به نام خدا

جزوه تکمیلی ریاضی 2

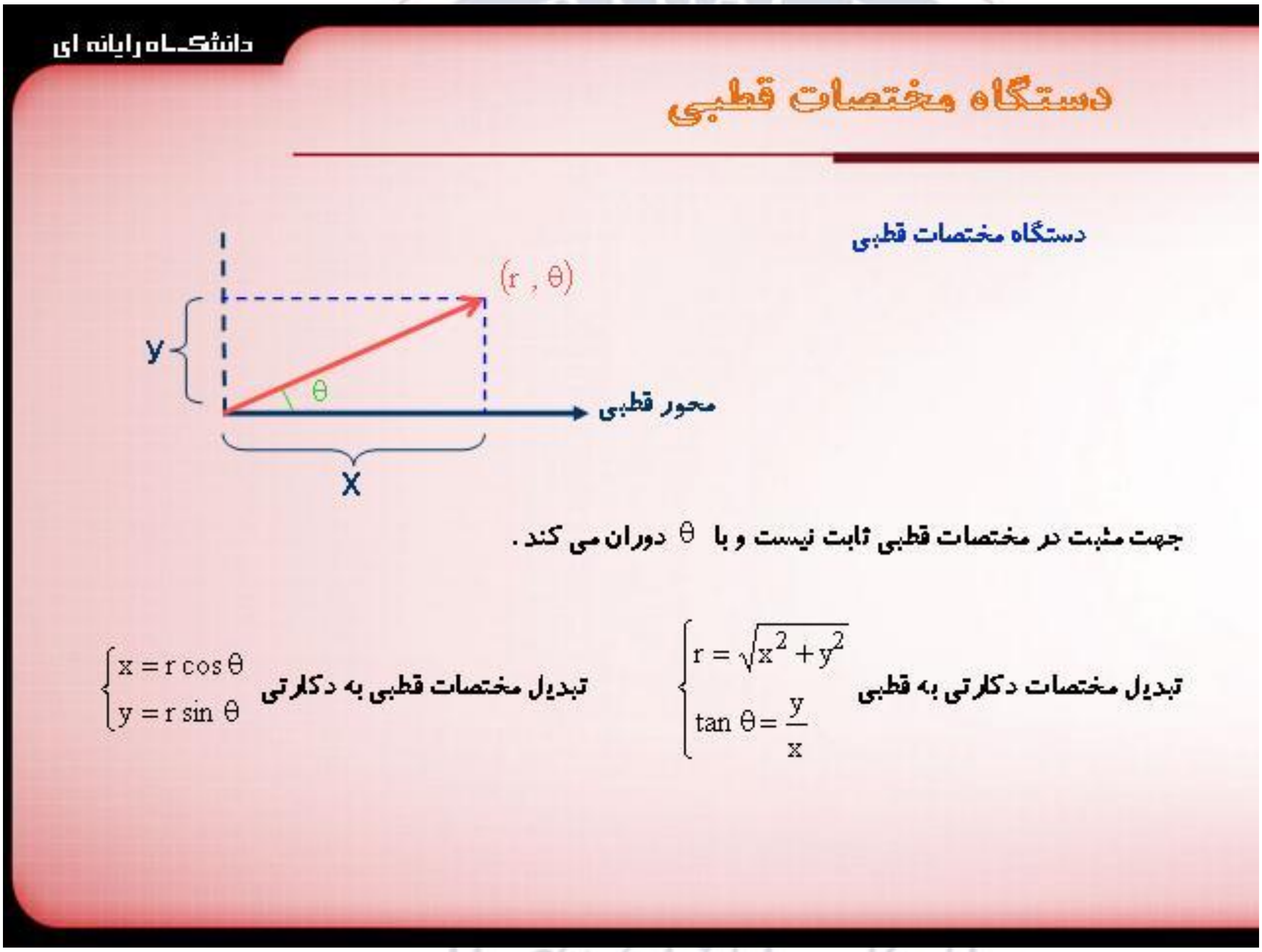
جلسات 6 و 7 و 8

دستگاه مختصات قطبی

دستگاه مختصات استوانه‌ای

دستگاه مختصات کروی

دستگاه مختصات قطبی

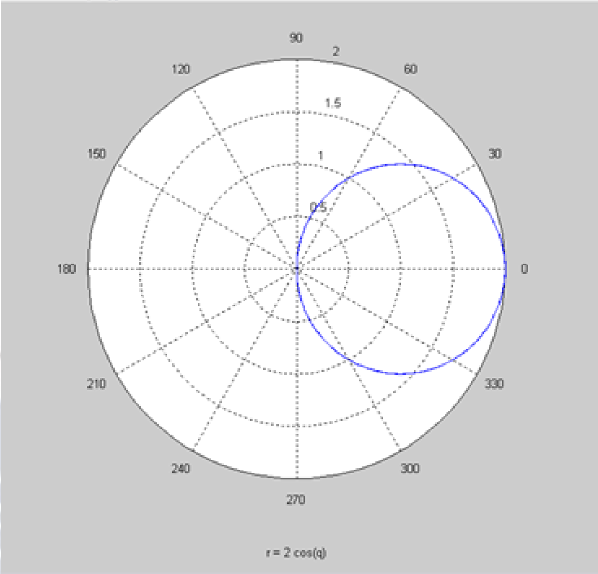


- دستگاه مختصات قطبی مانند دستگاه مختصات دکارتی ثابت نیست و در حال تغییر است و اثر آن را می توان بر دستگاه ثابت دکارتی مشاهده کرد .

مثال) تابع $r=۲\cos\theta$ را رسم کنید .

یادآوری : $|r|$ اندازه بردار و θ زاویه از محور x در جهت پادساعتگرد است .

برای این رسم مانند زیر با نقطه گذاری هم حدود تابع پیدا می شود .



