

به نام خدا

جزوه تکمیلی ریاضی 2

جلسات 6 و 7 و 8

دستگاه مختصات قطبی

دستگاه مختصات استوانه‌ای

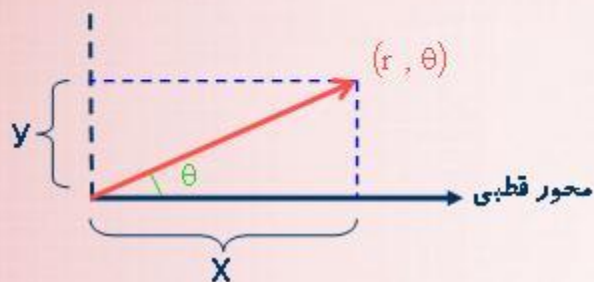
دستگاه مختصات کروی

دستگاه مختصات قطبی



دانشگاه رایانه ای

دستگاه مختصات قطبی




دستگاه مختصات قطبی

جهت مثبت در مختصات قطبی ثابت نیست و با θ دوران می‌کند.

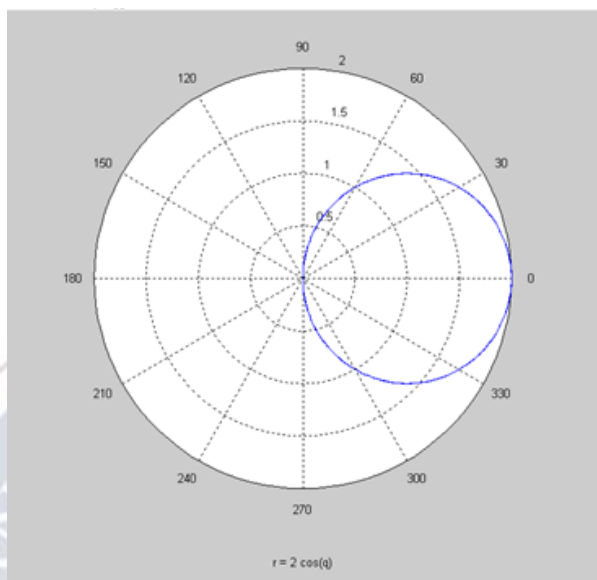
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{تبدیل مختصات قطبی به دکارتی}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{تبدیل مختصات دکارتی به قطبی}$$

- دستگاه مختصات قطبی مانند دستگاه مختصات دکارتی ثابت نیست و در حال تغییر است و اثر آن را می‌توان بر دستگاه ثابت دکارتی مشاهده کرد.

مثال  تابع $r = 2 \cos \theta$ را رسم کنید.یادآوری: $|r|$ اندازه بردار و θ زاویه از محور x در جهت پادساعتگرد است.


برای این رسم مانند زیر با نقطه گذاری هم حدود تابع پیدا می شود .

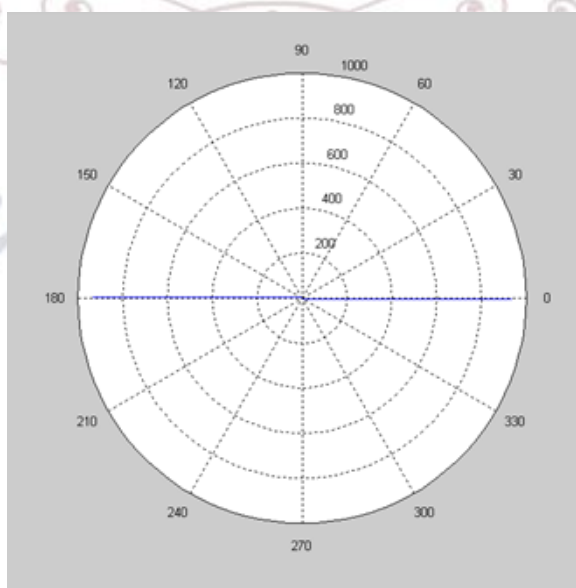


✓ تذکر 1: حال اگر به جای r ، $\sqrt{x^2 + y^2}$ و به جای θ ، $tg^{-1} \frac{y}{x}$ را قرار دهیم و رسم کنیم باز به همین شکل می رسمیم .

