

روش های عددی در روش المانیت (2)

Shape Functions

F.E.M ← فرم صفت معادله تفاضلی محال

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \bar{F}_i \delta u_i dV + \int_S \bar{T}_i \delta u_i dS \Rightarrow [K] \{U\} = \{R\}$$

انرژی داخلی

انرژی خارجی

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

با اصل درین مائیس سختی تک تک
المان ها به مائیس سختی کل می آید

$$\{R\} = \{R_F\} + \{R_T\} = \int_{V^e} [N]^T [\bar{F}^e] dV^e + \int_{S^e} [N]^T [\bar{T}^e] dS^e$$

$$\{u\} = [N] \{u^*\}, \quad \{\varepsilon\} = [B] \{u^*\}$$

$$\{o\} = [O] \{\varepsilon\}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \langle \phi \rangle & \langle o \rangle \\ \langle o \rangle & \langle \phi \rangle \end{bmatrix}$$

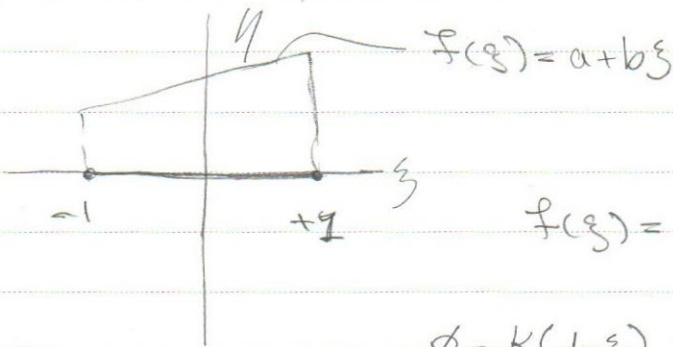
$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x} & \langle o \rangle \\ \langle o \rangle & \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial y} \\ \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial y} & \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x} \end{bmatrix}$$

10 Lagrangian Interpolation

۱- میان یابی لارانتژی یک بعدی



الف) میان یابی خطی



$$f(z) = \phi_1 f_1 + \phi_2 f_2 = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_1 = K(1-z) \rightarrow \phi_1 = K(1-(-1)) = 1$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_1 = \frac{1}{2}(1-z)$$

$$\phi_2 = K(1+z) \rightarrow \phi_2 = K(1+1) = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1+z)$$

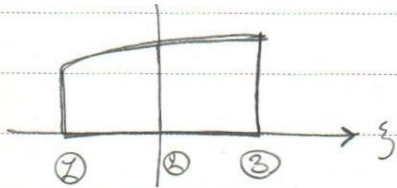
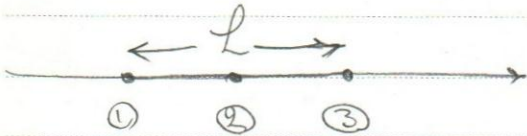
$$f(z) = \langle \frac{1}{2}(1-z), \frac{1}{2}(1+z) \rangle \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(1-z)f_1 + \frac{1}{2}(1+z)f_2 = \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}zf_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}zf_2$$

$$= \underbrace{\frac{f_1 + f_2}{2}}_a + \underbrace{\frac{f_1 + f_2}{2} z}_b$$

$$= a + bz$$

Quadratic Interpolation (میان‌یابی درجه ۲)



$$f(\xi) = a + b\xi + c\xi^2$$

$$f(\xi) = \phi_1 f_1 + \phi_2 f_2 + \phi_3 f_3 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \langle \phi \rangle \begin{Bmatrix} f \end{Bmatrix}$$

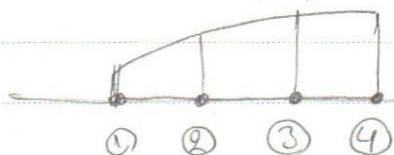
$$\phi_1 = K\xi(1-\xi) \Rightarrow \phi(-1) = K(-1)(1-(-1)) = 1 \Rightarrow K = -\frac{1}{2}$$

$$\phi_1 = \frac{\xi(\xi-1)}{2}$$

$$\phi_2 = K(1+\xi)(1-\xi) \Rightarrow \phi_2(0) = K(1+0)(1-0) = 1 \Rightarrow$$

$$\phi_3 = K\xi(1+\xi) \Rightarrow \phi_3($$

Cube Interpolation

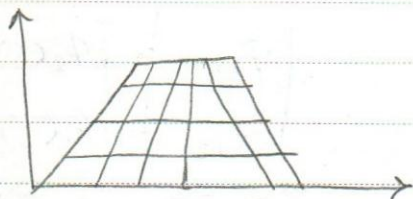
$$\sum_{i=1}^4 \phi_i(x) f_i(x)$$


$$f(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3$$

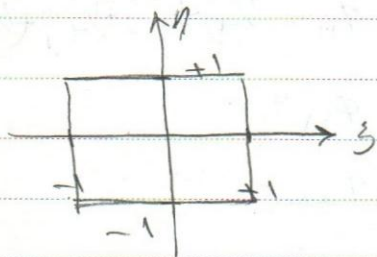
$$f(\xi) = \phi_1 f_1 + \phi_2 f_2 + \phi_3 f_3 + \phi_4 f_4 = \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_i = K($$

۲. D. Lagrangian Interpolation : میان یابی لگرانژی در یک بعدی



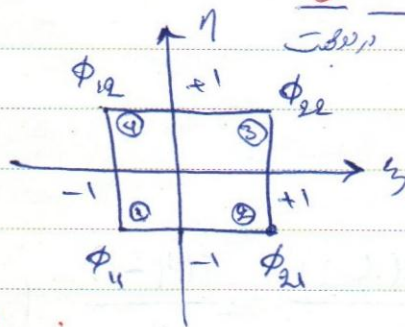
الف) میان یابی خطی



$$F(\xi, \eta) = \phi_{ij} f_{ij} = [\phi][f]$$

برای اعلان مختصات هر است از area استفاده کرده چون جابجایی آن برابر
coordinates
سمت آن می شود.

۳. الف - میان یابی درختی Bilinear Interpolation



$$F(\xi, \eta) = \phi_{ij} f_{ij} = [\phi_1(\xi), \phi_2(\eta)] f_{ij}$$

چهار ضلعی و مربع شکل
لان قائم یک بعدی

f_{ij}

$$f(\xi) = a + b\xi$$

$$f(\eta) = c + d\eta$$

$$f(\xi, \eta) = (a + b\xi)(c + d\eta) = ac + bc\xi + ad\eta + bd\xi\eta$$

$$a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

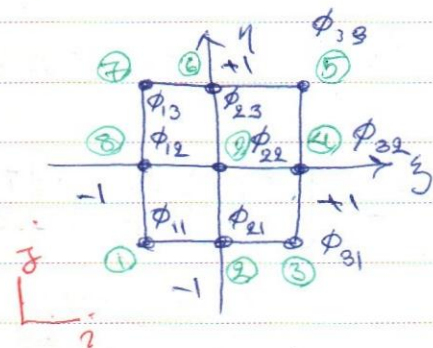
محکم الایضاً صورت
برداري نوشته
می شود

عبارات مثبت

آدمه از طبعه لذت

در هم ضرب می شوند

2- ب - حیان یا مریه ۲

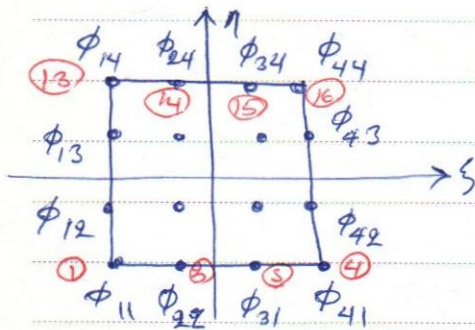


$$\begin{matrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \end{matrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \\ \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \\ \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1(\xi) \cdot \phi_1(\eta) \\ \phi_2(\xi) \cdot \phi_1(\eta) \\ \phi_3(\xi) \cdot \phi_1(\eta) \\ \vdots \\ \phi_3(\xi) \cdot \phi_3(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\xi(\xi-1)}{2} \cdot \frac{\eta(\eta-1)}{2} \\ (1+\xi)(1-\xi) \cdot \frac{\eta(\eta-1)}{2} \\ \frac{\xi(\xi+1)}{2} \cdot \frac{\eta(\eta-1)}{2} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{4} \xi^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \xi^2 \eta - \frac{1}{4} \xi \eta^2 + \frac{1}{4} \xi \eta$$

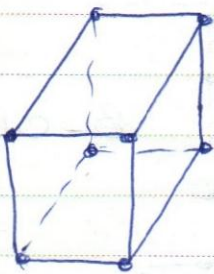
Bi-cubic Interpolation

2- ج- میان یایی درجه 3 در صفت



درابع بهت احمد درجه 3 در صفت
درم ضرب می کنیم

$$\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \\ \vdots \\ \phi_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1(\xi) \phi_1(\eta) \\ \phi_2(\xi) \phi_1(\eta) \\ \vdots \\ \phi_4(\xi) \phi_4(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \end{Bmatrix}$$



ϕ_{ijk}

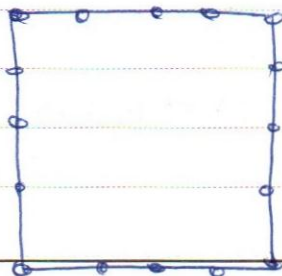
3- الف- میان یایی خفی در صفت

3- ب- میان یایی درجه 2 در صفت

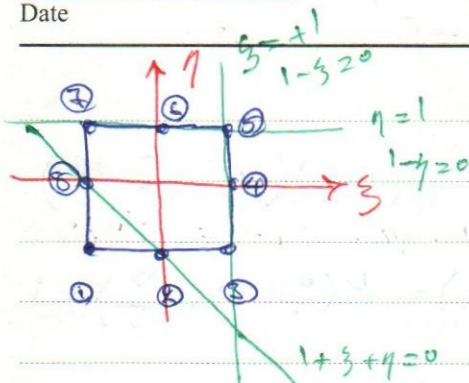
3- ج- میان یایی درجه 2 در صفت

$$\phi_{111} = \phi_1(\xi) \phi_1(\eta) \phi_1(\zeta) = \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} \cdot \frac{1-\zeta}{2}$$

$$\phi_{210} =$$



Bi-cubic



بدلت جمل در هر نری می توان از روابط جلیه ملی
استفاده کرد و باید مستقلاً توابع شکل را بدست آورد

$$\phi_0 = K(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$\phi_0 = \phi(-1, -1) = K(2)(2)(-1) = 1 \Rightarrow K = -1/4$$

$$= 1/4(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$\phi_2 = \dots$$

$$\phi_3 = \dots$$

$$\phi_4 = \dots$$

$$\phi_5 = K(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi)$$

$$\phi_5 = \phi(0, -1) = K(2)(1)(1) = 1 \Rightarrow K = +1/2$$

$$\phi_6 = \dots$$

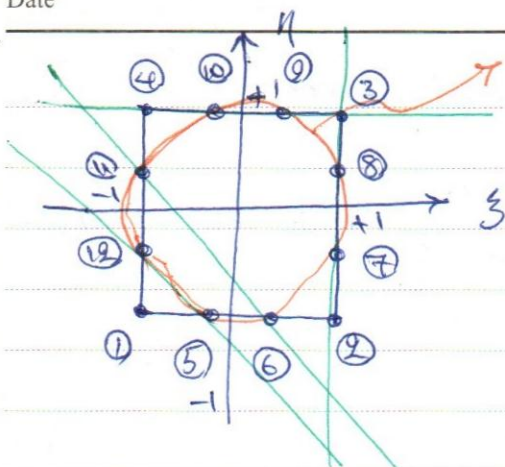
$$\phi_7 = \dots$$

$$\phi_8 = \dots$$

$$\phi_1 = -1/4 + \xi^2 + 1/4 \xi^2 + 1/4 \eta^2 - 1/4 \xi \eta - 1/4 \xi \eta^2$$

P4PCO

بالا ترین درجه در این سری است کمی شود. اما چون خطی به درجه بالا بسته است خطی با هفتی می باشد



$$\frac{10}{9} - \zeta^2 - \eta^2 = 0$$

$$\phi_1 = K(1-\eta)(1-\zeta)\left(\zeta^2 + \eta^2 - \frac{10}{9}\right)$$

$$\phi_1(-1, -1) = K(2)(2)\left(\frac{8}{9}\right) = 1$$

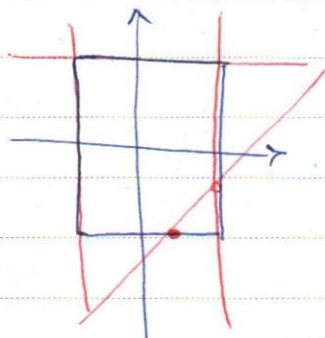
$$\rightarrow K = \frac{9}{23}$$

$$\phi_1 = \frac{9}{23}(1-\eta)(1-\zeta)\left(\zeta^2 + \eta^2 - \frac{10}{9}\right)$$

$$\phi_2 =$$

$$\phi_3 =$$

$$\phi_4 =$$



$$\phi_5 = K(1+\zeta)(1-\eta)\left(\frac{1}{3} - \zeta\right)$$

$$\phi_5\left(-\frac{1}{3}, -1\right) = K\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)(2)\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

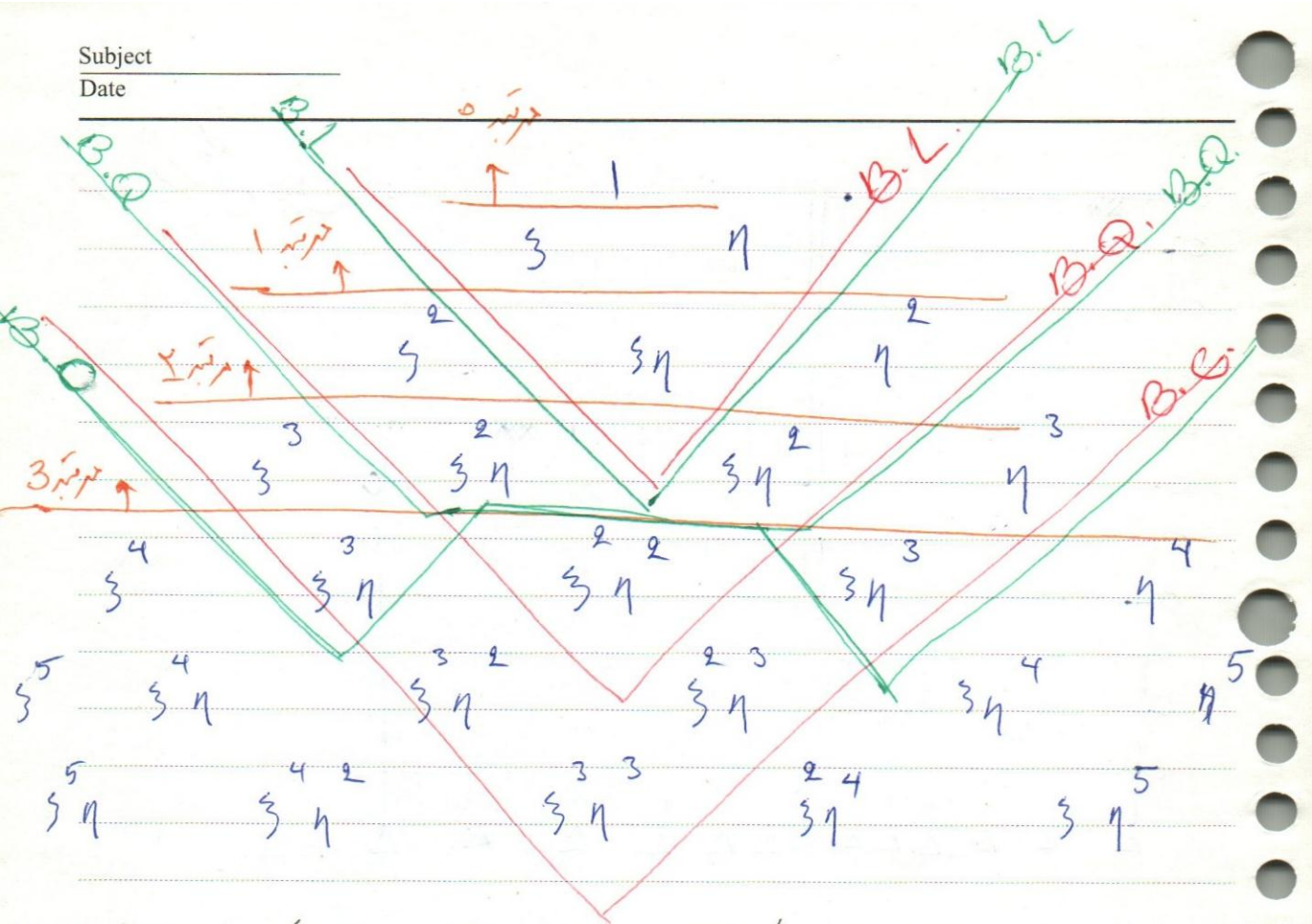
$$\rightarrow K = \frac{27}{32}$$

$$\phi_6 =$$

$$\phi_7 =$$

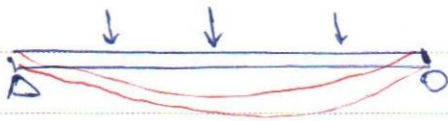
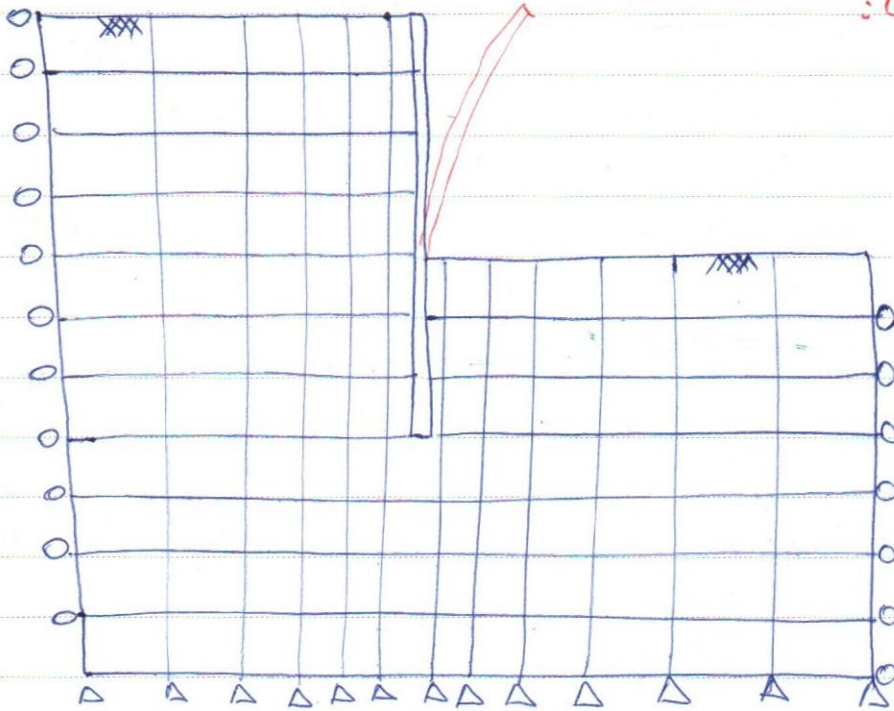
}

$$\phi_{10} =$$

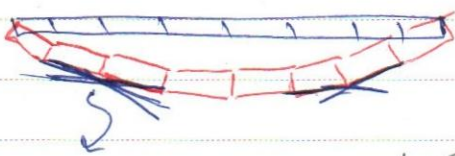


الان جا سرنوشتی نفع خدای شان بکتر از الان جا لاژانفری است چون که خدای به
 درجات بالاتر مربوط است. اما همچنین از الان جا لاژانفری کاربرد بیشتری دارند که دلیل اول
 هزینه های سات را کاهش می دهد دلیل دوم این است که بعضی از الان جا لاژانفری لوله کاری کنند
 که در تولید بکتر سروکار داریم اما در چندین سازه بعضی از الان جا ^{لاژانفری} *base plate* *Beam*
 لوله کاری کنند. بنابراین قبل از به کار بردن الان جا باید *patch test* را انجام داد پس
 در سرنوشت اصلی استفاده کرد. جملات کتاب *Bate* انرا و تمام الان جا ها
 مواظبتی را خود کرده است.

درجه پیوستگی لایه ها:



رقتا، smooth است و پیوستگی دارد



مانند یک ریاضی است

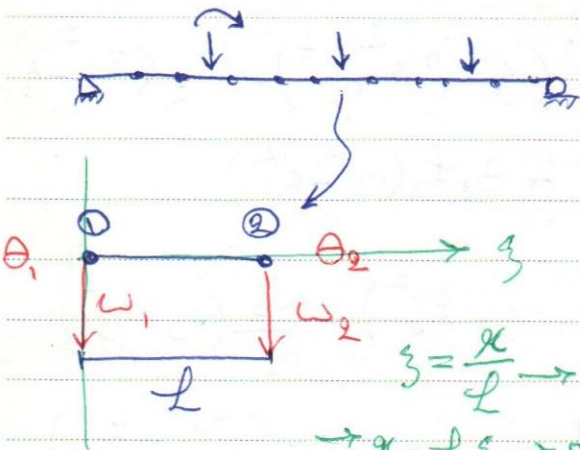
Kink

برای پیوستگی لایه باید مشتق بلا از مرتبه مرتبه یک تغییر مکان C^1 C^0

تغییر کنیم تا شبیه به تغییر شکل عام عطف شود.

حسب نیاز پروژه می توان درجه پیوستگی تغییر مکان را افزایش داد.

تأثیر shape function بر رفتار درجه یکسانی لایه ها



برای یکسانی لایه ها باید از لایه های با

درجه یکسانی استفاده کرد

می خواهیم که این ها علاوه بر درجه آزادی بی تغییر

درجه آزادی θ نیز داشته باشد. $\rightarrow x = L \cdot \xi \rightarrow dx = L \cdot d\xi$

به علت آنکه درجه آزادی داریم باید شکل مشابه شکل به صورت مقابل باشد
shape fun.

$$w(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3$$

$$\theta(\xi) = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3$$

غلط است چون شکل از w بی شود

$$\theta(\xi) = \frac{dw(\xi)}{dx} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dw}{d\xi} = \frac{1}{L} (a_1 + 2a_2 \xi + 3a_3 \xi^2)$$

node ①. $\begin{cases} w_1 = w(0) = a_0 \rightarrow a_0 = w_1 \\ \theta_1 = \frac{1}{L} \cdot \frac{dw}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{L} a_1 \rightarrow a_1 = L \cdot \theta_1 \end{cases}$

node ②. $\begin{cases} w_2 = w(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow a_2 = -3w_1 + 3w_2 - 2L\theta_1 + L\theta_2 \\ \theta_2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{dw}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = \frac{1}{L} (a_1 + 2a_2 + 3a_3) \rightarrow \end{cases}$

$$a_3 = 2w_1 - 2w_2 + L\theta_1 + L\theta_2 \rightarrow$$

$$a_3 = 2\omega_1 - 2\omega_2 + \mathcal{L}\theta_1 + \mathcal{L}\theta_2$$

$$\omega(s) = \omega_1(1 - 3s^2 + 2s^3) + \theta_1 \mathcal{L}(s - 2s^2 + s^3) + \omega_2(3s^2 - 2s^3) + \theta_2 \mathcal{L}(s^3 - s^2)$$

$$\theta(s) = \frac{\omega_1}{\mathcal{L}}(-6s + 6s^2) + \theta_1(1 - 4s + 3s^2) + \frac{\omega_2}{\mathcal{L}}(6s - 6s^2) + \theta_2(3s^2 - 2s)$$

Hermitian polynomials

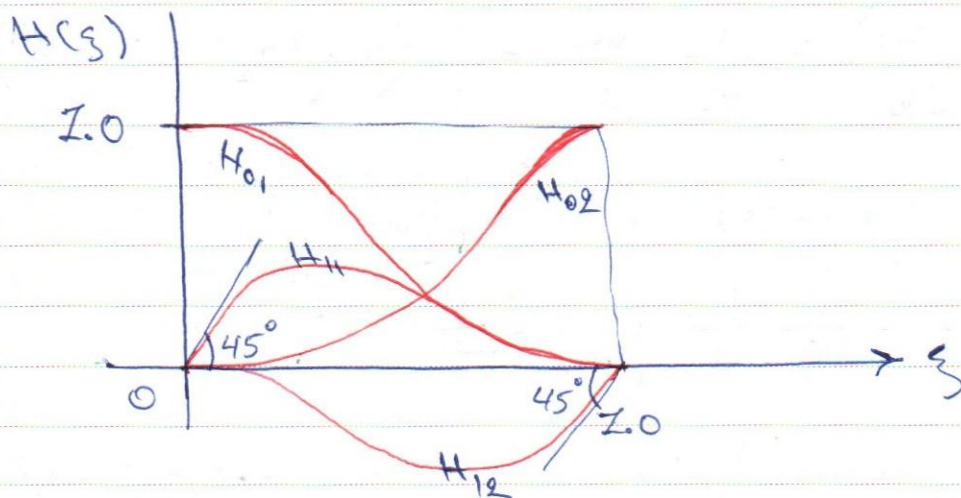
کتاب مرتبی

$$H_{01} = (1 - 3s^2 + 2s^3)$$

$$H_{02} = (3s^2 - 2s^3)$$

$$H_{11} = (s - 2s^2 + s^3)$$

$$H_{12} = (s^3 - s^2)$$



1D
 در یک بعد
 $y = a$
 $y = a + bx$
 $y = a + bx + cx^2$
 $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

2D
 در دو بعد
 $f = a$
 $f = a + bx + cy$
 $f = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$
 $f = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy + gx^3 + hx^2y + iny^2 + key^3$

بجای توابع shape function این ها می توانیم از این ها استفاده کنیم تا این حد

در یک بعد توابع shape function این ها می توانیم از این ها استفاده کنیم تا این حد

مبانی تئوریک روش F.E

مبانی تئوریک روش تفاضل محدود

principle of virtual work (displacement formulation) : از معادله انرژی می توانیم معادله تفاضل محدود را استفاده کنیم

↓
 principle of minimum potential Energy : دو فرض دارد: کرنش خفوا است

potential Energy

$$\pi = \int_V U(\epsilon) dv - \int_V \bar{F} \cdot u \cdot dv - \int_S \bar{T} \cdot u \cdot ds$$

Strain Energy

work done by external loads

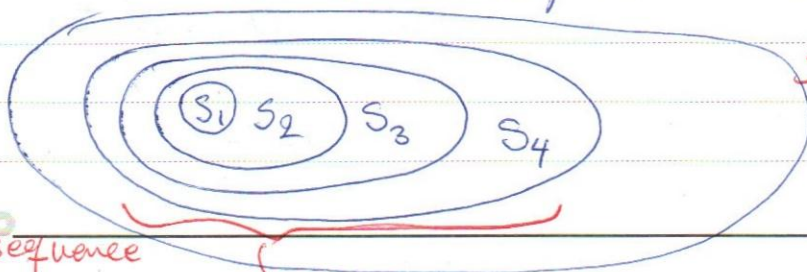
اصل انرژی پتانسیل محصل: عبارت است از اندک در میان تمامی میدان‌های مجاز تغییر شکل

که قابل تعریف در حجم جسم V باشند و شرایط مرزی $u_i = \bar{u}_i$ و $t_i = \bar{t}_i$ (با $i=1,2,3$)
 سطح S ازها نمایند، آن میدان تغییر شکلی که محصل سطح π را داشته باشد میدان مجز
 شکل واقعی سازه خواهد بود.