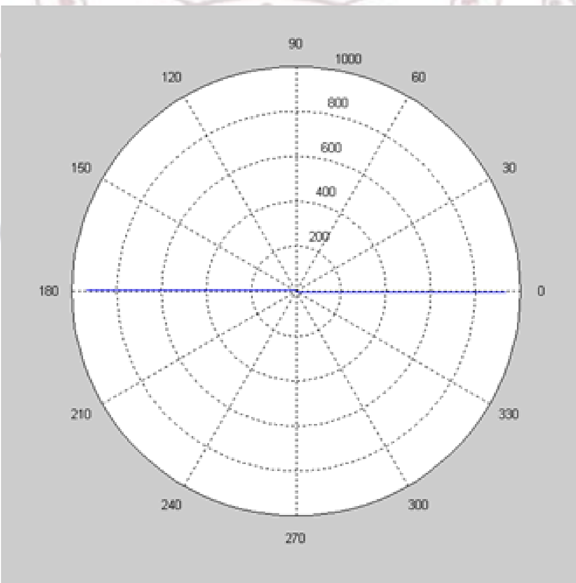
r = 2 cos(q)

تذکر 1: حال اگر به جای r ، $\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ و به جای θ ، $tg^{-۱}\dfrac{y}{x}$ را قرار دهیم و رسم کنیم باز به همین شکل می رسیم .

پس می بینیم که در مختصات قطبی رسم تابع $\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=۲\cos\left(tg^{-۱}\dfrac{y}{x}\right)$ بسیار ساده تر از رسم در مختصات دکارتی است .

تذکر 2: همان طور که در متن درس تذکر داده شده ، می بینیم که اگر θ را به $-\theta$ تبدیل کنیم چون ضابطه‌ی تابع بدون تغییر باقی می ماند پس شکل نسبت به محور قطبی (در این جا محور x ها) متقارن است .

مثال) نمودار $r\sin\theta=۳$ را رسم کنید .



تذکر1: همانگونه که مشاهده می شود اگر بخواهیم در مختصات دکارتی در نظر بگیریم

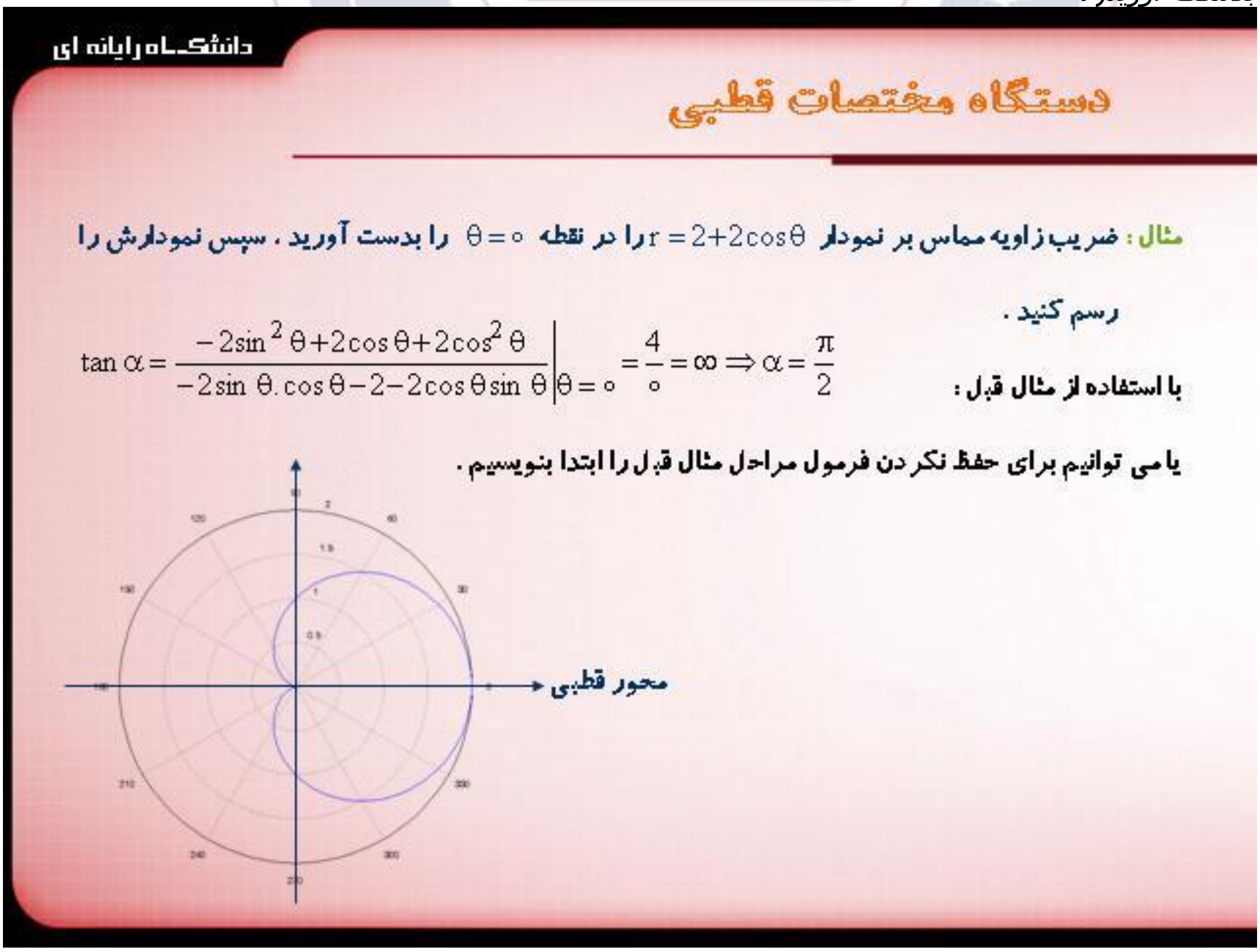
$$\begin{cases} r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \\ \qquad \rightarrow \begin{cases} y=r\sin\theta \\ \qquad \rightarrow y=۳ \\ x=r\cos\theta \end{cases} \\ \theta=tg^{-۱}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

پس رسم این مثال در مختصات کارتزین بسیار آسان تر از مختصات دکارتی است .