پس می بینیم که در مختصات قطبی رسم تابع $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cos\left(tg^{-1} \frac{y}{x}\right)$ بسیار ساده تر از رسم در مختصات دکارتی است .

✓ تذکر 2: همان طور که در متن درس تذکر داده شده ، می بینیم که اگر θ را به $-\theta$ تبدیل کنیم چون ضابطه‌ی تابع بدون تغییر باقی می ماند پس شکل نسبت به محور قطبی (در این جا محور x ها) متقارن است .

مثال  نمودار $r \sin \theta = 3$ را رسم کنید .



✓ تذکره 1: همانگونه که مشاهده می شود اگر بخواهیم در مختصات دکارتی در نظر بگیریم

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = r \sin \theta \\ x = r \cos \theta \end{array} \right. \rightarrow y = 3$$

پس رسم این مثال در مختصات کارتزین بسیار آسان تر از مختصات دکارتی است .
 ✓ تذکره 2: همانگونه که در درس مطرح شد اگر (r, θ) را با $(-r, -\theta)$ عوض کرد و ضابطه تغییری نکرد (مانند این مثال) شکل تابع نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ (در این جا محور y ها) متقارن است .
 * برای رسم بهتر ما می توانیم در نقاطی که اهمیت دارند ضریب زاویه خط مماس را بدست آوریم .

دانشگاه رایانه ای

دستگاه مختصات قطبی

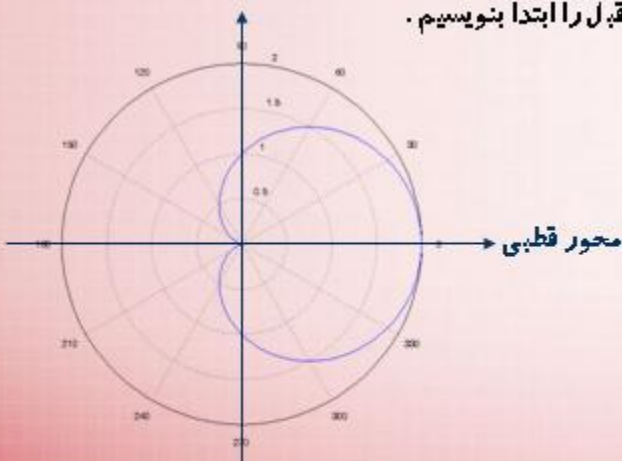
مثال: ضریب زاویه مماس بر نمودار $r = 2 + 2\cos\theta$ را در نقطه $\theta = 0$ را بدست آورید . سپس نمودارش را

رسم کنید .

$$\tan \alpha = \frac{-2\sin^2 \theta + 2\cos \theta + 2\cos^2 \theta}{-2\sin \theta \cdot \cos \theta - 2 - 2\cos \theta \sin \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{4}{0} = \infty \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

با استفاده از مثال قبل:

یا می توانیم برای حفظ نکردن فرمول مراحل مثال قبل را ابتدا بنویسیم .



