# روابط پیش نیاز و بسیار مهم برای دروس: ریاضی عمومی ۱، ۲ و معادلات دیفرانسیل

تمامی فرمول ها و روابط زیر بایستی برای شروع درس ریاضیات به خاطر سپرده شوند.


نگارنده: مهندس محسن اسکندری

مدرس دروس ریاضیات دانشگاهی و دروس تخصصی رشته مهندسی عمران

۰۹۳۶۰۵۵۶۹۴۹

کانال تلگرامی: @Tadrisedaneshgahi


## بخش اول) روابط ساده اما پرکاربرد:

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m} \qquad a^m.a^n=a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \qquad \left(a^m\right)^n=a^{m.n}$$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b} \qquad \frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c} \qquad \frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c+d}+\frac{b}{c+d}$$

---

## بخش دوم) معرفی توابع لگاریتمی:

$$\mathrm{Log}_b^a=c \longleftrightarrow b^c=a$$

اگر مبنای لگاریتم نوشته نشده باشد، منظور عدد ۱۰ می باشد. اما اگر مبنای لگاریتم عدد نپر $(e=2.718281...)$ باشد، لگاریتم به صورت $\mathrm{Log}\longrightarrow\mathrm{Ln}$ نمایش داده می شود. به عبارت دیگر:

$$\mathrm{Log}_e^a=\mathrm{Ln}\,a$$

در عبارت Ln دیگر مبنا نوشته نمی شود و عدد مبنا ، همان عدد نپر است.

خواص لگاریتم:

$$\mathrm{Log}_c^a+\mathrm{Log}_c^b=\mathrm{Log}_c^{a.b} \longrightarrow \boxed{\mathrm{Ln}\,a+\mathrm{Ln}\,b=\mathrm{Ln}(ab)}$$

$$\mathrm{Log}_c^a-\mathrm{Log}_c^b=\mathrm{Log}_c^{a/b} \longrightarrow \boxed{\mathrm{Ln}\,a-\mathrm{Ln}\,b=\mathrm{Ln}\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$\mathrm{Log}_{c^d}^{a^b}=\frac{b}{d}\mathrm{Log}_c^a \longrightarrow \boxed{\mathrm{Ln}\,a^b=b.\mathrm{Ln}\,a}$$

سه مقدار مهم:

$$\mathrm{Log}_a^a=1 \longrightarrow \boxed{\mathrm{Ln}\,e=1} \quad , \quad \mathrm{Log}_a^1=0 \longrightarrow \boxed{\mathrm{Ln}\,1=0}$$

$$\mathrm{Log}\,0=-\infty \quad , \quad \boxed{\mathrm{Ln}\,0=-\infty}$$

دو رابطه بسیار مهم که کاربرد آن در بیشتر در درس معادلات دیفرانسیل دیده می شود:

$$\boxed{e^{\mathrm{Ln}\,u}=u} \quad , \quad \boxed{e^{-\mathrm{Ln}\,u}=\frac{1}{u}}$$

**توجه:** در ریاضیات دانشگاهی عمدتا با Ln سر و کار داریم تا خودِ Log

## بخش سوم) نسبت های مثلثاتی و فرمول های مهم مثلثات:

$$\sin\theta=\frac{\text{Opposite side}}{\text{Hypotenuse}}\ ,\ \cos\theta=\frac{\text{Adjacent side}}{\text{Hypotenuse}}\ ,\ \tan\theta=\frac{\text{Opposite side}}{\text{Adjacent side}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,\ \cot\theta=\frac{\text{Adjacent side}}{\text{Opposite side}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}\qquad \tan\theta.\cot\theta=1\longrightarrow\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$$

روابط مثلثاتی بسیار مهم:

$$\boxed{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}\longrightarrow\begin{cases}\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\longrightarrow\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}\\ \sin^2\theta=1-\cos^2\theta\longrightarrow\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\end{cases}$$

با تقسیم طرفین رابطه $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ بر $\cos^2\theta$ داریم:

$$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\longrightarrow\frac{\cancel{\cos^2\theta}}{\cancel{\cos^2\theta}}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta\longrightarrow\boxed{1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

با تقسیم طرفین رابطه $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ بر $\sin^2\theta$ داریم:

$$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}\longrightarrow\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cancel{\sin^2\theta}}{\cancel{\sin^2\theta}}=\csc^2\theta\longrightarrow\boxed{1+\cot^2\theta=\csc^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}}$$

قواعد جمع به ضرب:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\xrightarrow{\alpha=\beta=\theta}\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta\Rightarrow\boxed{\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\xrightarrow{\alpha=\beta=\theta}\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta\Rightarrow\boxed{\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

دو فرمول طلایی:

$$\boxed{\begin{array}{l}1+\cos2\theta=2\cos^2\theta\\ 1-\cos2\theta=2\sin^2\theta\end{array}}$$

فرمول های $\cos2\theta$ و $\sin2\theta$ بر حسب $\tan\theta$ (تانژانت نصف کمان):

$$\boxed{\sin2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\quad,\quad\cos2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}$$

معرفی تابع هیپربولیک (هذلوَوی):

$$\sinh x=\text{shx}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\qquad,\qquad\cosh x=\text{chx}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\qquad,\qquad\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