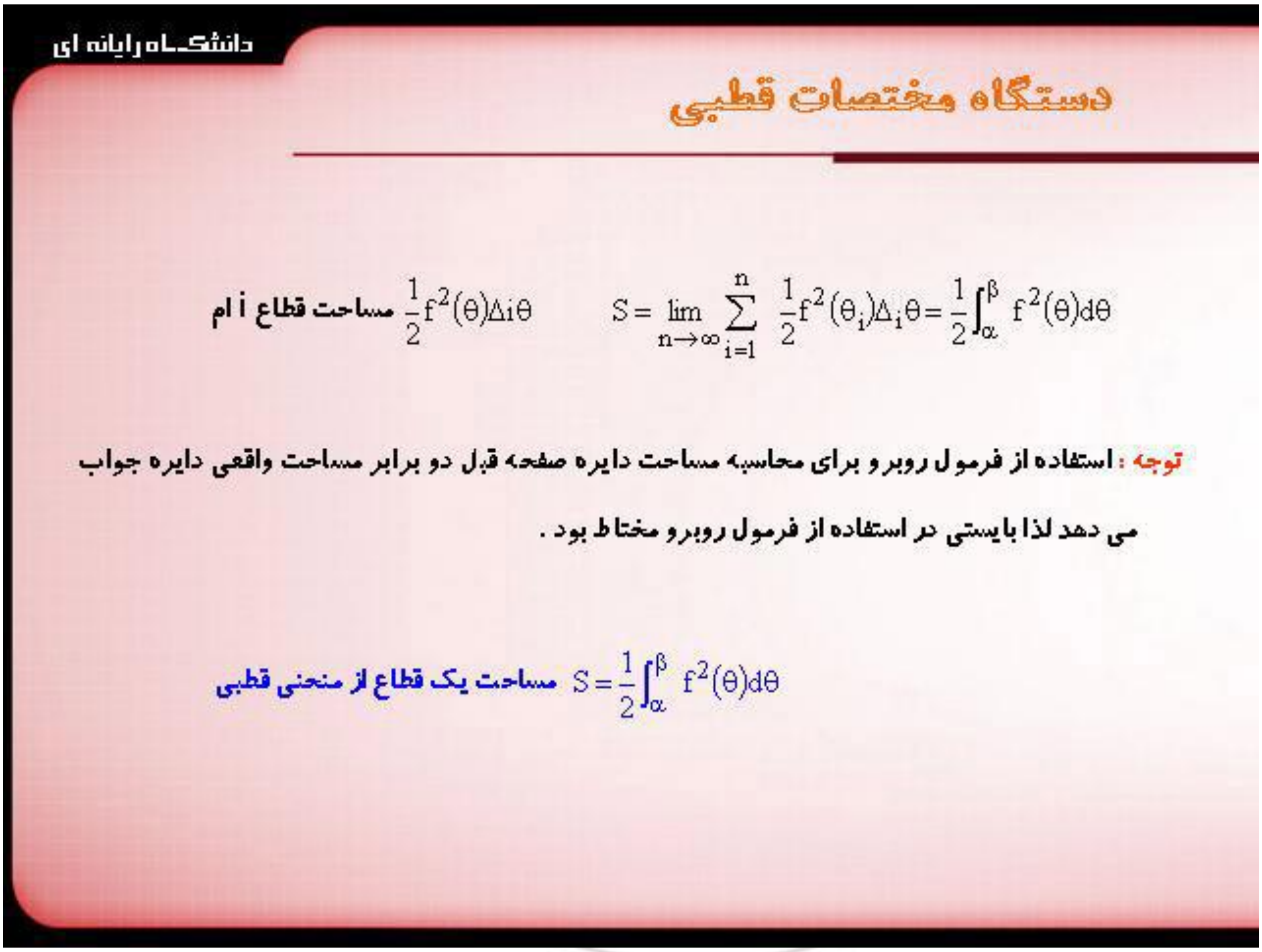
تذکر2: همانگونه که در درس مطرح شد اگر (r,θ) را با $(-r,-\theta)$ عوض کرد و ضابطه تغییری نکرد (مانند این مثال)

شکل تابع نسبت به محور $\frac{\pi}{۲}$ (در این جا محور y ها) متقارن است .

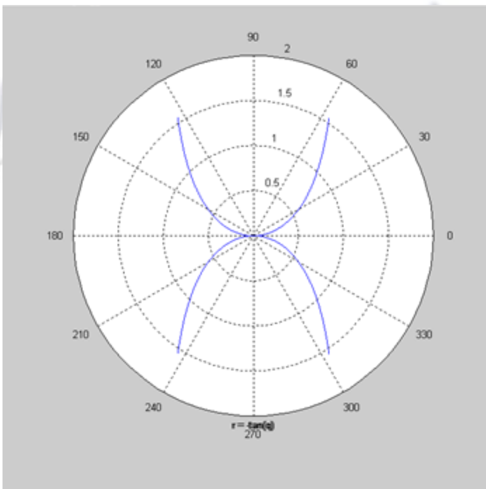
* برای رسم بهتر ما می توانیم در نقاطی که اهمیت دارند ضریب زاویه خط مماس را بدست آوریم .



