جزوه اصول شبیه سازی دکتر رحمتی

با تشکر از خانم ناشناس بابت جزوه خوبشون!

گردآورنده : امید رهبر

جلسه اول:

شبیه سازی تلفیقی از OR و آمار و اقتصاد است.

شبیه سازی:
- گسسته - پیشامد (قابل شمارش)
- پیوسته - پیشامد (زیاد کاربرد ندارد)

تعریف شبیه سازی: تقلید عملیاتهای یک فرآیند یا سیستم واقعی در طول زمان می باشد

معمولا این عملیات توسط مدلهای کامپیوتری و از طریق نرم افزارها انجام می شود زیرا

تعداد عملیاتی که باید در داخل یک مدل شبیه سازی انجام شوند معمولا آنقدر زیاد

هستند که به صورت محاسبات دستی در زمان معقول انجام نمی شوند. مدلهای شبیه سازی

مکمل سایر روشهای مدلسازی هستند که در رشته مهندسی صنایع بررسی می گردد که

معمولا از جنس تحقیق در عملیات یا مدلهای آماری یا مدلهای اقتصادی و یا سایر

زیرشاخه های مدلهای ریاضی می باشند. به بیان دیگر کاربرد این مدلها در سیستم های

پیچیده ای می باشد که از طریق تحلیلی قابل حل نمی باشد و سایر روشهای مدلسازی

برای آنها کاربرد ندارد.

سیستم در تعریف بالا مجموعه‌ای از موجودیتها (Entity) گفته می‌شود در عامل

باید دیگر برای انجام هدف یا اهداف خاصی تلاش می‌کند. تعریف سیستم وابسته است

به هدف خاص مطالعه‌ای به صورت می‌گیرد یعنی ممکن است آنچه در یک مطالعه سیستم

گفته می‌شود در مطالعه‌ای دیگر زیرسیستم یا ابرسیستم محسوب گردد.

مثالهایی از یک سیستم

EX1: یک کارخانه سازنده با موجودیتهای ماشین آلات، تجهیزات، نیروی انسانی، ...

EX2: یک بانک با موجودیتهای سرویس دهنده، مشتری، کامپیوتر، ...

EX3: یک مرکز درمانی با موجودیتهای تجهیزات پزشکی، پزشک، پرستار، تخت، بیمار، ...

در تعریف شبیه‌سازی منظور از مطالعه یک سیستم اندازه‌گیری یا تخمین شاخص‌ها

و عملکردها، بهبود عملیات سیستم و آماده شدن برای مقابله با مشکلات آتی می‌باشد

تعریفهای ساده دیگر برای شبیه‌سازی می‌تواند موارد زیر باشد:

۱. بیانی از سیستم برای مطالعه آن

۲. تجسم نمایی از واقعیت جهان اطراف

۳. واقعیت خلاصه شده

بطور کلی مدلهای شبیه سازی مانند سایر مدلها وظایفی از قبیل زیر دارند:

۱. ابزاری برای تسهیل در فرآیند تفکر، تمرکز، توصیف مسائل دنیای واقعی

۲. ابزاری برای برقراری ارتباط

۳. ابزاری برای پیشگویی و انجام آزمایش مانند رگرسیون

بطور کلی سیستم ها به ۲ دسته آزمایش با سیستم واقعی و آزمایش با سیستم ساختگی تقسیم بندی می شوند.

سیستم واقعی راحت نیست - شدنی نیست - هزینه بر

- شبیه سازی در طول زمان انجام می شود.

در دسته بندی دیگر مدلهای شبیه سازی به ۲ دسته مدلهای استاتیک و دینامیک تقسیم بندی می شود سیستم های استاتیک در نقطه خاصی از زمان ایجاد شده و با نام مونتاکارلو (اولین شخصی که استفاده کرده) شناخته می شوند.

سیستم های دینامیک تغییراتی در طول زمان دارند و خود به ۲ دسته گسسته پیشامد و پیوسته پیشامد تقسیم می شوند. تغییرات گسسته - پیشامد در مقاطع گسسته ای از زمان رخ داده و قابل شمارش می باشد اما تغییرات پیوسته - پیشامد به صورت پیوسته با زمان تغییر می کند. مثال از گسسته - پیشامدها می تواند مشتری بانک و مثال از پیوسته - پیشامد حجم آب پشت سد می باشد آنچه ما در این درس مطالعه می کنیم مدلهای گسسته - پیشامد می باشد.

انعطاف پذیری کمتر آسانی بیشتر

سیستم
- استاتیک (مونت کارلو)
- دینامیک
  - پیوسته - پیشامد
  - گسسته - پیشامد

همانطور که ذکر شد برای انجام عمل های شبیه سازی معمولا از محاسبات دستی استفاده نمی کنیم بلکه از کامپیوترها بهره می بریم این بهره بردن می تواند به ۳ روش برنامه نویسی با زبان های پایه مانند (VB، C، Java، ...) باشد.

برنامه می‌تواند بر اساس زبانهای خاص برنامه‌نویسی مانند (SIMAN، Slam، ...) باشد

برنامه می‌تواند استفاده از بسته‌ها و نرم‌افزارهای شبیه‌سازی انجام شود مانند ARENA، ED

روشهای مذکور با حداقل از زبانهای پایه به سمت نرم‌افزارها راحتی انجام محاسبات افزایش

یافته اما در مقابل انعطاف‌پذیری محاسبات از دست می‌رود.

مزایا و معایب شبیه‌سازی: از مزایای شبیه‌سازی می‌توان به مواردی مانند:

۱. بدون ساختن سیستم واقعی می‌توان در مورد آن نتیجه‌گیری نمود.

۲. بدون ایجاد توقف در سیستم می‌توان نسبت به بهبود آن اقدام نمود.

۳. امکان مقایسه طرحها و سیاستهای عملیاتی مختلف توسط این مدلها ایجاد می‌شود.

جمعه ۱ آذر ۱۳۹۲

۴. امکان فشرده‌سازی یا توسعه زمان در این مدلها وجود دارد.

۵. خیلی از اوقات روشهای شبیه‌سازی تنها راه بررسی سیستم حامی باشد.

معایب شبیه‌سازی:

۱. این مدلها خصوصاً در حالتهای احتمالی صرفاً تخمینی از خروجی را در اختیار قرار می‌دهند در

حالیکه روشهای تحلیلی مقدار دقیقی خروجی را ایجاد می‌کنند.

تعطیل

۲- یک مدل نامعتبر شبیه سازی می تواند به نتایج اشتباه غیرقابل جبرانی بیجامد

توسعه یک مدل شبیه سازی می تواند زمانبر و پرهزینه باشد.

جلسه دوم:

در جلسه گذشته مقدماتی از سرفصل اول شبیه سازی ارائه شد در این مقدمه تعریف شبیه سازی، تعریف مدل، تعریف سیستم، انواع روشهای شبیه سازی و مزایا و معایب ارائه گردید در رابطه با شبیه سازی می دانیم، شبیه سازی تقلیدی از عملکرد سیستم واقعی با گذشت زمان می باشد

مراحل یک مطالعه شبیه سازی:

A: تعریف و شفاف سازی محیط شبیه سازی

B: جمع آوری داده و مدلسازی

C: اجرا سازی مدل

D: استفاده مدل
بکارگیری

امام کاظم(ع): هر که چشم خود را از مردم باز دارد، خدا در روز قیامت خشمش را از او باز دارد.

A
تعریف یا فرموله سازی مسئله
۱
تعیین اهداف کلی از مطالعه شبیه سازی
۲
جمع آوری داده ها
۴
مدلسازی مفهومی
۳
B
ترجمه مدل
۵
وارسی مدل
۶
اعتبارسنجی مدل
۷
C
طراحی آزمایشات
۸
اجرای آزمایش و تجزیه و تحلیل
۹
۱۰
نیاز به اجرای بیشتر
بله
خیر
D
۱۱
مستند سازی
۱۲
تهیه گزارش اجرایی

۱. تعریف مسئله = به معنی درک واضحی از سیستم مورد بررسی توسط تحلیل گر یا شبیه ساز می باشد. در این مرحله سیاستگذاران و تحلیل گران باید به درک مشترکی از صورت مسئله برسند.

۲. تعیین اهداف طرح = اهداف شبیه سازی پرسش هایی را مطرح می سازد که باید پاسخ آنها طی مدلسازی و اجرای شبیه سازی بدست آوریم از این اهداف می توان به موارد زیر اشاره نمود:

- تعیین سؤالاتی که باید به آنها پاسخ داده شود.
- تعیین سناریوهایی که باید بررسی شود.
- تعیین معیارهای تصمیم گیری
- تعیین الزامات داده ها
- تعیین سخت افزار، نرم افزار و الزامات پرسنلی
- تعیین برنامه زمان بندی
- تعیین برنامه هزینه ای و رویه شاخص مالی

۳. مدلسازی مفهومی = این قسمت از قدمهای شبیه سازی را می توان به هسته اصلی

کارشبیه‌سازی تغییر نمود برای این منظور بهتر است که ابتدا مدلی ساده ایجاد نموده

و سپس به صورت تدریجی مدل را تا رسیدن به مفهوم کامل پیچیده نمود.

مواردی که در مدل‌سازی یا خلاصه‌سازی خصوصیات ضروری سیستم باید در نظر گرفته شود به قرار

زیر می‌باشد:

- تعیین فرضیات - تعیین وقایع - تعیین موجودیت‌ها - متغیرهای بیرونی و درونی و تعیین رابطه

بین متغیرها - معیارهای عملکردی داده‌های مورد نیاز

۴. جمع‌آوری داده‌ها = بین ساختن مدل و گردآوری داده‌های ورودی رابطه متقابل مداومی

وجود دارد.

۵. ترجمه مدل = به معنای نمایاندن مدل مورد مطالعه به کامپیوتر می‌باشد. در جلسه گذشته

دیدیم محاسبات مورد نیاز شبیه‌سازی به راحتی توسط محاسبات دستی انجام نمی‌شود و ما

در اکثر موارد باید از کامپیوترها استفاده کنیم و برای این منظور از ۳ طریق ۱. زبان‌های

برنامه‌نویسی پایه ۲. زبان‌های برنامه‌نویسی خاص شبیه‌سازی ۳. نرم‌افزارها را داریم

۶. وارسی مدل = در مدل‌های پیچیده اینکه آیا برنامه نوشته شده با مفهوم مورد نظر تطبیق دارد

روز بسیج مستضعفان (تشکیل بسیج مستضعفان به فرمان حضرت امام خمینی (ره) ـ ۱۳۵۸ هـ . ش)

یا خیر و ارسی می باشیم:

۷. اعتبارسنجی = مشخص می کند که آیا مدل ایجاد شده (شامل مفهوم و برنامه نوشته شده مرتبط با آن) با واقعیت تطبیق دارد یا خیر.

۸. طراحی آزمایشات = در هر طرح یا مدل از سیستم باید تصمیماتی در مورد پارامترهای دخیل در آن سیستم اخذ شود پارامترهایی مانند طول دوره راه اندازی و یا طول مدت اجرای شبیه سازی

۹. اجرای آزمایش و تجزیه و تحلیل = در این مرحله در طی اجراهای مکرر شبیه سازی معیارهای عملکردی سیستم مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج حاصل می گردد به عنوان مثال در شبیه سازی چراغ راهنمایی، انتظار یک تقاطع حالتهای مختلف ایجاد شده و بهترین طول زمانی چراغها بدست می آید.

در گام دهم تحلیل گر با توجه به نتایج بدست آمده تعیین می نماید که آیا نتایج و اجراهای بیشتری مورد نیاز است یا خیر

۱۱. مستند سازی = پس از انجام اجراهای متوالی و متعدد و بدست آوردن نتایج

پنجشنبه ۷ Nov 2013 ۲۴ محرم ۱۴۳۵

مورد نیاز نتایج مستند سازی شده و گزارش نتایج به همراه تصمیم ها به سیاستگذاران و صاحبان سیستم اعلام می گردد.