اینرا باید برای یک جسم بی نهایت میدان بی توان تعریف کرد و علاً این استر انرژی غیر استفاده
 می شود. ← میدان‌های تغییر شکل مجاز (admissible displacement field)

روش (R-R): Rayleigh-Ritz

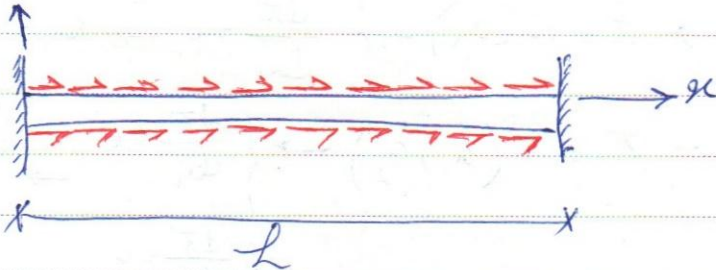
1) Define a sequence of subsets within the total set of admissible displacement fields.



total set of A.D.F

sequence of sub-set

2) choose the functions with the subsets to have particular mathematical form.



$$u(x) = ?$$

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i + \phi_0$$

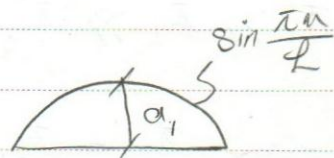
for non-homogeneous
B.C.

Sequence
of sub-set

ضرائب مجمل
توابع زیره
فرضی
(A.O.F)

س. متغیر
مستقل

$$u_1 = a_1 \cdot \phi_1(x) = a_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$



لعل ایند و بیرون
مستقل

admissible displacement field

مثال

$$u_2 = a_1 \cdot \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$$



$$u_3 = a_1 \cdot \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + a_3 \phi_3(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{L}$$



$$u_n = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + \dots + a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\checkmark \text{ جابجایی } u_1 \rightarrow \pi = \pi(a_1) \rightarrow \frac{d\pi}{da_1} = 0 \rightarrow a_1 = a_1^*$$

$$\checkmark \text{ جابجایی } u_2 \rightarrow \pi = \pi(a_1, a_2) \rightarrow \begin{cases} \frac{d\pi}{da_1} = 0 \\ \frac{d\pi}{da_2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = a_1^* \\ a_2 = a_2^* \end{cases}$$

$$\checkmark \text{ جابجایی } u_3 \rightarrow \pi = \pi(a_1, a_2, a_3) \rightarrow a_1^*, a_2^*, a_3^*$$

$$\checkmark \text{ جابجایی } u_n \rightarrow \pi = \pi(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow a_1^*, a_2^*, a_3^*, \dots, a_n^*$$

$$\pi_1 \gg \pi_2 \gg \pi_3 \gg \dots \gg \pi_n \gg \dots \gg \pi_{\text{exact}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = \pi_{\text{exact}} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^* = u_{\text{exact}} \end{array} \right.$$

این نتیجه با سه شرط زیر برقرار می شود

① میان کمیت های تغییراتی مجاز فرض شده می باشد

② میدان تغییر شکل با فرض شده شرط مرزی صوری را ارائه نمایند.

③ هم توابع $\phi(u)$ کامل باشند.

شرط مرزی صوری \leftarrow خود مجهولات در مرزها رعایت شود.

شرط مرزی صوری \leftarrow مشتق مجهولات " " " "

مشتق تغییر مکان \leftarrow کرنش می شود.

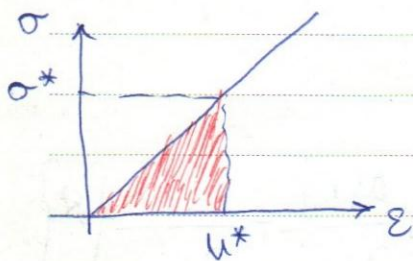
در FEM ما برای یک تک ایگ های میدان تغییر شکل فرض می کنیم زیرا می توان برای کل سازه

یک میدان فرض کرد و آن میدان تغییر شکل در FEM توابع شکلی باشند.

ما اعمال توابع شکلی به ایگ ها فرضیات خود را به ایگ ها تحمیل می کنیم و ایگ ها حل نمی کنند.

حداکثر با فرض ما تغییر شکل دهه مثلاً مثلث سه تریای یا شش تریای یا ...

$$\int_V U \, dV = \int_V \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \cdot \sigma \, dV =$$



$$= \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T (D \cdot \epsilon) \, dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_V (\bar{u}^T B)^T D \cdot (B u) \, dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_V u^T \underbrace{(B^T D B)}_K u \, dV$$

$$\int_V U dv = \frac{1}{2} \int_V u^T K u dv$$

$$\text{in F.E context} = \frac{1}{2} \sum_{\text{ele.}} \langle q \rangle [K^e] \{q\}$$

ماتریس سختی المان \hookrightarrow بردار تغییر مکان المان

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{\text{ele.}} \langle q \rangle [K^e] \{q\} - \underbrace{\sum_{\text{ele.}} \langle q \rangle \{R_b\}}_{\text{body force}} - \underbrace{\sum_{\text{ele.}} \langle q \rangle \{R_s\}}_{\text{Traction}}$$

بردار تغییر مکان المان \hookrightarrow بردار نیرو المان

$$\pi = \frac{1}{2} \langle r \rangle [K] \{r\} - \langle r \rangle \{R\}$$

بردار تغییر مکان المان \hookrightarrow بردار تغییر مکان المان
بردار تغییر مکان المان \hookrightarrow بردار تغییر مکان المان
بردار تغییر مکان المان \hookrightarrow بردار تغییر مکان المان

بردار تغییر مکان المان \hookrightarrow بردار تغییر مکان المان

$$\frac{\partial \pi}{\partial r_i} = 0 \text{ for } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial r_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle r \rangle}{\partial r_i} [K] \{r\} + \frac{1}{2} \langle r \rangle [K] \frac{\partial \{r\}}{\partial r_i} - \frac{\partial \langle r \rangle}{\partial r_i} \{R\}$$

بردار تغییر مکان المان \hookrightarrow بردار تغییر مکان المان
بردار تغییر مکان المان \hookrightarrow بردار تغییر مکان المان
بردار تغییر مکان المان \hookrightarrow بردار تغییر مکان المان

$$\frac{\partial \pi}{\partial r_i} = \frac{\partial \langle r \rangle}{\partial r_i} [[K] \{r\} - \{R\}] = \{0\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \langle r_1, r_2, r_3, \dots, r_n \rangle}{\partial r_i} = \begin{matrix} \langle 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \rangle \\ \langle 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \rangle \end{matrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} \langle 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \rangle \\ \langle 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \rangle \\ \langle 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [K] \{r\} - \{R\} = \{0\} \Rightarrow [K] \{r\} = \{R\}$$

محولات تغییر مکان های نره های من

تفاوت روش رابلی - رینز با روش الان محدود

آر شروط محدودی اصل رابلی - رینز در الان محدود هم اضافه شود در نتیجه الان محدود رینز هم

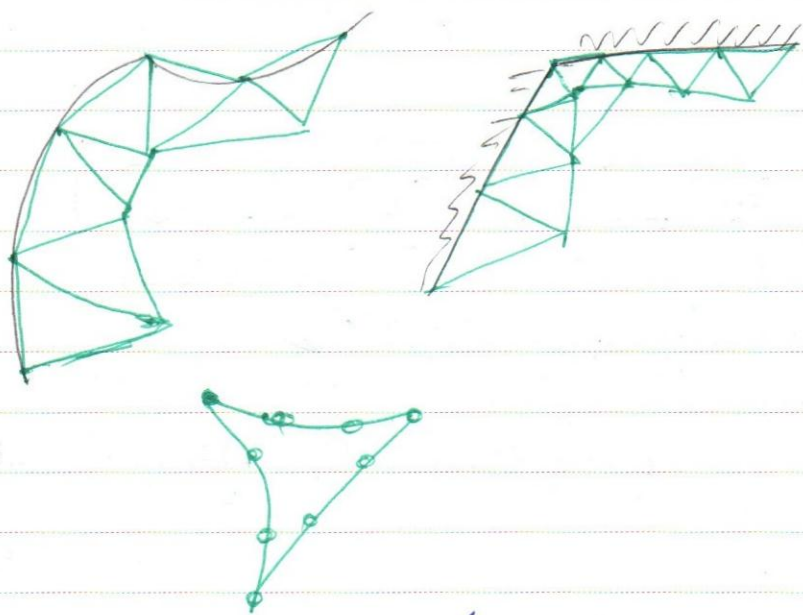
خواهد شد

شرایط هکرای در FEM

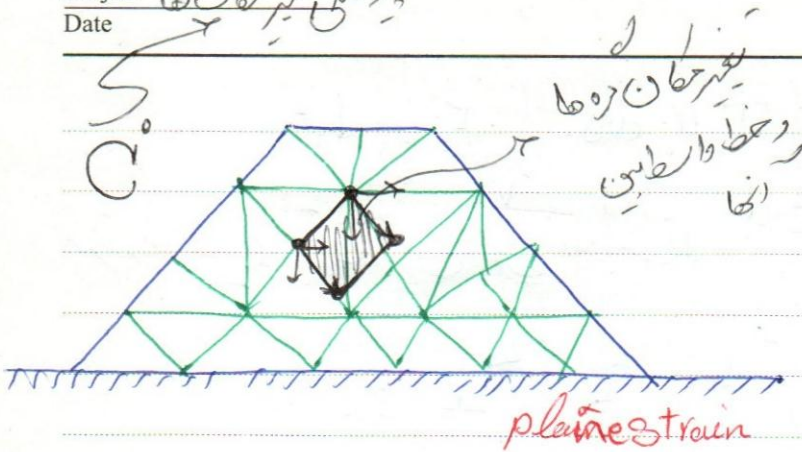
۱) ارضای شرایط تیزی ضروری

در FEM معمولاً با Displacement Formulation در ترقی داریم تا تغییر شکل ها

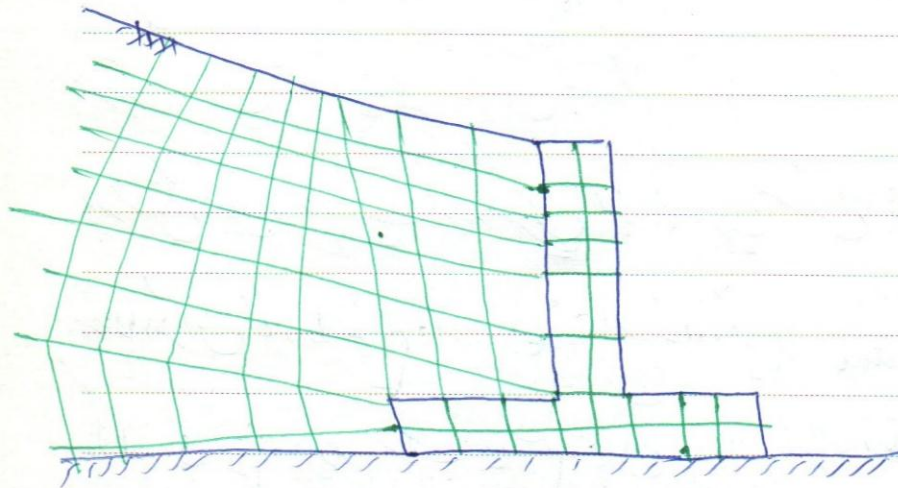
محصول باشد و تنش ها معلوم اما اگر تنش محصول باشد
تنش ها محصول می شوند



حاضر اینجا فرض کردیم که در المان ها این دو پارامتریک توانایی ده هندسه المان ها بر اساس
تخمینات المان به دست می آورند همان توانایی هندسه که محمولات ما را در داخل المان
به دست می آید در واقع شرحی که اینجا وجود دارد این است که المان این دو پارامتریک باشد.



plane strain



$$\sum \pi_{elem} \neq \pi_{total}$$

توابع شکل چون چند جمله‌ای و polynomial هستند پس همواره شیب پذیر بوده و همواره پیوسته هستند.

از در شکل هم از C^0 استفاده شود. پیوستگی رابط نیست. همچون شیبی از غیر یک شده در تقاطع شده است. به همین خاطر انرژی شده در داخل المان ها با یکدیگر سازگار نمی‌گردد. اما اگر از C^1

$$\sum \pi_{elem} = \sum \pi_{total}$$

$$\pi = \int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon \, dv - \int_S T_i u_i \, ds - \int_V F_i u_i \, dv$$

نهایت بزرگترین مشتق مجمل (displacement) اصلی مثال (برای بار است)

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - q_0 \int_0^L w \, dx$$

نهایت بزرگترین مشتق مجمل اصلی مثال (برای بار است)

نیوکشی امکان باید یک درجه آزادی از بزرگترین مشتق مجمل اصلی مثال باشد

حالا اگر این کار را نکنیم و از همان π استفاده کردیم $\pi_{\text{element}} \neq \pi_{\text{total}}$ میخورد
 بلکه می بینیم و در مرتبه جواب می رسم چون اینجا در انرژی تلف می شود.

③ کامل بودن Completeness

rigid body motion

حرکت ریزشی از انتقال دوران است

$$f(\xi) = a_1 + a_2 \xi$$

در حالت 1D

$$f(\xi, \eta) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta$$

در حالت 2D

$$f(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2$$

در حالت 1D

constant strain

$$f(\xi, \eta) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi^2 + a_5 \xi \eta + a_6 \eta^2$$

در حالت 2D

اما این طایفه نه هم حواور فوق را دارد شرط کامل بودن را ارضایی کند و ارزش داشت کامل

نیت

شرط فوق، شرط کافی برای حل شدن نیست

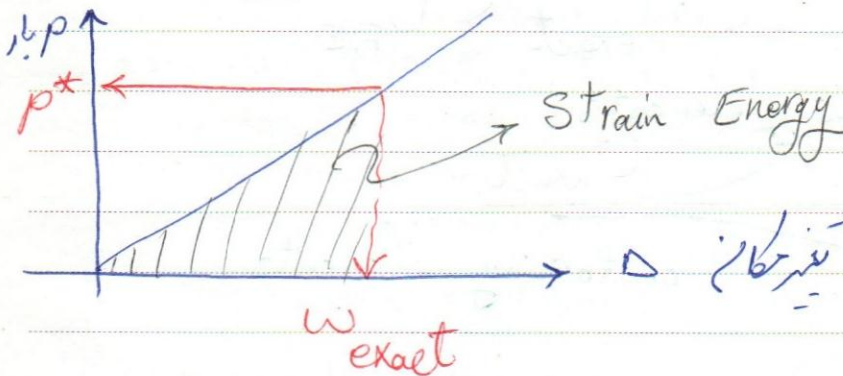
FE در شرط فوق را ارضایی کند یعنی اگر این کار زیاد باشد ارضایی شود و اگر

اما این هاست باشد ممکن است ارضانی شود

$$\pi(w) = U(w) - V(w)$$

total
Strain
Energy

work
done



$$U(w_{\text{exact}}) = \frac{1}{2} V(w_{\text{exact}})$$

$$V(w_{\text{exact}}) = 2U(w_{\text{exact}})$$

نیت

$$\pi(\text{exact}) = U(w_{\text{exact}}) - 2U(w_{\text{exact}})$$

$$\pi(w_{\text{exact}}) = -U(w_{\text{exact}})$$

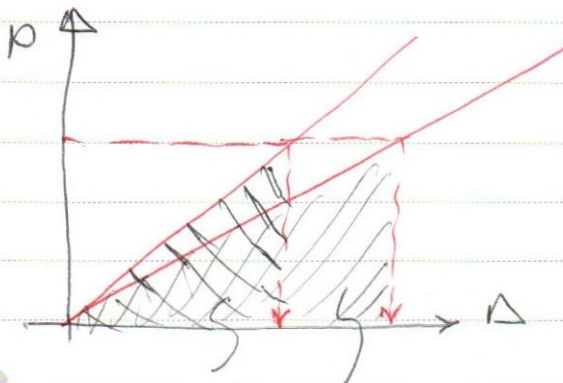
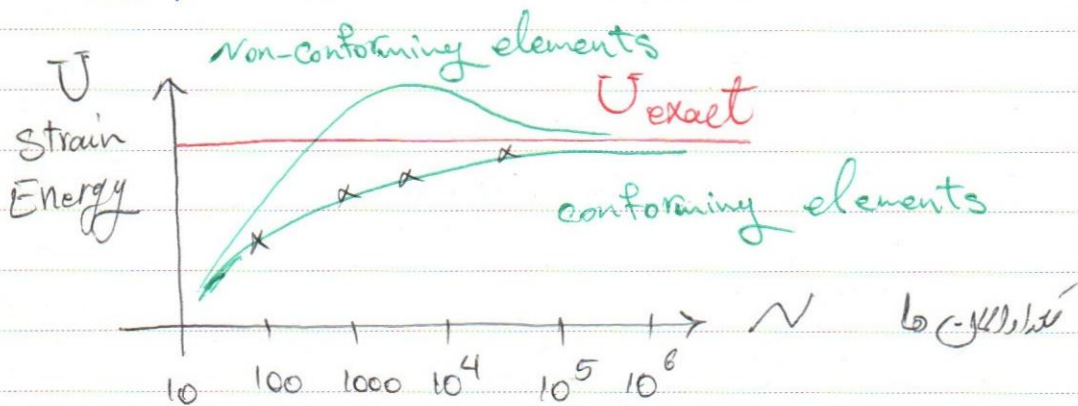
مشابه جبر FEM

$$\pi_{F.E} = \underbrace{\frac{1}{2} \langle r \rangle [K] \{r\}}_{N_{F.E}} - \underbrace{\langle r \rangle \{R\}}_{V_{F.E}} [K] \{r\}$$

$$\pi_{F.E} = \frac{1}{2} \langle r \rangle [K] \{r\} - \langle r \rangle [K] \{r\}$$

$$\pi_{F.E} = -\frac{1}{2} \langle r \rangle [K] \{r\} \Rightarrow \pi_{FE} = -U_{F.E}$$

$$\pi_{F.E} \geq \pi_{exact} \Rightarrow U_{exact} \geq U_{F.E}$$



اگر المان های conforming بکار برده شود
خطای کمتری حاصل می شود و دقت بیشتری
در نتیجه همواره تغییر شکل حاصل می شود
همواره در تغییر شکل حاصل می شود

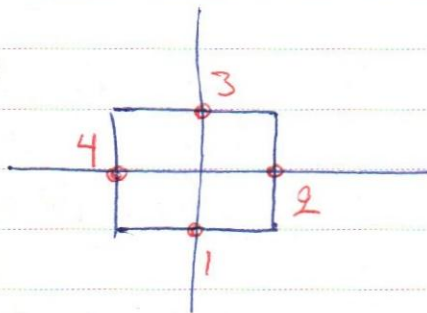
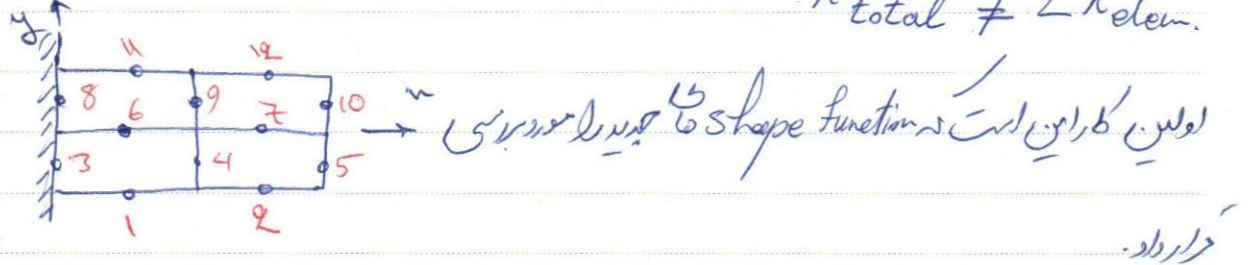
در واقع FEM در جهت مخالف اطمینان به ما نتیجه می دهد. لازم به ذکر است که ما داریم در مورد انرژی صحبت می کنیم و لزوماً نمی توان نقطه به نقطه این قانون را تعمیم داد یعنی به این معنی نیست که لزوماً تاج به لایه شتر نیست می تواند بلکه ممکن است این تغییر در نقطه ای دیگر و در جهت دیگر صورت بگیرد.

در مسائل استاتیکی و سختی مش از سختی ساده لایه شتر است.
در مسائل دینامیکی، فرکانس ارتعاش لایه ساده از فرکانس ارتعاش مش کمتر است.
patch test: برای چک کردن اینکه آیا لایه ها جواب می دهد یا خیر. ممکن است لایه non-conforming جواب بدهد حتی ممکن است لایه Conforming هم جواب ندهد.
در واقع لایه از patch test با موفقیت می تواند گذرد یعنی لایه حاد و نه شروط لازم و کافی را رعایت کرده است.

در patch می توان جدول لایه حاد در نظر گرفت. اما نمی بایست یک نقطه انرژی در چند لایه داشته باشد. باید حداکثر یک نقطه داخلی و چندین لایه داخلی داشته باشد.
داخلی

patch test

$$\pi_{total} \neq \sum \pi_{elem.}$$

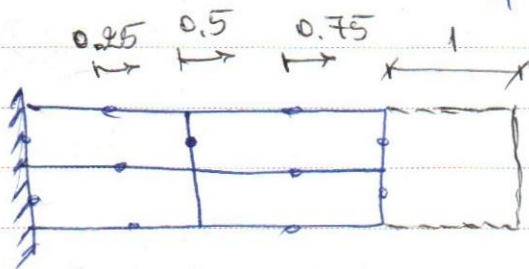


$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi-\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi+\eta)(1-\xi+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi-\eta)(1-\xi+\eta)$$



اگر این حالت برقرار باشد باید در هر سه حالت

جابجایی لغقی قائم دوران عیار باشد. به طوری

1. ولده به سمت راست می کشیم پس هرگاه ما این لغقی را به سمت راست می کشیم

$$[K] = \sum [K^e] = \sum \int_V [B]^T [D] [B] dv_e$$

پس ما این حالت را به سمت راست می کشیم و جواب جابی را می گیریم.

Node	u	v
1	0.250	0.165×10^{-20}
2	0.750	0.165×10^{-20}
3	0.500	
4	$0.100 \times 10^{+1}$	-0.455×10^{-18}
5	0.250	-0.313×10^{-16}
6	0.750	-0.316×10^{-16}
7		
9	0.500	-0.416×10^{-10}

بعد از اجرای دو از عناصر دیگر یعنی حالت قائم و دورانی می بینیم که الان ها با هم متفاوتند.
البته patch test استشاهای هم دارد مثلاً بعضی الان ها در الان ها از جابجایی نیستند
ولی در الان ها درست با هم متفاوتند.

بنابراین اگر کسی را نوشته اند و از وقتش مطمئن نبودیم باید patch test را بنویسیم
و این تست معمولاً با الان ها گفتیم تمام می شود.

Asymptotic Rate of Convergence جانب شونده نرخ هدری

Conforming الان ها سازگار

خطای
انرژی کرنشی

$$\Delta U = O[h^{2(n-m+1)}]$$

P4PCO

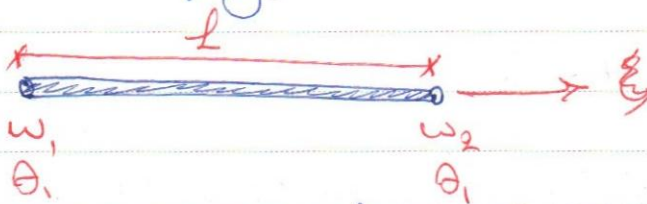
h suitable measure of the element size

n order of the highest complete polynomial
in the element displacement function

m highest derivative in the strain Energy function

For cubic polynomial beam element

مثال ۱:-



$$f = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + a_4 \xi^3$$

$$w = w_1(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \theta_1 l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) + w_2(3\xi^2 - 2\xi^3) +$$

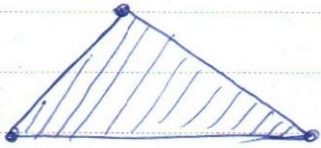
$$\theta_2 l(\xi^3 - \xi^2) \rightarrow n=3$$

$$\pi(w) = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{q}{2} \int_0^l w dx \rightarrow m=2$$

$$\Delta U = 0 [h^{2(3-2+1)}] = 0 [h^{+4}]$$

هر چه توان بالاتر باشد دقت بیشتر است ولی توان ۴ توان تجربی است.