* در حالت کلی شکل $r = a \cos \theta$ یا $r = a \sin \theta$ دایری هستند به شعاع $\frac{a}{2}$ و به ترتیب به مراکز $(\frac{a}{2}, 0)$ و $(0, \frac{a}{2})$


دانشگاه رایانه ای

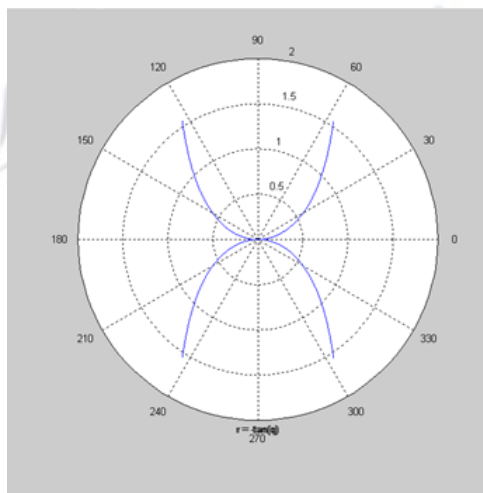
دستگاه مختصات قطبی

$$\text{مساحت قطاع اام} \quad \frac{1}{2} f^2(\theta) \Delta_i \theta \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\theta_i) \Delta_i \theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta$$

توجه: استفاده از فرمول روبرو برای محاسبه مساحت دایره صفحه قبل دو برابر مساحت واقعی دایره جواب می‌دهد لذا بایستی در استفاده از فرمول روبرو محتاط بود.

$$\text{مساحت یک قطاع از منحنی قطبی} \quad S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta$$

مثال $r = tg \theta$ را رسم کنید. 



مختصات استوانه‌ای



دانشگاه رایانه ای

مختصات استوانه‌ای

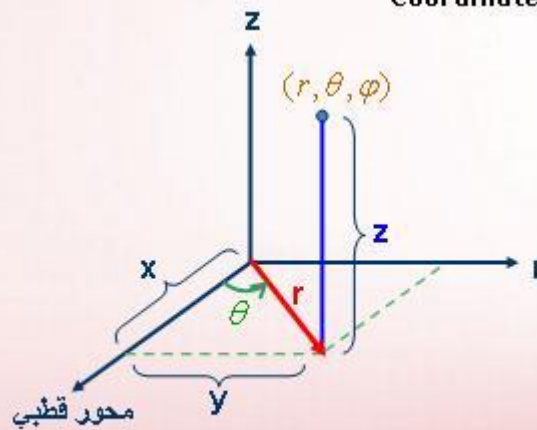
مختصات استوانه‌ای :

اگر فقط یک مختصات Z به مختصات قطبی اضافه کنیم مختصات استوانه نتیجه می‌شود.

Cylindrical
Coordinates

$$\text{رابطه با مختصات دکارتی} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{رابطه مختصات دکارتی با استوانه‌ای} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$