تعریف موجودیت Entity: هر عنصری شی یا جزئی که در سیستم برای آن داده جمع آوری می شود را موجودیت می نامند. در یک مرکز درمانی به عنوان مثال پزشک، پرستار، لوازم آزمایشگاهی و... به عنوان موجودیتها می توانند مطرح شوند.

خصوصیات feature: ویژگی های مشترکی هستند که برای موجودیتها می توان در نظر گرفت به عنوان مثال در رابطه با بیماری نوع بیماری، سن، جنسیت، گروه خونی و... می تواند به عنوان مشخصه مطرح گردد.

روز نیروی دریایی

جمعه ۸ Nov 2013 ۲۵ محرم ۱۴۳۵

فعالیت Activity: بیان کننده عملی خاص در یک دوره زمانی با طول خاص می باشد به عنوان مثال عمل جراحی

متغیر Variable: بخشی از اطلاعاتی است که منعکس کننده ویژگی یک سیستم است به عنوان مثال در یک مرکز درمانی تعداد پزشک، تعداد بیماران و... می تواند به عنوان متغیر

شهادت حضرت امام زین العابدین علیه السلام (۹۵ ه. ق) به روایتی

تعطیل

در نظر گرفته شود.

حالت state: مجموعه‌ای از متغیرها که تمام اطلاعات مورد نیاز برای توصیف سیستم در هر زمان را دارا می‌باشد حالت می‌نامند.

واقعه event: اتفاقی که در لحظه‌ای خاص حالت سیستم را تغییر می‌دهد به عنوان مثال در مرکز درمانی رسیدن یک بیمار جدید یک واقعه است.

منابع Resource: هر آنچه که موجودیتها بر اینش رقابت می‌کنند را منابع می‌نامند مانند فضاء تجهیزات و افراد موجودیتها منابع را تصاحب نموده استفاده می‌نمایند و آزاد می‌نمایند.

جلسه سوم ۹۴/۱۲/۱۱

در جلسات گذشته مباحث مقدماتی شبیه سازی شامل تعریف شبیه سازی، انواع سیستم، مزایا و معایب و اجزا شبیه سازی ارائه گردید

در این جلسه به منظور آشنایی بیشتر با این سیستم‌ها مثالی از یک سیستم صف ارائه می‌شود.

بدی را با عدالت پاسخ دهید، مهربانی را با مهربانی. کنفوسیوس

* مدل‌های صف مکانهایی برای انتظار موجودیتها به دلیل اینکه مشتری خدمت دهنده برای اخذ خدمت پیدا نمی‌کند می‌باشد. سیستم‌های صف می‌توانند دارای محدودیت محدود یا نامحدود باشند یک نمونه از سیستم‌های صف ساده در شکل زیر نمایش داده شده است. سیستم‌های صف معمولاً با عواملی همچون چگونگی یا نرخ ورود، نرخ خدمت‌دهی، ظرفیت سیستم، نوع انفرادی یا گروهی بودن ورودیها و نظم صف دسته‌بندی می‌گردد.

① نرخ خدمت‌دهی
② نرخ ورود
③ تعداد خدمت‌دهنده
④ ظرفیت سیستم
⑤ نوع ورود: انفرادی / گروهی
⑥ نظم صف: FIFO / LIFO

پیشنهاد ورود
خدمت دهنده مشغول است
خیر
بله
زمان سرویس را تولید نمایید
پیشنهاد اتمام سرویس را برنامه ریزی نمایید
یک واحد به صف اضافه نمایید
زمان سرویس را تولید نمایید
پیشنهاد اتمام سرویس را برنامه ریزی نمایید

تصویب قانون اساسی جمهوری اسلامی ایران (۱۳۵۸هـ . ش)ـ روز جهانی معلولان

همانطور که در مثال گفته شده دیده می‌شود که پیشامد ترک و ورود تنها پیشامدهای رخ داده شده در این مثال می‌باشند بطور کلی سیستم‌های شبیه‌سازی به کمک فهرستی از پیشامدهای تا زمان خاصی رخ داده‌اند می‌پردازد و بدین وسیله رخ دادن آنچه در زمان‌های بعد اتفاق می‌افتد را تعیین می‌نماید این فهرست معرف زمان‌های رخ دادن پیشامدهای گوناگون مربوط به هر یک از موجودیت‌های موجود در سیستم می‌باشد. معمولاً در شبیه‌سازی زمان‌گیری توسط ساعت شبیه‌سازی انجام می‌شود با توجه به اینکه در تعریف شبیه‌سازی این سیستم‌ها تقلیدی از زندگی واقعی می‌باشد به منظور تقلید صحیح و تابع عالم واقع عمدتاً در آنها عدم اطمینان وجود دارد در شبیه‌سازی پیشامدها به صورت تصادفی ایجاد می‌شود عامل تصادفی مورد نیاز در این تقلید اعداد تصادفی می‌باشند در فصل‌های آتی در رابطه با روش‌های تولید عدد تصادفی بحث خواهیم نمود آنچه در این مثال استفاده خواهیم نمود صرفاً عدد تصادفی بدست آمده از دکمه rand استفاده می‌گردد

این عدد تصادفی در بازه صفر و یک بوده و از توزیع یکنواخت بین صفر و یک پیروی می‌نماید

مثال) یک فروشگاه تعاونی با چند صندوق دارد. مشتری‌ها در این فروشگاه بصورت تصادفی با فواصل زمانی ۱ تا ۸ دقیقه به صندوق مراجعه می‌نمایند. اطلاعات مربوط به این ورودها در جدول ۱ آمده است. مدت خدمت‌دهی نیز از ۱ تا ۶ دقیقه بصورت تصادفی و طبق احتمالات نشان داده شده تغییر می‌نماید. اطلاعات مربوط به سرویس‌ها در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۱: توزیع مدت بین ورودها

مدت بین دو ورود	احتمال	احتمال تجمعی	بازه تخصیص ارقام
۱	۰/۱۲۵	۰/۱۲۵	۰۰-۰/۱۲۵
۲	۰/۱۲۵	۰/۲۵۰	۰/۱۲۶-۰/۲۵۰
۳	۰/۱۲۵	۰/۳۷۵	۰/۲۵۱-۰/۳۷۵
۴	۰/۱۲۵	۰/۵۰۰	۰/۳۷۶-۰/۵۰۰
۵	۰/۱۲۵	۰/۶۲۵	۰/۵۰۱-۰/۶۲۵
۶	۰/۱۲۵	۰/۷۵۰	۰/۶۲۶-۰/۷۵۰
۷	۰/۱۲۵	۰/۸۷۵	۰/۷۵۱-۰/۸۷۵
۸	۰/۱۲۵	۱/۰۰	۰/۸۷۶-۱/۰۰

جمعه ۱۵

تعطیل

بانک پارسیان

جدول 2: توزیع مدت‌های خدمت‌دهی

مدت خدمت‌دهی	احتمال	احتمال تجمعی	بازه تخصیص ارقام
۱	۰/۱	۰/۱	۰-۰/۱
۲	۰/۲	۰/۳	۰/۱-۰/۳
۳	۰/۳	۰/۶	۰/۳-۰/۶
۴	۰/۲۵	۰/۸۵	۰/۶-۰/۸۵
۵	۰/۱	۰/۹۵	۰/۸۵-۰/۹۵
۶	۰/۰۵	۱	۰/۹۵-۱

حال فرض کنید در مثال مذکور ۱۰ مشتری وارد سیستم شده و اعداد تصادفی زیر برای مدت بین دو ورود و مدت خدمت دهی ایجاد شده باشد شاخص‌های زیر را برای مثال ذکر شده محاسبه نمایید.

داده شده است.

محاسبه شده است

آذر ۱۳۹۲ — یکشنبه

مشتری	ارقام تصادفی	مدت بین دو ورود	ارقام تصادفی	مدت خدمت
۱	—	—	۰/۱۸۴	۴
۲	۰/۹۱۳	۸	۰/۱	۱
۳	۰/۷۲۷	۶	۰/۷۴	۴
۴	۰/۰۱۵	۱	۰/۵۳	۳
۵	۰/۹۴۸	۸	۰/۱۷	۲
۶	۰/۳۰۹	۳	۰/۷۹	۴
۷	۰/۹۲۲	۸	۰/۹۱	۵
۸	۰/۷۵۳	۷	۰/۶۷	۴
۹	۰/۲۳۵	۲	۰/۸۹	۵
۱۰	۰/۳۰۲	۳	۰/۳۷	۳

متوسط مدت انتظار هر مشتری $= \frac{\text{مجموع مدت زمان انتظار}}{\text{تعداد مشتری}} = \frac{9}{10} = 0/9$

احتمال انتظار هر مشتری $= \frac{\text{تعداد مشتری در انتظار}}{\text{تعداد مشتری}} = \frac{3}{10} = 0/3$

نسبت مدت بیکاری خدمت دهنده $= \frac{\text{مجموع مدت بیکاری}}{\text{مجموع مدت شبیه سازی}} = \frac{18}{53} = 0/34$

متوسط خدمت دادن به هر مشتری $= \frac{\text{مجموع مدت خدمت دادن}}{\text{مجموع تعداد مشتری}} = \frac{35}{10} = 3/5$

متوسط مدت بین دو ورود $= \frac{\text{مجموع مدت بین ورودها}}{\text{تعداد مشتری} - 1} = \frac{46}{10-1=9} = 5/11$

متوسط ماندن مشتری در سیستم $= \frac{\text{مجموع ماندن مشتری در سیستم}}{\text{تعداد مشتری}} = \frac{44}{10} = 4/4$

مشتری	زمان ورود A	مدت خدمت‌دهی B	زمان شروع خدمت C	Max(0, A−C) مدت ماندن مشتری در صف D	E=C+B زمان پایان خدمت E	F=B+D مدت ماندن مشتری در سیستم F	Max(0, E−A) مدت بیکاری خدمت‌دهنده G
۱	۰	٤	۰	۰	۰+٤=٤	۰+٤=٤	۰
۲	۸	۱	۸	۰	۸+۱=۹	۰+۱=۱	٤
۳	۱٤	٤	۱٤	۰	۱۸	٤	۵
٤	۱۵	۳	۱۸	۳	۲۱	۳+۳=٦	۰
۵	۲۳	۲	۲۳	۰	۲۵	۲	۲
٦	۲٦	٤	۲٦	۰	۳۰	٤	۱
۷	۳٤	۵	۳٤	۰	۳۹	۵	٤
۸	٤۱	٤	٤۱	۰	٤۵	٤	۲
۹	٤۳	۵	٤۵	۲	۵۰	۲+۵=۷	۰
۱۰	٤٦	۳	۵۰	٤	۵۳	۳+٤=۷	۰
جمع		۳۵		۹	۵۳	٤٤	۱۸

تمرین صفحه ۳۸ کتاب حوری نکس

جلسه چهارم ۹۴/۱۲/۱۸

در اینجای درس در فصل اول کتاب آقای جری بنکس مقدمات شبیه سازی شامل تعاریف، مزایا و معایب و اجزای شبیه سازی مورد بحث و بررسی قرار گرفت

همچنین یک نمونه مسئله سطح ساده نیز مورد بررسی قرار گرفت و اجزاء شبیه سازی در قالب آن مدل نیز معرفی گردید در دو جلسه موجود و آتی ۲ سرفصل مخصوصی مورد نیاز شبیه سازی در حالت گسسته پیشامد نیز مورد بررسی قرار خواهند گرفت

بعد از این سرفصل تا انتهای ترم سرفصل های کلی شبیه سازی مورد مطالعه قرار خواهند گرفت

در کنار اجزاء معرفی شده کتاب آقای جری بنکس در این کتاب دو جزء کلاس و فرآیند تعریف می گردد کلاسها گروه های دائمی از نهادهای یکسان می باشد

کلاس مشتری

کلاس خدمت دهنده

گاهی اوقات بهتر است یک سلسله از پیشامدها را به ترتیب زمانی رخ می دهند به صورت گروهی در نظر گرفت ۱۰۰٪ چنین سلسله از پیشامدها را یک فرآیند نامیده می شود اغلب جهت نشان دادن تمام یا قسمتی از نهادهای موقتی مورد استفاده قرار می گیرد

با توجه به اجزاء معرفی شده در فصل پنجم قصد ارائه روشی برای مدلسازی منطق شبیه سازی داریم این هم در این درس به دو روش ارائه خواهد شد ۱- روش کلاسیک یا نمودارهای گردش فعالیت ۲- روشهای جدید یا روشهای مورد استفاده در نرم افزارهای نوین.