۱۳۹۴/۷/۱۷



constant strain Triangle (CST)

$$\xi = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta \rightarrow n=1$$

1	↑ order 0
ξ η	↑ order 1
ξ^2 $\xi\eta$ η^2	↑ order 2

$$\pi = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_{S_t} t_i \delta u_i = 0 \rightarrow m=1$$

$$\Delta u = O[h^{2(1-1+1)}] = O(h^2)$$

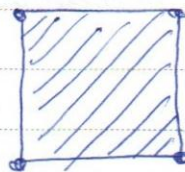
همان طور که مشاهده می شود در این حالتی می توان استفاده کرد یعنی خطی به سوا می توان

2 + درجه خطی بالابند

$$\xi = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi \eta \rightarrow n=1$$

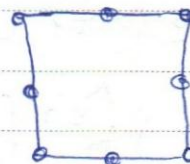
$$n = \dots \rightarrow m=1$$

$$\Delta u = O[h^{2(1-1+1)}] = O(h^2)$$



$$n=2 \quad m=4$$

$$\Delta u = O[h^{2(2-1+1)}] = O(h^4)$$



Z.E.M

(Zero Energy Modes)

مود انرژی صفر

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV^e$$

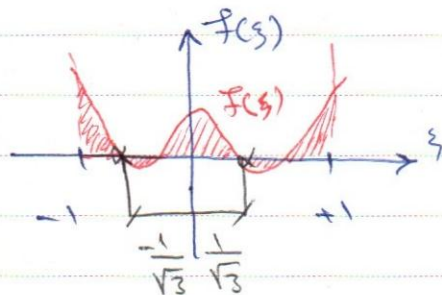
در واقع اگر برای یک سازه همی از انتقال نیرو

$$[P_s] = \int_{S_T} [N]^T \{ \bar{t} \} dS$$

مردی استفاده کنیم این حالت اصطلاحاً

خواهد آمد.

$$[P_b] = \int_{V^+} [N]^T \{ \bar{f} \} dV^e$$



$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \quad -1 \leq \xi \leq +1$$

اگر دست بر قضا نقاطی که ما صفر باشد انتقال

نیست یعنی ما صفر خواهیم شد، خطای این روش اصطلاحاً گفته می شود.

pieces of information

 $[K^e]$

مادر این مدل کم است.

$$U = \frac{1}{2} \int_{V^e} \langle q \rangle [B]^T [D] [B] \{ q \} dV^e$$

$$U = \frac{1}{2} \langle q \rangle [K^e] \{ q \}$$

$$\langle q \rangle [\hat{K}^e] \{ q \} = 0$$

Eigen Value Analysis } Rigid body Motion

simplified method } Numerical Integration

Z.E.M

اگر سازه ای داشته باشیم که حرکت جسم صلب در آن محتمل باشد کافی است تا تیلد و مایل

نیاز کرد

به علت اینکه ما انتگرال عددی می گیریم ممکن است صفر رود

$$U = \frac{1}{2} \langle q \rangle [\hat{K}] \{q\} = 0$$

Eigen Value equation

$$[\hat{K}] \{q\} = \lambda \{q\}$$

$$\langle q \rangle [\hat{K}] \{q\} = \langle q \rangle \lambda \{q\}$$

$$\cancel{2U} = \langle q \rangle \lambda \{q\}$$

$\{q\} \leftarrow$ Eigen Value از محل معادله

می دیدیم که الان ما باید چگونگی تغییر کنیم که ZEM به وجود نیاید چون نیاز به حل انتگرال

دارد از روش ساده سازی شده استفاده می کنیم البته این حالت در حل را به جای ده آماری دیده

که آیا ZEM به وجود می آید

تبدیل شده حرکت جسم صلب (Rigid body) تعداد درجات آزادی همان

$$Z.E.M = (n - n_{r.b}) - (S \times N_t)$$

تعداد مؤلفه های کرنش مستقل

در هر نقطه انتقال گیری عددی

تعداد کل نقاط انتقال گیری

عددی در داخل همان

1D. Bar Element



مثال ۱-

$$n = 2 \times 1$$

D.O.F

Degree of Freedom

Gause point

$$n_{r.b} = 1$$

$$N_t = 1$$

$S = 1$ axial Strain

$$ZEM = (2 - 1) - (1 \times 1) = 0$$

در حالت کلی اگر جواب بین محاسبه صفر باشد بهر احتمال ZEM صفر است و این برای تعداد

بالا مثل ۱۰ یا ۸ مثل شکل زیر دیده است. در این حالت در یک این یک بدی

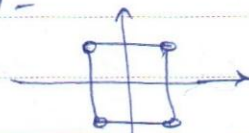
لترهای نقطه کوس در نظر بگیریم شکلی ایجاد می شود.

Bi-linear Rectangle

$$n = 4 \times 2 = 8$$

$$n_{r.b} = 3$$

$$N_t = 1 \times 1 = 1, S = 3$$



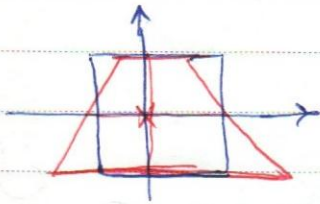
① در جهت x و y در جهت z می باشد

در یکی از این حالت ها یک حلقه برای S داریم:

$$\xi_{ij} = \begin{bmatrix} \xi_{xx} & \xi_{xy} & \xi_{xz} \\ & \xi_{yy} & \xi_{yz} \\ & & \xi_{zz} \end{bmatrix}$$

$$Z.E.M. = (8-3) - (3 \times 1) = 2$$

یعنی هر کدام از این اشیاء داخل در دو حالت یک کرش نشان می‌دهد.



به طور مشخصی در این حالت مقابل نقطه وسط

متوجه تغییر شکل (لان می شود) کرش می‌دهد.

تجهه $price of information$ با کم است.

$$n = 8$$

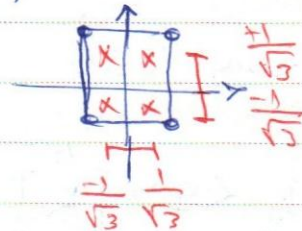
$$n_{r.b} = 3$$

$$n_t = 4$$

$$S = 3$$

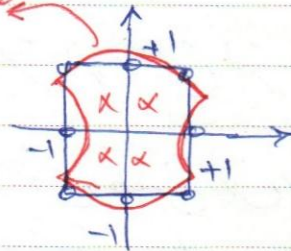
$$Z.E.M. = (8-3) - (3 \times 4)$$

$$= -7$$



خفگی شده در واقع یعنی Z.E.M. ندارد

Hour-Glass Mode



$$n = 8 \times 2 = 16$$

$$n_{r.b} = 3$$

$$n_t = 2 \times 2$$

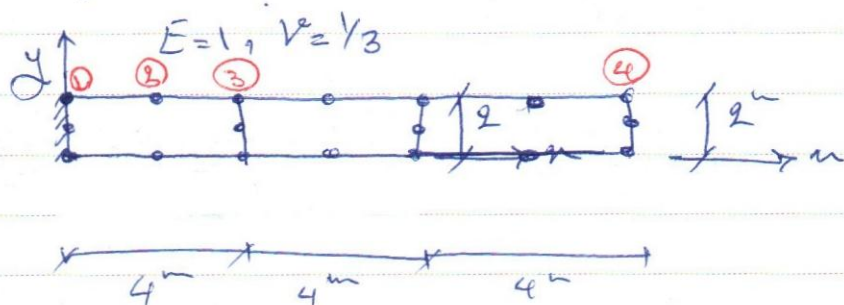
$$S = 3$$

$$Z.E.M. = 1$$

Quadratic serendipity

در 10 حالت یکی از Z.E.M. است (ای بارش) $\rightarrow Z.E.M. = 10$

در برخی موارد $\text{price of information}$ باعث کاهش قیمت است به سبب ادغام نقاط



خُشال،

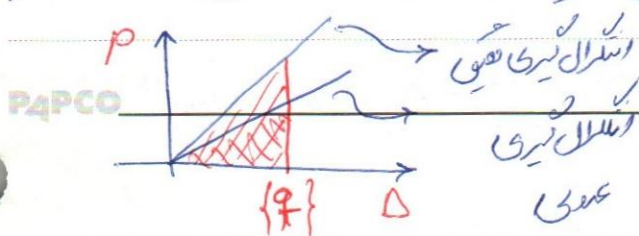
	σ_n at ①	σ_n at ②	σ_n at ③	Dist ④
exact	108.0	90.0	72.0	-0.5299
2x2 integration	108.0	90.0	72.0	-0.5114
3x3 integration	105.5	90.9	74.5	-0.5084

$$\frac{1}{2} \langle q \rangle [\hat{K}] \{q\} \underset{\text{numerical}}{\leq} \frac{1}{2} \langle q \rangle [\hat{K}] \{q\} \underset{\text{exact}}{}$$

حرف و آوازه می‌توان گفت که سبب انتقال با تفاوت اطلاعات کمتر انرژی درونی کمتر و انرژی درونی کمتر

می شود در سه جریان لغزشی سطحی در حالت عمودی مایل باشد و این کاهش در لغزش

سختی برادران کرده جواب دایه محالیت نفسی نزدیک می شود به عبارت دیگر price of int.



تیمدی شوند. ایندونه میت که هر چه تعداد نوس پوینت کاملاً بیشتر باشد جواب دقیق تر می شود.
 در بهترین حالت این است که اولین حالتی که ZEM آن برابر صفر باشد. بهترین حالت آن
 به عبارت دیگر تابعی که دچار ZEM نشود $Reduced\ Integration$ ارجحیت دارد.

قفل شدن Locking

اگر تغییر شکل های منتظر جلی کمتر از مقدار پیش بینی باشد باز برادران مشق نمی نمایند
 ایجاد نشود به آن Locking گویند. دلیل آن استفاده از اکانی $non-conformity$ است.
 دلیل دیگر می باشد پس اشیاء در شرایطی زهلتی شده و $\nu = 0.5$ به همین خاطر نرم افزارها
 می ندارند ν هم در قوه شود. حالت دیگر کلی شکل دهی پورها هستند. چون پورها
 سختی فشاری بالا و سختی کششی کمی دارند. تغییر حجم می دهند.

برای رفع این مشکل هبر است هیچ وقت ضریب بواسون را برابر نیم نگیریم. روش دیگر از
 $Reduced\ Integration$ استفاده شود.

علت Locking این است که ما معمولاً از $displacement$ استفاده می کنیم و شکل
 $Formulation$

Locking، قفل در $displacement$ اتفاق می افتد و دلیل آن استفاده از $displacement$
 $Formulation$

این است که باید برای این سیر از حالت ϵ گذشت.

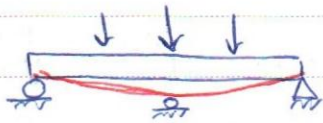
تحلیل غیر خطی Non-linear Analysis

Material non-linearity

۱- غیر خطی بودن رابطه تنش-کرنش

Geometric non-linearity

۲- تغییر شکل های زیاد سازه



۳- تغییر شرایط حزی (غیر خطی بودن سیمابشی)

۴- غیر خطی بودن نیروی

در واقع شرایط ۲، ۳ و ۴ زمانی اتفاق می افتد که تغییر شکل های زیاد سازه ای اتفاق بیفتد.

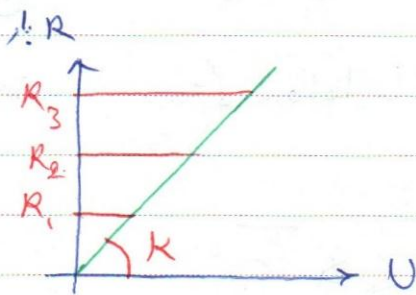
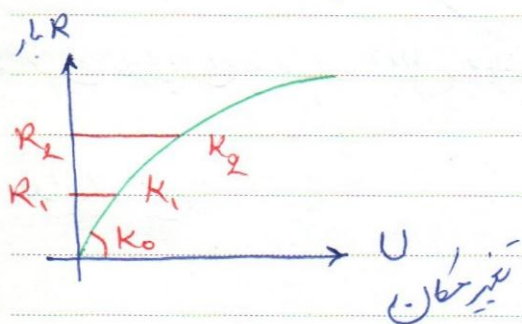
کتاب آقای Bate

وضع تنش و کرنش	فرمول بندی	نوع	وضع تحلیل غیر خطی
تنش و کرنش محدود	معمول با لحاظ کردن رابطه غیر خطی $\sigma - \epsilon$	تغییر مکان ها و کرنش ها کوچک و فقط رفتار مصالح غیر خطی	غیر خطی بودن مصالح
تنش بزرگ	تئوری کلی T.L.F	جابجایی ها و دوران بزرگ، کرنش ها کوچک	تغییر مکان ها بزرگ
کرنش بزرگ	تئوری به هم آمیخته U.L.F	تنش ها و کرنش ها کوچک	ولی کرنش ها کوچک
تنش بزرگ	تنش بزرگ	رفتار مصالح معمولی با کرنش بزرگ	
Almansi			

Proia-Kirshoff	نقشه	TCF	الانرژی کلی	جابجایی ها در دران بزرگ	غیر خطی
Greene Lagrange	کشش			کشش ها بزرگ	
Jahmann stress			الانرژی به هنگام	رفتار مصالح غیر خطی	کشش ها بزرگ
Velocity strain					

$$[K]\{U\} = \{R\}$$

در مکانیک جامدات



غیر خطی

خطی

$$[K(U)]\{U\} = \{R\}$$

در عمل برای قاب به غیر خطی را بر اساس معنی از بار بدست می آوریم

$$[K]\{\Delta U\} = \{\Delta R\}$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta U$$

$$\{ \epsilon_e \} = [B_e] \{ u_e \} \Rightarrow \{ \sigma_e \} = [D_e] \{ \epsilon_e \}$$

$$\Rightarrow \{ r_e \} = \int_{V_e} [B_e]^T \{ \sigma_e \} dV_e$$

در سائل خطی $\{R\} - \sum \{r_e\} = 0$

در سائل غیر خطی $\{U\} = \{R\} - \sum \{r_e\} \neq 0$

Unbalanced load vector

بجایگزینی آخرین بردار نامعین بوده هیچ وی اثر خفای قابل توجهی بود دوباره همان بارها به صورت بار مجازی به سازه اعمال می‌کنیم و دوباره بردار Unbalanced Load Vector

$\|U\| \leq 8 \cdot Tol$

دوباره از اول

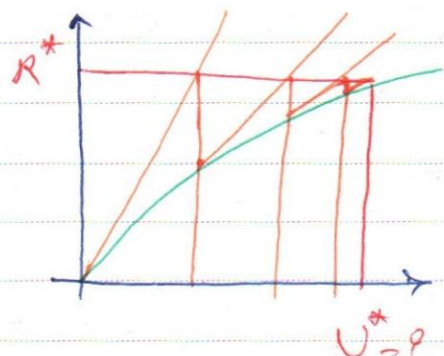
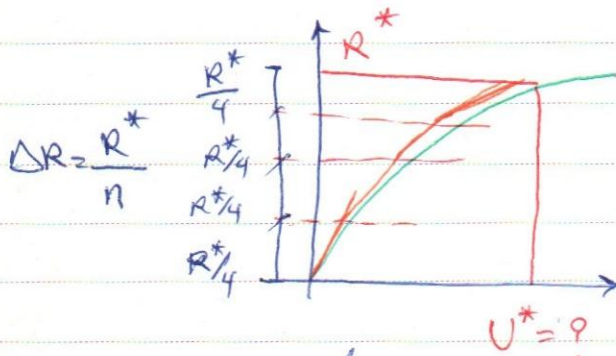
Incremental procedure

خطی

در سازه خطی در حل
سائل غیر خطی

Iterative procedure

تکراری



Incremental procedure

Iterative procedure

$$\{R\}^{n+1} - \{F\}^{n+1} = \{\psi\}^{n+1}$$

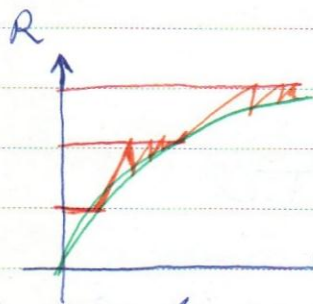
بردار منفرجه در فضای

بردار منفرجه در فضای

متصل براس منفرجه
المان

$$\{\psi\}^{n+1} = \{R\}^{n+1} - \{F^n + K^n \cdot \Delta U\} \neq 0$$

تکرار هم قبلی با اندازی



همواره در نرم افزارها از ترکیب تکرار و نحو استفاده می کنند.

در مسائل غیر خطی همیشه Incremental را برای تحلیل بار

استفاده می شود و در هر Increment به صورت تکرار خطی

به محلول می رساند در حالی که در مسائل خطی بار را به صورت یکباره در می کنند.

$$\|\psi\| < S.Tol$$

specify tolerance

می باید در هر مرحله سختی را به دست آورد و سختی سختی می بایست در هر گام به هم گام نزدیک

به آن solution strategies نوین در روش های مختلفی برای آن وجود دارد.

۱- روش نگار مستقیم (picard)

$$[K]\{U\} + \{R\} = 0$$

در هر گام نام بردار تغییرات در آن گام قابل دست آوردن است.

$$U^n = -[K(U^{n-1})]^{-1} \cdot \{R^n\}$$

در گام نام بارگذاری:

$$\Delta U^n = -[K(\Delta U^{n-1})]^{-1} \cdot \{\Delta R^n\}$$

به صورت غوی

$$e = (\Delta U^n) - (\Delta U^{n-1})$$

$$\|e\| = \sqrt{e^T \cdot e} \leq S.Tol$$

این روش علی رغم straightforward بودن محو خطای خوبی ندارد و معمولاً خطا دارد

پیغام خطا داده می شود.

۲- روش نیوتن - رافسون

$$[K]\{\Delta U\} + \{R\} = 0$$

$$\psi(\Delta U) = K(\Delta U) \cdot \Delta U + R = 0$$

$$\frac{d\psi(\Delta U)}{d(\Delta U)} = K(\Delta U) + \frac{\partial K(\Delta U)}{\partial(\Delta U)} \cdot \Delta U$$

قابل صرف نظر

Taylor ب : $\psi(\Delta u^{n+1}) = \psi(\Delta u^n) + \frac{d\psi(\Delta u)}{du} \cdot \delta(\Delta u^n) + \dots$

$$\delta(\Delta u^n) = -[K(\Delta u^n)]^{-1} \cdot \psi(\Delta u^n)$$

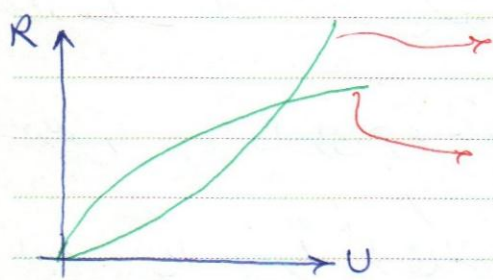
$$\delta(\Delta u^n) = -[K(\Delta u^n)]^{-1} \cdot [K(\Delta u^n) \cdot (\Delta u^n) + \Delta R^n]$$

$$\delta(\Delta u^n) = -\Delta u^n - [K(\Delta u^n)]^{-1} \cdot (\Delta R^n)$$

$$\Delta u^{n+1} = \Delta u^n + \delta(\Delta u^n)$$

این روند باعث می شود که 80 تا 90 درصد مواقع جواب ها عملاً می شوند.

در سازه های خالی که خاک می ریزیم و تیرهای کششی می کشیم و سازه ها می کشند به جای کاهش



تیرهای در خاک ها
خاک ها محاذی و
دیگر مصالح منفرجه

افزایش می یابد

درش فوق جواب است و جواب می دهد اما حجم محاسبات بسیار می شود و هزینه محاسباتی

لا افزایش می دهد. در غیر این صورت ما هم می توانیم این روش را به شکل ساده تر و ساده تر

کار از مصالح به جای تیر، استفاده می شود این روش را به شکل ساده تر.

۳ روش N-R اصلاح شده

$$K(\Delta u^n) = K(\Delta u^0)$$

$$\delta(\Delta u^n) = - [K(\Delta u^0)]^{-1} \cdot [K(\Delta u^0) \cdot (\Delta u^n) + (\Delta R^n)]$$

$$\delta(\Delta u^n) = -(\Delta u^n) - ([K(\Delta u^0)]^{-1} (\Delta R^n))$$

$$\Delta u^{n+1} = \Delta u^n + \delta(\Delta u^n)$$

در این روش برخلاف روش اصلی ما مائیس سختی خودمان را در هر گام به هنگام نمی کنیم
تعداد نقاط میانه شده بیشتر می شود ولی دیگر مائیس سختی در بارها به واسطه اصلاح نمی شود
- در بعضی از نرم افزارها برای هر غ مائیس سختی را آپدیت می کنند ولی در داخل هر غ دیگر
آپدیت نمی کنند و صرفاً یکبار می کنند.

Quasi-Newton methods.

۴ روش های شبه نیوتنی

از روش هنگامی استفاده می شود که مخیر خطی بودن ما متفاوت نباشد مثل تیرا کم در خاک
بر خلاف روش تانفرانتی که محاس حساب می کند در این روش ویرا حساب می کنیم انفرانت روش
تانفرانتی استفاده شود وقتی مصالح نرم می شوند تانفرانت حس می شود مشکلی که ایادی شود
آن است که مائیس سختی ما دیگر وادون نمی شود.

Davidon

Inverse Brayden

BFGS

DFP

B.F.G.S روش

Quasi-Newton

درون سائیس سوختی بین دو تکرار i لم ، $(i-1)$ لم به نوارسانی می شود

$$\delta^{(i)} = \begin{bmatrix} t+\Delta t \\ U^{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t+\Delta t \\ U^{(i-1)} \end{bmatrix}$$

$$\gamma^{(i)} = \begin{bmatrix} \Delta R^{(i-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta R^{(i)} \end{bmatrix} \quad \text{out-of-balance force}$$

$${}^{t+\Delta t}_{K^{(i)}} \cdot \delta^{(i)} = \gamma^{(i)}$$

$$\Delta \bar{U} = \begin{pmatrix} {}^{t+\Delta t}_{K^{-1}} \end{pmatrix}^{i-1} \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{R} - {}^{t+\Delta t}_{F^{(i-1)}} \end{bmatrix}$$

معمول -

$${}^{t+\Delta t}_{U^{(i)}} = {}^{t+\Delta t}_{U^{(i-1)}} + B \Delta \bar{U}$$

معمول -

ضریب انکسار

$$\Delta \bar{U}^T \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{R} - {}^{t+\Delta t}_{F^{(i)}} \end{bmatrix} \leq \text{S.Tol} \cdot \Delta \bar{U}^T \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}_{R} - {}^{t+\Delta t}_{F^{(i-1)}} \end{bmatrix}$$

$${}^{(t+\Delta t)}_{K^{-1}}^{(i)} = A^{(i)T} \begin{pmatrix} {}^{t+\Delta t}_{K^{-1}} \end{pmatrix}^{i-1} A^{(i)}$$

$$A^{(i)} = I + V^{(i)} \cdot W^{(i)T}$$

I : Identity mtr.

$$V^{(i)} = - \left(\frac{\delta^{(i)T} \cdot \gamma^{(i)}}{\delta^{(i)T} \cdot \left(\begin{smallmatrix} t+\Delta t & i-1 \\ K \end{smallmatrix} \right) \delta^{(i)}} \right)^{1/2} \cdot \left(\begin{smallmatrix} t+\Delta t & \\ & K^{(i-1)} \end{smallmatrix} \right) \delta^{(i)} - \gamma^{(i)}$$

$$W^{(i)} = \frac{\delta^{(i)}}{\delta^{(i)T} \cdot \gamma^{(i)}}$$

$$\psi = R - F$$

معیار هدرای در تحلیل کمر غیر خطی

$$\|\Delta U^{(i)}\| = [\Delta U^{(i)T} \cdot \Delta U^{(i)}]^{1/2}$$

(1) معیارهای مبتنی بر تغییر مکان (معمولاً)

(unbalanced Force)

(2) بر نیروی متقابل نشده (نیروی پسماند)

(3) معیارهای مبتنی بر انرژی

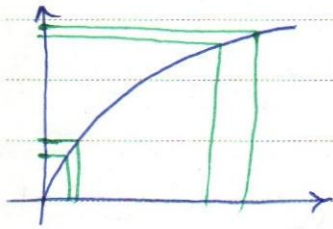
$$\frac{\|\Delta U^{(i)}\|}{\|^{t+\Delta t} U\|} \leq 8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-4} \cdot \text{Tol}$$

$$\frac{\|^{t+\Delta t} R - F^{t+\Delta t(i)}\|}{\|^{t+\Delta t} R - F\|} \leq S \cdot \text{Tol}$$

$$\Delta E^{(i)} = \left(\begin{smallmatrix} t+\Delta t & \\ & \Delta U^{(i)} \end{smallmatrix} \right)^T \cdot \left(\begin{smallmatrix} t+\Delta t & \\ & R - F^{t+\Delta t(i-1)} \end{smallmatrix} \right)$$

$$\Delta E^{(i)} \leq S \cdot \text{Tol}$$

معیار تغییر شکل معمولاً معکوس و خطی است اما در ابتدای انتهای کار ممکن است مثل بارش در ابتدا ممکن است همیشه اتفاق افتد و در آخر ممکن است هرگز اتفاق افتد.

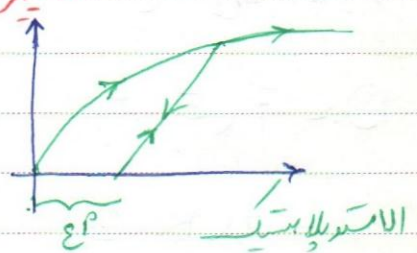
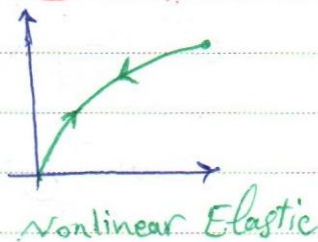
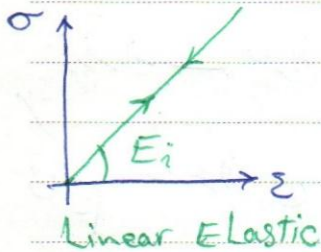


که در این حالت معمولاً از معیار دوم استفاده می شود.

رفتار تیرال غیر خطی

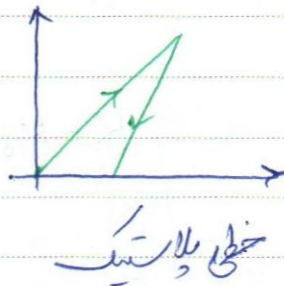
تکلیف های غیر خطی

تغییرات هندسه سازه بزرگ است



$$\sigma = D \cdot \epsilon$$

تغییرات شکل
 ϵ, E



حامل هوک تکمیل یافته

حامل الاستیک کوشی

حامل هاینر الاستیک

حامل هاینر الاستیک

آ رفتار غیر خطی
الاستیک

II. رفتار غیر خطی الاستیک

III. رفتارهای تابع زمان Time dependent

رفتارهای دایکوتز ، رفتارهای فرشی ، رفتار خاک کا حلی نرم

۱- مدل هوک تعمیم یافته

$$\sigma_{ij} = B_{ij} + D_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}$$

ماتریس تنش کا لوله یا برجا

در ژئوتکنیک معمولاً مالز K و G استفاده

$$D = f(E, \nu)$$

بی اینم و ساهمولا این دو پارامتر متفاوت در

$$= f(K, G)$$

تقریباً اینم

$$= f(\mu, \lambda)$$

هنا G ← ضریب لانه

تغیلات ضریب الاستیک خاک و سفت در عمق

$$K = K_0 \left(\frac{I_1}{3p_0} \right)^n$$

$$G = G_0 \left(\frac{I_1}{3p_0} \right)^n$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

G_0, K_0 = مقادیر K, G لوله یعنی در نزدیکی سطح زمین

هستند.