دو رابطه مهم در توابع هیپربولیک:

$$\text{coshx}+\text{sinhx}=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\left(\frac{e^x+\cancel{e^{-x}}+e^x\cancel{-e^{-x}}}{2}\right)=e^x\longrightarrow\boxed{\text{coshx}+\text{sinhx}=e^x}\ \text{(I)}$$

$$\text{coshx}-\text{sinhx}=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\left(\frac{\cancel{e^x}+e^{-x}\cancel{-e^x}+e^{-x}}{2}\right)=e^{-x}\longrightarrow\boxed{\text{coshx}-\text{sinhx}=e^{-x}}\ \text{(II)}$$

$$\xrightarrow{\text{(I)}*\text{(II)}}(\text{coshx}+\text{sinhx}).(\text{coshx}-\text{sinhx})=e^x.e^{-x}=e^0=1\longrightarrow\boxed{\cosh^2x-\sinh^2x=1}$$

$$\boxed{\cosh2\theta=\cosh^2x+\sinh^2x}\quad,\quad\boxed{\sinh2\theta=2\sinh\theta.\cosh\theta}$$

## بخش چهارم) فرمول های مهم مشتق:

توجه: منظور از u و v توابعی بر حسب x می باشد.

$$y=c \xrightarrow{c\in\mathbb{R}} y'=0$$

$$y=u^n \longrightarrow y'=n.u^{n-1}.u'$$

$$y=f(u) \longrightarrow y'=f'(u).u'$$

$$y=u.v \longrightarrow y'=u'v+v'u$$

$$y=\frac{u}{v} \longrightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$y=e^u \longrightarrow y'=e^u.u'$$

$$y=\mathrm{Ln}u \longrightarrow y'=\frac{u'}{u}$$

مشتق توابع مثلثاتی:

$$y=\sin u \longrightarrow y'=(\cos u)u'$$

$$y=\cos u \longrightarrow y'=(-\sin u)u'$$

$$y=\tan u \longrightarrow y'=(1+\tan^2 u).u'=(\sec^2 u)u'$$

$$y=\cot u \longrightarrow y'=-(1+\cot^2 u).u'=-(\csc^2 u)u'$$

$$y=\sec u \longrightarrow y'=(\sec u.\tan u)u'$$

$$y=\csc u \longrightarrow y'=-(\csc u.\cot u)u'$$

$$y=\sinh u \longrightarrow y'=(\cosh u)u'$$

$$y=\cosh u \longrightarrow y'=(\sinh u)u'$$

$$y=\sin^2 u \longrightarrow y'=(2\sin u\cos u)u'=(\sin 2u)u'$$

$$y=\cos^2 u \longrightarrow y'=(-2\sin u\cos u)u'=(-\sin 2u)u'$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی:

$$y=\mathrm{Arc}\sin u \longrightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y=\mathrm{Arc}\cos u \longrightarrow y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y=\mathrm{Arc}\tan u \longrightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}$$

$$y=\mathrm{Arc}\cot u \longrightarrow y'=\frac{-u'}{1+u^2}$$

مشتق دو تابع پرکاربرد:

$$\boxed{y=\frac{1}{x} \longrightarrow y'=\frac{-1}{x^2}}$$

$$\boxed{y=\sqrt{x} \longrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

## بخش پنجم) فرمول های مهم انتگرال:

توجه: منظور از c یک عدد ثابت است. و منظور از u تابعی بر حسب x می باشد.

$$\boxed{\int dx = x + c \quad , \quad \int du = u + c}$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad (n \neq -1) \qquad \xrightarrow{\text{if} : n=-1} \qquad \boxed{\int \frac{du}{u} = \text{Ln}\, u + c}$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int \sin u\, du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u\, du = \sin u + c$$

$$\int \tan u\, du = \int \frac{\sin u}{\cos u} du = -\text{Ln}(\cos u) + c \quad \longrightarrow \quad \boxed{\int \tan u\, du = -\text{Ln}(\cos u) + c}$$

$$\int \cot u\, du = \int \frac{\cos u}{\sin u} du = \text{Ln}(\sin u) + c \quad \longrightarrow \quad \boxed{\int \cot u\, du = \text{Ln}(\sin u) + c}$$

$$\int \sec u\, du = \text{Ln}(\sec u + \tan u) + c$$

$$\int \csc u\, du = \text{Ln}(\csc u - \cot u) + c$$

$$\int (1 + \tan^2 u) du = \int \sec^2 u\, du = \tan u + c$$

$$\int (1 + \cot^2 u) du = \int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$$

$$\int (\sec u . \tan u) du = \sec u + c$$

$$\int (\csc u . \cot u) du = -\csc u + c$$

$$\int \sinh u\, du = \cosh u + c$$

$$\int \cosh u\, du = \sinh u + c$$

چهار انتگرال طلایی و مهم:

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{Arc}\sin\left(\frac{u}{a}\right) + c} \quad , \quad \boxed{\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \text{Ln}\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + c}$$

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{Arc}\tan\left(\frac{u}{a}\right) + c} \quad , \quad \boxed{\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \text{Ln}\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c}$$

پیشنهاد من به حرفه ای ها ، حفظ کردن چهار انتگرال پر کاربرد زیر نیز می باشد:

$$\int \text{Ln}x\, dx = x\text{Ln}x - x + c$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} + c$$

**همیشه شاد، سلامت، سبز و موفق باشید.**