نمودارهای گردش فعالیت:

در شبیه سازی گسسته پیشامدهای مختلف در طی زمان شبیه سازی با یکدیگر تعامل داشته و در ارتباط می باشد برای آنکه مدل مناسب شبیه سازی گسسته پیشامد ساخته شود لازم است تا کلاسهای مهم نهادها شناخته شود. فعالیتهایی که نهادها در گیر آن هستند باید مشخص گردند. نحوه اتصال فعالیتها به یکدیگر باید مشخص گردد

در مدلسازی رفتارهای شبیه سازی همانطور که در قسمت مقدمه ذکر کردیم از المان

پیاپی تدریج استفاده می شود بدین معنا که تحلیل در ساختن مدل را با عناصر واضح

و قابل درک شروع کرد و بعد از اطمینان از درستی و اعتبار این اجزاء عناصر پیچیده تر

و نامفهوم تر را به آن اضافه می نمایند

نمودارهای گردش فعالیت یکی از راههای مدلسازی تعامل نقادها بوده و بیشتر برای

سیستم هایی که ساختار صف دارند مناسب می باشند این نمودارها بر مبنای برنامه های

خودکار می باشند و بهترین وسیله برای درک تعاملات اصلی در مدل می باشند در این

نمودارها صرفا از دو نماد مستطیل و دایره استفاده می شود که به ترتیب نمایانگر حالت

فعال و حالت غیرفعال می باشند نقادها در طول حیاتشان در یکی از دو حالت فعال

بودن و غیرفعال بودن از حالتی به حالت دیگر می روند

یک حالت فعال معمولا شامل مشارکت با اشیای مختلف نقادها می باشد مدت

زمان یک حالت فعال همیشه از قبل قابل تعیین است اگر شبیه سازی مبتنی باشد

قطعی

تعطیل

زمانها معلوم است در صورتی که مدت زمان نامعلوم باشد همانطور که در مثال صف ذکر شده دیده شد زمانها را با نمونه گیری از تابع توزیع احتمال بوجود می آوریم در رابطه با تولید اعداد تصادفی در جلسات آینده به طور مفصل صحبت خواهد گردید.

به عنوان مثال یک سیستم صف می تواند شامل حالت فعال یا غیر فعال باشد در آن مشارکت بین خدمت دهنده و مشتری حالت فعال بوده که دارای زمان مشخص نیز می باشد از سوی دیگر حالت غیر فعال شامل هیچ مشارکتی بین نهادها نمی باشد و معمولا حالتی است که در آن نهادی منتظر است تا چیزی اتفاق بیفتد. حالتهای غیر فعال معمولا به صورت مجموعه ها یا نهادها در نظر گرفته می شود مدت زمان یک نهاد در حالت غیر فعال را نمی توان معمولا از قبل تعیین نمود. این مدت بستگی دارد به پایان حالت قبلی فعال و شروع حالت بعدی فعال.

نکته بعدی که وجود دارد آن است که چرخه عمر یک نهاد باید به صورت توالی متناوبی از حالتهای فعال و غیر فعال مدلسازی شود.

مثال اول در رابطه با یک کارگاه مهندسی ساده بوده که در آن چند دستگاه و چند اپراتور وجود دارند. هر دستگاه قادر است فرآیندی را روی یک کار انجام دهد. کارهایی اولین دستگاهی که در دسترس باشد تخصیص می‌یابد. مدت زمان تکمیل کار مستقل از ماشین بوده اما زمان‌های متغیر دارد. اپراتورها بر روی دستگاه‌ها دو کار انجام می‌دهند.

۱. آماده‌سازی مجدد دستگاه بین کارها در صورتی که لبه‌های برش ابزار هنوز سالم باشد

۲. ابزارگذاری مجدد دستگاه در صورتی که لبه‌های برش آن بسیار فرسوده باشد

این اپراتور مستقل از زمان را به کارهای شخصی خود اختصاص می‌دهد. (حل مثال در جزوه)

* حالت‌های فعال را نمی‌توان به غیرفعال وصل کرد.

مثال) بلیط فروش پردردسر

جلسه پنجم ۹۵/۱/۲۴

در جلسات گذشته مباحث مقدماتی شبیه سازی شامل مفاهیم اولیه، تعاریف مزایا و معایب و انواع مدلهای شبیه سازی مورد بررسی قرار گرفت و مطرح گردید.

در این درس صرفا مدلهای شبیه سازی گسسته پیشامد مورد بررسی قرار می گیرد همچنین با توجه به اینکه مدلهای شبیه سازی صرفا برای فضاهایی که مدل ریاضی به راحتی برای آنها قابل توسعه نمی باشد مطرح می گردد در این درس مباحث کلی را با یک مثال از محیط مسائل صف آغاز نمودیم در این مثال مشخص شد که مسائل شبیه سازی پیچیدگی محاسباتی (عموما) ندارند بلکه حجم محاسبات باعث مشکل شدن مسائل در اغلب مثالهای شبیه سازی می باشد برای این منظور ما گسترد در واقعیت مسائل شبیه سازی را به وسیله محاسبات دستی پیش می بریم و در اکثر مواقع به نوعی از پردازش کامپیوترها استفاده می نماییم یا به وسیله زبانهای برنامه نویسی یا به وسیله نرم افزارهای شبیه سازی خاص منظوره(ی) موجود در بازار

در ادامه درس ابتدا به نحوه تولید اعداد تصادفی در توزیع های مختلف می پردازیم

سپس به چند روش تولید عدد تصادفی به عنوان مثال در مانیتور حساب اشاره

می نماییم سپس آزمون هایی را برای بررسی صحت یا وضعیت داده های ورودی و

خروجی در شبیه سازی بررسی می نماییم به عنوان مثال استقلال، همبستگی، توزیع

و موارد مشابه را در رابطه با داده های ورودی و خروجی بررسی می نماییم

یادآوری: نحوه تولید عدد تصادفی در توزیع های مختلف:

همانطور که در جلسات اول مباحث پیش نیاز درس مرور گردید یکی از مهم ترین

سرفصل های احتمالی سرفصل متغیرهای تصادفی می باشد این متغیرها فضای

نمونه یا آزمایش آماری را به مجموعه اعداد حقیقی تصویر می کنند.

متغیرهای تصادفی نقطه عطفی در تاریخچه مباحث احتمال محسوب می گردد زیرا بر

پایه این متغیرها مباحثی مانند امید، واریانس و کواریانس و ... و همچنین توزیع های

تصادفی مطرح گردید. ما در این درس به منظور تولید اعداد تصادفی به مباحثی مانند

تابع توزیع و تابع توزیع تجمعی نیاز مندیم که در زیر خلاصه ای از آن یادآوری می گردد

تابع احتمال در دو فضای گسسته و پیوسته مطرح می‌گردد. در فضای گسسته به آن تابع توزیع می‌گویند و در فضای پیوسته به آن چگالی می‌گویند علت آن نیز آن است که در فضای گسسته با توجه به اینکه کل احتمال به اجزا این توزیع می‌گردد به آن تابع توزیع می‌گویند اما در فضای پیوسته شکل تابع احتمال مانند چگالی یک جسم می‌ماند که مرکز ثقل دارد به آن تابع چگالی می‌گویند. تابع توزیع تجمعی همانطور که از اسمش پیداست همیشه نمایی است از احتمالات که با توجه به متغیرهای تصادفی انتخاب شده با یکدیگر جمع می‌گردد.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$P(X=3)=\frac{1}{6}$$

$$P(X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$$

$$P(X\leq 3)=\sum_{i=1}^{3} P(X=i)$$

تابع توزیع تجمعی: $P(X\leq x)=\sum_{i=1}^{x} P(X=i)$

مثال) تابع توزیع تجمعی را برای تابع چگالی زیر بدست آورید

۲۸ جمعه

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{9} & 0<x<3\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

$$P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^x \frac{x^2}{9} \Rightarrow \frac{x^3}{27}\Big|_0^x = \frac{x^3}{27}$$

نکته: تابع توزیع تجمعی را با $F(x)=P(X\le x)$ و تابع چگالی را با $f(x)$ نشان می‌دهند

نکته: توابع چگالی پیوسته به یک نقطه حساسیت ندارند بدین معنی که احتمال یک نقطه

حاصل در این احتمالات صفر می‌باشد در نتیجه $P(X\le x)=P(X<x)$

در حالی که در رابطه با توابع گسسته این مسئله برقرار نمی‌باشد

$$P(X\le 3)=P(x=3)+P(x=2)+P(x=1)+P(x=0)$$

۲۹ جمعه

$$P(X<3)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)$$

بدین جا مسیر رسیدن از تابع توزیع یا چگالی را به تابع تجمعی بررسی نمودیم

عکس این مسیر نیز بطور مشخص قابل انجام می‌باشد

مثال) با در نظر گیری تابع تجمعی زیر الف) نوع تابع تجمعی را تعیین نموده هم گسسته

هم پیوسته

تعطیل

ب) شکل آنرا رسم نمایید.

ج) احتمالات نوشته شده را بدست آورید.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{12} & 0\leq x<1 \\ \frac{2}{3} & 1\leq x<2 \\ \frac{11}{12} & 2\leq x<3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$$

$P(X=1)$ $P(X=0)$ $P(X\geq 2)$

$P(X=3)$ $P(1\leq X<3)$

$$P(X=3)=\overbrace{P(X\leq 3)}^{F}-\underbrace{P(X<3)}_{\frac{11}{12}}=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$$

$F(3-\varepsilon)$

$$P(1\leq X<3)=P(X<3)-P(X<2)=\frac{11}{12}-\frac{1}{2}$$

نحوه تولید عدد تصادفی از توزیع های مهم:

معمولاً در شبیه سازی مدلی می شود یک مولد تولید کننده اعداد تصادفی از توزیع یکنواخت وجود دارد و بر اساس آن می توانیم عدد تصادفی از سایر توزیعها تولید نماییم یکی از پرکاربردترین و معروف ترین در این رابطه روش تبدیل معکوس می باشد قبل از بررسی این روش به یادآوری تابع توزیع یکنواخت و مشخصات آن با توجه به اهمیت و کاربردی که در روش تبدیل معکوس دارد می پردازیم لازم به یادآوری است که اعداد تصادفی تولید شده ماشین حسابها از توزیع یکنواخت پیوسته بین [0 و 1] که اصطلاحاً به آن توزیع یکنواخت استاندارد نیز می گویند می باشد

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & ; a\leq x\leq b\\ 0 & ; o.w\end{cases}$$

$X\sim U(a,b)$

$E(X)=\frac{a+b}{2}$ $\qquad$ $Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & \end{cases}$$

If $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ $\quad Y \sim U(0,1)$

$$\longrightarrow f(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} = 1 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$E(Y) = \frac{1}{2}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{12}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y < 0 \\ y & ; 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

$$X \sim U(a,b) \longrightarrow F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

نکته: بدیهی است که تبدیل رابطه مستقیمی بین توزیع یکنواخت استاندارد و سایر توزیع‌های یکنواخت وجود دارد که در قضیه‌ی زیر اثبات آن نیز دیده می‌شود

قضیه: فرض کنید Y متغیر تصادفی یکنواخت استاندارد باشد در اینصورت متغیر تصادفی $X = a + (b-a)Y$ دارای توزیع یکنواخت بین a تا b خواهد بود

$$\text{if } Y \sim U(0,1) \Rightarrow X = a + (b-a)Y \sim U(a,b)$$

$\underbrace{rand(۲)}_{in\ Excel} \rightarrow ۰/۲۴ : x \longrightarrow a + (b-a)\overset{a=1}{x}$

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(a + (b-a)y \leq x) = P(b-a)y \leq (x-a)$$

$$= P(y \leq \frac{x-a}{b-a}) = F_X(\frac{x-a}{b-a})$$

یادآوری تابع معکوس:

$y = x - ۲ \longrightarrow y^{-1} \longrightarrow x = y + ۲$ $\qquad$ $y = e^x \longrightarrow \ln y = x$

$y = ۲x + ۵ \longrightarrow x = \frac{y-۵}{۲}$

قضیه: فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع تجمعی F می‌باشد اثبات می‌شود که تابع $y = f(x)$ نشان دهنده یک متغیر تصادفی یکنواخت استاندارد می‌باشد متغیر تصادفی Y توزیع یکنواخت استاندارد دارد.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y)$$

$$P(F^{-1}(F(x)) \leq F^{-1}(y)) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F_X(F^{-1}(y)) = y$$

نکته: منطق بسیار ساده روش تبدیل معکوس بدین صورت است که اگر بتوانیم تولید کننده

عدد تصادفی یکنواخت استاندارد وجود دارد سپس می‌توان با استفاده از رابطه ساده

(۲) F^{-1} عدد تصادفی از هر توزیع دلخواه بدست آورد برای این منظور لازم است تا

ابتدا تابع معکوس متغیر تصادفی x را بدست آورده و مقدار U را در آن قرار دهیم

در این درس و در ادامه برای ۶ توزیع نمایی، نرمال، مثلثی و لاپلاس نرمال

روش تبدیل معکوس را بررسی خواهیم نمود.