۲ مدل الاستیک کوکشی

$$\sigma_{ij} = \phi_0 \delta_{ij} + \phi_1 \delta_{ij} + \phi_2 \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj}$$

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Kronecker} \\ \text{Delta} \end{array}$$

$$\phi_0 = a_1 I_1' + a_2 I_1' I_2' + a_3 I_2'$$

I' ها: ناخنیز درش

$$\phi_1 = a_4 + a_5 I_1'$$

$$\phi_2 = a_6$$

اگر از ϕ_2 صرف نظر شود و کوکشی مرتبه لول اگر صرف نظر نشود و کوکشی مرتبه دوم و مدل کوکشی مرتبه لول مشابه هوک تعمیم یافته است.

۳ مدل هایبر الاستیک

معمولاً برای مصالحی به کار می برند که در کرنش های بسیار بالا هم همچنان الاستیک می مانند

مثل لاستیک ماشین (Robber) که ۱۰۰٪ تا ۲۰۰٪ هم همچنان الاستیک

می مانند. در این مدل به صورت انرژی بیان می شود.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$= \frac{\partial U_0}{\partial I_1'} \cdot \frac{\partial I_1'}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial U_0}{\partial I_2'} \cdot \frac{\partial I_2'}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial U_0}{\partial I_3'} \cdot \frac{\partial I_3'}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\frac{\partial I_1'}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial I_3'}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj}$$

$$\frac{\partial I_2'}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \underbrace{\frac{\partial U_0}{\partial I_1'}}_{\phi_1} \cdot \delta_{ij} + \underbrace{\frac{\partial U_0}{\partial I_2'}}_{\phi_2} \cdot \varepsilon_{ij} + \underbrace{\frac{\partial U_0}{\partial I_3'}}_{\phi_3} \cdot \varepsilon_{im} \varepsilon_{mj}$$

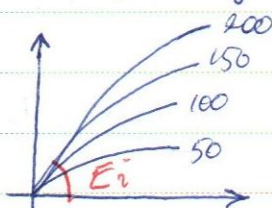
با محالذاری

اگر به جای مشتق $\frac{\partial U_0}{\partial I_1'}$ از روابط ساده نامتغیر کرنش استفاده شود می شود مدل کوئینز وای لایر به انرژی رابط داده شود می شود هاپر الاستیک

4- مدل هاپر الاستیک

برای مصطلحی که به میرانش وابسته patch dependent می باشد از این مدل استفاده می کنند.

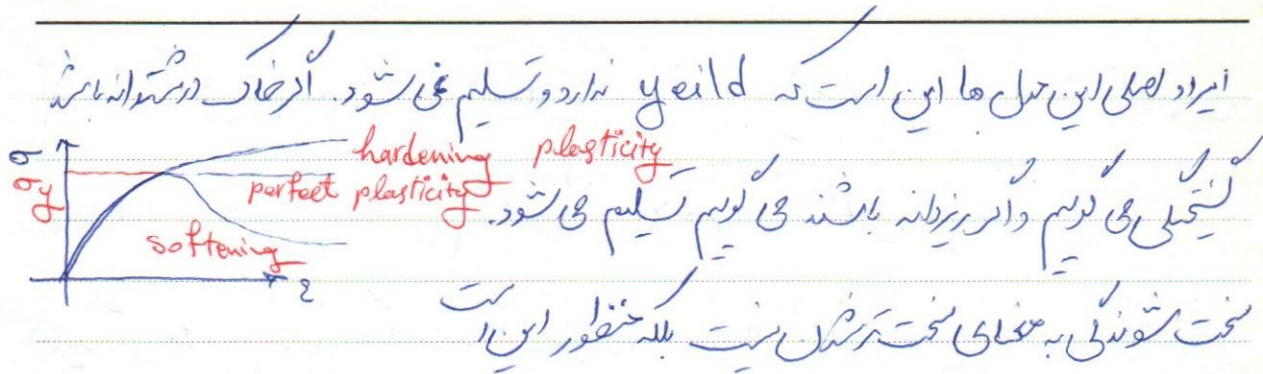
$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}(\sigma_{mn}) \cdot d\varepsilon_{kl}$$



Hyperpola مدل

Duncan & Chang مدل هتروپلا با بار سبب

مطرح کرده اند بهترین مدل الاستیک غیر خطی خاک است



که با ادامه بارگذاری تفاوت لقراض می یابد. این مفاهیم در ابتدا برای رفتار فلزات مطرح شد.

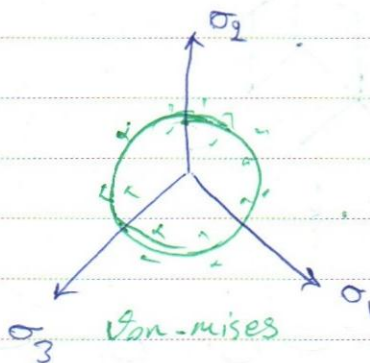
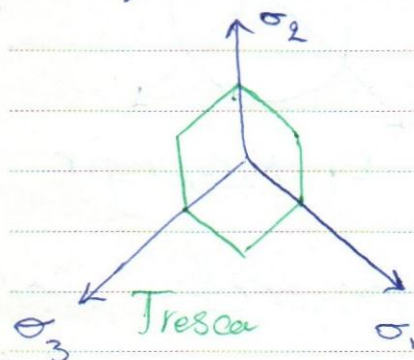
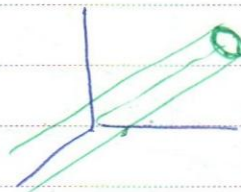
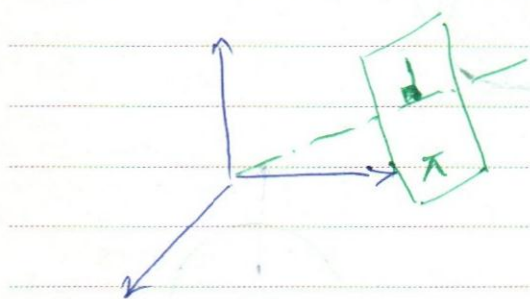
که برای مبنی مدل های فشاری پیشنهاد شد.

تعریف تابع تسلیم: نقطه تنش کافی نیست چون تانگنسی های تنش متفاوت

نقاط تسلیم متفاوتی دارند. بنابراین نیاز به یک تابع

تسلیم داریم در فضای سه بعدی. $F(\sigma) = 0$

بدلی
رقماری
الاستوپلاستیک



$F(\sigma) < 0$ الاستیک

$F(\sigma) = 0$ تسلیم

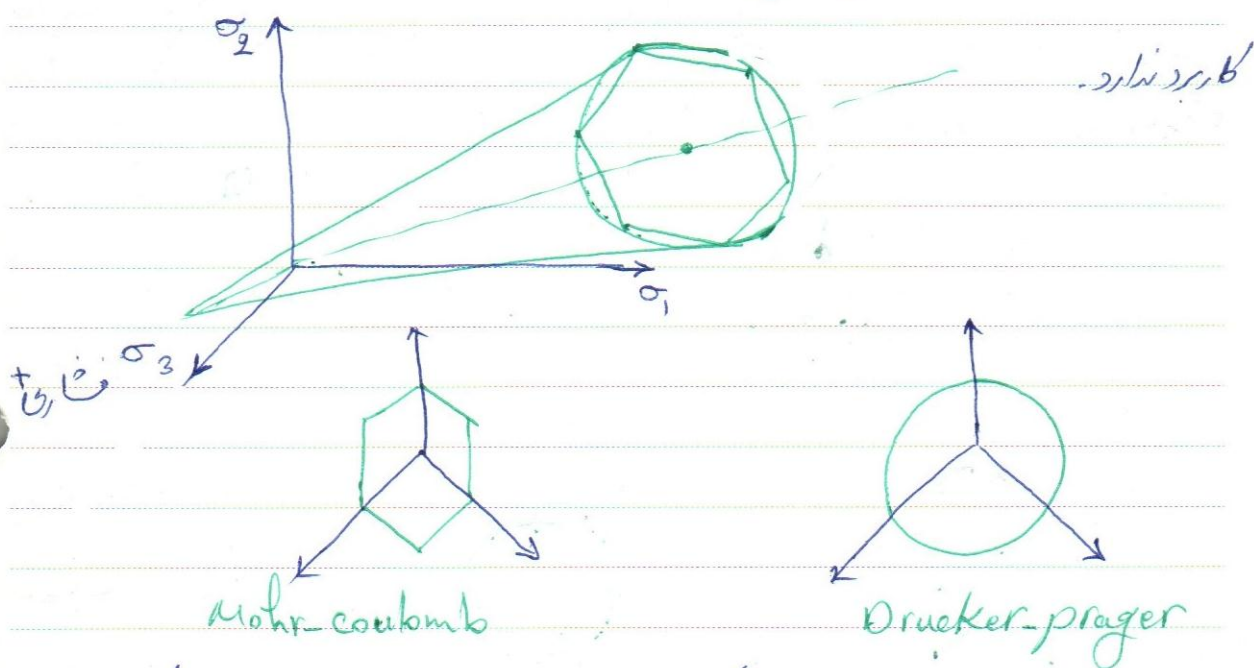
$F(\sigma) > 0$ Non-permissible

برازش از یک سری نتایج
آرشی

اگر بعد از تنش تسلیم تنش همچنان بزرگ شود. سطح تسلیم هم بزرگ می شود تا همچنان بر روی آن قرار داشته باشیم. در $F(0) > 0$ امکان ندارد.

در نتیجه اگر بعد از تسلیم بزرگ شده سخت شده است اگر ثابت ماند perfect plasticity می شود اما اگر کوچک شده softening - plasticity می شود.

در مکانیک خاک سعی خواهیم نمود مدل داشته باشیم که تحت تنش ها تغییر کند. سطح تسلیم بزرگتری داشته باشد. به همین دلیل مدل ها Tresca, Von-Mises در خاک ها



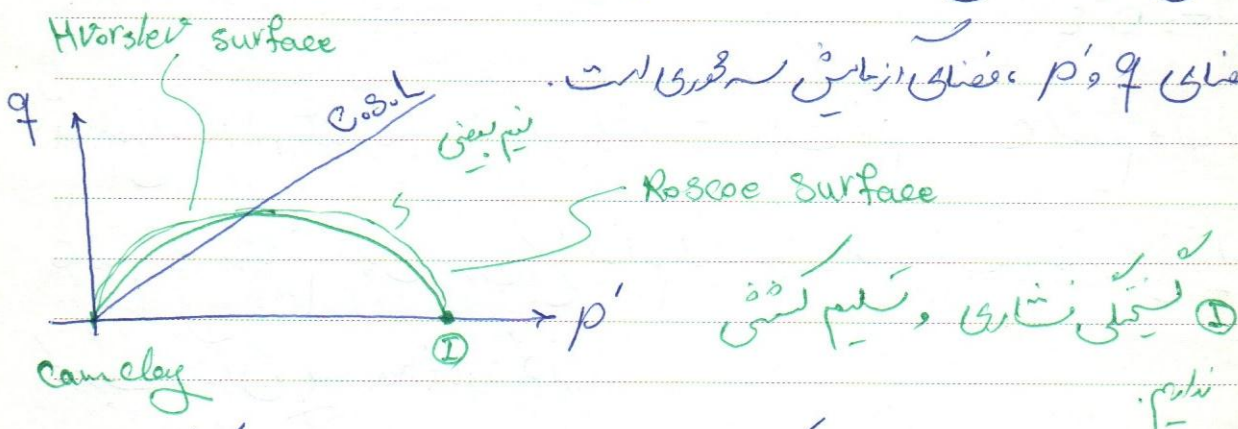
از مشکلات مدل هوپر و در این است که این دو مدل تحت فشار سه جانبه هرگز yield نمی کنند. در حالی که بر حواد استیسا مثل UU اگر خاک تحت فشار سه جانبه قرار دهیم خاک تسلیم می شود. هر دو مدل، مدل الاستوپلاستیک perfect هست. در واقع در اینجا Hardening و Softening در آنها در نظر گرفته نشده است.

tension
cut-off
yield stress

yield کردی توں تھوڑا yield

کرده و از ریشه Gauss در سطح جابجایی تعدادی نویسم و در برش داده می کرده است
که در واقع 90 درصد مواقع خطا در برش داده می کند و در حالت دیگر احتمال کمی دارد.

فضای q و p ، فضای الزامات سه محوری است.



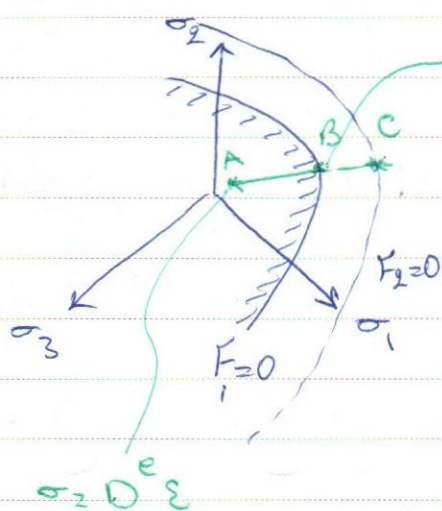
بعضی اهل اصلاح میگویند که این دروغ لغو است که به آن
کم‌طی اصلاح میگویند. به جای او معنی از یک نیم یعنی استفاده کردید.

تعریف قانون جریان

تعریف تابع تسلیم

مدل های رفتاری
الاستوپلاستیک

تعریف قانون سخت شونده: در این حالت انتخاب نش

وابسته نیست و به k نیز وابسته است. $F(\sigma, k) = 0$ k تابعی از ϵ^p یا k پلاستیک $d\epsilon^p_{ij}$ در تقریرتبدیل $F_1 - F_2$ محور یا بارها $d\epsilon^p_{ij}$ یا ϵ^p_{ij} بیان می شود.

از مصالح perfect plastic باشد از B به C حرکت کنیم و به C رسیدیم دوباره به C به B برگردانیم. چون بیرون سطح تسلیم است پس تعریف نشده است. یا اگر سطح تسلیم کوچک شود به آن Softening گویند.

قانون جریان: که به سالی گویند که بعد از تسلیم جهت جریان پلاستیک به لازم است.

$$d\epsilon_p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

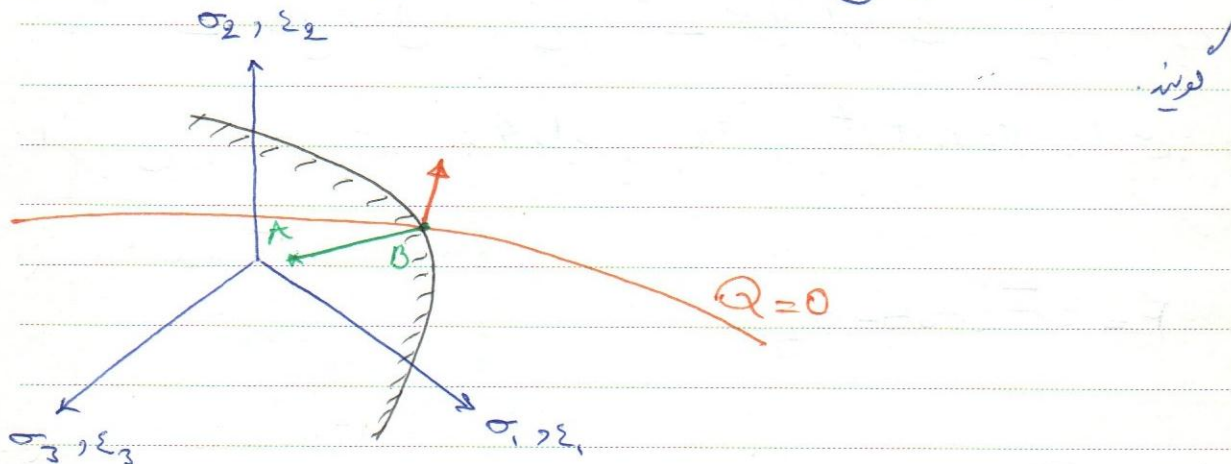
 λ یک عدد اسکار که منحرف از پلاستیک می دهد $\frac{\partial Q}{\partial \sigma}$ جهت جریان پلاستیک یا جانشین می دهد.

در واقع $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_n}$ عمود بر سطح Q است. که λ مقداری است و مانند لامل آن را می دانیم.

$$d\varepsilon_{pn} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_n}$$

که کرنش پلاستیک می توان در هر سه جهت باشد.

Q نیز مثل F یک تابع است در فضای تنش ها نه بر آن plastic potential



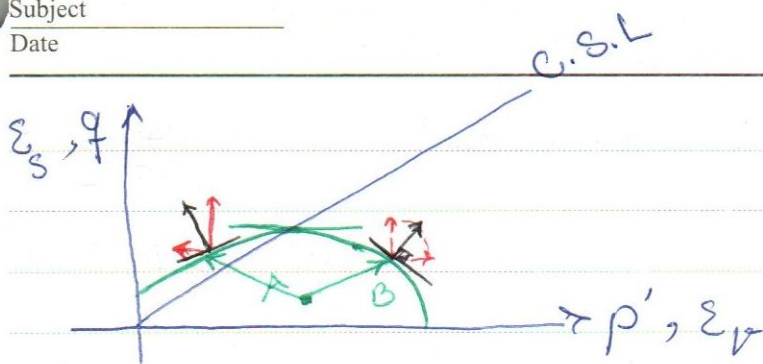
در آزمایشگاه چندین نمونه آزمایش کرده حتی F را با بارزایش یک خط برای محاسبه نمونه های آزمایش بدست می آوریم. که برای Q نیز دوباره باید آزمایش کرد تا جهت کرنش پلاستیک را بدست آورد.

$$\text{if } Q = F \rightarrow d\varepsilon_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad \text{Associated Flow rule}$$

$$\text{if } Q \neq F \rightarrow d\varepsilon_p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad \text{Non-Associated Flow rule}$$

تجربه نشان داده که در فلزات $Q = F$ خطای زیادی ایجاد نمی کند ولی در مصالح شیشه ای و پلاستیک

خطای محقق نیست.



معمولاً در خاک است و حاصل از کرنش پلاستیک معمولاً کرنش از $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ به همین خاطر جریان غیر همراه کرنش است. هر 4 مدل زیر elasto perfect plastic است.

(1) Tresca :

$$F = 2\bar{\sigma} \cos \theta - \sigma_y = 0$$

(2) Von-Mises :

$$F = \sqrt{3} \bar{\sigma} - \sigma_y = 0$$

(3) Mohr-Coulomb :

$$F = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} \cos \phi - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \sin \phi \sin \theta - c \cos \phi = 0$$

(4) Drucker-Prager :

$$F = 3\alpha' \cdot \sigma_m + \bar{\sigma} - k = 0$$

σ_y و تفاوت کرنش یا تنش تسلیم در راستای کرنش تک محوری

$$J_{2D} = \frac{1}{2} [(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] \quad \bar{\sigma} = \sqrt{J_{2D}} \quad : \bar{\sigma}$$

$$s = \sigma_n - \sigma_m$$

$$S_y = \sigma_y - \sigma_m \quad S_z = \sigma_z - \sigma_m$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{\sigma^3} \right) \quad -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

→ Lode angle

$$\alpha' = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

$$d\varepsilon = \bar{D}^{-1} \cdot d\sigma + \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

! ضرب طرفین با \bar{D} :

$$\bar{D} d\varepsilon = \bar{D} \bar{D}^{-1} \cdot d\sigma + \bar{D} \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

$$\rightarrow d\sigma = \bar{D} \cdot d\varepsilon - \bar{D} \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

$$dF(\sigma, k) = 0$$

براس شرط سازگاری در پلاستیک

$$dF(\sigma, k) = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \cdot d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0$$

$$dF(\sigma, k) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0$$

$$A = - \frac{\partial F}{\partial k} \cdot \sigma^T \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

$$d\varepsilon = D^{-1} \cdot d\sigma + \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

$$0 = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma - A \lambda$$

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D^{-1} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \\ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T & -A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \lambda \end{Bmatrix}$$

perlu, $d\sigma$ digunakan!

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \lambda - A \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot D \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + A \right]^{-1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot D \cdot d\varepsilon$$

$$\Rightarrow d\sigma = \begin{bmatrix} D - \frac{D \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + A} \end{bmatrix} d\varepsilon$$

$$d\sigma = D^{ep} d\varepsilon$$

اگر سخت شوندگی نداشته باشیم: $A=0$

$$d\sigma = \left[D - \frac{D \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial Q}{\partial \sigma}} \right] d\varepsilon$$

اگر فرض شود: $Q=F$

$$d\sigma = \left[D - \frac{D \frac{\partial F}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}} \right] d\varepsilon$$

ماتریس D الاستیک در حالت کلی نامتقارن است ولی اگر سخت شوندگی نداشته باشیم و $F=Q$ باشد ماتریس سختی متقارن می شود.

برای اینکه در تئوری Q با F زمین تا آسمان تفاوت نداشته به جای ϕ ، ψ

قرار می دهیم مثلاً در $plaxis$: $\psi = \phi - 30^\circ$ استفاده می شود.

هرچه مقدار دایره های مغزبزرگتر باشد و ماتریس متقارن باشد میزان محافظه کاری کمتری اشغال می کند و سرعت پیرازش افزایش می یابد.

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \cdot \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma}$$

دایره کشید: ثابت است و بستنی به حل رفتاری ندارد. سه دایره کشیدند بسته به حل ها

رفتاری متفاوت فرق می کنند.

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = \frac{1}{2J_2} \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{yz} \\ 2\tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} S_y S_z - \tau_{yz}^2 \\ S_x S_z - \tau_{xz}^2 \\ S_x S_y - \tau_{xy}^2 \\ 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - S_x \tau_{yz}) \\ 2(\tau_{xy} \tau_{yz} + S_y \tau_{xz}) \\ 2(\tau_{yz} \tau_{xy} + S_z \tau_{xy}) \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \sigma^{-2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\frac{\partial F}{\partial \sigma_3}$	$\sigma = \frac{\partial F}{\partial \sigma_2}$	$\frac{\partial F}{\partial \sigma_m}$	Model
$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\cos 3\theta}$	$2 \cos \theta (1 + \frac{1}{2} \sin 3\theta)$	0	Tresca
0	$\sqrt{3}$	0	Von-Mises
$\frac{\sqrt{3} \sin \theta + \sin \phi \cdot \cos \theta}{2 \cos 3\theta}$	$\frac{\cos \theta}{2} [(1 + \frac{1}{2} \sin 3\theta) + \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} (\frac{1}{2} \sin 3\theta - \frac{1}{2})]$	$\sin \phi$	Mohr-Coulomb
0	1.0	$3\alpha'$	Drucker-Prager

با توجه به این روابط D^{ep} تابع تنش است و با تغییر تنش ها $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ حاصل می شود همان
 می شود و در نتیجه سختی الاستوپلاستیک وابسته به تنش تغییر می کند.

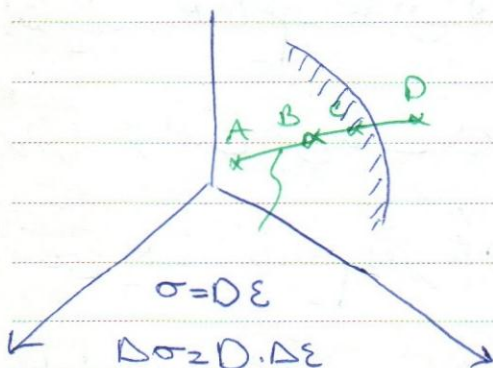
تصادفی داخل سطح تسلیم و قسم حائز سختی ما ثابت است چون E و ϵ ما ثابت است.

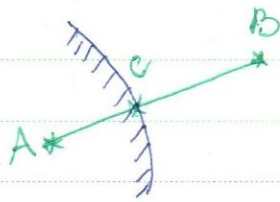
ممکن است در نقطه C با افزایش یک increment

از سطح تسلیم عبور کنیم و خارج سطح برای ما تعریف

نشده است بنابراین ما باید قبل قطع کردن سطح تسلیم

تسلیم کنیم.





$$F(\sigma_A) < 0$$

$$F(\sigma_B) = F(\sigma_A + \Delta\sigma) > 0 \rightarrow F(\sigma_A + R_p \cdot \Delta\sigma) = 0$$

برای پیدا کردن R_p از روش نصف کردن های مرحله به مرحله استفاده می کنیم.

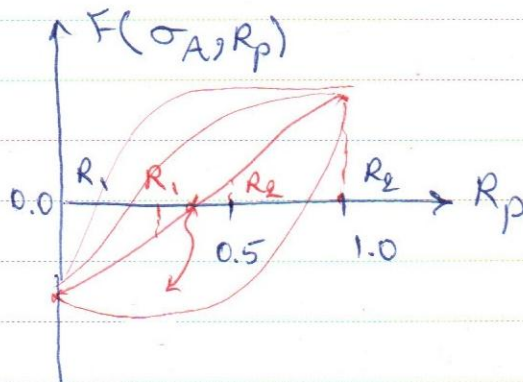
Interval Halving

$$R_m = \frac{R_1 + R_2}{2} \approx 0.5$$

$$F(R_m) > 0 \rightarrow R_2 = R_m$$

$$F(R_m) < 0 \rightarrow R_1 = R_m$$

$$F(R_m) \leq \text{S.Tol}$$



ابتدای R_1 داریم که F آن کوچکتر از F است و یک R_2 داریم که F آن بزرگتر از F است پس نصف آن دو را پیدا کرده اگر F بزرگتر از صفر R_m جدید را بجای R_2 قبلی قرار دهیم یا اگر F کوچکتر از صفر R_m را بجای R_1 بگذاریم با صحت بالا

انجام این کار R_p متناسب با $F=0$ است.

I. Kinematic Hardening

Isotropic : به این معنی است که وقتی به yield surface

رسیم؛ سطح تسلیم در همه جهت ها تنش یکسان بزرگ می شود.

در این مثال آن این است که فیلتر مصالحی که عموماً آن سروپر داریم

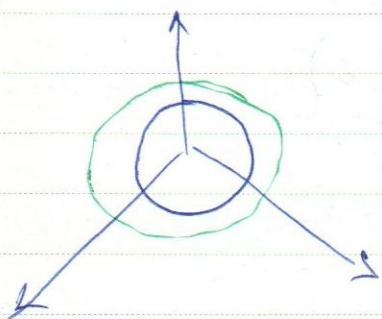
وقتی در فشار مثلاً در 100 KPa تسلیم شوند اگر جهت تنش عوض شود

آن مصالح در کشش مثلاً در 90 KPa تسلیم می شود که همان

Bauschinger effect فیلتر به عبارت دیگر در جهت فیلتر

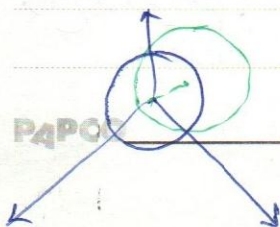
همان در همه جهت ها یک اندازه بزرگ می شود و به همین خاطر اثر باز فیلتر را نشان نمی دهد.