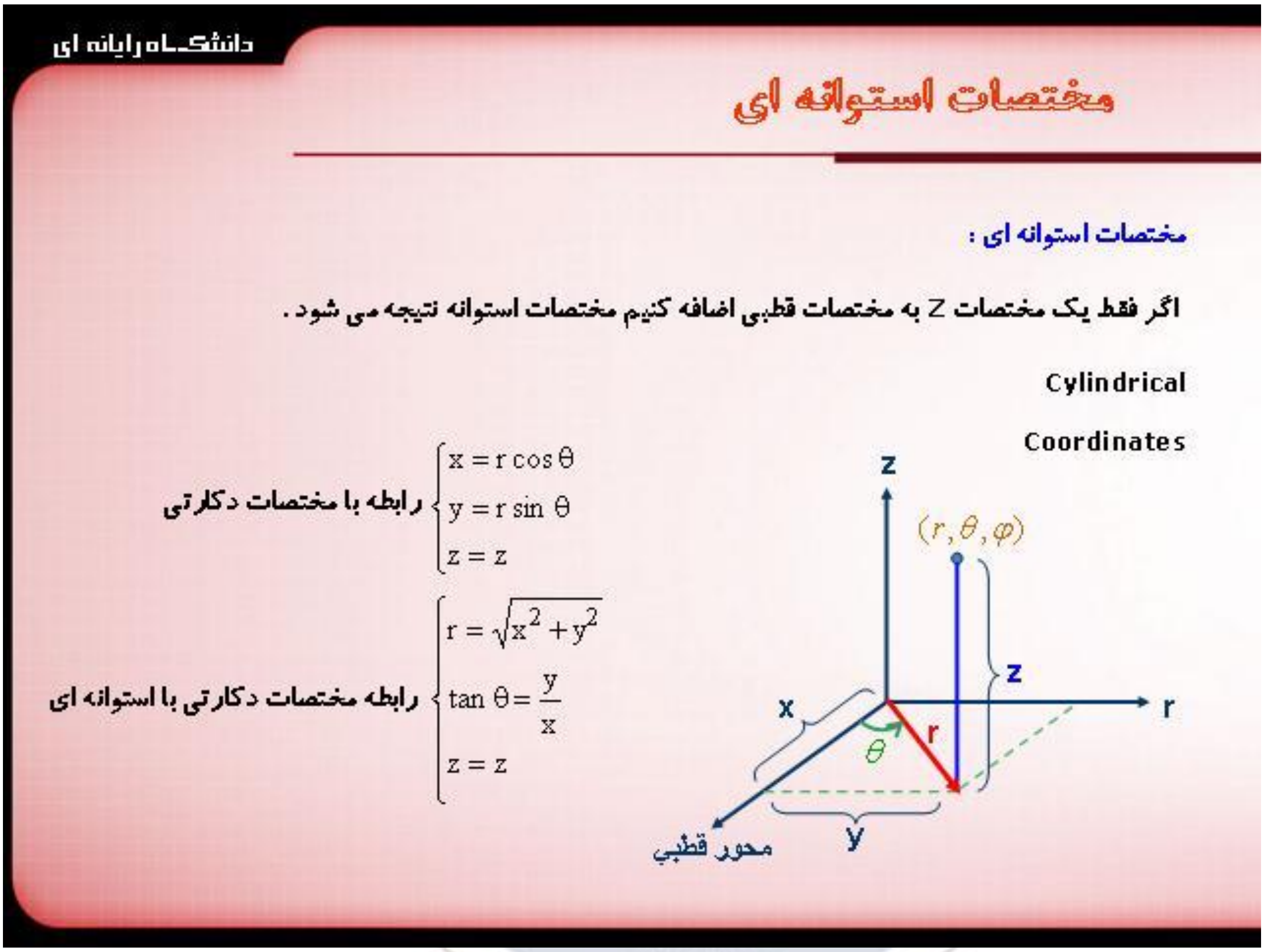
* در حالت کلی شکل $r=a\cos\theta$ یا $r=a\sin\theta$ دوایری هستند به شعاع $\frac{a}{۲}$ و به ترتیب به مراکز $\left(\frac{a}{۲},۰\right)$ و $\left(۰,\frac{a}{۲}\right)$



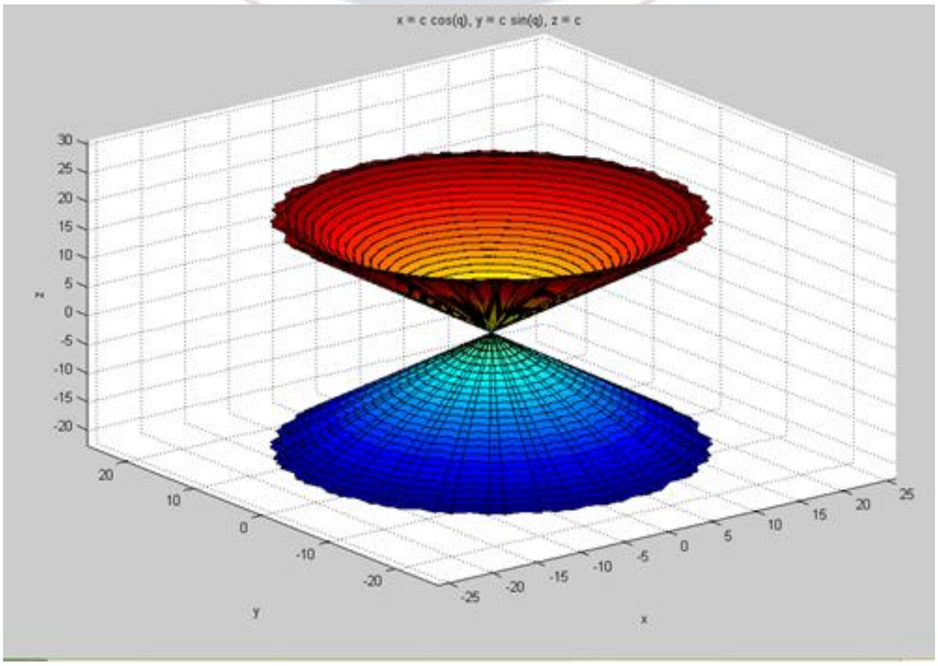
مثال) $r=tg\theta$ را رسم کنید .