تابع توزیع نمایی معمولا برای مدلسازی فاصله زمانی بین دو واقعه استفاده می‌شود

متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با میانگین λ می‌باشد را به وسیله تابع

چگالی زیر توصیف می‌کنیم

تابع تجمعی برای این توزیع نیز در زیر آمده است.

$$X \sim exp(E(x)=\lambda)$$

$$\Rightarrow F(x)=\int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} = 1-e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad x \geq 0$$

$$f(x)=\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad x \geq 0$$

پنجشنبه ۵

$$\overset{a}{Y = F(x)} \longrightarrow \overset{b}{x = F^{-1}(y)}$$

$$Y = F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} \Rightarrow Y - 1 = -e^{-\frac{x}{\lambda}} \Rightarrow \ln(1-Y) = -\left(\frac{-x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$x = \lambda \ln(1-Y)$$

مثال) فرض کنید ۵ عدد تصادفی از توزیع یکنواخت به شکل زیر داریم به وسیله این ۵ عدد تصادفی ۵ عدد تصادفی از توزیع نمایی با $\lambda = 5$ ایجاد نمایید

۰٫۵۴ ، ۰٫۷۶ ، ۰٫۸۷ ، ۰٫۶۱ ، ۰٫۹۳

$\lambda = 5$

$x = 5\ln(1-Y) =$ ۴٫۷۰ ، ۱۳٫۲۹

مثال) فرض کنید ۵ عدد تصادفی از توزیع یکنواخت (۰ و ۱) به صورت زیر

جمعه ۶

داده شده است. به وسیله این اعداد ۵ عدد تصادفی از توزیع نمایی با $\lambda = 1.7$ تولید نمایید.

تعطیل

در جلسه گذشته پس از معرفی مقدمات مربوط به اعداد تصادفی به نحوه تولید اعداد تصادفی از توزیع های مختلف با استفاده از روش تبدیل معکوس پرداختیم و مشخص گردید برای استفاده از روش تبدیل معکوس اگر تابع معکوس تابع تجمعی یک متغیر تصادفی از هر توزیعی در دست باشد می توان عدد تصادفی از توزیع مذکور را با قرار دادن مقادیر تصادفی بین صفر و یک (توزیع یکنواخت استاندارد) به راحتی بدست آورد و در ادامه درس در جلسه گذشته با استفاده از روش تبدیل معکوس عدد تصادفی و روش تولید آن را در توزیع یکنواخت غیراستاندارد (a,b) و توزیع نمایی با میانگین λ بررسی و مطرح گردید در این جلسه در ادامه مباحث ارائه شده به تولید عدد تصادفی از توزیع هایی مانند توزیع ارلانگ، نرمال و مثلثی خواهیم پرداخت

ولاگ نرمال

تولید عدد تصادفی از توزیع های غیرمتعارف:

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است با فرض

در اختیار داشتن یک مولد عدد تصادفی یکنواخت استاندارد، راه را هموار می‌سازد تا بتوانیم تصادفی تولید نماییم.

$$f(x)=\begin{cases} x & ; 0\le x\le 2 \\ 0 & ; \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

جواب پایین صفحه ✓ *

تمرین: برای دو توزیع ارلانگ و لاپلاس نرمال خواص توزیع‌ها را به طور کامل توضیح داده و نحوه تولید عدد تصادفی از آنها را بیان نمایید.

$$f(x)=\begin{cases} 1-(1-x)=x & 0\le x<1 \\ 1+(1-x)=2-x & 1\le x<2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$ *

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; x<0 \\ \int_0^x x\,dx=\frac{1}{2}x^2 & ; 0\le x<1 \\ \int_0^1 x\,dx+\int_1^x (2-x)\,dx=2x-\frac{x^2}{2} & ; 1\le x<2 \\ 1 & ; x\ge 2 \end{cases}$$

$$-\frac{x^2}{2}+2x-1-y=0$$

$$y=\frac{1}{2}x^2 \qquad 0\leq x<1$$

$$x^2=2y$$

$$x=\pm\sqrt{2y} \longrightarrow x=\sqrt{2y} \qquad 0\leq x<1$$

$$y=2x-\frac{x^2}{2}-1 \rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2+2x-(1+y) \qquad 1\leq x<2$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-2(1+y)}}{-1} \begin{cases} \dfrac{-2+\sqrt{2-2y}}{-1}=2-\sqrt{2-2y} & \checkmark \\ \dfrac{-2-\sqrt{2-2y}}{-1}=2+\sqrt{2-2y} & \times \end{cases}$$

$$x=\sqrt{2y} \qquad 0\leq\sqrt{2y}<1 \Rightarrow 0\leq 2y<1 \Rightarrow 0\leq y<\frac{1}{2}$$

$$x=2-\sqrt{2-2y} \qquad 1\leq 2-\sqrt{2-2y}<0 \Rightarrow -1\leq-\sqrt{2-2y}<0 \Rightarrow$$

$$0<\sqrt{2-2y}\leq 1 \Rightarrow 0<2-2y\leq 1 \Rightarrow -2<-2y\leq -1 \Rightarrow 1>y\geq\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\leq y<1$$

دی ۱۳۹۲

مثال)

$$x = \sqrt{2y} \qquad 0 \le y < \frac{1}{2}$$

$$x = 2 - \sqrt{2 - 2y} \qquad \frac{1}{2} \le y < 1$$

	۱	۲
y	۰/۲	۰/۹۸
x	۰/۲	۱/۸

$$x = \sqrt{2 \times 0.2}$$

$$x = 2 - \sqrt{2 - 2 \times 0.98}$$

نحوه تولید عدد تصادفی در توزیع نرمال:

همانطور که می‌دانید توزیع نرمال شاید شناخته‌شده‌ترین توزیع موجود می‌باشد این توزیع دارای خواص متعدد می‌باشد که باعث گردیده رفتارهای احتمالی مختلف یا به طور مستقیم از همین توزیع و یا توسط تخمین‌هایی از آن بتوان بدست آورد تابع چگالی این توزیع به شکل زیر می‌باشد و شکل آن نسبت به میانگین متقارن است

این توزیع دارای دو پارامتر μ و σ^2 می‌باشد (X دارای توزیع نرمال است)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (X \sim N(\mu, \sigma^2))$$

رحلت حضرت رسول اکرم صلی الله علیه و آله (۱۱ه. ق) ـ شهادت حضرت امام حسن مجتبی علیه السلام (۵۰ه. ق) (تعطیل)

تعطیل

یک حالت خاص مهم از این توزیع حالت نرمال استاندارد می باشد که در آن میانگین صفر

و واریانس ۱ می باشد $Z \sim N(\mu = 0 , \sigma^2 = 1)$

برای انجام محاسبات در توزیع نرمال یک مشکل وجود دارد و آن این است که

انتگرال تابع توزیع نرمال لاینحل است برای رفع این مشکل انتگرال مذکور

را از روشهای محاسبات عددی بدست می آورند و در جداولی بصورت جمع

بندی شده ارائه می نمایند برای استفاده از این جداول باید دقت شود که این

جداول بر اساس میانگین صفر و واریانس ۱ در تکرارهای مختلف روشهای

محاسبات عددی بدست آمده اند برای همین منظور با توجه به اینکه میانگین و واریانس

۵ حالت دارند ما مجبور هستیم به منظور کاهش حجم جداول و سادگی کار

همه توزیع های نرمال را به نرمال استاندارد تبدیل کنیم که روش استاندارد

سازی بدین صورت که در زیر نمایش داده شده است.

$X \sim N(\mu , \sigma^2)$

$P(X \leq a)$

$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

پنجشنبه ۱۲

$$\begin{cases} Y = F(X) \\ x = F^{-1}(y) \end{cases}$$

$$\alpha = Y = P(X < x)$$

$$\alpha = P\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$z_\alpha = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = z_\alpha \sigma + \mu \Rightarrow x = z_y \sigma + \mu$$

مثال) ۵ عدد تصادفی از یک مولد اعداد تصادفی یکنواخت استاندارد در جدول زیر داده شده است بر اساس این اعداد ۵ عدد تصادفی از توزیع نرمال $\mu = 3$ و $\sigma^2 = 4$ تولید نمایید.

	۱	۲	۳	۴	۵
y	۰/۲۱۶۳	۰/۳۲۴۱	۰/۱۰۲۱	۰/۷۶۱	۰/۵
z	-۰/۸۰۷۷	-۰/۴۵۹۴	-۱/۳	?	۰
x	۱/۳۸۴۶	۲/۰۸۱۲	۰/۴	۴/۴۷۱۴	۳

جمعه ۱۳

$$x = z_y \sigma + \mu = z_y(2) + 3 \rightarrow x_1 = (-0/8077)(2) + 3 = 1/3846$$

تمرین: ۵ عدد تصادفی از توزیع یکنواخت $U(1, 10)$ به صورت جدول زیر بدست آمده است. ۵ عدد تصادفی از توزیع نرمال $N(\mu = -10, \sigma^2 = 25)$ تولید نمایید

هجرت حضرت رسول اکرم صلی الله علیه و آله از مکه به مدینه

تعطیل

	۱	۲	۳	۴	۵
y	۹,۲	۸,۶۵	۰,۱۴	۳,۹۴	۵,۰۱

جلسه هشتم ۹۵,۲,۱۴

$x \sim u(\overset{a}{4}, \overset{b}{10})$

$y \sim u(0,1) \longrightarrow x = a + (b-a)y \Rightarrow u(0,1) \longrightarrow u(a,b)$

$y = \dfrac{x-a}{b-a} \Rightarrow u(a,b) \Rightarrow u(0,1)$

پس از بررسی مقدمات شبیه سازی و نحوه مدل سازی آن و همچنین مثالهای عددی از شبیه سازی حضور ما در جلسه مسائل صف به مباحث تکمیلی این درس می پردازیم همانطور که در مثال صف ذکر شده دیده شد دو فرض در مثال مذکور وجود داشت:

۱- همواره در شبیه سازی یک تولید شده عدد تصادفی یکنواخت وجود دارد و می توان به وسیله آن از هر توزیعی عدد تصادفی تولید نمود

۲- داده های تصادفی از توزیع های خاصی پیروی می نمایند به عنوان مثال زمان ورود بین مشتریها از توزیع نمایی و زمان خدمت دهی از توزیع زمان

دی ۱۳۹۲

در این جلسه قصد بررسی صحت پیردی داده ها از توزیع خاص را داریم

معمولا حدس در باره نوع توزیع بر اساس هیستوگرام، خواص داده ها و یا منشا موجود

در داده ها می باشد به عنوان مثال در رابطه با منشا داده ها دو توزیع دوجمله ای

و پواسون را مطرح نمود توزیع دوجمله ای به بررسی وقایع می پردازد که

هر دو سمت صفر و یک آن را می توان شمرد به عنوان مثال اگر در ۱۰ تا تریک ۳ عدد

ناسالم باشد ۷ عدد سالم می باشد اما در توزیع پواسون یک ظرف را نمی توان شمرد

به عنوان مثال امسال ۲ زلزله آمده چند زلزله نیامده را نمی توان شمرد.