اما تحول پلاستیکی و کلد فرمینگ در این روش ساده تر است.



I به این معنی است که دایره تسلیم در جهت اعمال تنش در فضای تنش جایابی شود.

واقعاً شکل و ابعاد تسلیم ثابت است ولی جایابی شود.



مدل های رفتاری جدید هر دو این خصوصیات را برقرار می دارد.

حالت تنش ها از کرنش ها در تحلیل های غیر خطی:

وقتی دارم فرموده می باشد که می توانم در کرنش از سختی لا استیک استفاده کرده و باید سختی نیز می باشد شود.

$$\Delta \sigma = D^{ep} \Delta \epsilon$$

$$\Delta \sigma = \int_{\Delta \epsilon} D \cdot d\epsilon \quad \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \underline{D}(\sigma, \epsilon)$$

$$\frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta \epsilon} = D(\sigma^n, \epsilon^n)$$

Explicit Scheme

$$\frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta \epsilon} = D(\sigma^{n+1}, \epsilon^{n+1}) \quad \text{Implicit Scheme}$$

$$\Delta \sigma_i = \int_{\Delta \epsilon} D_{ij} d\epsilon_j \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, 6)$$

$$\Delta \sigma_i = \sum_{j=1}^n D_{ij}^p \left(\frac{\Delta \epsilon_j}{n} \right)$$

۱- در روابط غیر خطی ما بار را همیشه بصورت incrementally به کار می بریم و بار را هرگز بصورت دفعتی وارد نمی کنیم.

۳ تفاوت بین به روز رسانی و update کردن متغیرهای سختی است و تفاوت آن را به

صورت اعمال بار متغایر شده به صورت بار مجازی بر روی سازه جهت کاهش خطا

۴ قاب به عنوانش ها از کرنش ها

Stress calculation procedure:

Step #1: $\Delta \varepsilon^i = B \cdot (\Delta u^i)$

Step #2: $\varepsilon^i = (\varepsilon^{i-1}) + (\Delta \varepsilon^i)$

Step #3: $\Delta \varepsilon = (\varepsilon^i) - (\varepsilon)$

Step #4: $\Delta \sigma = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \Delta \varepsilon} D d\varepsilon$

Step #5: $\sigma = \sigma + \Delta \sigma$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = D(\sigma, \varepsilon)$$

$$\frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta \varepsilon} = D(\sigma^n, \varepsilon^n)$$

Explicit scheme

$$\frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta \varepsilon} = D(\sigma^{n+1}, \varepsilon^{n+1})$$

Implicit scheme

در اینجا مفهم زمان است بلکه مفهم طم بارگذاری است.

$$\Delta \sigma_i = \int_{\Delta \varepsilon} D_{ij} d\varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$$

$$\sigma = \sigma_i = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \rangle^T$$

$$\varepsilon = \varepsilon_j = \langle \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \rangle^T$$

$$\Delta \sigma_i = \sum_{l=1}^n D_{ij}^l \cdot \left(\frac{\Delta \varepsilon_j^l}{n} \right)$$

1) Forward Euler (Explicit Scheme):

$$n=1$$

$$\Delta \sigma_i = D_{ij}^L \cdot \Delta \varepsilon_j$$

$$\sigma_i^{L+1} = \sigma_i^L + \Delta \sigma_i = \sigma_i^L + D_{ij}^L \cdot \Delta \varepsilon_j$$

این روش ممکن است نوسانات کشش داشته باشد خصوصاً در محدوده‌های کوچک

2) Improved Euler

predictor: $\sigma_i^{*L+1} = \sigma_i^L + D_{ij}^L \cdot \Delta \varepsilon_j$

$$\sigma_i^{L+1} = \sigma_i^L + \frac{1}{2} (D_{ij}^L + D_{ij}^{*L+1}) \cdot \Delta \varepsilon_j$$

$$D_{ij}^* = D_{ij}(\sigma_i^{*L+1}) \quad , \quad \text{etc}$$

3) Runge - Kutta

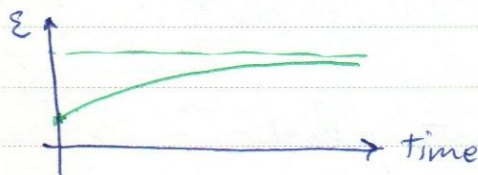
$$\sigma_i^1 = \frac{1}{n} D_{ij}(\sigma_i^L) \cdot \Delta \varepsilon_j$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \left[D_{ij}(\sigma_i^L + \frac{1}{2} \sigma_i^1) \right] \Delta \varepsilon_j$$

$$\sigma_i^3 = \frac{1}{n} \left[D_{ij}(\sigma_i^3) \right] \Delta \varepsilon_j$$

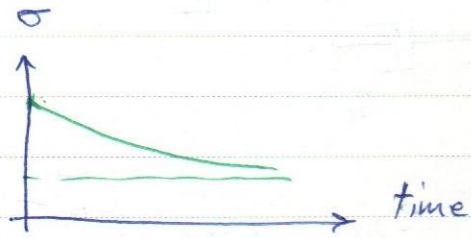
$$\sigma_i^{L+1} = \sigma_i^L + \frac{1}{6} (\sigma_i^1 + 2\sigma_i^2 + 2\sigma_i^3 + \sigma_i^4)$$

time-dependent



Creep

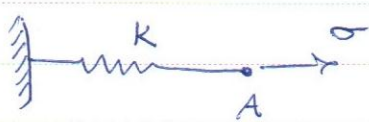
خزش



Stress Relaxation

Stress-strain-time relationships

مثلاً در بند یک رفتار خزشی اش در لبه به بیش حد جابجاست



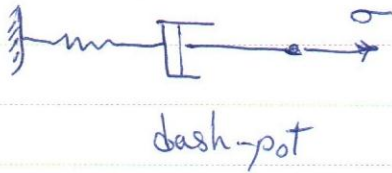
Elastic model $\epsilon^p = 0$



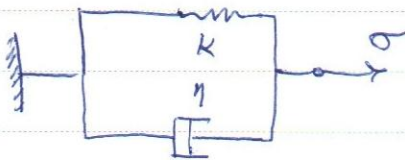
Frictional slider

Elastoplastic models

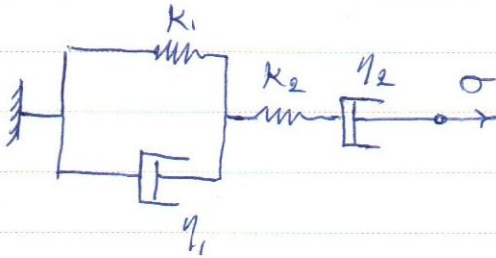
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma < \sigma_y \rightarrow \epsilon^p = 0 \\ \sigma = \sigma_y \rightarrow \epsilon^p \neq 0 \end{array} \right.$$



Visco elastic Model
(Maxwell)



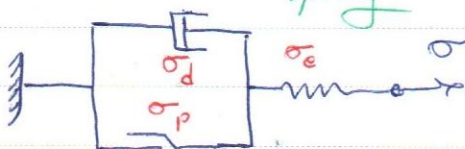
Visco elastic Model
(Kelvin, Voigt)



تخمینات فوقی که از جابجایی خزشی بند خوری به دست می آید

ϵ_{vp} elastic spring

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$$



ViscoElasto plastic

محاسبه ارسطالی مثل بهر حال باید به ارسطالی بالایی حل ها ارسطالی

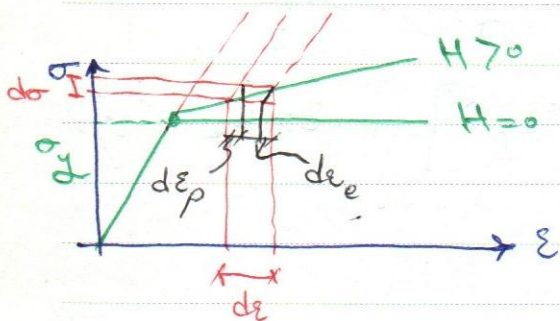
شده اند

$$\sigma_e = \sigma_{\text{واریس}} = E \cdot \varepsilon_e$$

if, $\sigma_p < \sigma_y \rightarrow \sigma_p = \sigma$ هم slider از تنش فارده

if, $\sigma_p \geq \sigma_y \rightarrow \sigma_p = \sigma_y$

اگر dashpot نداشته باشیم:



اگر dashpot وجود داشته باشد:

$$\varepsilon_{vp} \xrightarrow{\text{مطابقت}} \varepsilon_p$$

$$\sigma_p = \sigma_y + H \cdot \varepsilon_p \quad \sigma_d = \mu \cdot \frac{d\varepsilon_{vp}}{dt}$$

$$\sigma_{\text{واریس}} = \sigma_d + \sigma_p$$

قبل از تسلیم $\sigma_{\text{واریس}} = \sigma_e$

$$\sigma = \mu \cdot \frac{d\varepsilon_{vp}}{dt} \cdot (\sigma_y + H \cdot \varepsilon_{vp})$$

$$\sigma = \mu \cdot \frac{d(\varepsilon - \varepsilon_e)}{dt} + \left[\sigma_y + H(\varepsilon - \varepsilon_e) \right]$$

$$\sigma = \mu \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} - \mu \cdot \frac{d\left(\frac{\sigma}{E}\right)}{dt} + \sigma_y + H\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right)$$

اگر فرض کنیم رابطه E و μ ثابت است:

$$E\sigma = E\mu \frac{d\varepsilon}{dt} - \mu \frac{d\sigma}{dt} + E\sigma_y + H E \varepsilon - H \sigma$$

جملات جاری کرنش و تنش حالا جواب می‌دهیم:

$$H E \varepsilon + \mu E \frac{d\varepsilon}{dt} = H \sigma + E(\sigma - \sigma_y) + \mu \frac{d\sigma}{dt}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma [\sigma - (\sigma_y + H \varepsilon)] \rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{vp}$$

Fluidity parameter $= \frac{1}{\mu}$

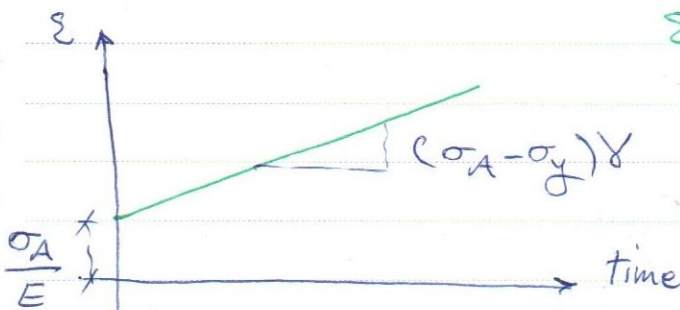
اگر تنش جاری ثابت باشد $\sigma = \sigma_A$

حل معادله دیفرانسیل با فرض ثابت بودن تنش:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_A}{E} + \frac{(\sigma_A - \sigma_y)}{H} [1 - e^{-H\gamma t}]$$

if Hardening, $H=0 \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_A}{E} + (\sigma_A - \sigma_y) \gamma t$

$$\varepsilon = a + b t$$



$$\text{if: } H > 0$$



مسئله باید الزاماً به صورت Time Marching حل شود.

Time Marching با هم‌های زمانی با استفاده از اطلاعات هم‌قبل :

incremental solution in Time (Δt)

توصیف شود این نحو با هم‌های زمانی بارگذاری متفاوت است در اینجا زمان حقیقی است در حالی که در بارگذاری برای زمان مجازی است.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_{vp}$$

$$\dot{\sigma} = D \cdot \dot{\epsilon}_e$$

نقطه آغاز رفتار دیکلواتیک بیشتر از زیر تسلیم می‌شود.

$$F(\sigma, \epsilon_{vp}) - F_0 = 0$$

$$F \gg F_0$$

معادله دقتی تسلیم می‌شود:

$$\dot{\epsilon}_{vp} = f(\sigma)$$

plastic
potential

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

perzyna

$$\phi(F) = e^{\mu \left(\frac{F-F_0}{F_0} \right)} - 1$$

$$\phi(F) = \left(\frac{F-F_0}{F_0} \right)^N$$

N و M مربوط به جنس

$$\phi(F) = \dots$$

تغییرات است که باید در از بار شرط
تعیین شود.

$$\Delta \epsilon_{vp} = \Delta t_n \left[(1-\theta) \dot{\epsilon}_{vp}^n + \theta \dot{\epsilon}_{vp}^{n+1} \right]$$

if $\theta = 0 \rightarrow$ Explicit scheme

if $\theta = 1 \rightarrow$ Implicit scheme

if $\theta = 1/2 \rightarrow$ Crank-nicolson scheme

H_n

بر اساس سطح تیلور می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\epsilon}_{vp}^{n+1} = \dot{\epsilon}_{vp}^n + \left. \frac{\partial \dot{\epsilon}_{vp}}{\partial \sigma} \right|_n \cdot \Delta \sigma^n + \dots$$

$$\dot{\epsilon}_{vp}^{n+1} = \dot{\epsilon}_{vp}^n + H^n \cdot \Delta \sigma^n$$

تغییرات تنش معادل t^{n+1} تا t^n
(Δt^n)

$$\Delta \varepsilon_{vp}^n = \dot{\varepsilon}_{vp}^n \cdot \Delta t^n + c^n \Delta \sigma^n$$

where: $c^n = \theta \Delta t^n \cdot H^n$

$$\Delta \sigma^n = D \cdot \Delta \varepsilon_e^n = D (\Delta \varepsilon^n - \Delta \varepsilon_{vp}^n)$$

$$B \cdot \Delta d^n \quad \leftarrow \quad \dot{\varepsilon}_{vp}^n \cdot \Delta t^n + c^n \Delta \sigma^n$$

$$\Delta \sigma^n = \hat{D}^n (B \cdot \Delta d^n - \dot{\varepsilon}_{vp}^n \cdot \Delta t^n)$$

where: $\hat{D}^n = (I + D c^n)^{-1} \cdot D = (D^{-1} + c^n)^{-1}$

Explicit case: $\Delta \sigma^n = D (B \cdot \Delta d^n - \dot{\varepsilon}_{vp}^n \cdot \Delta t^n)$

اگر از حالت جریان هم استفاده شود چون D همیشه متغیر است c^n هم متغیر می شود در نتیجه \hat{D}^n هم متغیر می شود.

معادله تعادل در سطح Δ الاستوپلاستیک در هر زمان t^n :

$$\int_V [B^n]^T \sigma^n dV + f^n = 0$$

$$\int_V [B^n]^T \cdot \Delta \sigma^n dV + \Delta f^n = 0$$

$$U = K^{-1} \cdot R$$

متغير غير متجانس Δt^n

$$\Delta d^n = [K_T^n]^{-1} \cdot \Delta v^n$$

$$\Delta v^n = \int_V [B^n]^T \hat{D}^n \cdot \dot{\epsilon}_{vp}^n \cdot \Delta t^n \cdot dV + \Delta f^n$$

$$K_t^n = \int_V [B^n]^T \cdot \hat{D}^n \cdot [B^n] dV$$

$$d^{n+1} = d^n + \Delta d^n$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + \Delta \sigma^n$$

$$\Delta \epsilon_{vp}^n = B^n \cdot \Delta d^n - \hat{D}^{-1} \cdot \Delta \sigma^n$$

$$\epsilon_{vp}^{n+1} = \epsilon_{vp}^n + \Delta \epsilon_{vp}^n$$

كل $\Delta \epsilon_{vp}^n$ ϵ_{vp} $\Delta \epsilon_{vp}^n$ ϵ_{vp} $\Delta \epsilon_{vp}^n$

$$\psi^{n+1} = \int_V [B^{n+1}]^T \sigma^{n+1} dV + f^{n+1} \neq 0$$

Residual

Force

Material Nonlinearity

Large displacement/rotation
Small strains

-1

Geometric Nonlinearity

کلیه موارد غیر خطی

Large displacement/rotation

-2

Large strains

$$({}^t R) - ({}^t F) = 0$$

$$({}^t R_B) + ({}^t R_S) + ({}^t R_C)$$

$$\sum_{i=1}^m \int_{V_m} ({}^t B_m)^T ({}^t \sigma_m) dV_m$$

$$({}^{t+\Delta t} R) - ({}^{t+\Delta t} F) = 0$$

$$({}^{t+\Delta t} R) - ({}^t F + \Delta F) = 0$$

$$\text{where: } \Delta F = ({}^t K) \cdot \Delta u$$

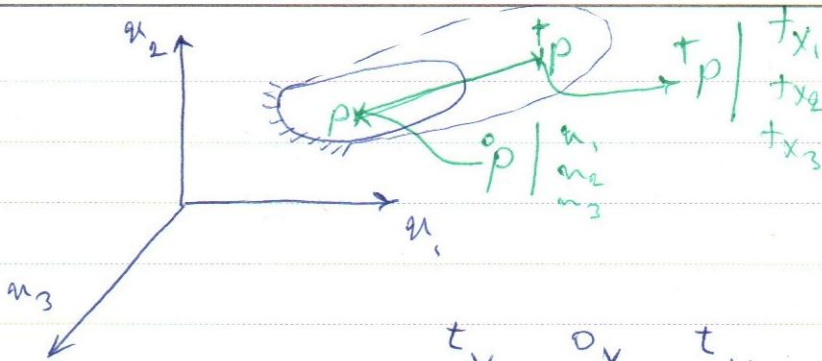
$${}^t K = \frac{\partial ({}^t F)}{\partial ({}^t u)}$$

$$({}^t K) \Delta u = ({}^{t+\Delta t} R) - ({}^t F)$$

بجایابی در معادله تعادل

$$({}^{t+\Delta t} u) = {}^t u + \Delta u$$

خطا استفاده از سائرس روشی نام قبل رابطه ماتریسی خطا دارد.



$${}^t X_i = {}^0 X_i + {}^t U_i \quad (i=1,2,3)$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 x y z

$${}^{t+\Delta t} X_i = {}^0 X_i + {}^{t+\Delta t} U_i$$

\swarrow \swarrow
 رویداد انیترنی

$${}^{t+\Delta t} X_i = {}^t X_i + {}^t U_i$$

\swarrow \swarrow
 رویداد اولیری

تعارف تنش:

① تنش مهندسی Engineering stress

$${}^t \sigma = \frac{{}^t F}{{}^0 A}$$

② تنش کوشی Cauchy

$${}^t \sigma = \frac{{}^t F}{{}^t A}$$

③ First pida-kirschhoff stress

$${}^t T_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} \left({}^0 x_{i,m} \right) \left({}^t \sigma_{mj} \right) \quad i,j=1,2,3$$

deformation gradient

کشش کویش در دوران های بزرگ کشش غیر دلفنی نشان می دهد تا سوراخش لایه پایله
کشش یاف تا سوراخش غیر متجانس می دهد.

Second piola - kirshoff stress (4)

$${}^t_0 S_{ij} = \frac{\rho}{t\rho} ({}^t_0 X_{i,m}) ({}^t_+ \chi_{mn}) ({}^t_+ X_{n,j}) \quad i,j=1,2,3$$

این کشش هم متجانس است، هم اثر تغییرات محیطی ندارد.

برای فهم مفهوم کشش دوم این رابطه به کتاب آقای chen & Mizouu

اجمعی می باشد با این حال این تعریف علی universal نیست و به عبارتی می توان گفت این کشش

مفهوم فیزیکی قابل درکی ندارد. به همین جهت می توان از آن برای طراحی استفاده کرد و باید از کشش

کوشش استفاده کرد. چگونگی کشش قابل درک است.

$${}^t_+ \chi_{ij} = \frac{{}^t\rho}{\rho} ({}^t_0 X_{i,m}) ({}^t_0 S_{mn}) ({}^t_0 X_{n,j}) \quad i,j=1,2,3$$

$$\rho = {}^t\rho \cdot \det ({}^t_0 X_{ij})$$

$${}^t_0 X_{ij} = \frac{\partial {}^t_0 X_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t_0 X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial {}^t_0 X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial {}^t_0 X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial {}^t_0 X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial {}^t_0 X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial {}^t_0 X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial {}^t_0 X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial {}^t_0 X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial {}^t_0 X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$^t X_i = {}^o X_i + {}^t u_i$$

از آنجا که انرژی حالت زیرین انرژی تنش و کرنش است و باید کرنشی را نیز تعریف کنیم
تأثیر تنش ها Conjugate (همزاد، مزدوج) باشد.

بسیار نزدیک به صحت همزاد است
 ∂n_j

تأثیر کرنش
① کرنش هندسی :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji})$$

② کرنش درین - لاگرانژ

$${}^t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t u_{ij} + {}^t u_{ji} + \underbrace{{}^t u_{k,i} \cdot {}^t u_{k,j}}_{\text{ترم اضافی}} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

این ترم اضافی در رابطه بالا باعث می شود تا کرنش ها غیر خطی گردد.

$${}^t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t u_{ij} + {}^t u_{ji} + {}^t u_{1i} \cdot {}^t u_{1j} + {}^t u_{2i} \cdot {}^t u_{2j} + {}^t u_{3i} \cdot {}^t u_{3j} \right)$$

infinitesimal
strain

$$+ {}^t u_{3i} \cdot {}^t u_{3j}$$

اگر کرنش‌های ماکروچیک باشد حاصل ضرب کرنش‌ها اضافی کوچک می‌شوند و قابل صرف نظر
هستند. کرنش‌های میکروچیک خواهند بود و برعکس کرنش‌های بزرگ باشند و ماکروچیک بزرگ در هم
ضرب می‌شوند و بزرگ‌تری شوند. به همین خاطر تعریف کرنش‌های میکروچیک
تعریف می‌کنند. به لحاظ انرژی ثابت می‌شود که کرنش‌های کوچک‌تر ضریب کرنش S_{ij} یا کرنش
میکروچیک ${}^t u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ است.

③ کرنش آلامنی:

زیانی
↑
↓
مکانی

$${}^t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t u_{ij} + {}^t u_{ji} - {}^t u_{k,i} \cdot {}^t u_{k,j} \right) \quad (i,j,k=1,2,3)$$

$${}^t u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

مثال: مؤلفه‌های تغییر مکان یک نقطه از یک جسم به بعدی به صورت زیر داده شده است. اولاً نشان دهید که صورت کج یک بدن تغییر مکان ها حریفی در جسم ایجاد می شود. ثانیاً اگر تغییر مکان ها بزرگ باشد آنگاه کرنش درین دایمانی به چه صورت قابل مبنی شوند.

$$\begin{array}{l|l} u & u_1 = 10 x_1 + 3 x_2 \\ v & u_2 = 3 x_1 + 2 x_2 \\ w & u_3 = 6 x_3 \end{array}$$

۱- کرنش ها کوچک

سرعت زوایای در دوران جسم صلب

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}$$

infinitesimal strain tensor

spin tensor
Rotation tensor

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji})$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} - u_{ji})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 10, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 3, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 6$$

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{2,1} + u_{1,2}) & \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2}) & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,2} + u_{2,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,3} + u_{3,3}) \end{bmatrix}$$

$$w_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,1} - u_{1,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) & \frac{1}{2}(u_{2,2} - u_{2,2}) & \frac{1}{2}(u_{2,3} - u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{3,1} - u_{1,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,2} - u_{2,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,3} - u_{3,3}) \end{bmatrix}$$

چون تمام درایه‌های صفر است که بیان صحت است که هیچ درونی این جسم را

ندارد.