دانشگاه رایانه‌ای تهران

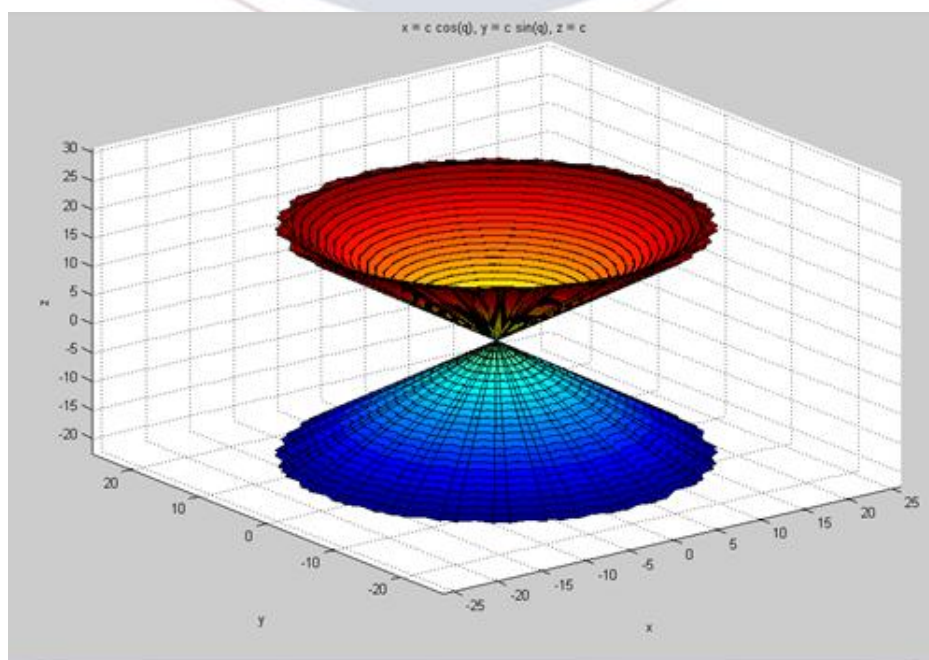


قاعده: اگر در دستگاه استوانه ای در معادله ی رویه ای θ غایب باشد ابتدا خطی در صفحه ی r و z رسم نموده سپس آن را حول محور z ها دوران می دهیم.

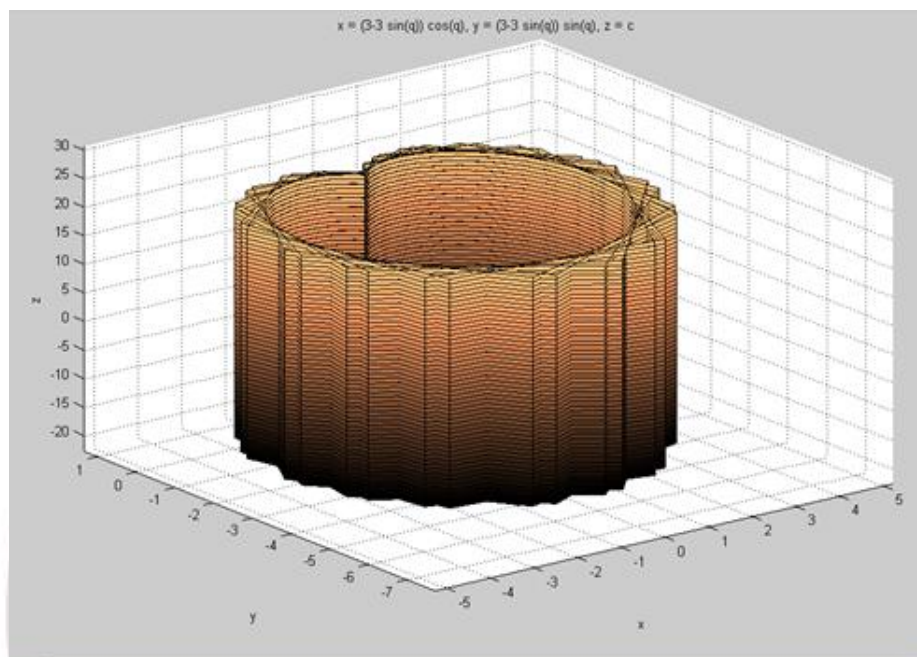
تمرین ۱) رویه ی $r = z$ را ترسیم و توصیف کنید. ← یک مخروط کامل

تمرین ۲) رویه ی $r = 3 - 3 \sin \theta$ را رسم کنید. (در مختصات استوانه ای)

حل تمرین 1: برای رسم رویه $r = z$ ، این منحنی را در صفحه ای مثلاً $\theta = 0$ رسم می کنیم و سپس آن را حول محور z ها دوران می دهیم.



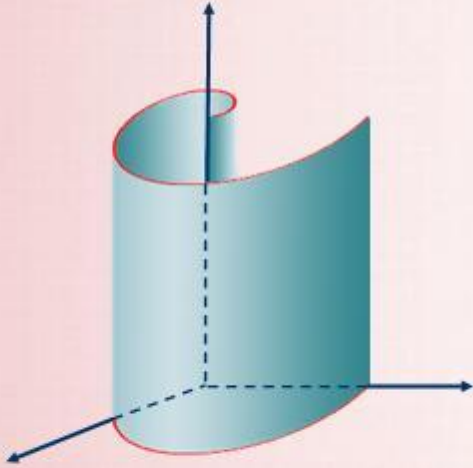
حل تمرین 2: برای حل $r = 3 - 3 \sin \theta$ ابتدا این منحنی را در صفحه xy رسم کرده سپس شکل را روی محور z ها بالا می‌بریم.