به منظور اثبات این حدس روشهای متعددی در ادبیات مسئله ارائه شده است.

در این درس ما روش آزمون مربع کای استفاده می نماییم از روشهای دیگر این منظور

می توان کلموگروف - اسمیرونوف و رایان جوینر استفاده می کنیم.

آزمون کای مربع به این صورت می باشد که ابتدا داده ها را در جدولی مانند جدول

زیر طبقه بندی می نماییم همچنین کمیت های زیر را داریم

N: حجم (تعداد) کل داده ها K: تعداد طبقات

I: فاصله بین طبقات

طبقه	نماینده x_i	فراوانی مشاهده شده (O_i)	دوشنبه f'_i فراوانی نسبی مشاهده شده	پنجشنبه f_i
$x_i - x_{i+1}$				

$$K = f(N) = (1.33 \log N) + 1$$

$$I = \frac{R}{K} \qquad R = x_n - x_1$$

کوچکترین - بزرگترین

پس از بدست آوردن تعداد طبقات و طول فاصله طبقات داده‌ها را در طبقات توزیع نموده و سپس فراوانی هر دسته را بدست می‌آوریم بر اساس فراوانی بدست آمده f_i هیستوگرام را رسم می‌نماییم و با توجه به خواص توزیع‌ها حدس یا فرضیه‌ای در رابطه با نوع توزیع پیشنهاد می‌نماییم. حال به منظور بررسی توزیع حدس زده شده از آزمون کای مربع به شکل زیر استفاده می‌نماییم در انجام آزمون کای مربع مانند هر دیگری به ۱- H_0 و H_1، ۲- آماره و ۳- ناحیه پذیرش نیاز داریم:

H_0: G بر داده

H_1: G بر داده نمی‌آید

آماره $V=\sum_{i=1}^{k}\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$

ناحیه پذیرش $[0, \chi^2_{k-1,\alpha}]$

o_i: فراوانی مشاهده شده

e_i: فراوانی مورد انتظار

طبقه	o_i	e_i

$e_i = \overbrace{N}^{100}\overbrace{P_i}^{\%2}$

مثال) براساس تعدادی مشاهده جدول بدست آمده است. نظر آنکه آیا توزیع داده های مذکور یکنواخت می باشد یا خیر؟

طبقه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
فراوانی مشاهده شده	۸	۸	۱۰	۹	۱۲	۸	۱۰	۱۴	۱۰	۱۱
فراوانی انتظاری	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰

($\alpha=0.05$) هفتای نوع اول، سطح معنی دار بودن

$N=8+8+\dots+11=100$

$P_i=\frac{1}{10}$

$e_i=NP_i=100\times\frac{1}{10}=10$

H_0: داده ~ یکنواخت

H_1: داده ~ یکنواخت نیست

$$V = \sum_{i=1}^{10} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} + \dots + \frac{(11-10)^2}{10} = 4.4$$

$$\chi^2_{k=10,\ \alpha=0.05} = \chi^2_{9,\ 0.05} = 16.9 \longrightarrow [0, 16.9] \quad V = 4.4$$

همانطور که مشاهده می‌شود آماره بدست آمده مقدار ۴٫۴ دارد که این مقدار در ناحیه پذیرش [0,16.9] قرار می‌گیرد در نتیجه با اطمینان ۹۵٪ می‌توان گفت داده‌ها از توزیع یکنواخت پیروی می‌نمایند

نکته: در آزمون‌های مربع معمولاً مقدار پارامترهای توزیع‌ها از قبل مشخص نمی‌باشد و باید آنها را از میانگین موزون یا واریانس موزون با روابط زیر بدست آورد

$$\mu = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{(\sum f_i) - 1}$$

پنجشنبه ۱۹

مثال) با در نظر گیری جدول فراوانی زیر، داده های آن از مطالعه تعداد غلط املایی در یک کتاب بدست آمده اند بررسی نمایید که آیا داده های مذکور دارای توزیع پواسون هستند یا خیر؟

x_i	تعداد غلط	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
f_i O_i	تعداد صفحه	۱۸	۵۳	۱۰۳	۱۰۷	۸۲	۴۶	۱۸	۱۰	۲	۱
											۳
P_i	P_i	۰/۰۴۹۸	۰/۱۴۹	۰/۲۲۴	۰/۲۲۴	۰/۱۶۸	۰/۱	۰/۰۵۰۴	۰/۰۲۱۶	۰/۰۰۸۱	۰/۰۰۴
e_i	e_i	۲۱/۹	۶۵/۶	۹۸/۶	۹۸/۶	۷۳/۹	۴۴/۴	۲۲/۲	۹/۵	۳/۶	۱/۷

$O: ۵/۳$

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \lambda=\frac{\sum_{i=1}^{10} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{10} f_i} \qquad x=0,1,2,\dots$$

قیام خونین مردم قم (۱۳۵۶ه. ش)

جمعه ۲۰

$$\lambda=\frac{18(0)+1(53)+\dots+(1)9}{18+53+\dots+1}=3$$

$$P_1=P(X=0)=\frac{e^{-3}3^{0}}{0!}=0/0498$$

$$P_2=P(X=0)=\frac{e^{-3}3^{1}}{1!}=0/149$$

$$\vdots$$

$$P_{10}=P(X=9)=\frac{e^{-3}3^{9}}{9!}=0/004$$

شهادت حضرت امام حسن عسکری علیه السلام (۲۶۰ه. ق) ـ شهادت میرزا تقی خان امیر کبیر (۱۲۳۰ه. ش)

تعطیل

$N = 18 + 53 + \dots + 1 = 440$

$e_i = P_i \cdot N = 440 P_i$

H_0: پواسون ~ داده

H_1: پواسون ~ داده

$$Y = \sum_{i=1}^{13} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(18-21.9)^2}{21.9} + \dots + \frac{(3-5.3)^2}{5.3} = 6.79$$

$$\chi^2_{k-1-1-1,\,0.05} = \chi^2_{10-1-1-1,\,0.05} = 14.06 \checkmark$$

چون ۶٫۷۹ توی بازه [۰، ۱۴٫۰۶] هست H_0 برقرار است

نکته: اگر پارامتری تخمین زده شود همواره یک واحد از تعداد پارامتر تخمین زده شده از درجه آزادی کاسته می‌شود.

نکته: معمولاً در آزمون‌های مربع اگر تعداد مشاهدات استفاده‌ای یک دسته کمتر از ۵ باشد باید آن دسته را با دسته‌ی یا دسته‌های قبلی آن دسته ادغام کنیم تا به عددی بزرگتر از ۵ برسیم مقدار e_i و o_i مورد استفاده قرار می‌گیرد در این مورد نیز باید دقت کنیم با توجه به اینکه پس از ادغام طبقات تعداد طبقات کاهش می‌یابد درجه

۳۶۵ [illegible] یکشنبه

[illegible] زمان از کار افتادن یک دستگاه بخار برحسب ماه در جدول زیر به همراه تعداد [illegible] آمده است. در سطح شصت درصد اطمینان [illegible]

دارای توزیع نرمال می‌باشد یا خیر؟

زمان (x)	۰ - ۵	۵ - ۱۰	۱۰ - ۱۵	۱۵ - ۲۰	۲۰ - ۲۵	۲۵ - ۳۰	۳۰ - ۳۵
	۲/۵	۷/۵	۱۲/۵	۱۷/۵	۲۲/۵	۲۷/۵	۳۲/۵
f_i	۴	۳۲	۴۴	۸۲	۴۲	۱۸	۸
p_i	۰/۰۳۹۶	۰/۱۱۷	۰/۲۴۸	۰/۲۹	۰/۲۰۵	۰/۱۰۸۱	۰/۰۸۱
e_i	۸	۲۵	۵۲	۶۱	۴۲	۱۷	۴

$$\bar{x} = \mu = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{4(2.5)+32(7.5)+\dots+8(32.5)}{4+32+\dots+8} = 16.6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i (x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{7} f_i - 1} = \frac{4(2.5-16.6)^2+\dots+8(32.5-16.6)^2}{4+32+\dots+8} = 43.56$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{43.56} = 6.6$$

$$P_1 = P(0 \le X \le 5) = P(X \le 5) - P(X \le 0) = P\left(Z \le \frac{5-16.6}{6.6}\right) - P\left(Z \le \frac{0-16.6}{6.6}\right)$$

$$= 0.0396$$

$P = P(5 < X < 10) = P\left(Z < \frac{10-16.3}{6.6}\right) - P\left(Z < \frac{5-16.3}{6.6}\right) = 0.117$

H_0: داده $\sim N$

H_1: داده $\not\sim N$

$N = 4 + 32 + \dots + 8 = 31$

$V = \frac{(8-4)^2}{8} + \dots + \frac{(31-26)^2}{31} = 23.8$

$\chi^2_{k-1-2-1,\,0.05} = \chi^2_{3,\,0.05} = 7.815$

جلسه نهم ۹۵/۲/۲۱

پس از بررسی مقدمات شبیه‌سازی و توضیحات اولیه لازم و همچنین مثال‌های عددی از شبیه‌سازی به بررسی نحوه تولید عدد تصادفی در شبیه‌سازی پرداختیم همچنین از روش‌های مربع به نحوه آزمون نمودن پیروی داده‌ها از توزیع‌های مختلف پرداختیم روش‌های مربع روشی پارامتریک یا مبتنی بر توزیع نرمال می‌باشد روش دیگری که غیر پارامتریک می‌باشد روش کولموگروف- اسمیرنوف می‌باشد (KS) در این جلسه آزمون‌های مرتبط با استقلال سنجی داده‌ها را نیز بررسی خواهیم نمود در رابطه با آزمون استقلال نیز آزمون استقلال مبتنی بر ردیف‌ها و آزمون

استقلال مبتنی بر کای مربع به ترتیب به عنوان روشهای غیرپارامتریک و پارامتریک بررسی خواهد شد.

آزمون (KS): آزمون KS به افتخار دو آماردان روسی به نامهای کولموگروف اسمیرنوف نامگذاری شده است. این روش در مواقع خاصی به روش کای مربع ارجحیت دارد که می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱. معمولاً وقتی تعداد مشاهدات کوچک باشد آزمون KS مطلوبیت بیشتری دارد. علت این امر آن است که در روشهای مبتنی بر توزیع نرمال (پارامتریک) معمولاً در صورت وجود تعداد قابل توجه داده روش مطلوبیت پیدا می‌کند.