تأثیر کرنش برین - لاگرانژ

$${}^t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t u_{ij} + {}^t u_{ji} + {}^t u_{Rji} \cdot {}^t u_{Rij})$$

$${}^t \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} {}^t \varepsilon_{11} & {}^t \varepsilon_{12} & {}^t \varepsilon_{13} \\ {}^t \varepsilon_{21} & {}^t \varepsilon_{22} & {}^t \varepsilon_{23} \\ {}^t \varepsilon_{31} & {}^t \varepsilon_{32} & {}^t \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$${}^t \Sigma_{11} = \frac{1}{2} \left({}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,1} + {}^t u_{2,1} + {}^t u_{2,1} + {}^t u_{3,1} + {}^t u_{3,1} \right)$$

$${}^t \Sigma_{12} = \frac{1}{2} \left({}^t u_{1,2} + {}^t u_{2,1} + {}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,2} + {}^t u_{2,1} + {}^t u_{2,2} + {}^t u_{3,1} + {}^t u_{3,2} \right)$$

$${}^t \Sigma_{13} = \frac{1}{2} \left({}^t u_{1,3} + {}^t u_{3,1} + {}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,3} + {}^t u_{2,1} + {}^t u_{2,3} + {}^t u_{3,1} + {}^t u_{3,3} \right)$$

$${}^t \Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \cancel{{}^t \Sigma_{11}}^{64.5} & \cancel{{}^t \Sigma_{12}}^{21.0} & \cancel{{}^t \Sigma_{13}}^0 \\ \cancel{{}^t \Sigma_{21}}^{21} & \cancel{{}^t \Sigma_{22}}^{8.5} & \cancel{{}^t \Sigma_{23}}^0 \\ \cancel{{}^t \Sigma_{31}}^0 & \cancel{{}^t \Sigma_{32}}^0 & \cancel{{}^t \Sigma_{33}}^{24} \end{bmatrix}$$

آنسو آمانی - لولر

$${}^t \Sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^t u_{ij} + {}^t u_{ji} - {}^t u_{ki} + {}^t u_{kj} \right)$$

$${}^t \Sigma_{11} = \frac{1}{2} \left[{}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,1} - \left({}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,1} + {}^t u_{2,1} + {}^t u_{2,1} + {}^t u_{3,1} + {}^t u_{3,1} \right) \right]$$

$${}^t \Sigma_{12} = \frac{1}{2} \left[{}^t u_{1,2} + {}^t u_{2,1} - \left({}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,2} + {}^t u_{2,1} + {}^t u_{2,2} + {}^t u_{3,1} + {}^t u_{3,2} \right) \right]$$

$${}^t \Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} {}^t \Sigma_{11} & {}^t \Sigma_{12} & {}^t \Sigma_{13} \\ {}^t \Sigma_{21} & {}^t \Sigma_{22} & {}^t \Sigma_{23} \\ {}^t \Sigma_{31} & {}^t \Sigma_{32} & {}^t \Sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$${}^t X_i = {}^0 X_i + u_i$$

$$\begin{cases} {}^t X_1 = {}^0 X_1 + u_1 = {}^0 X_1 + (10 {}^0 X_1 + 3 {}^0 X_2) = 11 {}^0 X_1 + 3 {}^0 X_2 \\ {}^t X_2 = {}^0 X_2 + u_2 = {}^0 X_2 + (3 {}^0 X_1 + 2 {}^0 X_2) = 3 {}^0 X_1 + 3 {}^0 X_2 \\ {}^t X_3 = {}^0 X_3 + u_3 = {}^0 X_3 + (6 {}^0 X_3) = 7 {}^0 X_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^0 X_1 = \frac{1}{8} ({}^t X_1 - {}^t X_2) \\ {}^0 X_2 = -\frac{1}{24} (3 {}^t X_1 + 11 {}^t X_2) \\ {}^0 X_3 = \frac{1}{7} ({}^t X_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{8} (7 {}^t X_1 + {}^t X_2) \\ u_2 = \frac{1}{24} (3 {}^t X_1 + 13 {}^t X_2) \\ u_3 = \frac{6}{7} ({}^t X_3) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{3}{24}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{13}{24}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{6}{7}$$

$${}^t \Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 31/64 & 7/192 & 0 \\ 7/192 & \frac{223}{576} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{49} \end{bmatrix}$$

End p-k stress

Green strain

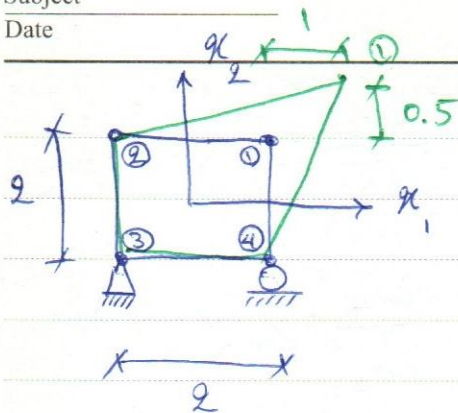
total lagrangian
Formulation (TLF)

Cauchy stress

Almansi strain

updated lagrangian
Formulation (ULF)

فرمول بندی لاجرانژی



مثال: برای شکل نشان داده شده مطلوب است:

تغییر شکل و جابجایی را در زمان t

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

$$t_{x_i} = \frac{\partial t_{x_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x_j} (t_{x_i}^*)$$

$$= \frac{\partial N_1}{\partial x_j} (t_{x_i}^{(1)}) + \frac{\partial N_2}{\partial x_j} (t_{x_i}^{(2)}) + \frac{\partial N_3}{\partial x_j} (t_{x_i}^{(3)}) + \frac{\partial N_4}{\partial x_j} (t_{x_i}^{(4)})$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1+\dot{x}_1)(1+\dot{x}_2)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1-\dot{x}_1)(1+\dot{x}_2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1-\dot{x}_1)(1-\dot{x}_2)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1+\dot{x}_1)(1-\dot{x}_2)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{4} (1 + \dot{x}_2)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \dot{x}_2} = -\frac{1}{4} (1 + \dot{x}_2)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \dot{x}_1} = -\frac{1}{4} (1 - \dot{x}_2)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{4} (1 - \dot{x}_2)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \dot{x}_2} = \frac{1}{4} (1 + \dot{x}_1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \dot{x}_2} = \frac{1}{4} (1 - \dot{x}_1)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \dot{x}_2} = \frac{1}{4} (1 - \dot{x}_1)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \dot{x}_2} = -\frac{1}{4} (1 + \dot{x}_1)$$

$${}^t x_i^* = \begin{bmatrix} +2 & +1.5 \\ -1 & +1 \\ -1 & -1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{x_1} \quad \underbrace{\quad}_{x_2}$

$${}^t x_{ij} = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \dot{x}_j} ({}^t x_i^*) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} (5 + \dot{x}_2) & \frac{1}{8} (1 + \dot{x}_1) \\ \frac{1}{8} (1 + \dot{x}_2) & \frac{1}{4} (9 + \dot{x}_1) \end{bmatrix}$$

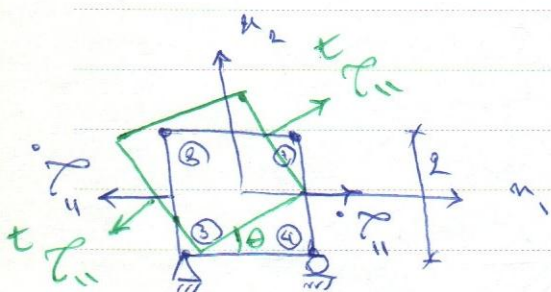
$$\dot{\rho} = {}^t \rho \cdot \det({}^t x_{ij})$$

$$\det({}^t x_{ij}) = \frac{(5 + i a_2)(9 + i a_1) - (1 + i a_1)(1 + i a_2)}{32}$$

32

$${}^t \rho = \frac{\dot{\rho}}{(5 + i a_2)(9 + i a_1) - (1 + i a_1)(1 + i a_2)}$$

32



شکل 3-

مانند هم بارو گیرش فلابیت
بارود بارون اینده تنش ج ثابت

$${}^o S_{ij} = {}^o \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

باقی ماند

$${}^{\Delta t} S_{ij} = \frac{\dot{\rho}}{\Delta t \rho} ({}^{\Delta t} x_{ipm}) \begin{pmatrix} {}^{\Delta t} \tau_{mn} \end{pmatrix} ({}^o x_{jm}^n)$$

الف) قابه مانده تنش کویش در زمان Δt

$${}^{\Delta t} \tau_{ij} = \rho \cdot ({}^o \tau_{ij}) \rho^T$$

Transformation Matrix $P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

$${}^{\Delta t} Z_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$${}^{\Delta t} q_{ij} = \frac{{}^{\Delta t} \partial n_i}{\partial n_j} = \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial n_j} ({}^{\Delta t} q_i^*)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial N_1}{\partial n_1} = \frac{1}{4} (1 + n_2) \\ \frac{\partial N_2}{\partial n_1} = -\frac{1}{4} (1 + n_2) \\ \frac{\partial N_3}{\partial n_1} = \frac{1}{4} (1 - n_2) \\ \frac{\partial N_4}{\partial n_1} = -\frac{1}{4} (1 - n_2) \end{array} \right| \quad , \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial N_1}{\partial n_2} = \frac{1}{4} (1 + n_1) \\ \frac{\partial N_2}{\partial n_2} = +\frac{1}{4} (1 - n_1) \\ \frac{\partial N_3}{\partial n_2} = -\frac{1}{4} (1 - n_1) \\ \frac{\partial N_4}{\partial n_2} = -\frac{1}{4} (1 + n_1) \end{array} \right|$$

Node ①: ${}^{\Delta t} q_1^{\text{①}} = 1$, $n_2^{\text{①}} = 1$, ${}^{\Delta t} q_1^{\text{①}} = 2 \cos \theta - 1 - 2 \sin \theta$

$${}^{\Delta t} q_2^{\text{①}} = 2 \sin \theta - 1 + 2 \cos \theta$$

$$\text{Node ②: } \overset{\circ}{x}_1^{(2)} = -1, \overset{\circ}{x}_2^{(2)} = +1, \Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(2)} = -1 - 2\sin\theta$$

$$\Delta^t \overset{\circ}{x}_2^{(2)} = 2\cos\theta - 1$$

$$\text{Node ③: } \overset{\circ}{x}_1^{(3)} = -1, \overset{\circ}{x}_2^{(3)} = -1, \Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(3)} = -1, \Delta^t \overset{\circ}{x}_2^{(3)} = -1$$

$$\text{Node ④: } \overset{\circ}{x}_1^{(4)} = +1, \overset{\circ}{x}_2^{(4)} = -1, \Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(4)} = 2\cos\theta - 1, \Delta^t \overset{\circ}{x}_2^{(4)} = 2\sin\theta - 1$$

$$\Delta^t \overset{\circ}{x}_{1,1} = \frac{\partial N_1}{\partial \overset{\circ}{x}_1} \left(\Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(1)} \right) + \frac{\partial N_2}{\partial \overset{\circ}{x}_1} \left(\Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(2)} \right) + \frac{\partial N_3}{\partial \overset{\circ}{x}_1} \left(\Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(3)} \right)$$

$$+ \frac{\partial N_4}{\partial \overset{\circ}{x}_1} \left(\Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(4)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \overset{\circ}{x}_2) (2\cos\theta - 1 - 2\sin\theta) - \frac{1}{4} (1 + \overset{\circ}{x}_2) (-1 - 2\sin\theta)$$

$$- \frac{1}{4} (1 - \overset{\circ}{x}_4) (-1) + \frac{1}{4} (1 - \overset{\circ}{x}_2) (2\cos\theta - 1)$$

$$\Delta^t \overset{\circ}{x}_{1,2} = \frac{\partial N_1}{\partial \overset{\circ}{x}_2} \left(\Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(1)} \right) + \frac{\partial N_2}{\partial \overset{\circ}{x}_2} \left(\Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(2)} \right) + \frac{\partial N_3}{\partial \overset{\circ}{x}_2} \left(\Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(3)} \right) + \frac{\partial N_4}{\partial \overset{\circ}{x}_2} \left(\Delta^t \overset{\circ}{x}_1^{(4)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \overset{\circ}{x}_1) (2\cos\theta - 1 - 2\sin\theta) + \frac{1}{4} (1 - \overset{\circ}{x}_1) (-1 - 2\sin\theta)$$

$$- \frac{1}{4} (1 - \overset{\circ}{x}_1) (-1) - \frac{1}{4} (1 + \overset{\circ}{x}_1) (2\cos\theta - 1)$$

$$\Delta^t \overset{\circ}{x}_{2,1} =$$

Δt
o 292

$${}^t W_{ext} = {}^t W_{int} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} W_{ext} = {}^{t+\Delta t} W_{int}$$

اصل پایبندی:

$${}^{t+\Delta t} W_{ext} = \underbrace{\int_{{}^{t+\Delta t} V} ({}^{t+\Delta t} f_i) \delta u_i d({}^{t+\Delta t} V)}_{\text{body Force}} + \underbrace{\int_{{}^{t+\Delta t} S} ({}^{t+\Delta t} \bar{f}_i) \delta u_i^s d({}^{t+\Delta t} S)}_{\text{surface Traction}}$$

$${}^{t+\Delta t} W_{int} = \int_{{}^{t+\Delta t} V} ({}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}) \delta ({}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}) d({}^{t+\Delta t} V)$$

انرژی داخلی

در روش المانهای محدود، تغییر شکل شدن را دنبال می کنیم در نتیجه در روش المانهای محدود، مش ما در اثر بار در حال تغییر است. در حالات امکان استفاده از این روش وجود دارد در روش المانهای محدود، مش ما ثابت است و ما تغییرها در هر دو می بینیم و تغییرات آنها را در حال پست می آوریم.

حال در ابتدا لارگرانی جنبشی و جنبشی و جابجایی در زمان $t + \Delta t$ هندسه جسم در زمان

معمولاً به آن $\text{Total Lagrangian Form. (TLF)}$ بازشی یابی توان هندسه جسم در زمان t جنبش به

به آن $\text{Updated Lagrangian Formulation (ULF)}$ میگویند

$\therefore \text{TLF}$

$${}^{t+\Delta t}W_{int} = \int_{\cdot V} ({}^{\cdot} S_{ij}) \cdot \delta ({}^{\cdot} \epsilon_{ij}) \cdot d(\cdot V) = {}^{t+\Delta t}W_{ext}$$

2nd P-K Stress

Green-Lagrangian strain

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^{\cdot} S_{ij} + {}^{\cdot} S_{ij}$$

مشتق

$${}^{\cdot} S_{ij} = {}^{\cdot} D_{ijrs} \cdot \epsilon_{rs}$$

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^{\cdot} S_{ij} + {}^{\cdot} D_{ijrs} \epsilon_{rs}$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}^{\cdot} \epsilon_{ij} + {}^{\cdot} \epsilon_{ij}$$

$$\delta({}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}) = \delta({}^t \epsilon_{ij}) + \delta({}_\circ \epsilon_{ij})$$

الاشتمال:

$${}^t \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t u_{ij} + {}^t u_{ji} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j}) \cdot {}_\circ S_{ij}^{t+\Delta t}$$

$$= {}_\circ S_{ij}^t + {}_\circ D_{ijrs} \cdot \epsilon_{rs}$$

$${}_\circ \epsilon_{rs} = \frac{1}{2} ({}_\circ u_{rs} + {}_\circ u_{sr} + {}_\circ u_{k,r} \cdot {}_\circ u_{k,s} + {}_\circ u_{k,r} {}_\circ u_{k,s})$$

$$+ \frac{1}{2} ({}_\circ u_{k,r} \cdot {}_\circ u_{k,s})$$

e_{ts} خود خطی غوازی

η_{ts} خود غیر خطی غوازی

$$\delta({}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}) = \delta({}_\circ \epsilon_{ij}) = \delta({}_\circ e_{ij}) + \delta({}_\circ \eta_{ij})$$

با جابجایی در معادله استرالی شکل:

$$\int_V {}_\circ D_{ijrs} \cdot e_{rs} \delta({}_\circ e_{ij}) d({}_\circ v) + \int_V {}_\circ S_{ij}^t \delta({}_\circ \eta_{ij}) d({}_\circ v)$$

$$= {}^{t+\Delta t} W_{ext} - \int_V {}_\circ S_{ij}^t \delta({}_\circ e_{ij}) \cdot d({}_\circ v)$$

2nd P-K stress $\leftarrow t=0$ مرجع زمان $\leftarrow T.L.F$
 Green strain \leftarrow اول درجه
 Cauchy stress $\leftarrow t=t$ مرجع زمان $\leftarrow U.L.F$
 Almansi strain

$$W_{int.} = W_{ext.}$$

$$\int_{t_V}^{t+\Delta t} {}^t S_{ij} \cdot \delta({}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}) \cdot d({}^t V) = {}^{t+\Delta t} W_{ext.}$$

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \underbrace{{}^t \tau_{ij}}_{\text{Cauchy}} + \underbrace{{}^t S_{ij}}_{\text{stress increment}}$$

$${}^t S_{ij} = ({}^t D_{ijrs}) \cdot {}^t \epsilon_{rs}$$

$$S_{ij} = \tau_{ij} + ({}^t D_{ijrs}) {}^t \epsilon_{rs}$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}^t \epsilon_{ij} + {}^t \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\delta({}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}) = \delta({}^t \epsilon_{ij}) + \delta({}^t \dot{\epsilon}_{ij})$$

$$\begin{aligned}
 {}^t \varepsilon_{rs} &= \frac{1}{2} \left({}^t u_{r,s} + {}^t u_{s,r} + \underbrace{{}^t u_{k,r} \cdot {}^t u_{k,s}}_{\substack{+ \eta_{rs} \\ \text{مؤثرش غیر خطی}}} \right) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} ({}^t u_{r,s} + {}^t u_{s,r})}_{\substack{+ e_{rs} \\ \text{مؤثرش خطی}}} + \underbrace{\frac{1}{2} ({}^t u_{k,r} \cdot {}^t u_{k,s})}_{\substack{+ \eta_{rs} \\ \text{مؤثرش غیر خطی}}}
 \end{aligned}$$

$$\delta \left({}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \right) = \delta \left({}^t \varepsilon_{ij} \right) = \delta \left({}^t e_{ij} \right) + \delta \left({}^t \eta_{ts} \right)$$

با جایگذاری جملات δ در معادله انرژی:

$$\int_{t_v} ({}^t D_{ijrs}) ({}^t e_{rs}) \cdot \delta ({}^t e_{ij}) \cdot d(t_v) + \int_{t_v} ({}^t \varepsilon_{ij}) \cdot \delta ({}^t \eta_{ij}) \cdot d(t_v)$$

$$= {}^{t+\Delta t} w_{\text{ext}} - \int ({}^t \varepsilon_{ij}) (\delta ({}^t e_{ij})) \cdot d(t_v)$$

با فرض اینکه $\delta ({}^t \varepsilon_{ij}) = \delta ({}^t e_{ij})$

نحوه اعمال T.L.F در برنامه F.E

$$\int_{\bar{V}} ({}^0D_{ijrs}) ({}^0e_{rs}) \cdot \delta({}^0e_{ij}) \cdot d(\bar{V}) + \int_{\bar{V}} ({}^tS_{ij}) \cdot \delta({}^t\eta_{ij}) \cdot d(\bar{V}) =$$

$${}^{t+\Delta t}R - \int_{\bar{V}} ({}^tS_{ij}) \cdot \delta({}^0e_{ij}) \cdot d(\bar{V})$$

$${}^0e_{ij} = ({}^tB) \cdot \hat{u}$$

$$\delta({}^0e_{ij}) = ({}^tB) \cdot \delta \hat{u}$$

$${}^0e_{ij} = ({}^tB_L) \cdot \hat{u}$$

$$\delta({}^0e_{ij}) = ({}^tB_L) \cdot \delta \hat{u}$$

$${}^t\eta_{ij} = ({}^tB_{NL}) \cdot \hat{u}$$

$$\delta({}^t\eta_{ij}) = ({}^tB_{NL}) \cdot \delta \hat{u}$$

K_L

\hat{u} بردار تغییرات مکانی نرهی

$$\int_{\bar{V}} ({}^tB_L) ({}^tD_{ijrs}) {}^tB_L \cdot d(\bar{V}) \cdot \hat{u} + \int_{\bar{V}} ({}^tB_{NL}) {}^tS_{ij} ({}^tB_{NL}) \cdot d(\bar{V}) \cdot \hat{u}$$

$$+ \int_{\bar{V}} ({}^tB_L)^T \cdot {}^t\hat{S}_{ij} \cdot d(\bar{V}) = {}^{t+\Delta t}R$$

end p-k
stress

$$[K_L] \{ \hat{u} \} + [K_{NL}] \{ \hat{u} \} = {}^{t+\Delta t}R - {}^tF$$

$$e_{ij} = ({}^t B_L) \hat{u}$$

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{22} & 2e_{12} & e_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \dots & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} \end{bmatrix}^T$$

$${}^t B_L = {}^t B_{L_0} + {}^t B_{L_1}$$

$${}^t B_{L_0} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & N_{2,1} & 0 & N_{3,1} & 0 & \dots & N_{n,1} & 0 \\ 0 & N_{1,2} & 0 & N_{2,2} & 0 & N_{3,2} & \dots & 0 & N_{n,2} \\ 0 & N_{1,2} & N_{1,1} & N_{2,2} & N_{2,1} & N_{3,2} & N_{3,1} & \dots & N_{n,2} & N_{n,1} \\ \frac{N_1}{\bar{x}_1} & 0 & \frac{N_2}{\bar{x}_1} & 0 & \frac{N_3}{\bar{x}_1} & 0 & \dots & \frac{N_n}{\bar{x}_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^t B_{L_1} = \begin{bmatrix} l_{11} N_{1,1} & l_{21} N_{1,1} & l_{11} N_{2,1} & l_{21} N_{2,1} & \dots & l_{11} N_{n,1} & l_{21} N_{n,1} \\ l_{12} N_{1,2} & & & & & & \\ l_{11} N_{1,1} & & & & & & \\ l_{33} N_{1,1} / \bar{x}_1 & 0 & l_{33} N_{2,1} / \bar{x}_1 & 0 & \dots & l_{33} \frac{N_n}{\bar{x}_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{k,i} = \frac{\partial N_k}{\partial \bar{x}_i}$$

$$u_j^k = \left({}^t \Delta^t u_j^k \right) - \left({}^t u_j^k \right)$$

$$\bar{x}_i = \sum_{k=1}^n N_k \left(\bar{x}_i^k \right)$$

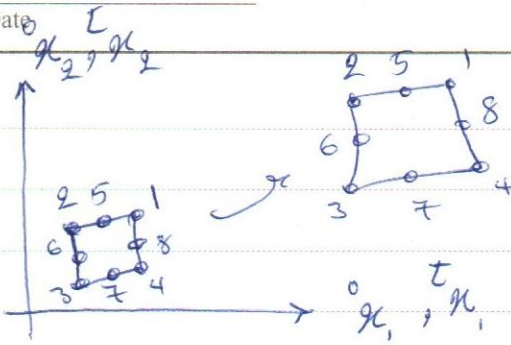
$$l_{11} = \sum_{k=1}^n \left(N_{k,1} \right) \left({}^t u_1^k \right), \quad l_{22} = \sum_{k=1}^n \left(N_{k,2} \right) \left({}^t u_2^k \right) \dots$$

$$l_{33} = \left[\sum_{k=1}^n \left(N_k \right) \left({}^t u_i^k \right) \right] / \bar{x}_{i1}$$

$$l_{ij} = \left({}^t B_{NL} \right) \cdot \hat{u}$$

$${}^t B_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & N_{2,1} & 0 & N_{3,1} & 0 & \dots & N_{n,1} & 0 \\ N_{1,2} & 0 & N_{2,2} & 0 & N_{3,2} & 0 & \dots & N_{n,2} & 0 \\ 0 & N_{1,1} & 0 & N_{2,1} & 0 & N_{3,1} & \dots & 0 & N_{n,1} \\ 0 & N_{1,2} & 0 & N_{2,2} & 0 & N_{3,2} & \dots & 0 & N_{n,2} \\ \frac{N_1}{\bar{x}_1} & 0 & \frac{N_2}{\bar{x}_1} & 0 & \frac{N_3}{\bar{x}_1} & 0 & \dots & \frac{N_n}{4\bar{x}_1} & 0 \end{bmatrix}$$

سوال



$$\begin{array}{l}
 \text{درجه ۰} \\
 \left. \begin{array}{l}
 u_1 = \sum_{l=1}^8 N_l(u_1^l) \\
 u_2 = \sum_{l=1}^8 N_l(u_2^l)
 \end{array} \right\} \\
 \text{درجه ۱} \\
 \left. \begin{array}{l}
 {}^t u_1 = \sum_{l=1}^8 N_l({}^t u_1^l) \\
 {}^t u_2 = \sum_{l=1}^8 N_l({}^t u_2^l)
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

مقادیر تغییر مکان
دری

با توجه به اینکه امکان این دو را هم داریم است:

$$\begin{array}{l}
 \text{درجه ۰} \\
 \left. \begin{array}{l}
 {}^0 x_1 = \sum_{l=1}^8 N_l({}^0 x_1^l) \\
 {}^0 x_2 = \sum_{l=1}^8 N_l({}^0 x_2^l)
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{درجه ۱} \\
 \left. \begin{array}{l}
 {}^t x_1 = \sum_{l=1}^8 N_l({}^t x_1^l) \\
 {}^t x_2 = \sum_{l=1}^8 N_l({}^t x_2^l)
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

مشتق کل تغییر مکان تا زمان t :

$$\frac{\partial^t u_i}{\partial \eta_j} = \sum_{l=1}^8 \left(\frac{\partial N_l}{\partial \eta_j} \right) \left({}^t u_i^l \right)$$

$$\frac{\partial^t u_i}{\partial \eta_j^t} = \sum_{l=1}^8 \left(\frac{\partial N_l}{\partial \eta_j^t} \right) \left({}^t u_i^l \right)$$

مشتق مؤثر تغییر مکان:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \eta_j} = \sum_{l=1}^8 \left(\frac{\partial N_l}{\partial \eta_j} \right) \left(u_i^l \right)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \eta_j^t} = \sum_{l=1}^8 \left(\frac{\partial N_l}{\partial \eta_j^t} \right) \left({}^l u_i \right)$$

برای مابین عبارات مشتقات N_l و η_j :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t J \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta_1^t} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_2^t} \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta_1^t} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_2^t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t J \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$${}^t J = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial {}^t x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial {}^t x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\det [{}^t J] = \frac{\partial {}^t x_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial {}^t x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial {}^t x_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial {}^t x_2}{\partial \xi}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^t x_1} \\ \frac{\partial}{\partial {}^t x_2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det [{}^t J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial {}^t x_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial {}^t x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial {}^t x_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad \text{نابراین}$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^t x_1} \\ \frac{\partial}{\partial {}^t x_2} \end{Bmatrix} = [{}^t J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial {}^t x_1}{\partial \xi} = \sum_{l=1}^8 \left(\frac{\partial {}^t x_1}{\partial \xi} \right) ({}^t x_1^l)$$

$$\frac{\partial {}^t x_1}{\partial \eta} = \sum_{l=1}^8 \left(\frac{\partial {}^t x_1}{\partial \eta} \right) ({}^t x_1^l)$$

$$\frac{\partial {}^t x_2}{\partial \xi} = \sum_{l=1}^8 \left(\frac{\partial {}^t x_2}{\partial \xi} \right) ({}^t x_2^l)$$

$$\frac{\partial {}^t x_2}{\partial \eta} = \sum_{l=1}^8 \left(\frac{\partial {}^t x_2}{\partial \eta} \right) ({}^t x_2^l)$$

Constitutive Relations

روابط رفتاری در تغییر شکل های بزرگ

۱- رفتار الاستیک غیر خطی

$${}^t S_{ij} = {}^t D_{ijkl} {}^t \varepsilon_{kl}$$

2nd P-K

Stress Tensor

Green-Lagrange strain tensor

$${}^t D_{ijkl} = \lambda \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

where:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

} lame'

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\delta = 0$ if $i \neq j$, $\delta = 1$ if $i = j$

$${}^t \sigma_{mn} = {}^t D_{mnpq} \cdot {}^t \varepsilon_{pq}$$

Cauchy stress tensor

Almansi Strain Tensor

$${}^t D_{mnpq} = \frac{t\rho}{\rho} \begin{pmatrix} t\rho_{n,i} \\ t\rho_{n,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\rho_{i,k} \\ t\rho_{j,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\rho_{i,k} \\ t\rho_{j,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\rho_{p,k} \\ t\rho_{q,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\rho_{q,l} \\ t\rho_{l,l} \end{pmatrix}$$

$${}^t D_{ijkl} = \frac{\rho}{t_p} ({}^t x_{i,p}) ({}^t x_{j,m}) ({}^t D_{mnpq}) ({}^t x_{k,k}) ({}^t x_{l,q})$$

اگر درش ها کوچک باشد هر دو یک جواب دایره ای دهند ولی اگر درش ها بزرگ باشد جوابها فرق می کنند.

اگر تغییر مکان ها بزرگ باشد وی درش ها کوچک این دو حل جواب میدهند. در تفاکلی است که تنش و درش های جدید را در و D کلنی مثل قبل است. و نیاز به تغییر نیست و کافی است روابط تنش و درش را استفاده کرد. اما اگر درش ها بزرگ باشد رابطه دیر روابطی قبلی قابل قبول نیست و باید روابط جدیدی نوشت. اما این حل ها وقتی برای درش ها بزرگ خیلی کم هستند بنابراین معمولاً از همان حل ها وقتی معمول بر کلنی درش ها کوچک استفاده می کنیم. که خیلی جواب کارایی می دهد.