دانشگاه رایانه‌ای تهران

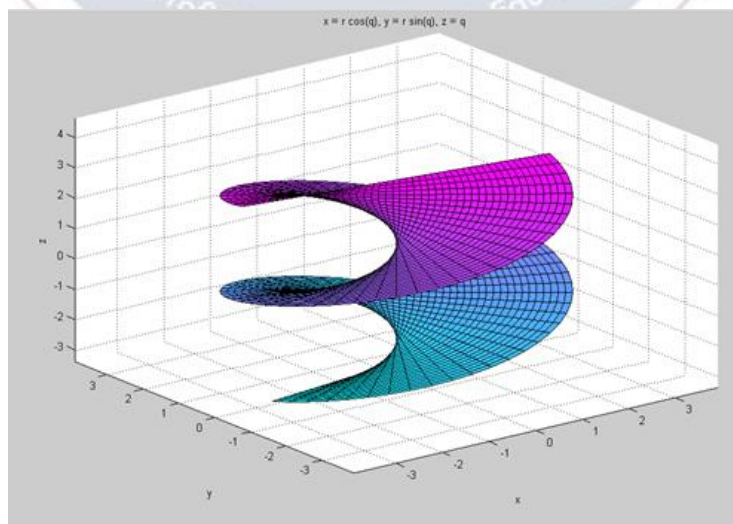
ترسیم رویه

مثال: رویه $z = \theta$ را ترسیم و توصیف کنید.



سطح مارپیچ حول محور Z ها

به جای شکل فوق شکل زیر فرار گیر!



از ضابطه معلوم است که r هر مقداری می تواند باشد ولی θ هر چه باشد z نیز همان است یعنی مثلاً

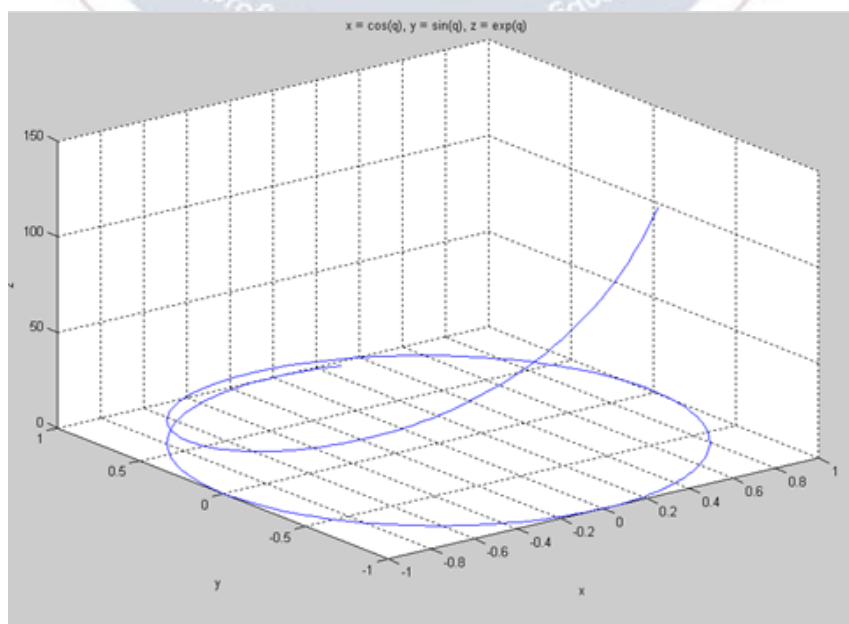
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
z	0	0/78	1/57	2/35	3/14


ترسیم رویه

مثال: منحنی $z = e^\theta$ و $r = 1$ را ترسیم و توصیف کنید.