۲. همچنین آزمون KS نسبت به آزمون کای مربع سادگی و سهولت بیشتری دارد. البته آزمون کای مربع این مزیت را دارد که امکان تخمین پارامتر نیز در آن وجود دارد. همچنین آزمون کای مربع هم در رابطه با داده‌های گسسته و هم در رابطه با داده‌های پیوسته کاربرد دارد. این در حالی است که آزمون KS صرفاً برای داده‌های پیوسته قابل استفاده می‌باشد. در این آزمون نیز مانند

آزمون های مربع فرض ها پیروی یا عدم پیروی داده ها از توزیع خاص با پارامتر خاص می باشد

H_0: پیروی داده از توزیع خاص با پارامتر خاص

H_1: عدم پیروی داده از توزیع خاص با پارامتر خاص

کاره این آزمون برابر است با حداکثر قدر مطلق تفاضل فراوانی مشاهده شده نسبی تجمعی از فراوانی انتظاری تجمعی نسبی

$$D_n = \text{Max}|F_e - F_0|$$

F_0: فراوانی نسبی تجمعی مشاهده شده، F_e: فراوانی نسبی تجمعی انتظاری

ناحیه پذیرش این آزمون بازه $[0, D_{\alpha,n}]$ صفر تا نقطه بحرانی $D_{\alpha,n}$ می باشد

مثال) داده های زیر در رابطه با ورود کشتی ها به یک اسکله برای بارگیری نفت طی ۱۴ روز داده شده اند تعیین نمایید که آیا در سطح معنادار بودن ۰/۰۵ داده ها از توزیع پواسون با $\lambda = 2$ پیروی می نمایند یا خیر؟

تعداد ورود در هر روز	۰	۱	۲	۳	۴	۵ و بیشتر
تعداد روزها	۲	۴	۵	۱	۰	۲

H_0: داده $\sim$ Poisson $(\lambda = 2)$

H_1: داده $\nsim$ Poisson $(\lambda = 2)$

x تعداد مشتریان	فراوانی مشاهده شده	فراوانی نهتجمع مشاهده شده	$F_o(x)$	فراوانی نسبی انتظاری	$F_e(x)$	$F_o - F_e$	$\lvert F_o - F_e \rvert$
۰	۲	۲	$\frac{2}{14} = 0/143$	۰/۱۳۵	۰/۱۳۵	-۰/۰۰۸	۰/۰۰۸
۱	۴	۶	$\frac{6}{14} = 0/428$	۰/۲۷۱	۰/۴۰۶	-۰/۰۲۲	۰/۰۲۲
۲	۵	۱۱	۰/۷۸۵	۰/۲۷۱	۰/۶۷۷	-۰/۱۰۸	۰/۱۰۸
۳	۱	۱۲	۰/۸۷۵	۰/۱۸	۰/۸۵۷	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۴	۰	۱۲	۰/۸۷۵	۰/۰۹	۰/۹۴۷	۰/۰۹	۰/۰۹
≥۵	۲	۱۴	۱	۰/۰۵۳	۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

$$P(X=0) = \frac{e^{-2} 2^{0}}{0!} = 0/135$$

$$P(X=3) = \frac{e^{-2} 2^{3}}{3!} = 0/18$$

فرزانه معصوم (۱۳۵۷ه. ش)

$$D_n = \text{Max} \lvert F_o - F_e \rvert$$

$$[0, D_{\alpha,n}] = [0, \overbrace{D_{0/05,14}}^{0/349}]$$

اماره: $D_n = 0/258$

H_0 برقرار است.

شهادت نواب صفوی، طهماسبی، برادران واحدی و ذوالقدر از فداییان اسلام (۱۳۳۴ه. ش)

تعطیل

آزمونهای بررسی استقلال:

یکی از متداولترین روشهای بررسی استقلال بین دو مجموعه داده روش کای مربع می باشد. در این روش نیز با توجه به آزمون فرض بودن اجرا آزمون فرض لازم می باشد فرض صفر در این آزمون بیانگر استقلال دو مجموعه داده از یکدیگر می باشد.

آماره این آزمون از رابطه زیر بدست می آید:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(F_{o_i} - F_{e_i})^2}{F_{e_i}}$$

ناحیه پذیرش این آزمون نیز به قرار زیر می باشد:

$$[0, \chi^2_{(r-1)(c-1)}]$$

در فرمول آماره F_o فراوانی مشاهده شده و F_e فراوانی انتظاری می باشد. مقادیر فراوانی انتظاری برای هر سلول از ضرب مجموعه فراوانی های سطر و ستون آن سلول بدست می آید. خلاصه محاسبات مورد نیاز این روش در دو جدول F_o و F_e زیر آمده است.

وقتی همه با من هم عقیده می شوند، تازه احساس می کنم که اشتباه کرده ام.
اسکار وایلد

متغیر دوم / متغیر اول	۱	۲	...	c	مجموع
۱	n_{11}	n_{12}		n_{1c}	$n_{1.}$
۲	n_{21}	n_{22}		n_{2c}	$n_{2.}$
⋮	⋮	⋮		⋮	
r	n_{r1}	n_{r2}		n_{rc}	$n_{r.}$
مجموع	$n_{.1}$	$n_{.2}$		$n_{.c}$	$n_{..}$

	۱	c	
	$\frac{n_{.1} \times n_{1.}}{n_{..}}$	$\frac{n_{.c} \times n_{1.}}{n_{..}}$	
	$\frac{n_{.1} \times n_{2.}}{n_{..}}$	$\frac{n_{2.} \times n_{.c}}{n_{..}}$	
			$n_{..}$

مثال) فرضیه ای به این صورت تدوین شده است که بین عملکرد کارمندان و رضایت شغلی آنها ارتباط وجود دارد برای بررسی فرضیه فوق ۱۸۰ نفر کارمند به صورت تصادفی انتخاب شده و اعداد زیر بدست آمده است صحت فرضیه فوق را در سطح ۰/۰۵ بررسی نمایید.

ولادت حضرت رسول اکرم صلی الله علیه و آله (۵۳ سال قبل از هجرت) و روز اخلاق و مهرورزی - ولادت حضرت امام جعفر صادق علیه السلام مؤسس مذهب جعفری (۸۳ ه. ق) (تعطیل) - روز غزه

تعطیل

دی ۱۳۹۲

H_0: ارتباطی بین X و Y وجود ندارد

H_1: ارتباطی بین X و Y وجود دارد.

سطح رفاهی / سطح عملکرد	بالا	متوسط	پایین	
خوب	۱۸ (۱۰)	۲۰ (۳۰)	۷ (۱۵)	۴۵
متوسط	۱۵ (۲۰)	۳۷ (۴۰)	۳۸ (۳۰)	۹۰
ضعیف	۷ (۱۰)	۲۳ (۳۰)	۱۵ (۱۵)	۴۵
	۴۰	۸۰	۶۰	۱۸۰

$$e_{11} = \frac{40(45)}{180} = 10 \qquad e_{23} = \frac{60(90)}{180} = 30$$

$$\chi^2 = \frac{(18-10)^2}{10} + \frac{(20-30)^2}{30} + \frac{(7-15)^2}{15} + \dots + \frac{(15-15)^2}{15} = 15.625$$

$$[0, \chi^2_{(3-1)(3-1),0.05}] = [0, \chi^2_{4,0.05}] = [0, 9.488]$$

H برقرار نیست داده‌ها ارتباط دارند.

آزمون استقلال مبتنی بر ردیف‌ها.

یکی از فرضیات مهمی که در این درس به آن پرداختیم فرض استقلال داده‌ها بوده است. در این قسمت قصد به چالش کشیدن این فرض را به وسیله آزمون

فرض داریم این آزمون اولین بار توسط دانشمندی که ابقه با کاشت درختان سرو کاج در یک خیابان و بررسی تصادفی بودن چیدمان این درختان بوده است.

در مثال زیر یک روند از این کاشت آمده است تعیین نمایید که آیا کاشت درختان با نظم بوجود آمده تصادفی بوده است یا خیر؟

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱

س | س | ک ک ک ک | س | ک ک | س س س | ک ک | س س س س س | ک | س

فرض های این آزمون و آماره و ناحیه پذیرش آن به شکل زیر می باشد

n_1 : تعداد حروف نوع ۱ : ۱۴

n_2 : تعداد حروف نوع ۲ : ۱۰

$$E(R) = \frac{2n_1 n_2}{n_1+n_2} + 1 = 12.67$$

$$Var(R) = \frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2 (n_1+n_2-1)} = 5.41$$

$\alpha = 0.05$

H_0 : چیدمان تصادفی است

H_1 : چیدمان تصادفی نیست

$$Z = \frac{\text{تعداد روند} - E(R)}{\sqrt{Var(R)}} = -0.72$$

$$[-Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{\frac{\alpha}{2}}] = [-1.96, 1.96]$$

در این جلسه پس از انجام مقدمات انجام شده و همچنین مثالهای شبیه سازی و بررسی آزمونهایی در رابطه با توزیع داده‌ها و تصادفی بودن آنها به نحوه تولید عدد تصادفی بین صفر و یک می‌پردازیم سپس آشنایی اولیه را برای کار کردن با نرم افزار ارنا بررسی می‌نماییم. روشهای مختلفی به منظور تولید عدد تصادفی ارائه شده است در این درس صرفا روشهای کلاسیک این مهم بررسی می‌گردد. روش اول، روش میان مربعی است در این روش با یک عدد تصادفی به نام هسته فرآیند تولید عدد تصادفی را آغاز می‌کنیم روش کار بدین صورت است که هسته را بتوان ۲ می‌رسانیم و ارقام میانی آن را تعیین و جدا می‌نماییم بدین وسیله دو با اعشاری بودن آن اولین عدد تصادفی را تولید می‌کنیم و همین مدل را برای تولید سایر عدد تصادفی استفاده می‌نماییم

مثال

هسته: $X_0 = 369$

$X_1 = X_0^2 = (369)^2 = 136161 \rightarrow R = 0.212$

$X_1 = 212 \qquad R_1 = 0.212$

$X_2 = X_1^2 = 44944 \qquad R_2 = 0.494$
$X_2 = 494$

$X_3 = (494)^2 = 244036 \qquad R_3 = 0.440$
$X_3 = 440$

روش ذکر شده بیشتر یک روش تاریخی می‌باشد تا یک روش عملیاتی زیرا قواعد ساده و استانداردی برای تولید هسته وجود ندارد. دلیل دوم آنکه با ظهور رقم صفر در سمت چپ اعداد ارقام میانی دنباله اعداد تصادفی تولید شده به سرعت به انتها می‌رسد به عنوان مثال فرض کنید هسته تولیدی یک سری ارقام تصادفی بر مبنای عدد ۴ رقمی $X_0 = ۵۱۹۷$ باشد در این صورت اعداد بدست آمده به روش میان مربعی به صورت زیر می‌شوند

$X_0 = ۵۱۹۷$

$R_1 = ۰/۰۰۸۸$ $\quad R_2 = ۰/۰۰۷۷$ $\quad R_3 = ۰/۰۰۵۹$

روش فوق به راحتی با حصول مقدار تکراری یا صفر برای ارقام میانی کاربرد خود را از دست می‌دهد به عنوان مثال برای هسته ۳۵۰۰ واقعه زیر رخ می‌دهد.

