

بنابراین $\sigma=\mu+i\nu=\mu$ که دیده می‌شود $\sigma=\dfrac{n\pi}{\ell}$ حقیقی است. در نتیجه $\lambda=-\sigma^2$ ثابت حقیقی است.

حالت سوم: اگر $\lambda=-\sigma^2<0$ ثابت حقیقی منفی باشد.

$$X''-\lambda X=0\Rightarrow X''+\sigma^2X=0$$

$$\Rightarrow X(x)=c_1e^{i\sigma x}+c_2e^{-i\sigma x}$$

$$\Rightarrow X(0)=c_1+c_2=0\Rightarrow c_2=-c_1$$

$$\Rightarrow X(x)=c_1\left(e^{i\frac{n\pi}{\ell}x}-e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}\right)=k_1\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad ; \quad n\in N$$

<u>نتیجه:</u> با توجه به سه حالت بررسی شده در صفحات قبل دیده شد که تنها بازای $\lambda = -\sigma^2 < 0$ جواب غیربدیهی $u(x,t) \neq 0$ بدست می‌آید.

<u>مرحله چهارم: حل معادلات دیفرانسیل معمولی $T' - \lambda\alpha^2 T = 0$:</u>

$$T' + \alpha^2\sigma^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad T' + \alpha^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 T = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(t) = k_2 e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

بنابراین، جواب غیربدیهی معادله انتقال حرارت یک بعدی برابر

$$u(x,t) = X(x).T(t) = k_1 k_2 e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \qquad n \geq 1$$

$$u(x,t)=X(x).T(t)=k_1k_2e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \qquad n\geq 1 \qquad (۱)$$

نکته: چون n یک عدد صحیح مخالف صفر است، بازای هر n صحیح یک جواب برای معادله (۱) بدست می‌آید.

بنابراین بهتر است بجای $u(x,t)$ در (۱) از جواب $u_n(x,t)$ به‌صورت زیر استفاده کرد و $k_1k_2=1$ فرض نمود.

$$u_n(x,t)=e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad ; \quad n\in N$$

$u_n(x,t)$ را اصطلاحاً «جوابهای اساسی (**Fundamental Solutions**)» معادله انتقال حرارت یک بعدی

$\alpha^2u_{xx}=u_t$ می‌نامند.

نکته: طبق قضیه ۱-۱ از صفحه ۱۲، می‌توان نتیجه گرفت که عبارت زیر نیز جواب معادله انتقال حرارت یک بعدی $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ با شرایط اولیه و مرزی مذکور است:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad \textbf{(1)}$$

مرحله چهارم: اعمال شرط اولیه:

با اعمال شرط اولیه $u(x,0) = f(x)$ درجواب (۱) داریم:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) = f(x) \qquad \textbf{(2)}$$

که این مستلزم بسط سری فوریه سینوسی (تابع پریودیک) $f(x)$ می‌باشد که در بخش ۴ به معرفی آن پرداخته و سپس به حل معادله (۲) خواهیم پرداخت.

مثال ۳-۱ (تمرین کتاب بویس): معادله انتقال حرارت زیر را تحت شرایط مرزی و اولیه مذکور حل کنید.

$$\begin{cases} 100u_{xx} = u_t \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad ; \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin 2\pi x - 2\sin 5\pi x \quad ; \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

حل: با توجه به جواب (۱) در صفحه ۳۰ و اینکه $\alpha^2 = 100$ و $\ell = 1$ می‌باشد داریم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-100\pi^2 n^2 t} \sin n\pi x$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x = f(x) = \sin 2\pi x - 2\sin 5\pi x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 1 \quad , c_5 = -2 \\ \text{other} \quad c_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-400\pi^2 t} \sin 2\pi x - 2e^{-2500\pi^2 t} \sin 5\pi x$$ جواب معادله

دانشگاه یزد

<u>مثال ۳-۲:</u> با تغییر متغیر $z=\dfrac{x}{\ell}$، معادله انتقال حرارت $\alpha^2 u_{xx}=u_t$ را به معادله $u_{zz}=\dfrac{\ell^2}{\alpha^2}u_t$ تبدیل کنید.

<u>حل:</u>

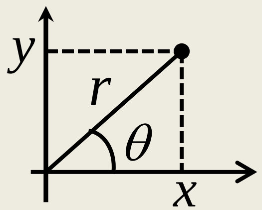
$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\ell}u_z$$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\ell}u_z\right)=\frac{1}{\ell}\frac{\partial}{\partial z}(u_z).\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\ell^2}u_{zz}$$

$$\alpha^2 u_{xx}=u_t \quad\Rightarrow\quad \frac{\alpha^2}{\ell^2}u_{zz}=u_t$$

معادله انتقال حرارت دو بعدی

مثال ۳-۳ (تمرین کتاب بویس): معادله انتقال حرارت در «فضای دو بعدی» (مختصات قطبی) بصورت زیر تعریف می‌گردد:



$$\alpha^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)=u_t$$

با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها، معادلات دیفرانسیل معمولی متناظر را بدست آورید.

حل: دیده می‌شود که u تابعی از r ، θ و t است که در آن موقعیت مکانی یک نقطه توسط r و θ مشخص می‌گردد.

$$u(r,\theta,t)=R(r).\Theta(\theta).T(t)$$

طرفین را بر $R.\Theta.T$ تقسیم می‌کنیم

$$\alpha^2\left(R''.\Theta.T+\frac{1}{r}R'.\Theta.T+\frac{1}{r^2}R.\Theta''.T\right)=R.\Theta.T'$$

Dr Jamshid Abouei

ECE Department-Yazd University

$$\underbrace{\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}}_{(r,\theta)\ \text{تابعی فقط از}}=\underbrace{\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}}_{t\ \text{تابعی فقط از}}=-\lambda^2=\text{constant}$$

$$\boxed{T'+\alpha^2\lambda^2T=0}$$

$$\begin{cases}\dfrac{R''}{R}+\dfrac{1}{r}\dfrac{R'}{R}+\lambda^2=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\Theta''}{\Theta}\\[2ex] r^2\dfrac{R''}{R}+r\dfrac{R'}{R}+r^2\lambda^2=-\dfrac{\Theta''}{\Theta}=-\sigma^2=\text{constant}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boxed{\Theta''-\sigma^2\Theta=0}\\[2ex] r^2\dfrac{R''}{R}+r\dfrac{R'}{R}+r^2\lambda^2+\sigma^2=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{r^2R''+rR'+(r^2\lambda^2+\sigma^2)R=0}$$

معادله اویلر در درس معادلات دیفرانسیل