حلی از نرم افزارها ادعا می کنند که large displacement و large rotation را انجام می دهند در حالی که کاری نه انجام می دهند این است که mesh update می کنند. این باعث می شود که با جمع تغییرات کوچک، تغییر شکل ها بزرگ پیدا می کنند.

مقاله Krahn: حقایق بین غریب اینان حل
limit equilibrium Analysis

و reduction ϕ و c که این روی این گونه است که ϕ و c در هر دو اینقدر کاهش
می دهد تا مسئله حلناپذیر گردد به این میزان تغییر یک غریب اینان می دهد که لزوماً با آنالیز

limit equilibrium مربوط است.

Steady-state problems: Statics

$$[K]\{U\} = \{R\}$$

propagation problems: Dynamics

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R(t)\}$$

Eigen-Value problems

تحلیل مسائل دینامیکی

Discrete سیستم های

در مسئله لوم برخلاف مسئله لعل در دینامیک حل می کنند و مشکل یک بارنداری است که بار این به

گشت به لای بسیاری از نیروها هم فرست می به لای چند نیرو تغییر مکان غیر صفر.

مسائل دینامیکی همان مسائل استاتیکی هستند به شرطی که شرایط انیمری بودن

حافظ شود.

$$[M] = \sum \int_{V_e} [N]^T \rho [N] dV_e$$

$$[C] = \sum \int_{V_c} [N]^T K [N] dV_c$$

$$[K] = \sum \int_{V_c} [B]^T [D] [B] dV_c$$

معادلات نیابتی روابط ایتری هون

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = 0$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + c \frac{dz}{dt} + k z = 0$$

حل عمومی: $Z = f(t) = e^{st} = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$

حل خاص! $s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$

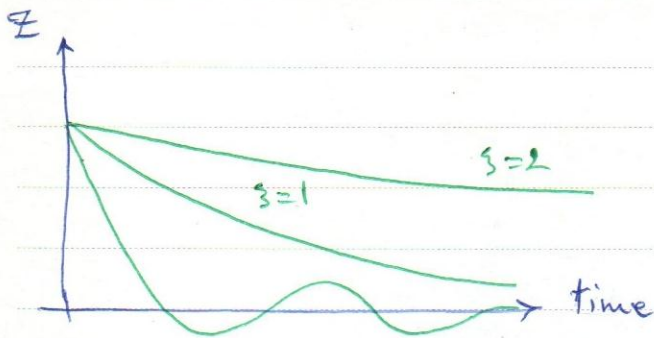
$$\zeta = \frac{c}{2m \omega_n}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$(-\zeta \omega_n t) (A' \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + B' \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t)$$

جواب خاص: $Z = e$

$$Z = Z_0 e^{\frac{-\zeta \omega_n t}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin(\omega_n t + \phi)$$



if $\zeta = 1.0 \rightarrow C = C_c$

$$\zeta = 0.2$$

$$\zeta = 2.0$$

$$m \ddot{z} + c \dot{z} + k z = F_0 \sin \omega t$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + c \frac{dz}{dt} + k z = F_0 \sin \omega t$$

جواب: $z = z_0 \sin(\omega t - \phi)$

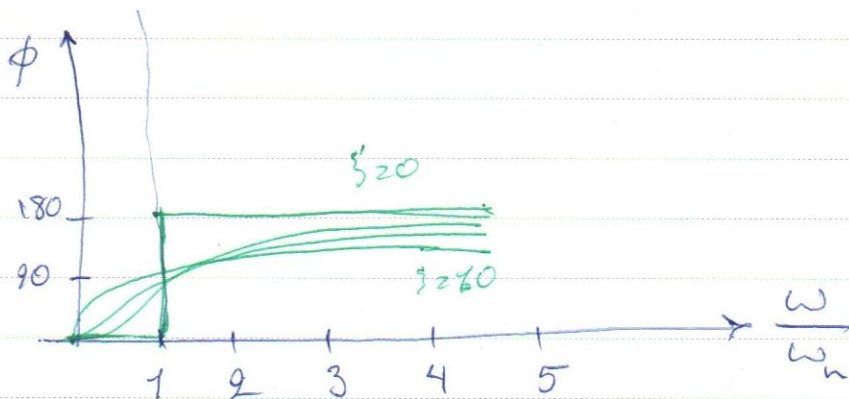
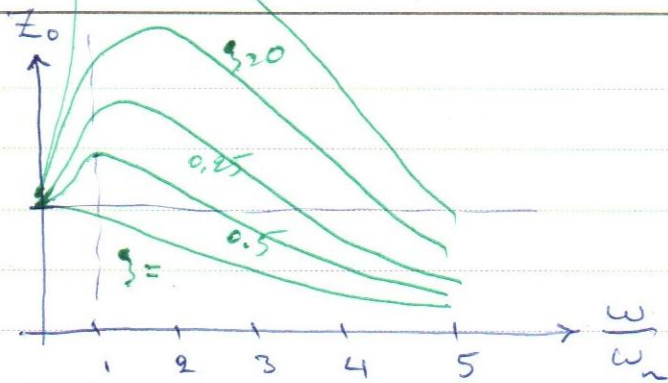
$$\dot{z} = \omega z_0 \cos(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 z_0 \sin(\omega t - \phi)$$

$$z_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} = \frac{\delta_{static}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan^{-1} \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Subject
Date



Direct integrated method
mode superposition

روش های حل مسائل
ریاضی

Direct integrated method
روش های حل مسائل ریاضی

Houbolt روش ۱

wilson روش ۲

Newmark روش ۳

mode superposition

$${}^t \ddot{U} = \frac{{}^{t+\Delta t} U - {}^{t-\Delta t} U}{2\Delta t}$$

central Difference method روش

$${}^t \ddot{U} = \frac{{}^{t+\Delta t} U - 2{}^t U + {}^{t-\Delta t} U}{\Delta t^2}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right)}_{[K]} \underbrace{{}^{t+\Delta t} U}_{\text{قبل}} = R - \underbrace{\left(K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right)}_{[R]} {}^t U - \underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right)}_{\text{بعد}} {}^{t-\Delta t} U$$

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi}$$

بیشترین پیرود (کان) ورود در توی پیرود

a) Central difference method

b) Houbolt method

انتقال پیری مستقیم

$$M({}^{t+\Delta t} \ddot{U}) + C({}^{t+\Delta t} \dot{U}) + K({}^{t+\Delta t} U) = {}^{t+\Delta t} R(t)$$

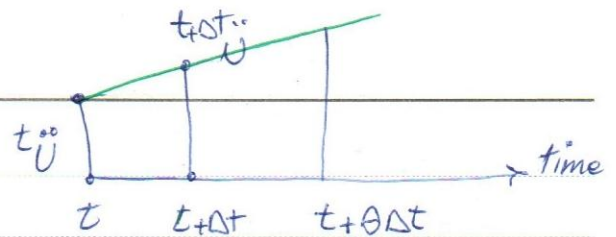
تکلیف میانی

$${}^{t+\Delta t} \ddot{U} = \frac{1}{\Delta t^2} \left\{ 2({}^{t+\Delta t} U) - 5({}^t U) + 4({}^{t-\Delta t} U) - ({}^{t-2\Delta t} U) \right\}$$

$${}^{t+\Delta t} \ddot{U} = \frac{1}{6\Delta t} \left\{ 11({}^{t+\Delta t} U) - 18({}^t U) + 9({}^{t-\Delta t} U) - 2({}^{t-2\Delta t} U) \right\}$$

$$\left(\frac{2}{\Delta t^2} M + \frac{11}{6\Delta t} C + K \right) {}^{t+\Delta t} U = R + \left(\frac{5}{\Delta t^2} M + \frac{3}{\Delta t} C \right) {}^t U$$

$$- \left(\frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{3}{2\Delta t} C \right) {}^{t-\Delta t} U + \left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{3\Delta t} C \right) {}^{t-2\Delta t} U$$



5) wilson method (θ)

تدریس ویلین θ باید بلایم

همان روشی عددی شود.

$$\theta \geq 1.0$$

خرد ویلین

$$\theta \geq 1.37$$

آرچ یک زمان بخواهیم $t, \theta \Delta t$ باشد:

$${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} = {}^t\ddot{U} + \frac{\gamma}{\theta\Delta t} ({}^{t+\Delta t}\ddot{U} - {}^t\ddot{U})$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + {}^t\ddot{U} \cdot \gamma + \frac{\gamma^2}{2\theta\Delta t} ({}^{t+\Delta t}\ddot{U} - {}^t\ddot{U})$$

$${}^{t+\theta\Delta t}U = {}^tU + {}^t\dot{U} \cdot \gamma + \frac{1}{2} {}^t\ddot{U} \cdot \gamma^2 + \frac{1}{6\theta\Delta t} \gamma^3 ({}^{t+\Delta t}\ddot{U} - {}^t\ddot{U})$$

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \frac{\theta\Delta t}{2} ({}^{t+\Delta t}\ddot{U} + {}^t\ddot{U}) \\ {}^{t+\Delta t}U = {}^tU + \theta\Delta t \cdot {}^t\dot{U} + \frac{\theta^2\Delta t^2}{6} ({}^{t+\Delta t}\ddot{U} + 2{}^t\ddot{U}) \end{cases}$$

معادله تعادل دینامیکی:

$$M({}^{t+\Delta t}\ddot{U}) + C({}^{t+\Delta t}\dot{U}) + K({}^{t+\Delta t}U) = {}^tR + \theta({}^{t+\Delta t}R - {}^tR)$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{U} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} \left({}^{t+\theta\Delta t}U - {}^tU \right) - \frac{6}{\theta\Delta t} {}^t\dot{U} - 2 {}^t\ddot{U}$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{U} = \frac{3}{\theta\Delta t} \left({}^{t+\theta\Delta t}U - {}^tU \right) - 2 {}^t\dot{U} - \frac{\theta\Delta t}{2} {}^t\ddot{U}$$

d) Newmark method

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \left[(1-\beta) {}^t\ddot{U} + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \Delta t \quad \text{نویسبات:}$$

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + {}^t\dot{U} \cdot \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) ({}^t\ddot{U}) + \alpha ({}^{t+\Delta t}\ddot{U}) \right] \Delta t^2$$

معادله حاله دینامیکی در روش نیو مارک

$$M({}^{t+\Delta t}\ddot{U}) + C({}^{t+\Delta t}\dot{U}) + K({}^{t+\Delta t}U) = {}^{t+\Delta t}R$$

$$\hat{K} \cdot {}^{t+\Delta t}U = \hat{R}$$

$$\beta = 0.5, \alpha = 0.25$$

Unconditionally stable

$$\text{if } \beta = 0.5, \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \theta = 1.0$$

این در مکان های به سازه های ثابت الزامه داریم روش بسیار خوبی است.

برای تحلیل های دینامیکی در زلزله از این روش استفاده می شود.

Mode Superposition

2. برهم‌نهی مودها

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{R(t)\}$$

$$u(t) = p \cdot x(t)$$

قبل ماتریکس

Generalized
displacement
vector

قبل ماتریکس
nodal displacement
vector

ماتریکس تبدیل مودها
transformante mtx.

اگر سیستم n درجه آزادی داشته باشد:

m_k عرض تبار ماتریکس کتبی کل

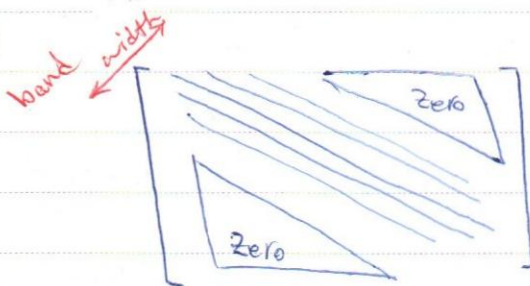
S تعداد طم‌های زمانی

$$\alpha \cdot n \cdot m_k \cdot S$$

تعداد درجات حل معادله تکامل دینامیکی

هرچه اختلاف بین شماره تباری که معادله‌ها را تکرار باشد

band width کاهش می‌یابد



$$m_p \ddot{x}(t) + c_p \dot{x}(t) + k_p x(t) = R(t)$$

رتب ماتریکس P باید همان n باشد یعنی برابر درجه آزادی باشد Rank deficient باشد

$$\underbrace{p^T M p}_{M'} \ddot{u}(t) + \underbrace{p^T c p}_{C'} \dot{u}(t) + \underbrace{p^T K p}_{K'} u(t) = \underbrace{p^T R(t)}_{R'}$$

$$M' \ddot{u}(t) + C' \dot{u}(t) + K' u(t) = R'(t)$$

تغییر مکان در هر نقطه
نقطه در داخل المان

$$u(x, y, z, t) = N \cdot U(t) = N \cdot P u(t)$$

شکل تابع shape function
نودال displacement vector

هدف این است که معین باشد تابع شکل برابر

$$M \ddot{U} + K U = 0$$

حالت خاص $C=0$

حجاب معوی: $U = \phi \cdot \sin \omega(t-t_0)$

بردار n

فرکانس زاویه‌ای
rad/s

ثابت زمانی

$$\dot{U} = \omega \phi \cos \omega(t-t_0)$$

$$\ddot{U} = -\omega^2 \phi \sin \omega(t-t_0)$$

جایگذاری در رابطه $\rightarrow -\omega^2 \phi M \sin \omega(t-t_0) + K \phi \sin \omega(t-t_0) = 0$

دفعه‌های بالا

$$[K] \{\phi\} = \omega^2 [M] \{\phi\} \quad \text{Eigon value eqn.}$$

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} = 1 & i=j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$$

ϕ eigen vectors are

M -orthonormalize

$$(\omega_1^2, \phi_1)$$

$$(\omega_2^2, \phi_2)$$

\vdots

$$(\omega_n^2, \phi_n)$$

n
جواب
مسائل
eigen
value

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$$

$$[\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}] = \Phi$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} = \Omega^2$$

Zero

$$K \Phi = M \Phi \Omega^2$$

$$\Phi^T K \Phi = \Phi^T M \Phi \cdot \Omega^2$$

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2$$

$$\rho = \Phi$$

$$U(t) = \Phi \cdot X(t)$$

معادله‌های تکان با استفاده از $X(t)$

$$\ddot{X}(t) + \Phi^T \cdot C \cdot \Phi \cdot \dot{X}(t) + \Omega^2 \cdot X(t) = \Phi^T \cdot R(t)$$

$$\text{at } t=0 \quad \begin{cases} \dot{X} = \Phi^T \cdot M \cdot (\dot{U}) \\ \ddot{X} = \Phi^T \cdot M \cdot (\ddot{U}) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{U}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}}_R$$

مثال

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}_K \phi = \omega^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_M \phi$$

تبدیل معادله فوق به معادله

ارزش Eigen-values ω^2 می‌شود. جوابهای زیر حل معادله فوق

$$\text{eigen value: } \omega_1^2 = 2, \quad \omega_2^2 = 5$$

$$\text{eigen vector: } \phi_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{Bmatrix}$$

(Free Vibration)

معادله تکان سیستم با فرض صفر بودن بار خارجی

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{U}(t) + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} U(t) = 0$$

جواب: $U = \phi \sin \omega(t - t_0)$

$$U_1(t) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \sin \sqrt{2}(t - t_0)$$

$$U_2(t) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{Bmatrix} \sin \sqrt{5}(t - t_0^2)$$

ترکیب خطی از جواب ها:

$$U(t) = \alpha \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} \sin \sqrt{2}(t - t_0) + \beta \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{Bmatrix} \sin \sqrt{5}(t - t_0^2)$$

برای معادله اصلی با کوفت میانی:

$$\ddot{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

ω^2

Φ^T

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} \\ -10\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} \\ -10\sqrt{\frac{2}{3}} \end{Bmatrix}$$

این حرکت منتفا ضربه نه با حذف می کند و مائیس ضربه است و تقریبی می کند بلکه محاسبه

محیطی را تبدیل به تمام محاسبه 2 محیطی می کند. اما مثل اول نیست. $C=0$ نیست

در شکل دوم لایه لایه برهم نمی ریزد Superposition تمام در حالت تقاطع نمی درست است

اگر غیر خطی بود. به همین دلیل شیب برای سازه ها کاربرد دارد و در روش تیرینگ

کمتر کاربرد دارد چون هم غیر خطی، هم شیب و هم Damping داریم:

Damping برای: برای در هر mode و در هر جهت فرق دارد به همین علت می توان

1. Friction

از رابطه $C = \int \eta K \eta^T dx$ استفاده کرد.

2. Viscous properties

Material Damping

3. development of plasticity

Geometric Damping

Damping

مکانیزم غالب میرایی در خاک و دانه‌های همان لایه‌ها و لایه‌های مجاور است. این موضوع در خاک و دانه‌ها به شدت فیزیکی و انرژی در اثر انتقال سیال بین دانه‌هاست. این موضوع در خاک و دانه‌ها به شدت فیزیکی و انرژی در اثر انتقال سیال بین دانه‌هاست.

مکانیزم غالب میرایی در خاک و دانه‌های همان لایه‌ها و لایه‌های مجاور است. این موضوع در خاک و دانه‌ها به شدت فیزیکی و انرژی در اثر انتقال سیال بین دانه‌هاست. این موضوع در خاک و دانه‌ها به شدت فیزیکی و انرژی در اثر انتقال سیال بین دانه‌هاست.

مکانیزم غالب میرایی در خاک و دانه‌های همان لایه‌ها و لایه‌های مجاور است. این موضوع در خاک و دانه‌ها به شدت فیزیکی و انرژی در اثر انتقال سیال بین دانه‌هاست. این موضوع در خاک و دانه‌ها به شدت فیزیکی و انرژی در اثر انتقال سیال بین دانه‌هاست.

مکانیزم غالب میرایی در خاک و دانه‌های همان لایه‌ها و لایه‌های مجاور است. این موضوع در خاک و دانه‌ها به شدت فیزیکی و انرژی در اثر انتقال سیال بین دانه‌هاست. این موضوع در خاک و دانه‌ها به شدت فیزیکی و انرژی در اثر انتقال سیال بین دانه‌هاست.

$$[K] = \sum [K_e] = \sum \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e$$

$$[C] = \sum [C_e] = \sum \int_{V_e} [N]^T \alpha [N] dV_e$$

$$[M] = \sum [M_e] = \sum \int_{V_e} [N]^T \rho [N] dV_e$$

Rayleigh Damping

برای ریلی

$$[c] = \alpha [M] + \beta [K]$$

به این نوع میرایی اصطلاحاً Overall Energy dissipation فرمیده.

رابطه ی آلفا و ریلی در واقع اثبات ریاضی ندارد و می توان آن را اثبات کرد. در حالتی که حجم ماصی زیاد باشد ما با با شکل ای می بینیم که حجم کم است. $[K]$ تغییرات غیر خطی شدیدی پیدا می کند.

محلی است جواب خوبی به ما ندهد.

بنابراین میرایی در هر چه سازد سخت تر باشد میرایی سازه سبک تر است که با ولعیت در قضا دلت.

$$C = \alpha m + \beta k$$

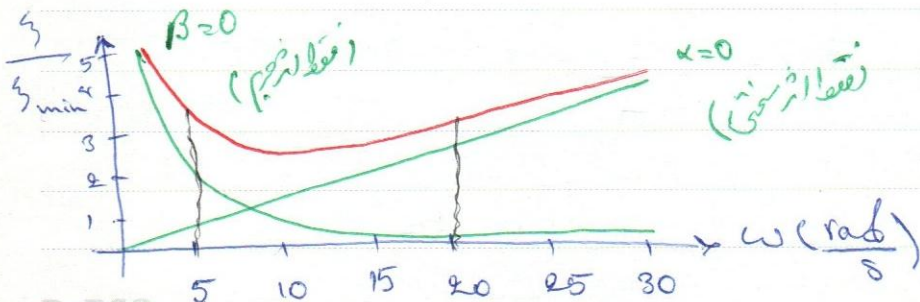
در حالت یک بعدی:

$$\frac{c}{m} = \alpha + \beta \frac{k}{m}$$

$$\xi = \frac{c}{c_e} + \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}}$$

$$2\xi\omega = \alpha + \beta\omega^2$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha}{\omega} + \beta\omega \right]$$



در این ناحیه می توانیم مستقیماً فرکانس در آنجا

Mass proportional Stiffness proportional

الزخمین حازیا دایره Damping حاسیه تابیه سنی است و اگر هم باشد سینه تابیه هم است

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_1} + \beta \omega_1 \right)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_2} + \beta \omega_2 \right)$$

فرکانس غالب بار سیمانی ω_m و در بر سازه رزونانس ارتعاش میخی سیستم ω_n

$$\begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{f_m} & 2\pi f_m \\ \frac{1}{f_n} & 2\pi f_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

$$f_N = \frac{V_s}{4H} (2N-1)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \rho = \frac{\gamma}{g}$$

$$N=1 \rightarrow f_N = \frac{V_s}{4H} = f_n$$

ارتفاع سیمانی

$$N=2 \rightarrow f_N = \frac{3V_s}{4H}$$

و باید در سازه انداز می کرد

$$N=3 \rightarrow f_N = \frac{5V_s}{4H}$$

Impact vibration $\rightarrow f_m = 2-30 \text{ Hz}$
(6-20)

Blast vibration $\rightarrow f_m = 30-50 \text{ Hz}$

Earthquake vib. $\rightarrow f_m = 1.0 - 20 \text{ Hz}$
(2-10)

ξ_m و ξ_n را نیز در زیر بارگاه به دست آورده باید حدودی از پیش داریم:

$\xi_m = \xi_n = 5\%$ رفتار الاستیک خطی

$\xi_m = \xi_n = 2\%$ در تنش های خیلی کوچک

$\xi_m = \xi_n = 10\% - 20\%$ در تنش های بزرگ و در رفتار پلاستیک

$\xi_m = \xi_n = 1\%$ در سازه های بتن و فولاد

$\xi_m = \xi_n = 5\%$ در بتن ترک خورده

هر چه β پایین باشد فرکانس بالا و برعکس

هر چه α بیشتر باشد فرکانس پایین و زمان میر Damp می شوند.

$$\begin{cases} \alpha = 0.01 \\ \beta = 0.001 \end{cases}$$

فرکانس های بالای زمان Damp می شوند:

$$\begin{cases} \alpha = 0.001 \\ \beta = 0.01 \end{cases}$$

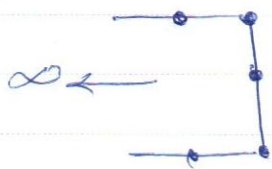
تفاوت کلی روش های ریاضی با روش های عددی

1- ابعادش و امان ها

انفکاس امواج تنش به داخل domain از مرزها یک شکل ایسی در کلی ریاضی است
یک راه حل این است که ابعادش را 2 تا 3 برابر حالت استیک در نظر باید گرفت.
به همین خاطر حجم های سببی با افزایش می یابند. در متأسفانه ابعاد امان ها را نیز می توان بزرگ کرد.

2- راه حل دیگر استفاده از امان های خاص در مرزهای domain استفاده و به گونه ای که سیال و دیگر عایق باشد که دیگر امواج را باز نگرداند

3- استفاده از امان های نیمه بی نهایت است. Semi-infinite elements



4- استفاده از امان های شکست پذیر (المان های جذب) absorbing element

در Free ← quiet element یا مرزهای آرام یا نیمه صاف (viscous boundary)

در مرزهای صاف Dumper قرار داده که باعث شکست این انرژی می شود.

$$\sigma_n = c_1 \rho v_p \cdot u_n$$

در اینجه سطح u_n و u_y است و جهت جابجایی

$$\tau = -c_2 \rho v_s \cdot u_y$$

در اینجه سطح c_1, c_2 Relaxation factors

در اینجه جهت ضربه

معمولاً توصیفی شود $C_1 = 1.0$ $C_2 = 0.25$

با رعایت این کار ویر نیاز به (امان) میانی ثابت و ویلوز وجود ندارد.

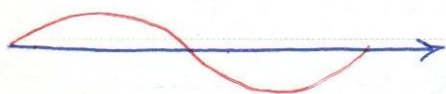
Boundary conditions

تیرها

لبه‌های انحراف

لگام زمانی

خلل دینامیکی



طول موج λ

$$f = (2N - 1) \frac{v_s}{4H}$$

$$N=1 \rightarrow f_1 = \frac{v_s}{4H} \rightarrow 4H = \frac{v_s}{f_1} \rightarrow \lambda = 4H$$

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$\lambda = \frac{v_s}{f}$$

$$\Delta L \leq \frac{\lambda}{10}$$

مثلاً در F_{max} توصیفی کند و طول (امان) ها از $\frac{\lambda}{10}$ کمتر نباشد.

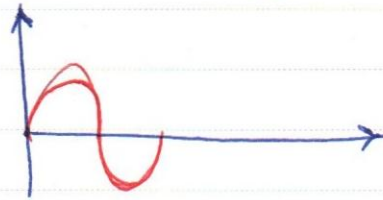
f وابسته به صیف زلزله مورد استفاده ما دارد. هر چه f بزرگتر باشیم λ کوچکتر شده در نتیجه

امان کوچکتر می‌شود و در نتیجه حجم تغییرات تقاضای می‌باشد.

انحراف (امان) ها از یک حدی بیشتر نباشد غنی توان برمی آید فرکانس کم می‌آید یا به عبارتی فیلتری شوند.

امپدانس خاصه طول موج نوسان مایه‌ای در دایره تمام زمانی به طول موج مایه‌ای بستگی دارد

$$\Delta t = \frac{\text{طول موج مایه‌ای}}{\text{سرعت موج مایه‌ای}}$$



$$T = \frac{1}{f}$$

$$\omega_n = \frac{1}{T_n}$$

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{10}$$

مطلوبه باید یک هم برود و انکسار صیقلی ریزه باشد. $\Delta t \leq \frac{1}{80f}$ applied load

$\Delta t \leq \frac{1}{80f}$ همگت های ممکن را جوابگو است اما $\Delta t \leq \frac{1}{20f}$ نیز کافی است.

همین Δt هایی که کوچکتر از 10^{-6} باشد! مشکلات عدسی تولید می شود.