$X_0 = ۳۵۰۰$

$X_0^2 = ۱۲۲۵۰۰۰۰ \longrightarrow R_1 = ۰/۲۵$

$X_1^2 = ۰۶۲۵۰۰۰۰ \longrightarrow R_2 = ۰/۲۵$

روش دوم: روش میان ضربی: این روش همانند روش میان مربعی می‌باشد و با انتخاب دو هسته آغاز می‌گردد مقدار ارقام این دو عدد باید تعداد یکسان مساوی می‌باشند اگر ۲ هسته n رقمی باشند وقتی آنها را در هم ضرب می‌نماییم و از عدد حاصله $\frac{n}{2}$ ارقام را از سمت راست و چپ حذف نمائیم n رقم قرار گرفته در وسط را مبنای تولید عدد تصادفی می‌نامیم

تعطیل

و آن را به صورت اعشاری بیان می کنیم مثال زیر را در این رابطه می توان مطرح کرد

$X_0 = ۲۹۴۱$ $\quad$ $X_1 = ۳۶۷۹$

$X_1 = X_0 X = (۳۶۷۹)(۲۹۴۱) = ۱۰۸۱۹۹۳۹ \quad X_1 = ۸۱۹۹ \rightarrow R_1 = ۰/۸۱۹۹$

$X_2 = X_0 X_1 = (۲۹۴۱)(۸۱۹۹) = ۲۴۱۱۳۲۵۹ \quad X_2 = ۱۱۳۲ \rightarrow R_2 = ۰/۱۱۳۲$

$X_3 = X_1 X_2 = (۸۱۹۹)(۱۱۳۲۵۹) = ۰۹۲۸۱۲۶۸ \quad X_3 = ۲۸۱۲ \rightarrow R_3 = ۰/۲۸۱۲$

روش سوم: روش مضرب ثابت: تفاوت عمده این روش با روش قبل آن است که در این روش یکی از اعداد به صورت ثابت تا انتهای فرآیند محاسبات باقی می ماند عدد ثابت مذکور را K می نامیم سایر محاسبات این روش به صورت زیر می باشد

$X_0 = ۳۶۷۹ \quad K = ۲۹۴۱$

$X_1 = KX_0 = (۲۹۴۱)(۳۶۷۹) = ۱۰۸۱۹۹۳۹ \Rightarrow X_1 = ۸۱۹۹ , R_1 = ۰/۸۱۹۹$

$X_2 = KX_1 = (۲۹۴۱)(۸۱۹۹) = ۲۴۱۱۳۲۵۹ \Rightarrow X_2 = ۱۱۳۲ , R_2 = ۰/۱۱۳۲$

روش چهارم: روش همنهشتی جمعی: اساس نظریه این روش با روشهای پیشین متفاوت می باشد و تفاوت عمده آن این است که به عملیات ضرب وابسته نمی باشد

این روش سرعت قابل توجهی نیز دارد و در این روش به وسیله یک دنباله n تایی اولیه $X_1, X_2, \dots, X_n$ دنباله‌های تصادفی بعدی تولید می‌گردد. روش کار بدین صورت می‌باشد که با استفاده از رابطه زیر اعداد تصادفی جدید بدست می‌آید.

$$X_i = (X_{i-1} + X_{i-n}) \bmod m; \quad i = n+1, n+2, \dots$$

$$R_i = \frac{X_i}{m} \qquad 0 \le X_i < m \longrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{X_i}{m} < 1 \\ 0 \le R_i < 1 \end{cases}$$

$$a \equiv b \bmod m$$

$$\frac{b-a}{m}$$

Mod: بیشترین فراوانی

Median: میانه

Mean: میانگین

مثال: فرض کنید که عدد تصادفی ۵۷، ۳۴، ۸۹، ۹۲، ۱۶ دنباله اولیه اعداد را تشکیل دهد و مقدار m برابر ۱۰۰ باشد با استفاده از روش هم‌نهشتی جمعی که عدد تصادفی تولید نمایید.

$$X_6 = (\overbrace{X_5 + X_1}^{73}) \bmod 100 \qquad \begin{cases} R = \frac{73-0}{100} = 0/73 \\ X_6 = 73 \end{cases}$$

$$X_7 = (X_6 + X_2) \bmod 100 \qquad \begin{cases} R = \frac{165-100}{100} \simeq 0/65 \\ X_7 = 65 \end{cases}$$

$x_3 = (x_1 + x_2) \bmod 100$

$R = \frac{354 - 100}{100} = 0.54$

$x_8 = 54$

$x_4 = (x_8 + x_3) \bmod 100$

$R = \frac{88}{100} = 0.88$

$x_9 = 88$

$x_{10} = (x_9 + x_5) \bmod 100$

فصل ششم

نرم‌افزارهای شبیه‌سازی گسسته

چگونه کار می‌کنند

۶.۱ مقدمه

۶.۱.۱ درک اینکه نرم‌افزارهای شبیه‌سازی بر چه اساسی بنا می‌شوند، چه اهمیتی دارد؟

فصل ۵ نشان داد که چگونه می‌توان با استفاده از مفاهیم شبیه‌سازی، سیستم‌های در آن شرطی چک شده پویای متشکل از نهادهای متعامل را مدل‌سازی کرد. نکته اساسی، شناسایی کلاس‌های آن شرط برقرار بود مجموعه‌های مهم نهاد و روش‌های تعامل و تغییر حالت آنها در طول زمان می‌باشد. این تعاملات و از فعالیتها رخ می‌دهد تغییر حالت‌ها را می‌توان با نمودارهای گردش فعالیت نشان داد تا بتوان قوانین حاکم بر این رفتارها را شناسایی کرد. در فصل‌های ۸ و ۹ در مورد بسته‌های نرم‌افزاری که برای توسعه شبیه‌سازی گسسته پیشامد کارا استفاده می‌شوند، بحث می‌شود ولی درک اینکه این نرم‌افزارها براساس چه قوانینی عمل می‌کنند، مهم می‌باشد. همان‌گونه که در فصل‌های ۸ و ۹ روشن خواهد شد، نرم‌افزارهای مختلف مزایا و معایب مخصوص به خود را دارند ولی تا زمانی‌که با قوانین حاکم بر آنها آشنا نشویم، بایستی آنها را با تمام کاستی‌هایشان قبول کنیم.

شماره شناسه ۲۹۵۸۹۲۱۷۲۵۵

ادامه توضیحات

if : اگر ساعت شبیه‌سازی به عدد مشخصی رسید

then : مجموعه عملیات‌های مقداردهی و تغییرات انجام شود

در نگاه نخست دستور مناسب برای اجرای زمانی رویدادها در شبیه‌سازی وقایع گسسته

فعالیت‌ها مستقل و یا طی فعالیت مناسب مقدماتی پیرا انجام می‌شود. معمولاً روش جستجوی فعالیت

مدل‌سازی تدریجی کاملتری انجام می‌دهد اما با توجه به جستجویی که باید روی فعالیت‌ها انجام دهد

زمانبر قوی باشد روش مناسب‌تر نسبت به دو روش ذکر شده روش جستجو بر فرآیند

می‌باشد که هم پیشامد را و هم کل فعالیت مرتبط با یک مقدار را همزمان در نظر می‌گیرد از تفاوتی

این روشها مناسب‌تر بوده و قوی‌تر معمولاً برای مسائل پیچیده به کار می‌رود در روش سه فاز می‌باشد در

این روش دو نوع عمل B و C در قالب سه فاز A و B و C انجام می‌شود. B ها در شبیه‌سازی به روش

سه فاز برای عملیات تقاضایی می‌باشد که دارای زمان آغاز و پایان بوده و می‌توان آنها را از قبل پیش‌بینی

نمود. در مقابل C ها فعالیت‌های شرطی می‌باشند که نمی‌توان از قبل قابل پیش‌بینی نبوده و تنها تمام

اجزا از شرایط لازم‌شان قابلیت انجام دارد معمولاً در یک حالت وقایع شروع فعالیت‌ها و

پایان فعالیت‌ها B ها می‌باشد همچنین از این نگاه می‌توان به B ها و C ها نگاه کرد که معمولاً B ها

منبع را آزاد می‌نمایند و C ها منبع را درگیر می‌نمایند با توجه به تعریف‌های انجام شده الگوریتم B ها به

صورت زیر انجام می‌گیرد. همانطور که در شکل مشخص می‌باشد این الگوریتم در فاز A به زمانسنجی

شبیه‌سازی و کنترل زمان شبیه‌سازی می‌پردازد. پس در هر گام از حلقه‌ها رخ می‌دهد در فاز یک

ما در یک زمان مشخص می‌باشد در آن زمان مشخص در فاز ۲ ابتدا کارهایی را که قابلیت بیشتر

شروع دارند را برنامه‌ریزی نموده (B ها) و سپس در همان لحظه خاص تمامی کارهایی که

قابلیت شروع شدن دارند را برنامه‌ریزی می‌نماییم (C ها). اگر تمام فعالیت‌ها در این قسمت به

پایان رسیدند مجدد زمان شبیه‌سازی را یک واحد نموده اگر به پایان نرسیده بود یک واحد زمان را

شدن و تقسیم شده است

ی در بحث اجرایی شبیه‌سازی ساعت و تقویم شبیه‌سازی در نظر گرفته می‌

ا ا ا ا ا ا شبیه‌سازی اهداف است

ه جلو می‌رود تا اینکه [illegible] آن زمان خاصی انجام می‌شود [illegible] قسمت‌های دیگر مشابه [illegible] انجام می‌گیرد

غیرفعال رسم می‌شود. یک نمودار کامل شامل ...

۵.۳.۱ مثال ۱: یک کارگاه ساده

یک کارگاه مهندسی ساده را درنظر بگیرید که شامل چندین دستگاه مشابه می‌باشد. هر دستگاه قادر است که فرآیندی را روی یک کار انجام دهد و یک منبع آماده از کارها، وجود دارد و هیچ کمبودی در این رابطه وجود نخواهد داشت. کارها به اولین دستگاهی که در دسترس باشد تخصیص داده می‌شوند. مدت زمان تکمیل یک کار بصورت متغیر درنظر گرفته شده است اما مستقل از ماشین مورد استفاده می‌باشد. دستگاه‌ها توسط اپراتورهایی اداره می‌شوند که بایستی دو کار انجام دهند:

(۱) آماده‌سازی مجدد دستگاه‌ها بین کارها درصورتیکه لبه‌های برش هنوز سالم هستند.

(۲) ابزارگذاری مجدد دستگاه‌هایی که لبه‌های برش آنها بسیار فرسوده هستند که نمی‌شود آنها را آماده‌سازی مجدد کرد.

بنابراین دو کلاس از نهاد وجود دارد (به شکل ۳-۵ مراجعه شود):

(۱) اپراتورها

(۲) دستگاه‌ها

شکل ۳-۵: کلاس‌های نهاد موجود در یک کارگاه ساده

اپراتورها

آنها همان‌گونه که در بالا ذکر شد مسئولیت انجام دو کار را بر عهده دارند، آماده‌سازی مجدد و ابزارگذاری مجدد. بعلاوه یک اپراتور هنگامی‌که مشغول انجام کارهای شخصی خود است ممکن است در دسترس نباشد. بدیهی است که کارگاه واقعی بیش از این پیچیدگی دارد- اما هدف از این مثال تنها تبیین مفهوم نمودارهای گردش فعالیت است. با این اطلاعات نمودار گردش فعالیت برای کلاس اپراتورها در شکل ۴-۵ نشان داده شده است. در شکل سه حالت فعال نشان داده شده است: کنار، ابزارگذاری مجدد و آماده‌سازی مجدد.

شکل ۴-۵: گردش فعالیت اپراتورها

بدیهی است، آماده‌سازی مجدد و ابزارگذاری مجدد با مشارکت و در ارتباط با دستگاه‌ها (یک کلاس دیگر از نهاد) انجام می‌گیرد و بنابراین حالت‌های فعال هستند. اگر مدت زمان انجام آنها معلوم نباشد، با نمونه‌گیری از توزیع‌های احتمال مناسب می‌توان آنها را بدست آورد. خود این توابع توزیع می‌تواند از طریق مشاهده مدت زمان واقعی که یک اپراتور برای انجام این کارها صرف می‌نماید، بدست آید. حالت کنار (کارهای شخصی) نیز یک حالت فعال شمرده می‌شود، زیرا جهت تعیین مدت زمان آن چنین توزیع احتمالی قابل استفاده است و لذا یکی از شرایط لازم برای حالت فعال بودن را دارا می‌باشد.

چنانچه اپراتور در هیچیک از این حالت‌های فعال نباشد، در حالت غیرفعال انتظار بسر می‌برد و برای انجام کارهای فوق‌الذکر آماده است یا اینکه قادر است به کارهای شخصی خود بپردازد. در عمل، ممکن است وی برای مدت مدیدی در این حالت غیرفعال به‌سر ببرد یا اینکه ممکن است فقط بطور آنی بین دو حالت فعال، از این حالت غیرفعال بگذرد.

توجه کنید که، نمودار شامل تناوب حالت‌های فعال و غیرفعال می‌باشد. (برای مثال اپراتور بایستی برای انتقال بین حالت‌های فعال از یک حالت غیرفعال بگذرد).

دستگاه‌ها

دستگاه‌ها دارای سه حالت فعال هستند: ابزارگذاری مجدد، آماده‌سازی مجدد و در حال کار. حالت فعال آخر وضعیتی را نشان می‌دهد که دستگاه بطور مطلوب در حال انجام کاری می‌باشد. نمودار گردش فعالیت برای دستگاه‌ها مانند شکل ۵-۵ است.