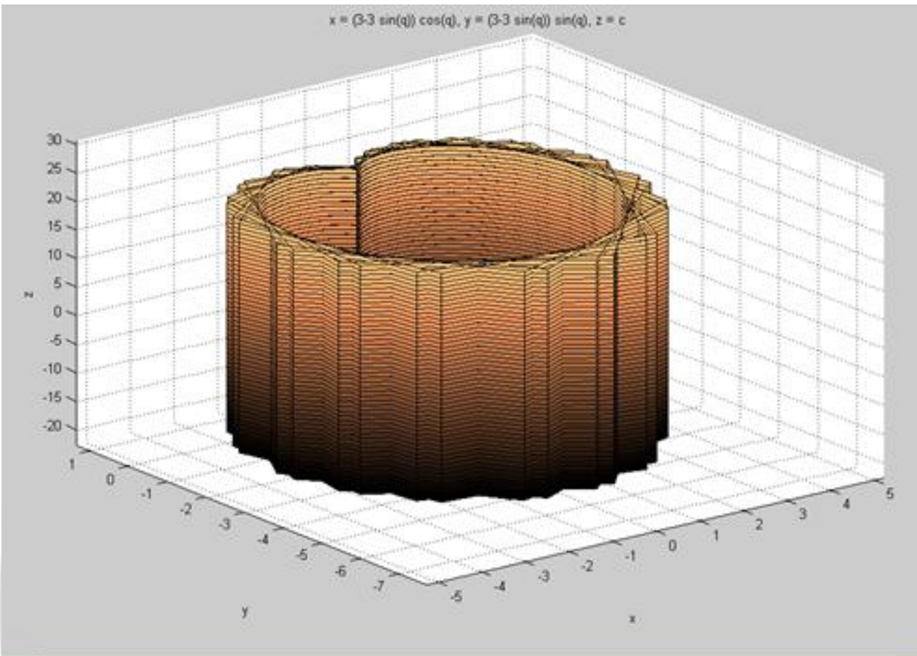
مختصات استوانه ای

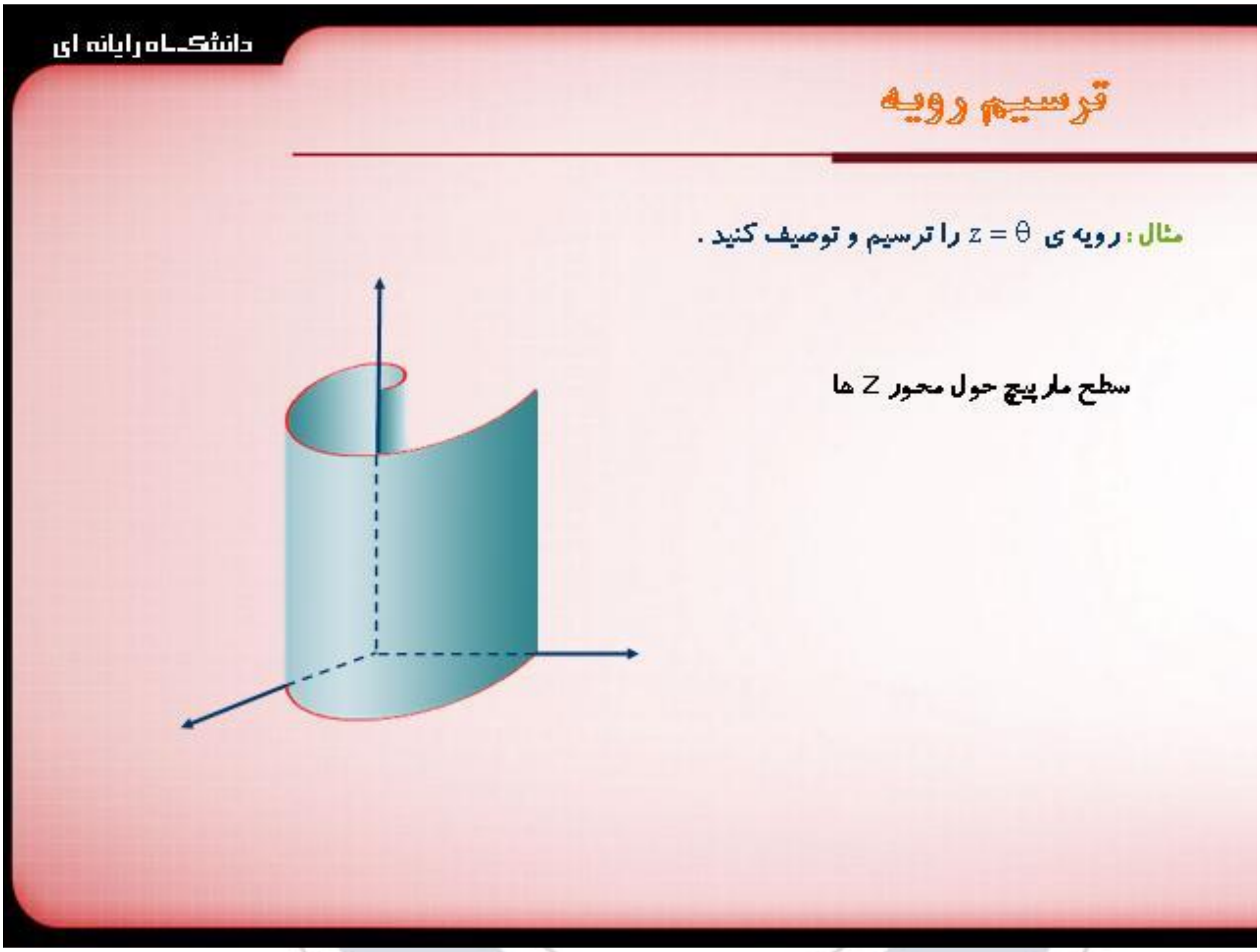


حل تمرین 1: برای رسم رویه $r=z$ ، این منحنی را در صفحه ای مثلاً $\theta=0$ رسم می کنیم و سپس آن را حول محور z ها دوران می دهیم .