Discontinuities \leftarrow weak strong

مدل سازی عدسی ناپیوستگی ها

خفگی و از ناپیوستگی ضعیف، ناپیوستگی بین فولاد خالص است. یا مثلاً ناپیوستگی بین فولاد خالص یا فولاد با خاک یا خاک خالص. اینجا هیچ کدام ناپیوستگی نیستند ولی تفاوت

مشکلات است که بیان weak Discontinuities فواید اما درصحت strong

جدا شدن مصالح محدودتر است. مثل ترک شکاف در خاک و سنگ

اثر مقیاس در مایوسگی ها ، Fault (گسل) به مفهوم مایوسگی خیلی بزرگ است

مثلاً ۱۵ تا ۲۵ است که اگر بخواهیم این را مدل کنیم باید در تناسب با آن domain

مسئله نیز تقارین دارد. ^{مزره} Joint > Crack > شکاف > Fracture > Fault

Fracture به لحاظ مقیاس از Fault کوچکتر است و در حالتی که گس در ایجاد حرکت بوده

Fracture در حد سانی حرکت است. و کوچکتر از آن ترک است که در حدود cm است.

Joint یا مزره است که ممکن است با چشم غیر مسلح دیده نشود. و کوچکتر از آن

Fissure است که مزره های هسته که با چشم دیده می شود و اکثر خاک ها رسی پرست

کلمه یافته Fissure هست. در واقع از یک حدی ریزتری توان محیط مایوسگی در تقویر گرفت.

Fault > Fracture > crack > joint > Fissure

Smeared approach

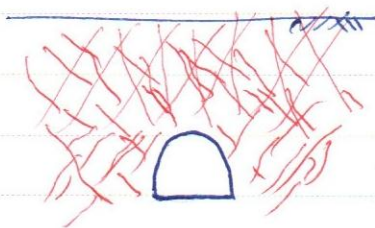
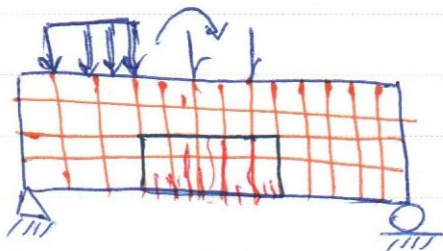
Discrete approach

در مایوسگی محل مسائی ترک ها وجود ندارد. ← توزیع شده

اینکه دلیل برای وقتی قویتر است که تعداد ترک ها زیاد و فاصله ترک ها یکدیگر است باشد. و نحوه توزیع

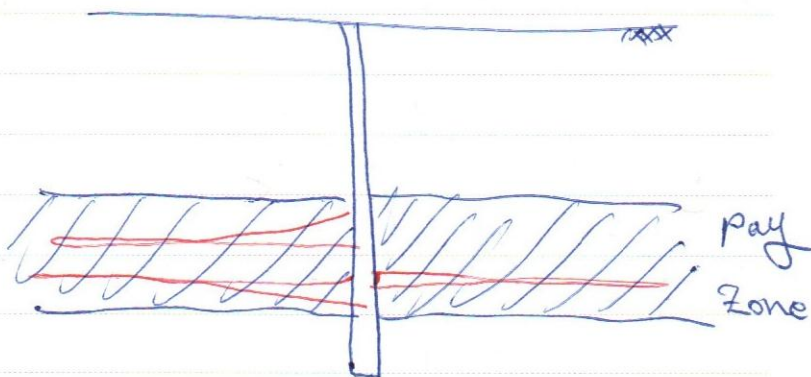
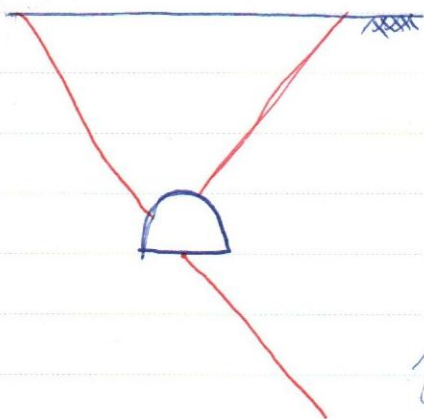
ترک ها در محیط بتواند مایوسگی توزیع آجاری بیان کرد.

در واقع ما قادر نیستیم به تک تک ترک‌ها بپردازیم و باید به صورت یکپارچه به کل محیط ترک‌ها توجه کرد.



در اینجا محدوده‌ی ترک غوره را به صورت یکسره منتهی با مشخصات مکانیکی متفاوت در نظر می‌گیریم. در واقع همه‌ی نواحی را یکسره در نظر می‌گیریم منتهی ناحیه ترک غوره را با مشخصات مکانیکی دیگری در نظر می‌گیریم.

اگر چندین ترک بزرگ و مشخص داشته باشیم که هر کدام از ترک‌ها رفتار جداگانه داشته باشند. نیازی توان نداریم که Smeared استفاده کرد.



در ریلر Discrete محطاً ما ناپیوسته می شود و مشخصات و رفتار ترک برای ما

اهمیت دارد.

1. ترک‌های موجود در محط *Existing / inherent / natural*
 pre-defined cracks
 2. ترک‌های ایجاد شده در محط *induced cracks*

مدل سازی ترک به صورت جزا:

در مورد 1 هندسه ترک ها و مشخصات ترک قابل تعیین است. و در کلیه های عددی خود امکان های خاصی را در مدل ترک ها قرار می دهیم.

در مدل سازی ترک های ایجاد شده کار سخت تری نسبت به ترک های موجود وجود دارد. برای ایجاد ترک باید یک معیاری برای ترک در نظر گرفت که اگر این معیار ارضا شده ترک در محط ایجاد می شود و باید الگوریتمی تعیین کرد تا ترک چگونه گسترش پیدا کند و چگونه متوقف شود.

نوع مدل سازی عددی ترک ها:

- روش های عددی مبتنی بر محط پیوسته: *FEM, FDM, XFEM*
- روش های عددی مبتنی بر محط ناپیوسته: *UDEC, 3DEC, PFC, DEM*

السلع با تغییر پارامترهای شتابی در فرکانسهای مختلف

Transverse isotropy

multi-laminate model

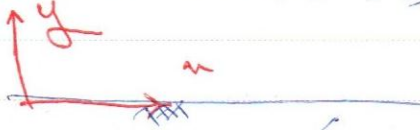
Smeared

لاکورد

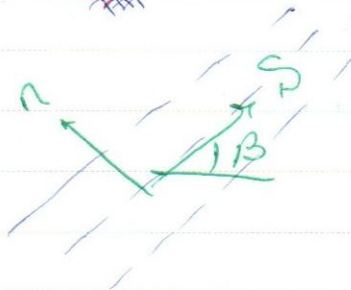
مدل‌های ترکیبی

Transverse isotropy

یعنی در یک جهت یسری پارامترهای داریم و در بقیه طرف دیگر پارامترهای متفاوتی می‌کنیم.



در حالت‌های مختلف E و ν داریم.



اما در این حالت در هر راستا متساوی داریم.

$D_n, E_n, \nu_s, E_s,$

plane strain

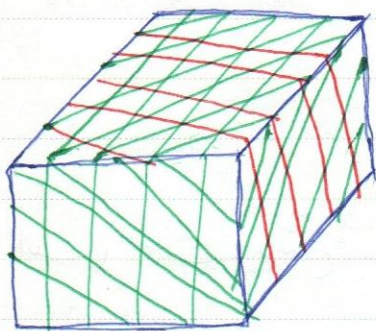
$$D = X \begin{bmatrix} \alpha(1-\alpha\nu_n^2) & \alpha\nu_n(1+\nu_s) & 0 \\ \alpha(1+\nu_s)\nu_n & (1-\nu_s^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_n}{E_n}(1+\nu_s)(1-\nu_s-2\alpha\nu_n^2) \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{E_s}{E_n}, \quad X = \frac{E_n}{(1+\nu_s)(1-\nu_s-2\alpha\nu_n^2)}$$

$$D_{global} = T^T D T$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

multi-laminate model



$$n = 1, 2, 3$$

برای جدایی لایه ها می توان فرجه دار ارائه کرد.

معمولاً گفته می شود که رفتار ماده را در Reek mess

چند نوع است یا Intact است یعنی سالم می توان

در آنجا مشاهده اندازه گیری کرد.

اگر $n=1$ باشد در استای محصور بر یک لایه است Intact فرق ندارد اما در استای یک لایه می

فرق می کند. اگر $n=2$ باشد در استای یک لایه می شود. حال اگر به دو لایه باشد

باشیم. اگر بیشتر از دو لایه باشد باقیم در واقع می ماند یا خورد شده است. وقتی می

کاملاً خورد شده می شود به یک isotrop است.

Reek	Intact \rightarrow isotrop
mess	$n=1 \rightarrow$
	$n=2 \rightarrow$) onisotrop
	$n=3 \rightarrow$
	\rightarrow isotrop خورد شده

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma_n \end{Bmatrix}_1 = [T_1] \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma_n \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

2×6

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma_n \end{Bmatrix}_2 = [T_2] \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma_n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma_n \end{Bmatrix}_n = [T_n] \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma_n \end{Bmatrix}$$

(الف) صفحات نایبیهی کشش کشش تحمل می‌کنند

$$\sigma_n > 0 \longrightarrow (\sigma_n)_{1,2,\dots,n} > 0$$

$$(-\sigma_n)_{1,2,\dots,n} < 0$$

$$F = (-\sigma_n)_{1,2,\dots,n} = 0$$

(ب) حد اکثر مقاومت برشی در صفحات نایبیهی برابر با τ_{max} خواهد بود و کولب تعیین می‌شود.

$$|\tau| < \sigma_n \cdot \tan \phi + c$$

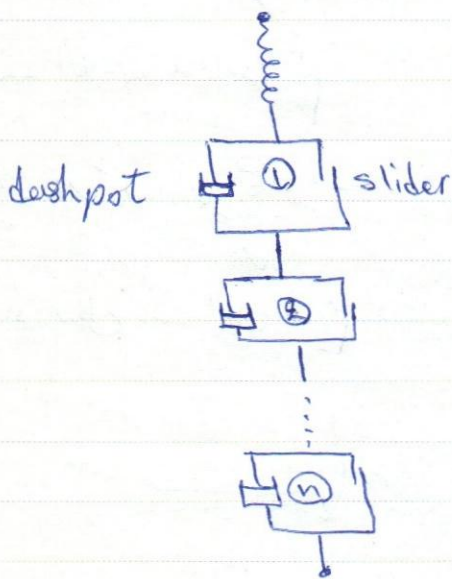
$$|\tau| - \sigma_n \cdot \tan \phi - c < 0$$

$$G = [1 - \sigma_n \cdot \tan \phi - c] = 0$$

1, 2, ..., n

اگر تنش در یک دسته ترک بقیه ترک باز شود دیگر امکان انتقال تنش از این دسته ترک به
امکان پذیر نیست. مثل آنکه عباره بسته شود.

در مدل multi-laminate و yield function $2n-1$ مورد دارد



$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{vp} = \underbrace{D^{-1} \cdot \sigma}_{\text{elastic}} + \int \sum_{i=1}^{n+1} \underbrace{\mu_i \langle F_i \rangle}_{\frac{\partial Q}{\partial \sigma} dt}_{\text{visco-plastic}}$$

Zienkiewicz & Pande (1977)

time-dependent multi-laminate model of rocks - a numerical study of deformation and failure of rock masses.

Int. J. Num. & Anal. methods in Geomechanics

Existing crack ترک موجود
Induced crack ترک ایجاد شده

Discrete رویداد

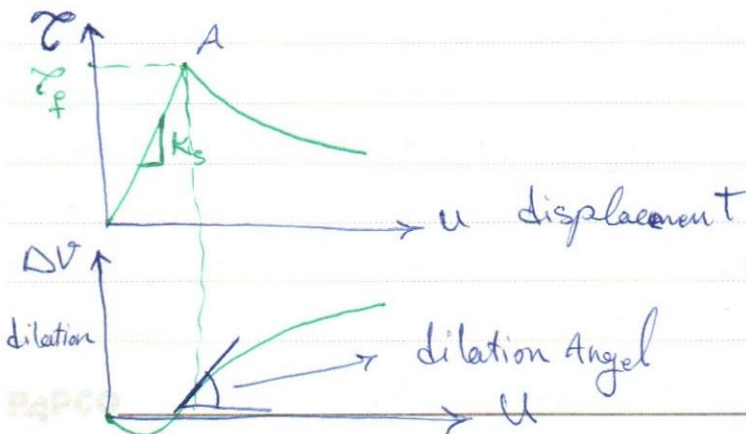
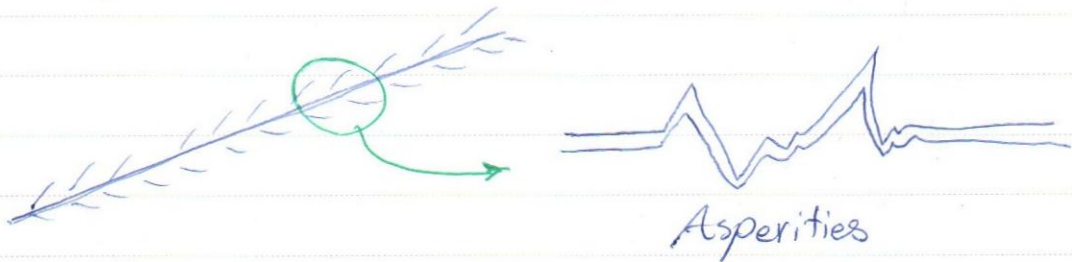
ترک موجود، لازم است در محل ترک ترک ایجاد شود، همان جا خالی جابجایی شود.

Zero-thickness elements 1- المان های با ضخامت صفر

Thin-layer elements 2- المان های با ضخامت کم

ordinary elements 3- استفاده از المان های معمول

اگر در محل ترک المان نداریم در کشش شکل پیش نمی آید ولی اگر فشار وارد شود منحنی هاردنم خوبی دارد.

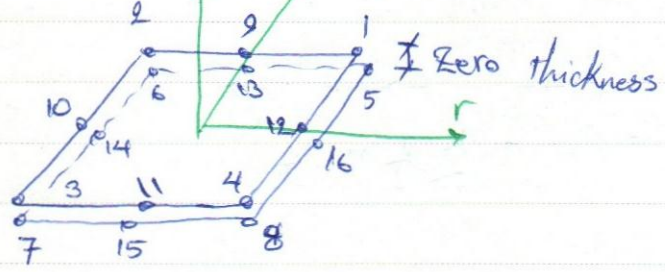


حالت نیم شب است در نقطه A

یعنی در حد آن زمان
dilation Angel

نویسنده

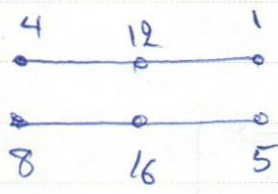
در تحلیل سه بعدی صفحاتی در محل درزه ترک ها با ضخامت صفر قرار می گیرند.



3D Joint Element

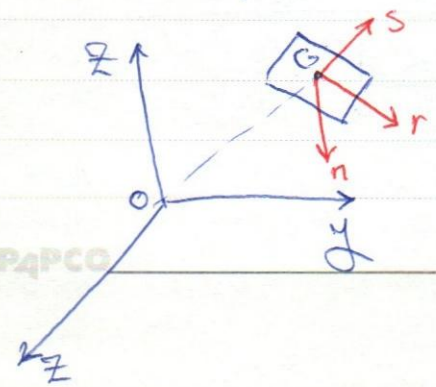
$$\begin{Bmatrix} \chi_r \\ \chi_s \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_r & 0 & 0 \\ 0 & K_s & 0 \\ 0 & 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_r \\ \Delta \delta_s \\ \Delta \delta_n \end{Bmatrix}$$

ماتریس رتار، Joint Element
جابجایی نسبی است و نه کرنش



$$\delta_{top} = \delta_{s1} - \delta_{s5}$$

existing crack (هسته ترک ها معلوم است)
induced cracks (هسته ترک ها نامعلوم است)
تولید ایجاد شده



$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ضخافت
G

$$x = x(r, s) = \sum_{i=1}^m N_i x_i$$

$$y = y(r, s) = \sum_{i=1}^m N_i y_i$$

$$z = z(r, s) = \sum_{i=1}^m N_i z_i$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial x}{\partial s} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial s} \vec{k}$$

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

اگرچه G به اندازه G جابجایی شود.

جابجایی نقطه G		$\delta x, \delta y, \delta z$
δG		$\delta r, \delta s, \delta n$

$$\begin{aligned} \delta \vec{G} &= \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k} \\ \delta \vec{G} &= \delta r \vec{\alpha} + \delta s \vec{\beta} + \delta n \vec{\gamma} \end{aligned}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} = \frac{\left| \frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} \right|}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \right|}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\partial \vec{R} / \partial s}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial s} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial s} \vec{k} \right)}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{n}$$

$$\delta_x \vec{i} + \delta_y \vec{j} + \delta_z \vec{k} = \delta_r \vec{\alpha} + \delta_s \vec{\beta} + \delta_n \vec{\gamma}$$

$$= \delta_r \left(\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} \right) / \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \right|$$

$$+ \delta_s \left(\frac{\partial x}{\partial s} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial s} \vec{k} \right) / \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|$$

$$+ \delta_n (n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k})$$

$$\delta_x \vec{i} + \delta_y \vec{j} + \delta_z \vec{k} = \left(\delta_r \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \right|} + \delta_s \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|} + \delta_n n_x \right) \vec{i} +$$

$$\left(\delta_r \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \right|} + \delta_s \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|} + \delta_n n_y \right) \vec{j} +$$

$$\left(\delta_r \frac{\frac{\partial z}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \right|} + \delta_s \frac{\frac{\partial z}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|} + \delta_n n_z \right) \vec{k}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \right|} & \frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|} & n_x \\ \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \right|} & \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|} & n_y \\ \frac{\frac{\partial z}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \right|} & \frac{\frac{\partial z}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right|} & n_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial r \\ \partial s \\ \partial n \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta_{xyz}\} = [J] \{\delta_{rsn}\}$$

$$\{\delta_{rsn}\} = [J] \{\delta_{xyz}\}$$

تبدیل مؤلفه‌های غیر جتان این Joint در سیستم مختصات:

top

$$\begin{aligned} \delta_{x(T)} &= \sum_{i=1}^4 N_i \delta_{x_i} + \sum_{i=9}^{12} N_i \delta_{x_i} \\ \delta_{y(T)} &= \sum_{i=1}^4 N_i \delta_{y_i} + \sum_{i=9}^{12} N_i \delta_{y_i} \\ \delta_{z(T)} &= \sum_{i=1}^4 N_i \delta_{z_i} + \sum_{i=9}^{12} N_i \delta_{z_i} \end{aligned}$$

Bottom

$$\begin{aligned} \delta_{x(B)} &= \sum_{i=5}^8 N_i \delta_{x_i} + \sum_{i=9}^{16} N_i \delta_{x_i} \\ \delta_{y(B)} &= \sum_{i=5}^8 N_i \delta_{y_i} + \sum_{i=9}^{16} N_i \delta_{y_i} \\ \delta_{z(B)} &= \sum_{i=5}^8 N_i \delta_{z_i} + \sum_{i=9}^{16} N_i \delta_{z_i} \end{aligned}$$

جابجایی مؤلفه‌های T جابجایی مؤلفه‌های B

$$\begin{Bmatrix} \Delta \delta_r \\ \Delta \delta_s \\ \Delta \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{rsn} \end{Bmatrix}_T - \begin{Bmatrix} \delta_{rsn} \end{Bmatrix}_B = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_{xyz} \end{Bmatrix}_T$$

$$- [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_{xyz} \end{Bmatrix}_B =$$

$$= [\delta^{-1}] \begin{cases} \sum_{i=5}^8 N_i \delta m_i + \sum_{i=13}^{16} N_i \delta m_i - \sum_{i=1}^4 N_i \delta m_i - \sum_{i=9}^{12} N_i \delta m_i \\ \sum_{i=5}^8 N_i \delta y_i + \sum_{i=13}^{16} N_i \delta y_i - \sum_{i=1}^4 N_i \delta y_i - \sum_{i=9}^{12} N_i \delta y_i \\ \sum_{i=5}^8 N_i \delta z_i + \sum_{i=13}^{16} N_i \delta z_i - \sum_{i=1}^4 N_i \delta z_i - \sum_{i=9}^{12} N_i \delta z_i \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \delta_r \\ \Delta \delta_s \\ \Delta \delta_n \end{Bmatrix} = [\delta]^{-1} \begin{bmatrix} -N_1 & \dots & -N_2 & \dots & \dots & \dots & -N_{16} & \dots \\ 0 & -N_1 & 0 & 0 & -N_2 & 0 & \dots & 0 & -N_{16} & 0 \\ 0 & 0 & -N_1 & 0 & 0 & -N_2 & \dots & 0 & 0 & -N_{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta m \\ \delta y \\ \delta z \\ \vdots \\ \delta m_{16} \\ \delta y_{16} \\ \delta z_{16} \end{Bmatrix}$$

B

$$\begin{Bmatrix} \Delta \delta_r \\ \Delta \delta_s \\ \Delta \delta_n \end{Bmatrix} = [B] \{ \delta \}$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1+r)(1+s) - \frac{1}{2} N_9 - \frac{1}{2} N_{12}$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1+r)(1+s) - \frac{1}{2} N_9 - \frac{1}{2} N_{10}$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1-r)(1-s) - \frac{1}{2} N_{10} - \frac{1}{2} N_{11}$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1+r)(1-s) - \frac{1}{2} N_{11} - \frac{1}{2} N_{12}$$

$$N_5 = \frac{1}{4} (1+r^2)(1+s) - \frac{1}{2} N_{13} - \frac{1}{2} N_{16}$$

$$N_9 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s) = N_{13}$$

$$N_{10} = \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2) = N_{14}$$

$$N_{11} = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) = N_{15}$$

$$N_{12} = \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2) = N_{16}$$

طابق
مستطی

$$[K] = \int_{\Omega} ([B]^T [c] [B]) dA$$

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [c] [B] \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right| dr ds$$

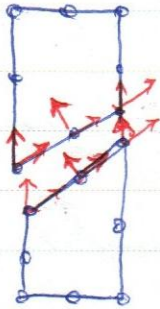
181

Desai : thin layer

Constitutive laws

- contact
- sliding
- debonding

Hermann / Goodman : Zero-thickness
Desai : thin-layer
ordinary } interface



induced cracks : ←
۱- میخار آغاز ترک
۲- وضعیت مش بعد از شروع ترک عرضی
۳- نیاز/عدم نیاز به جبران لایه لایه ترک

میخارهای ترک‌خیز / مقاومت جمع ← مقاومت کششی / حوضه کشش /
هرک بریلین ...
میخارهای مکانیک شکست ← Fracture mechanics
Fracture toughness K_{Ic}
... , cohesive cracks

باید برای میخار برای ترک در نظر بگیریم

Existing cracks

ترک های موجود

میدانازی عسی

ترک ها

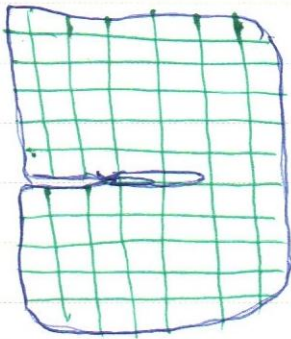
* معیار آغاز ترک

* تغییرات من بعد از ترک خودی

* قرار دادن المان ها interface مناسب در محل ترک ها

ترک های بوجود آمده

Induced cracks



از مجموعه به وضعیت تنش ترک ، من تغییر مهم به آن

Adaptive Mesh گونید

از به جایی چرخش المان ها از المان ها جایی جایی از استقامت

شود می توان ترک را به صورت پدید می آید این در حالی است

که مطابق واقعیت و نوع است به علت از کردن

منش ها حجم و اسات بیشتری شود

F.E.M

میرفت لا تعین می کنیم

المان است که با شبکه از شکل (المان) می آید

مشکل دیگر F.E.M این است که یک دره تبدیل به دوره می شود که این یک مشکل است

یک راه حل این است که از همان ابتدا به جایی یک دره به المان دوره به یک تقاطع معرفی کنیم که به آن

Node splitting گونید

2D Modeling {
I. Tensile Mode
II. In-plane shear Mode
III. out-of-plane shear mode (Tearing Mode)

مورد ترک
در مکانیک
نسبت

در مجموع می توان این نتیجه را گرفت که FEM برای مدل سازی ترک روش مناسبی نیست!
روش هایی که مبتنی بر پیوستگی هستند در مدل سازی ترک مشکل دارند.
بنابراین XFEM ابداع شده که اکنون بعد از 25 سال از ابداع آن یکی از پرطرفدارترین روش ها در مدل سازی ترک حالت.

یک راه حل دیگر استفاده از DEM است مثل نرم افزار UDEC یا 3DEC
یا بعضی نرم افزارها به صورت دانه ای در تفرقی کننده مثل PFC
در این روش ها محیط را از لابل به صورت بلوک بلوک در تفرقی می کنیم.

$$[K]\{U\} = \{R\}$$

حل ازی عددی معادله های همبسته:

تکالیف خارج حل حل عددی معادله تعادل بدیم. معادله تعادل، معادله لامل بقای انرژی مستقیم خطی است.
در حقیقت از سبب اهل معادله تعادل به تقیابی برای حالتی می گذد. به طور مثال حل مسئله شکم

Consolidation

نشت با خروج آب هبته هستند. یعنی تغییر شکل مایع خروج آب تأثیر دارد و خروج آب مایع تغییر شکل. بنابراین در حل مسئله یکم معادله تعادل به تنهایی کفایت نمی کند.

حل مسئله یکم } Consolidation
معادله تعادل
معادله پیوستگی حرکت سیال در محیط متخلخل

هر وقت خواستیم دو معادله به صورت همزمان حل کنیم به آن هیدرو مکانیکال گوئیم. HM

حل مسئله انتقال حرارت در خاک } معادله تعادل
معادله لایر مورد نیاز در محیط های متخلخل TM

حل مسائل THM که هر سه پدیده مکانیکی، هیدرولیکی و مکانیکی باید حل شود مثل انرژی پدیده در داخل خاک که اشباع یا خنثی خازن با آب جوی می باشد تأثیرات متغیر در خاک اشباع

حل مسائل CTHM، اثرات شیمیایی محیط اشباع تحت اثر حرارت
لتغزاش مسائل هبته
Coupled problems

- | | |
|--|--------------------------------|
| ۱- دریاچه‌های پرده به صورت هفتان اتفاق می‌افتد. | } ویژگی‌های
پرده‌ها
مهمه |
| ۲- پرده‌های هفتان در هم تأثیر متقابل داشته باشند. | |
| ۳- از تأثیر پرده‌ها روی عمیق قابل صرف نظر این نباشد. | |

در diagonal of نرم یا جلات غیر قطری صفر نبود دستگاه مهمه دست و پا نمی‌زنند مهمه
نیت

Subject _____

Date _____