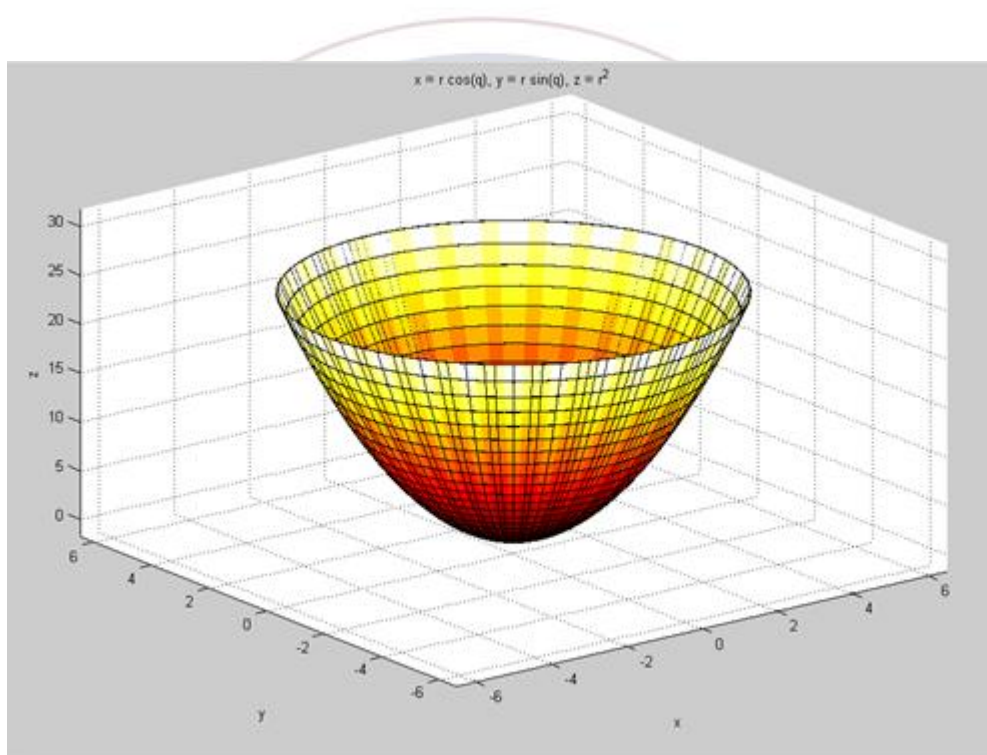
ملربج یا Helix

$$\begin{cases} z = e^\theta \\ r = 1 \end{cases} \text{ : جواب}$$



مثال  رویه ی $z=r^2$ را رسم کنید .

مثلاً در صفحه $\theta = \frac{\pi}{2}$ ضابطه را رسم می کنیم ، سپس حول محور z ها دوران می‌دهیم .



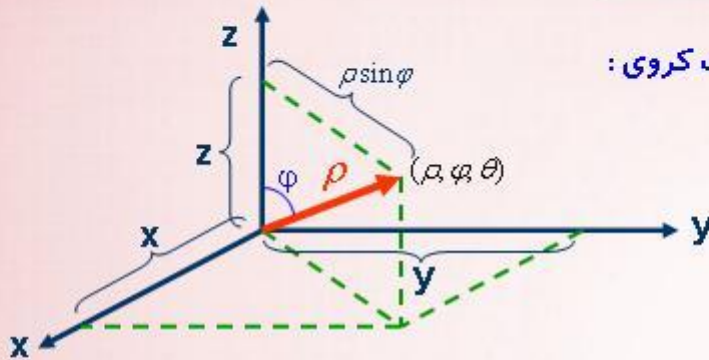
دانشگاه رایانه‌ای تهران

مختصات کروی



دانشگاه رایانه ای

دستگاه مختصات کروی



دستگاه مختصات کروی :

- (۱) ρ مشابه R در مختصات استوانه ای است با این تفاوت که ρ هیچ گاه منفی نیست .
- (۲) زاویه φ ای است که بردار مکان نقطه با قسمت مثبت محور Z می سازد . به همین دلیل بین 0 تا π است .
- (۳) θ همان زاویه θ در مختصات استوانه ای است .