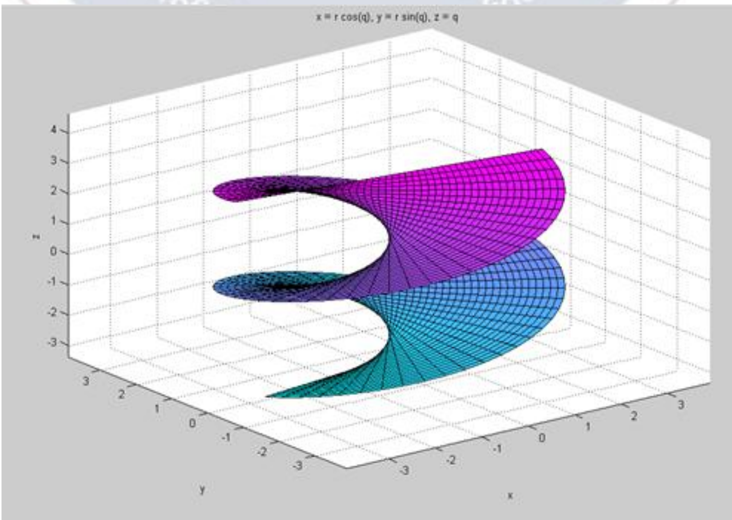


حل تمرین 2: برای حل $r = ۳ - ۳\sin\theta$ ابتدا این منحنی را در صفحه xy رسم کرده سپس شکل را روی محور z ها بالا می بریم .