شکل ۵-۵: گردش فعالیت دستگاه‌ها

در تبعیت از قراردادی که در نمودارهای گردش فعالیت وجود دارد، حالت‌های فعال بوسیله سه حالت غیرفعال از یکدیگر مجزا شده‌اند. بعد از اینکه یک دستگاه از کار ایستاد (برای مثال وقتی که یک کار کامل شد) به حالت غیرفعال متوقف، منتقل می‌شود. از حالت متوقف ممکن است به یکی از حالت‌های ذیل تغییر وضعیت دهد:

- **آماده‌سازی مجدد.** چنانچه لبه‌های برش آن هنوز قابل استفاده باشند.
- **ابزارگذاری مجدد.** چنانچه لبه‌های برش بیش از حد فرسوده شده باشند.

در طول یک شبیه‌سازی، در هر موقعیت می‌توان از یک ویژگی برای اتخاذ تصمیم اینکه آیا یک دستگاه به حالت آماده‌سازی مجدد یا ابزارگذاری مجدد برود، استفاده کرد.

بعد از ابزارگذاری مجدد دستگاه در حالت OK قرار دارد (یک حالت غیرفعال دیگر) و سپس آماده‌سازی مجدد می‌گردد. حال دستگاه در حالت آماده قرار دارد (یک حالت غیرفعال دیگر) و در ادامه دستگاه دوباره به حالت در حال کار خواهد رفت. در دنیای واقعی ممکن است دو حالت غیرفعال OK و آماده وجود نداشته باشند، بطوریکه اپراتور می‌تواند همواره بین سه حالت فعال در حرکت باشد. حالت‌های OK و آماده برای دو منظور در اینجا ذکر شده‌اند. اول اینکه، قرارداد مذکور در تناوب حالت‌های فعال و غیرفعال را حفظ نمایند. دلیل دوم این است که، این حالت‌ها امکان آن را فراهم می‌نمایند که مدل توسعه بیابد، مثلاً وقتی دو اپراتور وجود دارند که یکی مسئول عملیات ابزارگذاری مجدد و دیگری آماده‌سازی مجدد هستند.

دو نمودار گردش فعالیت مذکور اکنون می‌توانند تلفیق شوند و یک نمودار گردش فعالیت کامل را که در شکل ۶-۵ آمده است شکل دهند. توجه شود که حالت‌های

غیرفعال برای هر کلاس از نهاد منحصر بفرد است. تنها اپراتورها می‌توانند در حالت انتظار باشند و تنها دستگاهها می‌توانند در حالت‌های OK، متوقف یا در حال کار باشند. از سوی دیگر، حداقل دو حالت فعال شامل مشارکت بین دو کلاس از نهاد، می‌باشند.

نمودارهای گردش فعالیت یک روش گرافیکی است که تعامل‌هایی را که بایستی در چارچوب و اسکلت مدل شبیه‌سازی ساخته شود، تشریح می‌کند (یعنی این نمودارها منطق سیستم را نشان می‌دهند). بعلاوه، آنها قبل از اینکه تغییر حالتی اتفاق بیفتد، مشخصات دقیق شرایطی که بایستی از قبل انجام شود را به روشنی مشخص می‌کنند. برای مثال، قبل از اینکه حالت ابزارگذاری مجدد بخواهد شروع شود، بایستی حداقل یک ماشین در حالت متوقف و نیازمند ابزارگذاری مجدد باشد و همچنین بایستی یک اپراتور در دسترس باشد (مثلاً در حالت انتظار) تا این کار را انجام دهد. مثال بعد با تفصیل بیشتری نحوه استفاده از این نمودارها را برای استفاده به عنوان پایهٔ مدل شبیه‌سازی نشان می‌دهد- این‌بار در مورد یک سیستم صفی مشخص.

شکل ۶-۵: نمودار گردش فعالیت یک کارگاه

۵.۲.۱ مثال ۱: بلیطفروش پردردسر

یک تئاتر کارمندی را برای کار در روز به استخدام درآورده است. این کارمند استخدام شده تا بلیط‌ها را بفروشد و یا به هر درخواستی که می‌رسد پاسخگو باشد. رزرو صندلی‌ها تنها وقتی ممکن است که فرد، حضوری به تئاتر مراجعه کند و مبلغ بلیط را بپردازد. درخواست‌ها ممکن است توسط فرد بصورت حضوری و یا از طریق تلفن ارائه شوند. به کارمند دستور داده شده که به مشتریان حضوری اولویت دهد. بنابراین، اگر درست هنگامی‌که یک مشتری می‌رسد تلفن زنگ بزند، ابتدا به درخواست حضوری رسیدگی می‌شود. به مدد یک سیستم پیشرفتهٔ تلفنی، تماس‌های حاصل شده می‌توانند براساس سیستم FIFO در صف قرار گیرند تا به آنها پاسخ داده شود. تماس گیرندگان هرگز به جهت ناامیدی از رسیدگی به تماسشان، تماس را قطع نمی‌نمایند.

در اینجا سه کلاس از نهاد وجود دارد:

(۱) یک بلیطفروش

(۲) درخواست‌کنندگان حضوری

(۳) تماس‌گیرندگان تلفنی

ما هر کدام از اینها را به ترتیب بررسی می‌نماییم.

بلیطفروش

روشن است که بلیطفروش دارای دو حالت فعال است:

- **سرویس.** سرویس دادن به درخواست‌کنندگان حضوری با فروش بلیط، پاسخگویی به سؤالات یا هر دو.
- **صحبت.** صحبت کردن با تماس‌گیرندگان تلفنی.

وقتی که بلیطفروش مشغول هیچیک از این دو کار نباشد، در حالت غیرفعال بیکار است. پس نمودار گردش فعالیت بلیطفروش مطابق آنچه در شکل ۷-۵ نشان داده شده می‌باشد. طبق آنچه قبلاً ذکر شده بلیطفروش به تناوب از حالت فعال به غیرفعال تغییر وضعیت می‌دهد. برخی اوقات، بلیطفروش هیچ زمانی را در حالت غیرفعالِ بین دو حالت فعال سپری نخواهد کرد. این موضوع نکته مهم دیگری را درباره مدلسازی شبیه‌سازی روشن می‌سازد. بعضی اوقات مفید است که یک نهادی داشته باشیم که حالتی را اشغال کند حتی اگر مدت زمانی را که در این حالت سپری می‌کند صفر باشد.

شکل ۷-۵: نمودار گردش فعالیت بلیطفروش

درخواست‌کنندگان حضوری

در ابتدا این درخواست‌کنندگان در حالت خارج از تئاتر قرار دارند. آنها سپس به تئاتر وارد می‌شوند، و برای گرفتن سرویس در صف قرار می‌گیرند. وقتی که بلیطفروش سرویس به آنها را تکمیل نمود، آنها تئاتر را ترک می‌کنند و مجدداً در حالت خارج از تئاتر قرار می‌گیرند.

نخست حالت سرویس را درنظر بگیرید. این حالت، یک حالت مشارکتی است که برای وقوع نیاز به درخواست‌کننده و بلیطفروش دارد. بنابراین مطابق تعاریف گذشته، شکی نیست که این حالتی فعال است. دوم، حالت صف را درنظر بگیرید. همان‌طور که از نامش برمی‌آید، این حالتی است که درخواست‌کنندگان، در آن منتظر می‌مانند تا به اول صف برسند تا در آنجا بلیطفروش قادر به سرویس دادن به آنها باشد. بنابراین، چون حالتی مشارکتی نمی‌باشد و مدت زمانش هم آشکارا بستگی به سرویس مشتری قبلی دارد، یک حالت غیرفعال است.

این بدین معنی است که ورود یک حالت فعال است، حالا دلیل اینکه چرا اینگونه است احتمالاً زیاد روشن نیست. برای درک این موضوع، بهتر است دستگاهی را تصور کنید که تک‌تک درخواست‌کنندگان حضوری را از خارج تئاتر به داخل صف می‌برد. این دستگاه برای وارد کردن درخواست‌کننده بعدی هنگامی بازخواهد گشت که درخواست‌کننده قبلی را بطور مطمئن در صف جای داده باشد. این دستگاه ورود جهت انجام این عمل انتقال، یک زمان متناهی صرف خواهد کرد و درخواست‌کنندگان در همان مدت زمان در حالت ورود درنظر گرفته می‌شوند. بنابراین، مدت زمان حالت ورود

بازهٔ زمانی بین ورودهای متوالی می‌باشد. از این رو، درصورتی‌که مدت زمان بین ورودها معین باشد، می‌توان فرآیند ورود را بصورت یک حالت فعال مدلسازی کرد. دو روش تعیین این زمان‌ها استفاده از جدول زمانهای ورود یا نمونه‌گیری از توزیع احتمال مناسب، می‌باشد.

اگر مدت‌زمان‌های بین دو ورود با نمونه‌گیری از توزیع احتمال بدست آید، در این صورت ورودها معمولاً بوسیلهٔ یک فرآیند خودراه‌انداز کنترل می‌شود. این فرآیند به شکل زیر کار می‌کند:

اگر درخواست‌کننده N در زمان T وارد می‌شود، یک نمونه از توزیع احتمال زمان‌های بین ورود بگیر و این نمونه را به‌عنوان فاصلهٔ زمانی t بین مشتری‌های N و $N+1$ درنظر بگیر.

به عبارت دیگر مشتری $N+1$ در زمان $T+t$ وارد می‌شود. روشن است که این فرآیند با دانستن قبلی زمان ورود درخواست‌کننده اول شروع می‌شود. هرچند وقتی این عمل انجام شد، روش به ما اجازه می‌دهد که ورودهای متوالی به عنوان حالت‌های فعال مدل شوند.

سرانجام حالت غیرفعال خارج را درنظر بگیرید. این حالت نمایانگر دنیای خارج تئاتر می‌باشد که درخواست‌کننده از آنجا می‌آید و بعد از گرفتن سرویس به آنجا برمی‌گردد. این حالت تشکیل‌دهندهٔ محیط سیستم مدلسازی شده می‌باشد: بنابراین ورودها پیشامدهایی شبه- برونزا هستند. از حالت غیرفعال خارج به دو دلیل در نمودار استفاده شده است:

- رعایت قانون یکی در میان بودن حالت‌های فعال و غیرفعال در نمودارهای گردش فعالیت.
- بخاطر اینکه حالت طبیعی هر چرخه‌ای این است که حلقه‌ای بسته باشد. البته این موضوع از یک جنبه مصنوعی است، چون تعداد بالقوه مشتریان، بطور مجازی نامحدود است.

سمت چپ شکل ۸-۵، نمودار گردش فعالیت حاصل را نشان می‌دهد.

شکل ۸-۵: نمودار گردش فعالیت درخواست‌کنندگان حضوری و تماس‌گیرندگان تلفنی

تماس‌گیرندگان تلفنی

نمودار گردش فعالیت تماس‌گیرندگان تلفنی مطابق درخواست‌کنندگان حضوری می‌باشد. این بار "مشتریان" ورودی تماس‌های تلفنی به تئاتر می‌باشند که می‌توانند در صف قرار بگیرند تا اینکه پاسخ داده شوند. بازهٔ بین تماس‌های تلفنی متوالی از طریق حالت فعال تماس و حالت سرویس‌دهی فعال صحبت، مدل می‌شود. نمودار گردش فعالیت مذکور در سمت راست شکل ۸-۵ نشان داده شده است که در آن دو حالت غیرفعال انتظار و جای‌دیگر، دو حالت فعال را از هم جدا نموده‌اند. مانند قسمت قبل حالت غیرفعال جای‌دیگر نشان‌دهندهٔ محیط بیرونی تئاتر می‌باشد که تماس‌های تلفنی از آنجا پدید می‌آید.

نمودار کامل

سه نمودار گردش فعالیت ذکر شده می‌توانند با هم ترکیب شده و نمودار گردش فعالیت کامل را که در شکل ۹-۵ نشان داده شده است شکل دهند.

قزوین

شکل ۹-۵: مسأله بلیطفروش پردردسر: نمودار کامل گردش فعالیت

۵.۳.۳ مثال ۳: محل بارگیری