دانشگاه رایانه ای تهران

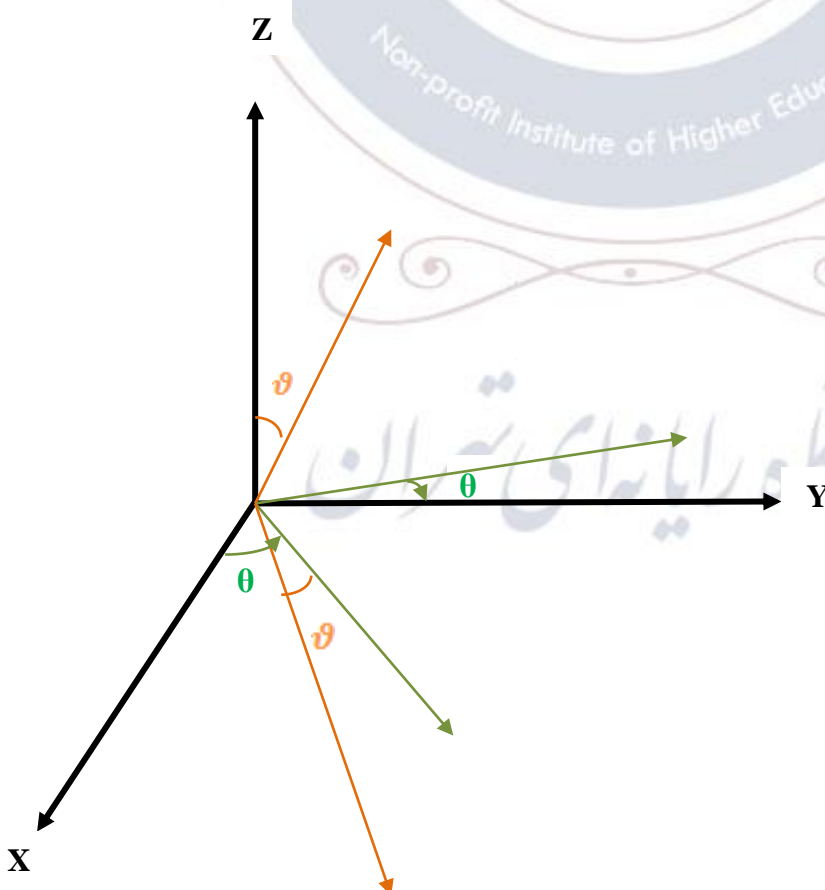
دستگاه مختصات گروی

رابطه با مختصات دکارتی

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \\ \cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \varphi < \pi \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases} \quad \rho \geq 0$$



اگر معادله منحنی در صفحه XOY را به صورت $y=f(x)$ داشته باشیم ، با دوران این منحنی حول محور y ها حجمی حاصل می شود که معادله سطح این شکل از رابطه زیر بدست می آید .

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}$$

$$\rightarrow x = \pm \sqrt{x_1^2 + z_1^2}$$

$f(x, y) = 0 \rightarrow$ دوران حول محور y ها $f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y)$

$f(x, y) = 0 \rightarrow$ دوران حول محور x ها $f(x, \sqrt{y^2 + z^2})$

موفق باشید

دپارتمان ریاضی

دانشگاه غیرانتفاعی رایانه‌ای تهران

www.Iran-vu.com

دانشگاه رایانه‌ای تهران