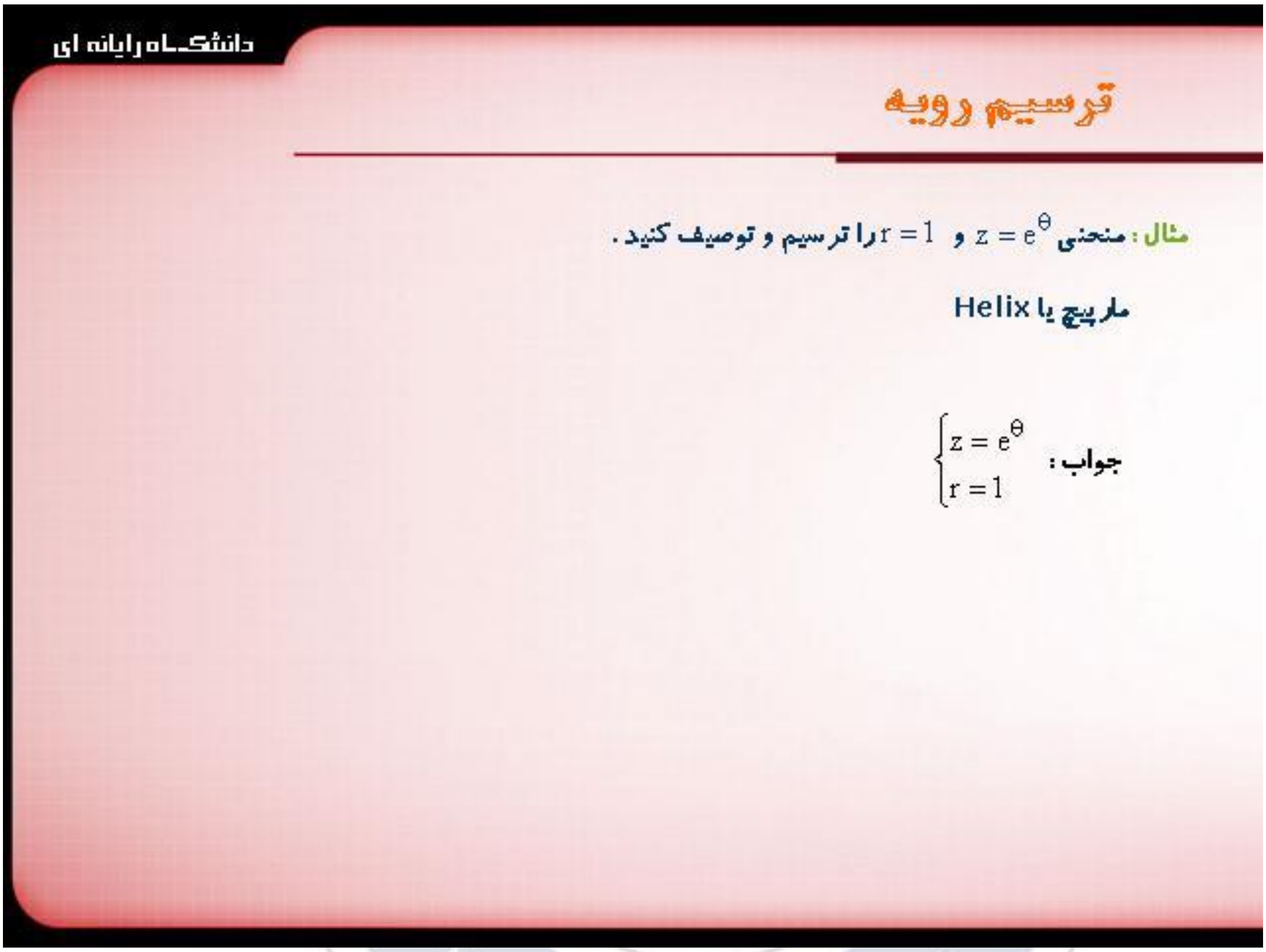


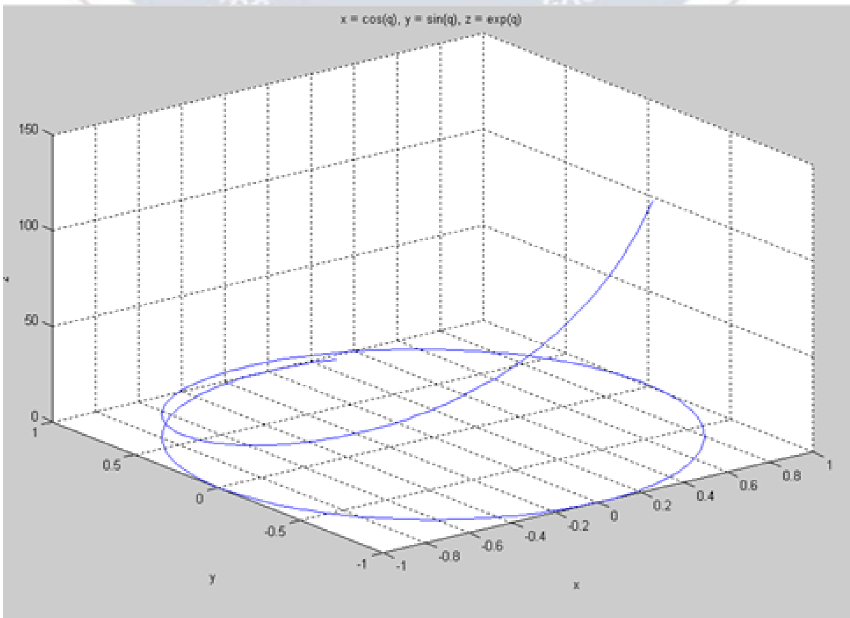
به جای شکل فوق شکل زیر قرار گیرد!



از ضابطه معلوم است که r هر مقداری می تواند باشد ولی θ هر چه باشد z نیز همان است یعنی مثلاً

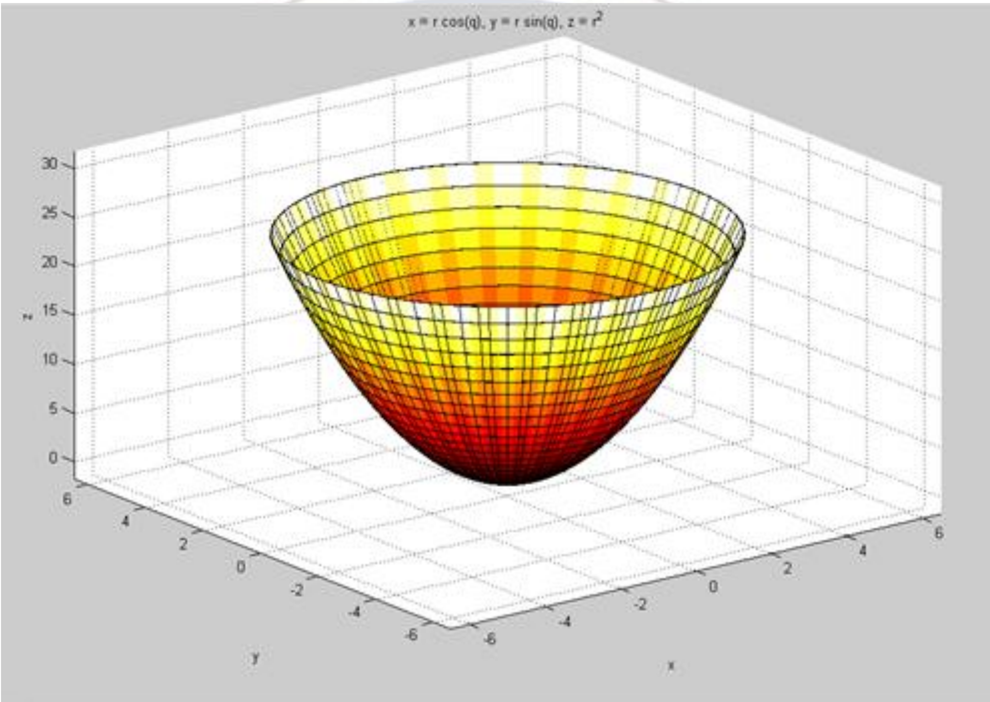
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
z	0	0/78	1/57	2/35	3/14


دانشگاه رایانه ای
ترسیم رویه
مثال : منحنی $z = e^{\theta}$ و $r = 1$ را ترسیم و توصیف کنید .
مارپیچ یا Helix
جواب : $\begin{cases} z = e^{\theta} \\ r = 1 \end{cases}$

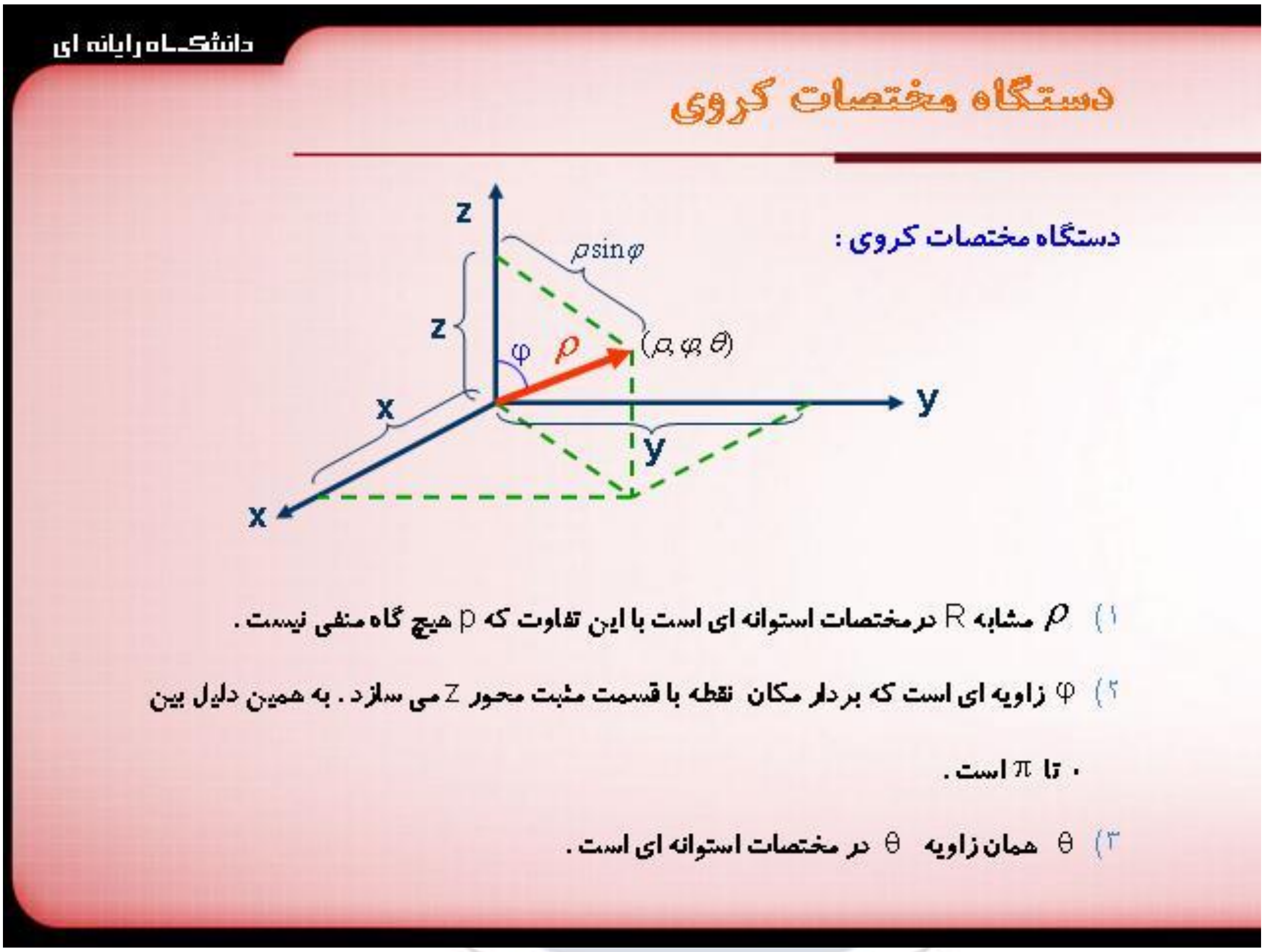

x = cos(q), y = sin(q), z = exp(q)
150
100
50
0
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

مثال) رویه ی $z=r^۲$ را رسم کنید .

مثلاً در صفحه $\theta=\frac{\pi}{۲}$ ضابطه را رسم می کنیم ، سپس حول محور z ها دوران میدهیم .



مختصات کروی



دانشگاه رایانه‌ای تهران

دانشگاه رایانه ای

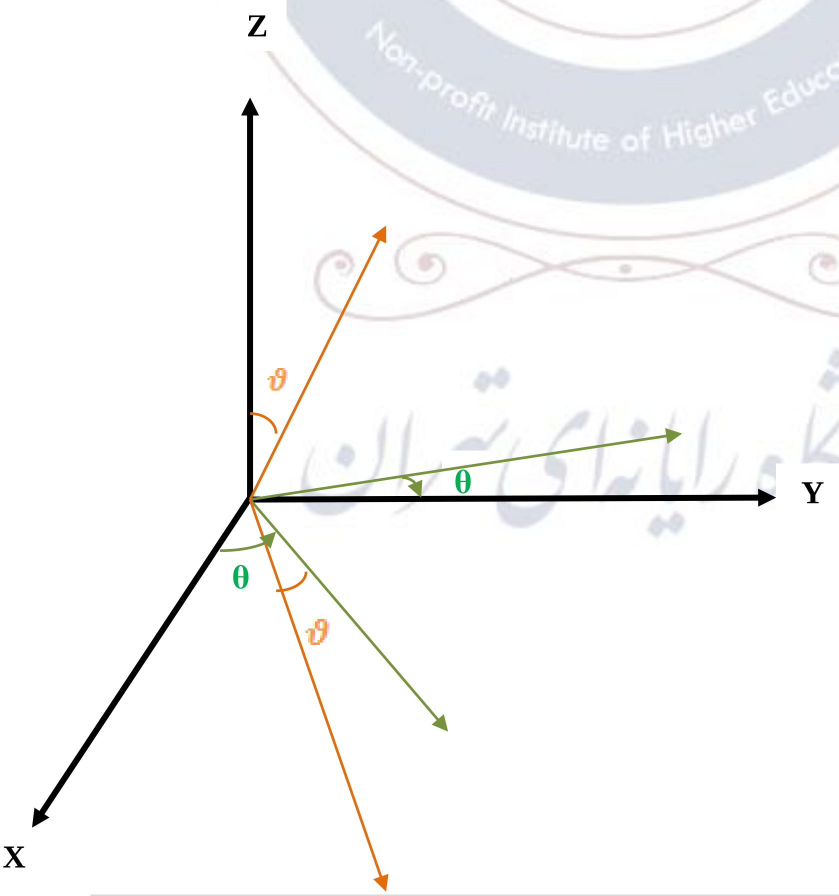
دستگاه مختصات کروی

رابطه با مختصات دکارتی

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ \cos\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

$$0 < \varphi < \pi \qquad \rho \geq \theta$$
$$0 < \theta < 2\pi$$



اگر معادله منحنی در صفحه XOY را به صورت $y=f(x)$ داشته باشیم ، با دوران این منحنی حول محور y ها حجمی حاصل می شود که معادله سطح این شکل از رابطه زیر بدست می آید .

$$\sqrt{x_0^2} = \sqrt{x_1^2+z_1^2}$$

$$\rightarrow x_0 = \pm\sqrt{x_1^2+z_1^2}$$

$f(x,y)=0 \rightarrow$ دوران حول محور y ها $f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\ ,\ y\right)$

$f(x,y)=0 \rightarrow$ دوران حول محور x ها $f\left(x\,,\sqrt{y^2+z^2}\right)$

موفق باشید
دپارتمان ریاضی
دانشگاه غیرانتفاعی رایانه‌ای تهران
www.Iran-vu.com